

Table des matières

1. Introduction	01
2. Définitions	01
2.1. Fluide Newtonien	01
2.2. Fluide non-Newtonien	01
2.3. Fluide incompressible	02
2.4. Fluide compressible	02
2.5. Fluide parfait	02
2.6. Fluide réel	02
2.7. Particule fluide	02
2.8. Grandeurs cinématiques attachées à une particule fluide	03
2.8.1. Position	03
2.8.2. Vitesse	03
2.8.3. Accélération	03
3. Description d'un écoulement	04
3.1. Description de Lagrange	04
3.2. Description d'Euler	04
4. Ligne et tube de courant et ligne d'émission	05
4.1. Ligne de courant	05
4.2. Tube de courant	06
4.3. Ligne d'émission	06
4.4. Equation des lignes de courant	06
5. Trajectoire	06
5.1. Equations des trajectoires	07
6. Notions d'écoulement	08
6.1. Ecoulement permanent	08
6.2. Ecoulement permanent en moyenne:	08
6.3. Écoulement uniforme	08
6.4. Ecoulement plan	08
7. Dérivée particulaire	09
7.1. Accélération :	10
7.2. Champ des vitesses	10
8. Tenseur de rotation et tenseur de taux de déformation	10
9. Théorèmes de transport	14
9.1. Volumes et surfaces de contrôle	14
9.2. Formulation des théorèmes de transport	14
9.3. Théorème de transport pour un champ vectoriel	15
9.4. Formes alternatives des théorèmes de transport	15
10. Équation de continuité : conservation de la masse	16
10.1. Forme intégrale de l'équation de continuité	17
10.2. Forme différentielle	17
10.3. Cas particuliers	18
10.3.1. Cas du fluide incompressible	18
10.3.2. Régime permanent	19
11. Fonction de courant	19
11.1. Propriétés de la fonction de courant	20
11.2. Débit et lignes de courant	22

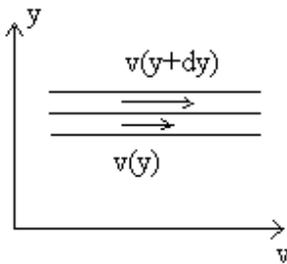
11.3. Fonction de courant d'un écoulement tridimensionnel:	23
12. Notion de circulation.....	23
13. Écoulements irrotationnels et potentiel des vitesses.....	24
13.1. Ecoulement irrotationnel	24
13.2. Fonction potentielle	24
13.3. Fonction potentielle et circulation	25
13.4. Propriétés du potentiel des vitesses.....	25
14. Ecoulement rotationnel et vecteur tourbillon.....	27
14.1. Ligne tourbillon.....	27
14.2. Tube tourbillon.....	27
14.3. Filet tourbillon :	28
14.4. Le vortex	28
15. Ecoulement potentiel avec circulation.....	28
16. Ecoulement isovolume et rotationnel	29
17. Ecoulement isovolume et irrotationnel	29
18. Exemples d'écoulements plans stationnaires:	29
18.1. Ecoulement plan rectiligne uniforme.....	30
18.2. Ecoulement plan source ou puits.....	31
18.3. Vortex- fil tourbillonnaire	33
19. Potentiel complexe des vitesses et exemples d'écoulements plans	35
19.1. Fonctions analytiques	35
19.2. Fonction holomorphe	35
19.3. Potentiel complexe des vitesses.....	35
19.4. Vitesse complexe	36
19.5. Potentiel complexe de quelques écoulements plan élémentaires	37
19.5.1. Écoulement uniforme.....	37
19.5.2. Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits.....	38
19.5.3. Vortex ou tourbillon libre.....	39
19.6. Superposition des écoulements potentiels	40
19.6.1. Doublet	40
19.6.2. Dipôle	42
20. Références	44
Annexe	45

1. Introduction

La cinématique des fluides est la description analytique d'un fluide en mouvement. On s'intéressera aux mouvements des fluides par rapport au temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est-à-dire sans avoir recours au calcul des forces mises en jeu au sein d'un écoulement mais plutôt d'accéder à une description qualitative (et dans une certaine mesure quantitative) de l'écoulement en terme de trajectoires, vitesses et évolutions spatio-temporelles.

2. Définitions

2.1. Fluide Newtonien



Entre deux couches successives de fluides à vitesses $v(y)$ et $v(y+dy)$, il existe des contraintes tangentielles à l'écoulement qui accélèrent la couche la plus lente et ralentissent la couche la plus rapide..

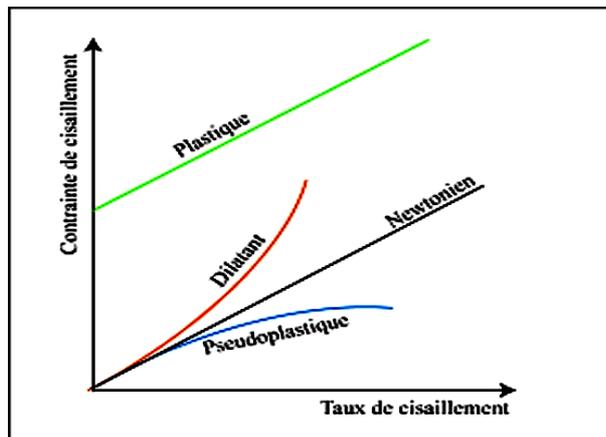
On appelle **fluides newtoniens**, les fluides pour lesquelles ces forces obéissent à la loi générale :

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y}$$

2.2. Fluide non-Newtonien

Les fluides qui n'ont pas un comportement Newtonien sont qualifiés de **non-newtonien**, dont la viscosité peut varier en fonction de la contrainte mécanique qu'on lui applique, ou du temps pendant lequel est appliquée cette contrainte.

Dans le cas de fluides non-newtoniens, il n'y a pas de proportionnalité entre la contrainte tangentielle et le gradient de vitesse. C'est le cas des solutions de polymères, des purées de légumes, des gels, des boues, des pâtes, du sang, des peintures,... L'étude de ces fluides relève de **la rhéologie**.



2.3. Fluide incompressible

Un fluide est dit **incompressible** lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. La masse volumique ρ (kg/m^3) est constante (eau , huile ...).

2.4. Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. La masse volumique ρ est variable. Les gaz sont des fluides compressibles.

2.5. Fluide parfait

Dans un fluide parfait, les forces de contacts sont perpendiculaires aux éléments de surfaces sur lesquelles elles s'exercent (il présente une viscosité nulle).

2.6. Fluide réel

Dans un fluide réel, il existe des forces (tangentiels) élémentaires qui s'opposent au mouvement. On les appelle forces visqueuses ou de **viscosité**.

Remarque: Un fluide réel au repos, peut être considéré comme parfait.

2.7. Particule fluide

C'est l'entité élémentaire choisie pour permettre une description complète des écoulements. Il s'agit d'un « **paquet de molécules** » entourant un point M donné de l'espace fluide. Ces molécules sont alors supposées avoir toutes la même vitesse à chaque instant.

Au sein d'un fluide occupant le volume Ω , considérons un très petit volume $\Delta\Omega$ de fluide. On introduit trois longueurs : le diamètre a des molécules, une longueur d caractéristique du volume $\Delta\Omega$ (par exemple, le diamètre de $\Delta\Omega$ si $\Delta\Omega$ est une sphère, la plus grande distance entre deux points de $\Delta\Omega$ si $\Delta\Omega$ est quelconque, . . .), une longueur L caractéristique du volume Ω de fluide. Une particule fluide est le petit volume $\Delta\Omega$ si : $a \ll d \ll L$.

2.8. Grandeurs cinématiques attachées à une particule fluide

2.8.1. Position

On considère une particule fluide, et on suit cette particule dans son mouvement par rapport au repère orthonormé direct (O, x, y, z) dont les vecteurs unitaires des trois axes sont \vec{e}_x, \vec{e}_y et \vec{e}_z .

À l'instant $t = t_0$, la particule fluide occupe la position $\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0)$. À un instant t quelconque, la particule fluide occupe la position $\vec{x}(t) = (x, y, z)$. Par définition : $\vec{OM}_0 = \vec{x}_0$ et $\vec{OM} = \vec{x}(t)$.

Nous écrivons que la position, à l'instant t , de la particule fluide qui occupait la position \vec{x}_0 à l'instant t_0 , est donnée par : $\vec{x}(t) = \vec{F}(\vec{x}_0, t_0, t)$, c'est-à-dire :

$$x = f(\vec{x}_0, t_0, t), \quad y = g(\vec{x}_0, t_0, t), \quad z = h(\vec{x}_0, t_0, t)$$

où l'on a utilisé la notation condensée \vec{x}_0 pour (x_0, y_0, z_0) . Ainsi on a :

$$f(\vec{x}_0, t_0, t) = f(x_0, y_0, z_0, t_0, t)$$

2.8.2. Vitesse

A chaque instant t on peut définir, en tout point de l'espace, un vecteur \vec{V} qui représente la vitesse, à l'instant t , de la particule fluide qui occupait la position \vec{x}_0 à l'instant t_0 .

Cette vitesse est donnée par : $\vec{V} = \frac{\partial \vec{F}}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0, t)$

$$\text{c'est-à-dire : } u = \frac{\partial f}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0, t), \quad v = \frac{\partial g}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0, t), \quad w = \frac{\partial h}{\partial t}(\vec{x}_0, t_0, t)$$

où l'on a noté : $\vec{V} = u\vec{e}_x + v\vec{e}_y + w\vec{e}_z$

2.8.3. Accélération

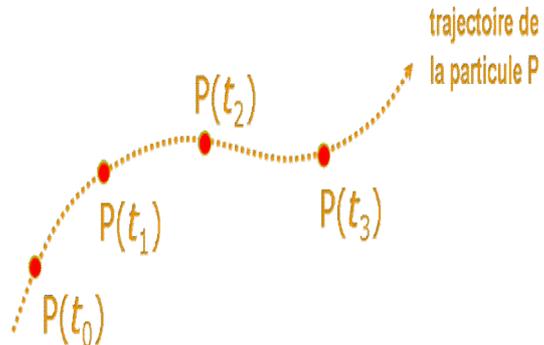
L'accélération, à l'instant t , de la particule fluide qui occupait la position \vec{x}_0 à l'instant t_0 , est donnée par :

$$\vec{a} = \frac{\partial^2 \vec{F}}{\partial t^2}(\vec{x}_0, t_0, t)$$

3. Description d'un écoulement

3.1. Description de Lagrange

Il s'agit d'une description de l'écoulement qui consiste à suivre dans l'espace fluide la position d'une particule choisie en fonction du temps. Il en découle la définition de la « trajectoire » d'une particule fluide : c'est l'ensemble des positions occupées successivement par une même particule (voir figure ci-contre).



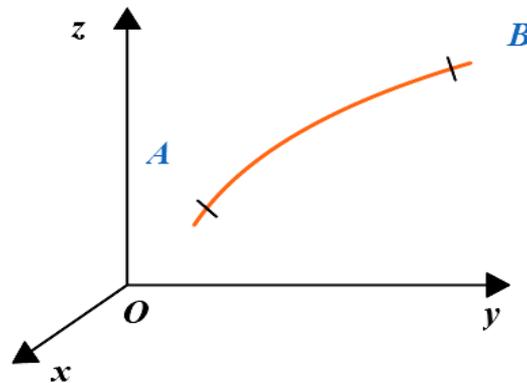
Soient $A(a, b, c)$ les coordonnées d'une particule de fluide à l'instant t_0 dans le repère $(0, x, y, z)$. Les coordonnées indépendantes (a, b, c, t) sont appelées variables de Lagrange.

La position de la particule à l'instant t est $M(x, y, z, t)$. Le mouvement du fluide est connu si on a les relations :

$$\begin{cases} x = f_1(a, b, c, t) \\ y = f_2(a, b, c, t) \\ z = f_3(a, b, c, t) \end{cases}$$

La vitesse de la particule aura pour composantes:

$$u = \frac{dx}{dt}, v = \frac{dy}{dt}, w = \frac{dz}{dt}$$

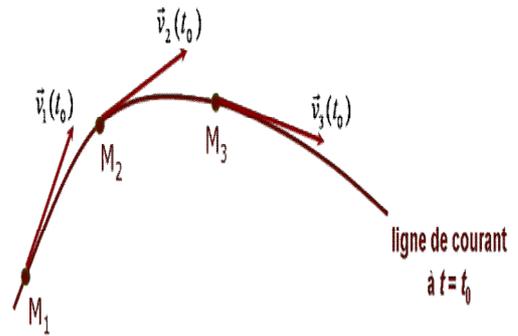


Au cours du temps, la particule sera en différents points M , l'ensemble des points M constitue la trajectoire de la particule. Cette façon de faire est appelée méthode de Lagrange, les variables introduites sont appelées variables de Lagrange. Elle s'avère dans la plupart des cas délicate car il n'est pas facile de suivre toutes les particules et elle est peu employée.

3.2. Description d'Euler

C'est une description de l'écoulement qui consiste à établir à un instant t donné l'ensemble des vitesses associées à chacun des points de l'espace fluide. Ainsi, à chaque point M est associé une vitesse $\vec{V}_M(t)$ susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement du fluide est alors décrit au moyen d'un ensemble de vecteurs vitesse appelé « champ de vecteurs vitesse ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée.

Sur la base de ce champ de vecteurs vitesse, on définit comme « **ligne de courant** » la courbe qui en chacun de ses points est tangente au vecteur vitesse (voir figure ci-contre). Au même titre que le champ de vecteurs vitesse, il s'agit donc d'une représentation au sein l'espace fluide susceptible d'évoluer dans le temps ; en conséquence, on prendra soin de dater les lignes de courant ainsi définies (ligne de courant passant par tel point à l'instant t).



Dans le repère (O,x, y, z) le vecteur vitesse a pour composantes :

$$\vec{V}(x, y, z) \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Le point de vue d'Euler est plus commode pour l'expérimentateur, car on se place en un point $M(x, y, z)$ du fluide et on étudie les variations des grandeurs physiques (par exemple la vitesse) à des instants différents.

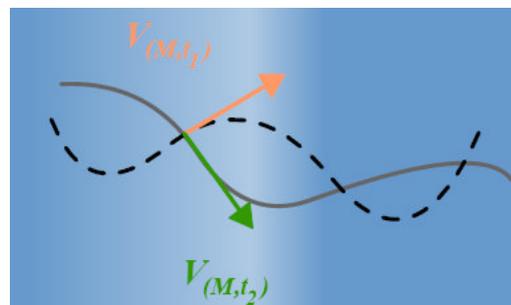
Attention : Il ne faut pas confondre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions fondamentalement différentes. En effet, si initialement (à $t = t_0$) une particule occupe un point M_0 , elle se dirigera naturellement dans la direction donnée par la ligne de courant passant par M_0 à t_0 , mais à $t_1 > t_0$ cette même particule se trouvera en un point M_1 appartenant à une ligne de courant définie à t_1 et qui n'a a priori aucune raison d'être identique à celle définie à t_0 . Les deux courbes divergent donc dès que $t > t_0$.

Remarque : Les deux descriptions, Euler et Lagrange, sont complémentaires et permettent souvent la conjugaison de deux approches différentes pour décrire un même écoulement. Pour faire une analogie avec le domaine de l'image et de la vidéo, il serait opportun de comparer la description d'Euler à un « **arrêt sur image** » d'une vidéo, et d'associer la description de Lagrange à une photo prise avec un temps de pose très long (**photo de nuit**).

4. Ligne, tube de courant et ligne d'émission

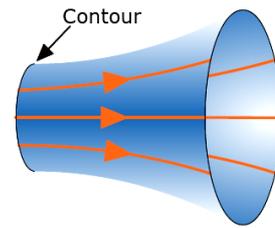
4.1. Ligne de courant

On appelle ligne de courant, toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement.



4.2. Tube de courant

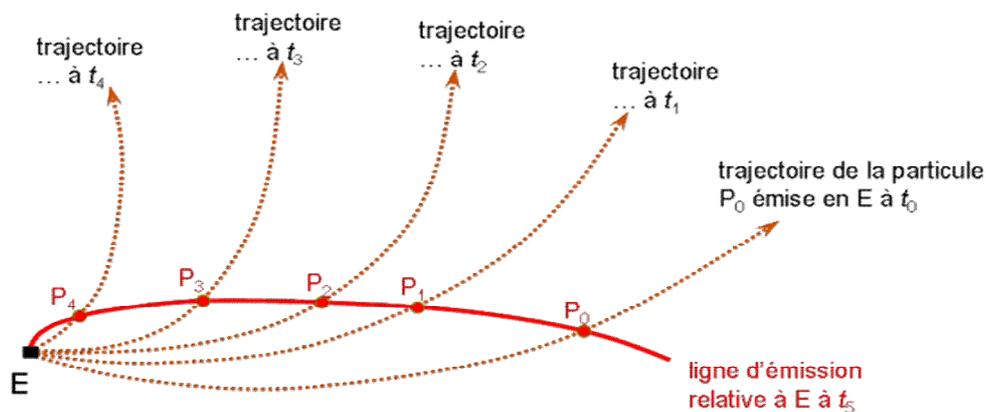
On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.



Tube de courant relatif au contour

4.3. Ligne d'émission

Toutes les particules étant passées par un même point E sont situées à l'instant t sur une courbe appelée « ligne d'émission » relative au point E à l'instant t . La figure ci-dessous explicite cette définition qui n'a a priori rien de très intuitif. Toutefois, il s'agit d'une courbe qu'il est souvent très facile de mettre en évidence expérimentalement : l'exemple le plus explicite étant la source colorante au sein d'un écoulement de fluide translucide, où le filet coloré ainsi produit correspond à une ligne d'émission.



4.4. Equation des lignes de courant

Relativement à un repère orthonormé, l'équation différentielle de toute ligne de courant s'écrit :

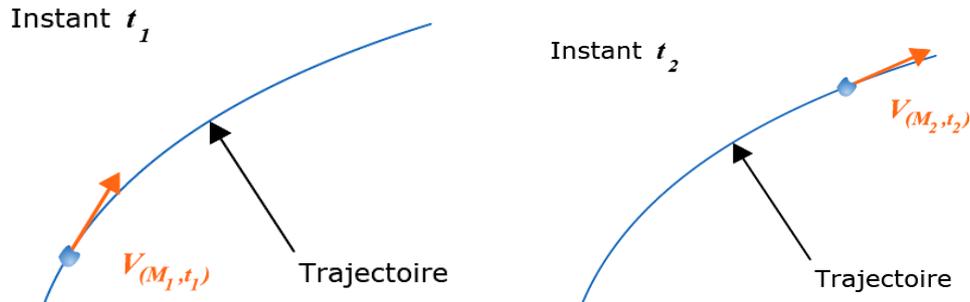
$$\frac{dx}{u(x,y,z,t)} = \frac{dy}{v(x,y,z,t)} = \frac{dz}{w(x,y,z,t)} \quad (1)$$

$u(x,y,z,t)$, $v(x,y,z,t)$ et $w(x,y,z,t)$ sont les composantes de la vitesse dans le repère considéré. Dans cette relation, le temps est fixé.

5. Trajectoire

C'est la courbe décrite au cours du temps par une particule de fluide quelconque du champ d'écoulement. La différence avec la notion de ligne de courant est que pour cette

dernière, on considère des particules différentes au même instant tandis que la trajectoire est relative à une même particule à des instants différents.



5.1. Equations des trajectoires

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont données par :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t) \\ \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t) \\ \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t) \end{cases} \quad (2)$$

Dans ces équations, le temps est devenu une variable.

Exercice 01 : On étudie un écoulement bidimensionnel dans le plan d'un fluide dont le champ

des vitesses est $\vec{V} = \begin{cases} v_0 \\ at \end{cases}$, avec v_0 et a des constantes.

1. Déterminer l'équation des lignes de courant pour un instant t .
2. Donner l'équation de la trajectoire de la particule de fluide initialement située à l'origine O du repère.
3. Montrer qu'en un point donné, à un instant donné, les lignes de courant et les trajectoires sont tangentes.
4. Envisager l'écoulement stationnaire $\vec{V} = \begin{cases} v_0 \\ a \end{cases}$: que dire des lignes de courant et des trajectoires dans ce cas ?

Exercice 02 : Un écoulement est défini par les composantes du vecteur vitesse :

$$\vec{V} = \begin{cases} u_0 \\ v_0 + at \end{cases}. \text{ Représenter les lignes de courant et les trajectoires des particules fluides.}$$

6. Notions d'écoulement

6.1. Écoulement permanent (ou stationnaire)

On dit qu'un écoulement est permanent si le champ des vitesses, la pression, la masse volumique en chaque point ne dépendent pas du temps.

Les conséquences sont multiples :

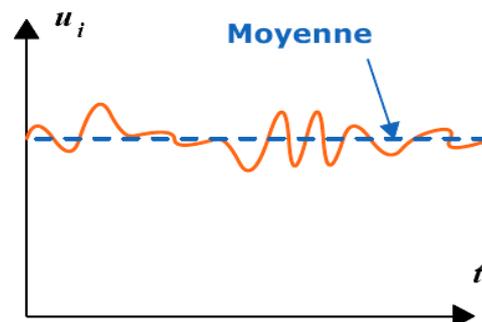
- les lignes de courant sont aussi statiques ;
- les trajectoires coïncident avec les lignes de courant ;
- les lignes d'émission coïncident également avec les lignes de courant.

Il n'y a donc plus aucune dépendance explicite avec le temps et les courbes précédemment définies et fondamentalement différentes coïncident dans l'espace fluide.

6.2. Écoulement permanent en moyenne

Très souvent, les grandeurs physiques décrivant le fluide dépendent du temps mais restent constantes en moyenne.

$$\bar{u}_i = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u_i dt = cste \quad (T \text{ grand}) \quad (3)$$



6.3. Écoulement uniforme

L'écoulement du fluide est uniforme si ses composantes de vitesse sont indépendantes des coordonnées d'espace; il est non-uniforme si cette condition n'est pas remplie.

Remarque: Le lecteur s'évitera de conclure que, dans un écoulement uniforme, la particule fluide n'a pas d'accélération.

6.4. Écoulement plan

Si la vitesse n'a pas de composante suivant z , l'écoulement est plan ou bi-dimensionnel. Les particules fluides restent dans le plan, et la vitesse ne dépend en général que de (x, y) et du temps t .

7. Dérivée particulaire ; Taux de variation d'une grandeur matérielle

Soit f la fonction de point (scalaire, vectorielle ou tensorielle) d'une grandeur matérielle.

Considérons la fonction scalaire $f(x, y, z, t)$ rendant compte d'une grandeur physique caractéristique du fluide au point de coordonnées (x, y, z) et au temps t .

La particule fluide au temps $t + dt$ sera au point de coordonnées $(x + dx, y + dy, z + dz)$. La variation de la fonction f (différentielle totale) sera donc égale à :

$$df = f(x + dx, y + dy, z + dz) - f(x, y, z, t) = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (4)$$

Le taux de variation de f lorsqu'on suit une particule dans son mouvement est obtenu en dérivant f par rapport au temps. Désignons par $\frac{df}{dt}$ ce taux de variation :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

où apparaissent les composantes du vecteur vitesse définies par : $(u, v, w) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$. On peut donc écrire finalement :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} u + \frac{\partial f}{\partial y} v + \frac{\partial f}{\partial z} w \quad (5)$$

Qui définit la **dérivée particulaire** que l'on note aussi $\frac{Df}{Dt}$ d'une grandeur matérielle; soit encore:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\overline{\text{grad} f}) \vec{V} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \vec{V} \quad (6)$$

dans le cas d'un vecteur :

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + (\overline{\text{grad} \vec{A}}) \vec{V} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \overline{\nabla \vec{A}} \cdot \vec{V} \quad (7)$$

Cette dérivée apparaît comme la somme de deux termes :

- le premier, qualifié de **temporel**, est du au caractère instationnaire de l'écoulement.

- le second, qualifié de **convectif** ou **advectif**, est du à la non-uniformité de l'écoulement,

Les relations de définition (6) et (7) peuvent être exprimées sous une forme unique en définissant l'opérateur scalaire $\overline{V} \cdot \overline{grad}$; on écrira donc l'opérateur dérivée particulaire de façon symbolique :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\overline{V} \cdot \overline{grad}) = \frac{\partial}{\partial t} + (\overline{V} \cdot \nabla). \quad (8)$$

7.1. Accélération

L'accélération en point P est la dérivée particulaire du vecteur vitesse en ce point, soit d'après (8)

$$\frac{d\overline{V}}{dt} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + (\overline{V} \cdot \overline{grad})\overline{V} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + (\overline{V} \cdot \nabla)\overline{V} \quad (9)$$

Autre écriture: En utilisant une égalité vectorielle, on obtient :

$$\vec{a} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \frac{1}{2} \overline{grad V^2} + \overline{rot V} \wedge \overline{V} \quad (10)$$

Interprétation physique : $\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}$ est appelé accélération locale, ce terme traduit la non permanence de l'écoulement, il est nul pour un écoulement permanent. $(\overline{V} \cdot \nabla)\overline{V} = \frac{1}{2} \overline{grad V^2} + \overline{rot V} \wedge \overline{V}$: est l'accélération convective, ce terme traduit la non uniformité de l'écoulement.

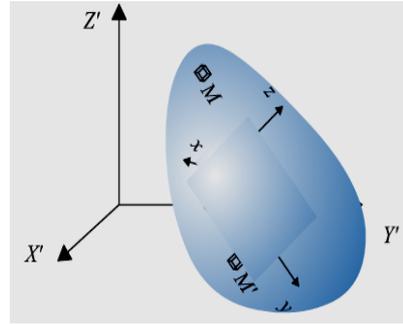
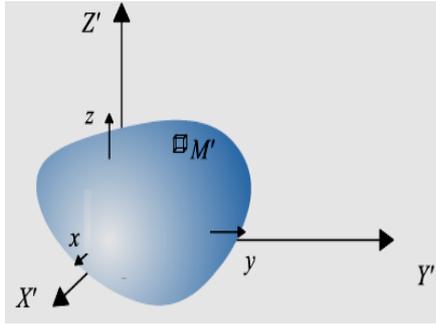
7.2. Champ des vitesses

Au cours du mouvement, une particule de fluide subit des changements de position, d'orientation et de forme. Nous considérons deux points voisins $M(x, y, z)$ et $M'(x + dx, y + dy, z + dz)$ d'un même fluide, leurs vitesses sont $\overline{V}(M)$ et $\overline{V}(M')$ respectivement.

8. Tenseur de rotation et tenseur de taux de déformation

Soit un élément de volume $d\Omega$ et deux points M et M' infiniment voisins. Dans le repère (O, x, y, z) les coordonnées de M et M' sont :

$$M(x, y, z) \quad \text{et} \quad M'(x+dx, y+dy, z+dz)$$



Les coordonnées de la vitesse sont : $\vec{V}_M \begin{pmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{pmatrix}$ et $\vec{V}'_M \begin{pmatrix} u(x + dx, y + dy, z + dz) \\ v(x + dx, y + dy, z + dz) \\ w(x + dx, y + dy, z + dz) \end{pmatrix}$

On a alors :

$$\vec{V}'_{M'} = \vec{V}(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \vec{V}_M(\vec{x}, t) + d\vec{V} \quad (11)$$

$d\vec{V}$: Accroissement de vitesse.

Nous allons simplement exprimer les coordonnées de la vitesse en M' en utilisant la formule des accroissements finis. Par exemple pour la composante suivant x :

$$u(x + dx, y + dy, z + dz, t) = u(x, y, z, t) + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \quad (12)$$

En général :

$$v_i(M') = v_i(M) + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx_j \quad (13)$$

v_i représente une composante de la vitesse au point M'

Sous forme vectorielle, on peut écrire :

$$\vec{V}'_M = \vec{V}_M + (\overline{MM'} \cdot \nabla) \vec{V}_M \quad (14)$$

Ces expressions s'écrivent sous forme matricielle :

$$\vec{U}'_{M'} = \vec{U}_M + \overline{\text{grad}}(\vec{U}) \overline{MM'} \quad (15)$$

En notant $\overline{\overline{G}} = \overline{\text{grad}} \vec{V}$ le tenseur gradient des vitesses, on écrira:

$$\vec{V}_{M'} = \vec{V}(\vec{x} + d\vec{x}, t) = \vec{V}_M(\vec{x}, t) + \overline{\overline{G}} d\vec{x} \quad (16)$$

$$\overline{\overline{gradV}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (17)$$

En décomposant la matrice des gradients de vitesse $\overline{\overline{gradV}}$ en sa partie symétrique et anti-symétrique, ces relations peuvent se réécrire sous la forme suivante :

$$\overline{\overline{gradV}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}}_{\text{Tenseur déformation (symétrique)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{pmatrix}}_{\text{Tenseur rotation (antisymétrique)}} \quad (18)$$

Les termes diagonaux $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}$: Elongation (ou contraction) pure.

$$\overline{\overline{G}} = \overline{\overline{D}} + \overline{\overline{\Omega}} \quad (19)$$

$\overline{\overline{D}}$: Tenseur des taux de déformations pures (élongation + déformation angulaire)

$\overline{\overline{\Omega}}$: Tenseur des taux de rotations pures

Avec :

$$G_{ij} = \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \quad (20)$$

Et :

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) ; \quad D_{ij} = D_{ji} \quad (21)$$

$$\text{Et : } \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) ; \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji} \quad (22)$$

On peut en effet remarquer que :

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \right) & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (23)$$

Où :

$$\Omega \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}V} \quad (24)$$

Par conséquent :

$$\overrightarrow{\Omega dr} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Omega_z dy + \Omega_y dz \\ \Omega_z dx - \Omega_x dz \\ -\Omega_y dx + \Omega_x dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \quad (25)$$

Finalement :

$$d\overrightarrow{V} = \overrightarrow{G} MM' = \overrightarrow{D} MM' + \overrightarrow{\Omega} MM' = \overrightarrow{D} MM' + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \quad (26)$$

Pour mettre en évidence la signification physique des différents termes, écrivons la vitesse sous la forme :

$$\overrightarrow{V}'_M = \overrightarrow{V}_M + \overrightarrow{D} MM' + \overrightarrow{\Omega} \wedge \overrightarrow{MM'} \quad (27)$$

\overline{V}_M : Représente une translation d'ensemble de l'élément de volume

\overline{DMM}' : Représente la déformation de l'élément de volume

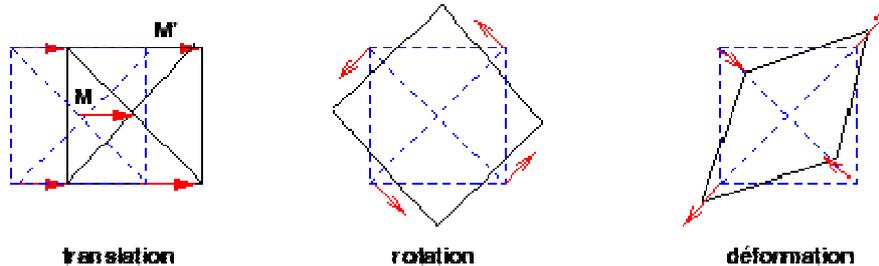
$\overline{\Omega} \wedge \overline{MM}'$: Est le moment par rapport à M' du vecteur $\frac{1}{2} \overline{rotV}_M$; c'est la répartition des vitesses lors d'une rotation en bloc de l'élément de volume autour d'un axe passant par M

soit sous forme vectorielle

$$\overline{V}_{M'} = \underbrace{\overline{V}_M}_{\text{translation}} + \underbrace{\overline{\Omega} \wedge \overline{MM}'}_{\text{rotation}} + \underbrace{\overline{D}}_{\text{déformation}} \quad (28)$$

Où $\overline{\Omega} = \frac{1}{2} \overline{rotV}$ est le vecteur tourbillon instantané et \overline{D} la vitesse de déformation instantanée.

D'une manière générale, le mouvement d'une particule fluide est la superposition d'une translation, d'une rotation et d'une déformation.



Remarque : si \overline{D} , le taux de déformation est nul et l'on se ramène au cas du solide parfait indéformable (ou au cas d'un milieu déformable en équilibre absolu relatif).

9. Théorèmes de transport

9.1. Volumes et surfaces de contrôle

Un **volume de contrôle** est un volume imaginaire sur lequel on procède au bilan intégral d'une grandeur physique comme la masse, la quantité de mouvement ou encore l'énergie. On appelle **surface de contrôle** l'enveloppe d'un volume de contrôle.

9.2. Formulation des théorèmes de transport

Soit un volume de contrôle arbitraire Ω limité par l'enveloppe fermée S . Soient $f(\vec{x}, t)$ une fonction scalaire continue et dérivable et $I(t)$ son intégrale sur le volume Ω .

$$I(t) = \iiint_{\Omega} f(\vec{x}, t) dV$$

Le taux de variation dans le temps de l'intégrale de $I(t)$ est donné par :

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} f d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial t} d\Omega + \iint_{SC} f (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (29)$$

où \vec{V} désigne la vitesse locale de la surface de contrôle et \vec{n} la normale extérieure à la surface. La relation (29), appelée parfois **règle de Leibnitz**, s'interprète de la façon suivante:

Taux de variation de l'intégrale de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $\mathcal{V}_a(t)$	=	Intégrale de la variation temporelle de $f(\vec{x}, t)$ sur le volume $\mathcal{V}_a(t)$	+	Flux de $f(\vec{x}, t)$ à travers l'enveloppe $\mathcal{S}_a(t)$
--	---	--	---	--

9.3. Théorème de transport pour un champ vectoriel

Le théorème de transport se généralise immédiatement au cas d'une fonction vectorielle $\vec{A}(\vec{x}, t)$. Il suffit de considérer le transport de chacune des composantes. On obtient de façon évidente:

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \vec{A} dV = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} d\Omega + \iint_S \vec{A} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (30)$$

9.4. Formes alternatives des théorèmes de transport

Le second membre du théorème de transport peut être mis sous la forme d'une intégrale de volume. Il suffit d'utiliser la formule de **Green-Ostrogradski** :

$$\iint_S f (\vec{V} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{\Omega} \text{div} (f \vec{V}) d\Omega \quad (31)$$

On obtient:

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} f d\Omega = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \text{div} (f \vec{V}) \right) d\Omega \quad (32)$$

L'intégrale du second membre peut être transformée en utilisant l'identité :

$$\text{div} (f \vec{V}) = f \cdot \text{div} (\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} f \quad (33)$$

et en introduisant la dérivée particulaire :

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f} \quad (34)$$

On écrira donc:

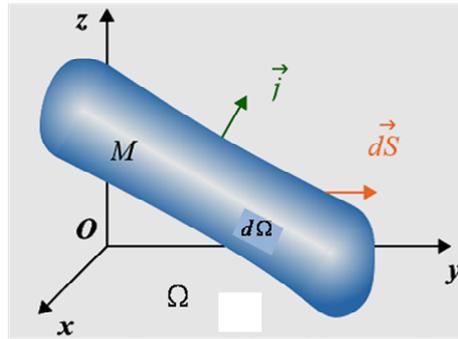
$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} f d\Omega = \iiint_{\Omega} \left(\frac{df}{dt} + f \text{div}(\vec{V}) \right) d\Omega \quad (35)$$

10. Équation de continuité; conservation de la masse

Soit un volume Ω de fluide limité par une surface S de masse volumique ρ . Soit \vec{dS} un vecteur élémentaire de cette surface, orienté vers l'extérieur à la surface fermée.

La partie de fluide contenue dans Ω a une masse $m = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega$, le débit massique sortant de

la surface S est égal à $\oiint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = \oiint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS$.



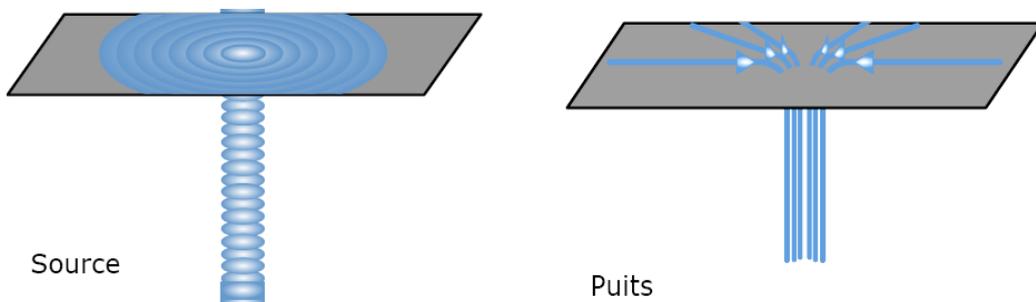
La conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{dm_s}{dt} - \oiint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega \quad (36)$$

où $\frac{dm_s}{dt} = \rho q'$ représente le débit massique de fluide interne au volume considéré, compté positivement s'il s'agit d'une source et négativement s'il s'agit d'un puits.

q' représente débit massique de production (en s^{-1})

$q' > 0$, représente une source et $q' < 0$ un puits.



10.1. Forme intégrale (globale) de l'équation de continuité

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = \frac{dm_s}{dt} \quad (37)$$

Compte tenu du théorème d'Ostrogradsky : $\iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = \iiint_{\Omega} \text{div}(\rho \vec{V}) d\Omega$

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right) d\Omega = \frac{dm_s}{dt} \quad (38)$$

Ecoulement conservatif : sans production de fluide

$$\iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \iint_S \rho \vec{V} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (39)$$

Et :

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) \right) d\Omega = 0 \quad (40)$$

10.2. Forme différentielle (locale)

On considère que dans le volume Ω il n'y a pas de discontinuité et que l'élément de volume est quelconque, l'équation (40) implique donc :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad (41)$$

L'intégrale du second membre peut être transformée en utilisant l'identité :

$$\text{div}(f \vec{V}) = f \cdot \text{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f} \quad (42)$$

et en introduisant la dérivée particulaire : $\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\text{grad}f}$

On écrira donc :

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (43)$$

Cette équation représente la forme locale du principe de conservation de la masse.

Remarque : L'équation de conservation de la masse peut être obtenue en écrivant les formulations génériques (32) ou (35) (théorème de transport) pour $f(\vec{x}, t) = \rho$ et

$$I(t) = m = \iiint_{\Omega} \rho d\Omega .$$

Pour un écoulement conservatif (sans production de masse), $\frac{dm}{dt} = 0$

Forme intégrale :

$$\frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \iiint_{\Omega} \rho d\Omega = \iiint_{\Omega} \frac{\partial \rho}{\partial t} d\Omega + \iint_S \rho(\vec{V} \cdot \vec{n}) dS \quad (44)$$

Forme différentielle :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0 \quad \text{Ou} \quad \frac{d\rho}{dt} + \rho \text{div}(\vec{V}) = 0 \quad (45)$$

10.3. Cas particuliers

En absence de source ou de puits, soit $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{V}) = 0$, deux cas particuliers sont alors à considérer :

10.3.1. Cas d'un fluide incompressible

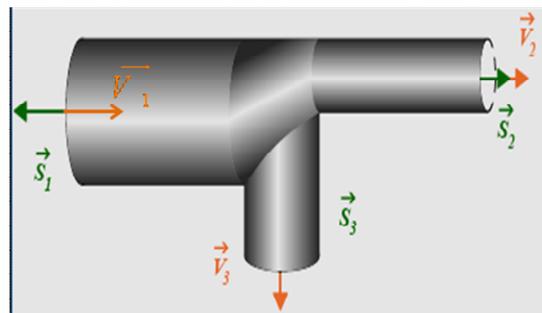
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ et } \rho = cst$$

On obtient : $\text{div}(\vec{V}) = 0$

Donc, le flux de la vitesse à travers une surface fermée est nul

$$\iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{V}) d\Omega = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{dS} = 0 \quad (46)$$

L'équation représente la conservation du débit en volume pour un fluide incompressible.



Régime permanent

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \text{ d'où : } \operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{V}) = 0 = \rho \operatorname{div}(\vec{V}) + \vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho \quad (47)$$

En dehors de la possibilité **cas 1**, il existe la possibilité d'écoulements **isovolumes** tels que $\vec{V} \cdot \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho = 0$ où les variations de masse volumique sont orthogonales, en tout point, au vecteur vitesse. Ce cas correspond à des écoulements **stratifiés** par salinité ou température (courants marins), par température et humidité (atmosphère).

L'équation obtenue indique que le flux de $\rho \vec{V}$ à travers une surface fermée est nul

$$\iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\rho \vec{V}) d\Omega = \iint_S \rho \vec{V} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (48)$$

Cette équation signifie donc la conservation du débit massique.

Exercice 03 : Pour un écoulement les composantes u , v et w du vecteur vitesse et la

densité ρ sont données par : $u = \frac{x}{1+t}$, $v = w = 0$, $\rho = \frac{\rho_0}{1+t}$, $\rho_0 = \text{constante}$

- Vérifier l'équation de continuité.
- Calculer la masse totale et le taux de variation temporel de la masse à l'intérieur d'un volume de contrôle cylindrique de section S et limité par les plans $x = 1$ et $x = 3$.
- Déterminer le flux de masse traversant le volume de contrôle. Comparer avec le résultat trouvé en b).

11. Fonction de courant

Considérons l'écoulement conservatif d'un fluide incompressible. Dans ce cas, l'équation de continuité se formule simplement par : $\operatorname{div}(\vec{V}) = 0$. Par ailleurs, quelle que soit la quantité vectorielle \vec{A} , en tout point de l'espace la relation mathématique $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{A}) = 0$ doit être vérifiée. Donc, par identification, on peut définir en tout point de l'espace le vecteur vitesse comme résultant de $\vec{V} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \operatorname{rot} \vec{A}$, où \vec{A} peut alors être qualifié de « **potentiel vecteur** ». La connaissance de ce potentiel vecteur en tout point de l'espace permet donc d'en déduire les trois composantes du vecteur vitesse en ce même point :

$$\vec{V} = \overrightarrow{rot} \vec{A} = \begin{pmatrix} u = \partial A_z / \partial y - \partial A_y / \partial z \\ v = \partial A_x / \partial z - \partial A_z / \partial x \\ w = \partial A_y / \partial x - \partial A_x / \partial y \end{pmatrix} \quad (49)$$

Considérons maintenant que l'écoulement est bidimensionnel, dans le plan (\vec{e}_x, \vec{e}_y) , impliquant que $w = 0$ et qu'il y ait invariance par translation suivant z , d'où $\frac{\partial}{\partial z} = 0$. Il reste alors :

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} u = \partial A_z / \partial y \\ v = -\partial A_z / \partial x \\ w = 0 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Dans ces conditions, on note que chaque vecteur vitesse est défini au moyen de seulement deux composantes et que celles-ci dérivent d'une seule composante parmi les trois du potentiel vecteur. On peut donc en conclure que le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement plan dérive d'une quantité scalaire, la fonction de courant $\psi(x, y) = A_z$. La connaissance de cette seule fonction de courant permet alors d'en déduire le champ de vecteurs vitesse en tout point de l'écoulement, par simple application de :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (51)$$

Remarque : Dans un système de coordonnées cylindriques, la démarche reste la même et conduit à définir $\psi(r, \theta)$ pour exprimer les composantes cylindriques du vecteur vitesse comme :

$$\begin{cases} v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (52)$$

11.1. Propriétés de la fonction de courant

Partant de la fonction de courant pour définir le vecteur vitesse, l'équation de continuité appliquée dans le cadre d'un écoulement plan et conservatif d'un fluide incompressible permet d'établir une propriété remarquable de la fonction de courant :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0$$

d'où :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial x} \quad (53)$$

On en déduit par conséquent que $d\psi$ est une **différentielle totale exacte** et que $d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy$ possède une seule et unique primitive. En pratique, lorsqu'on intègre $d\psi$ d'un point A à un point B du plan, le résultat de l'intégration ne dépend donc pas du chemin suivi entre ces deux points :

$$\int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A = \psi(x_B, y_B) - \psi(x_A, y_A) \quad (54)$$

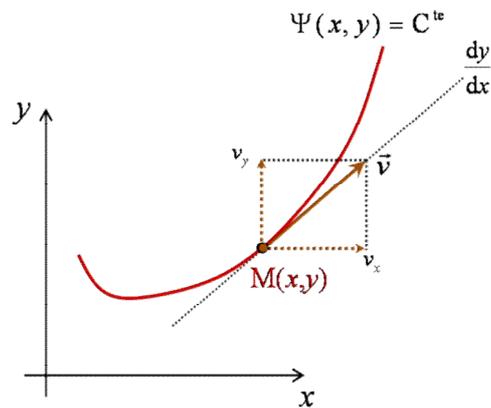
Dans le plan de l'écoulement, l'ensemble des points pour lesquels la fonction de courant renvoie une valeur constante définit une courbe particulière : il s'agit d'une courbe le long de laquelle $d\psi = 0$, où doit être vérifié : $\frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = 0$. Or, puisque $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et

$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$, on peut écrire : $-v dx + u dy = 0$, ce qui signifie qu'en chaque point de cette courbe, doit être vérifié :

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} \quad (55)$$

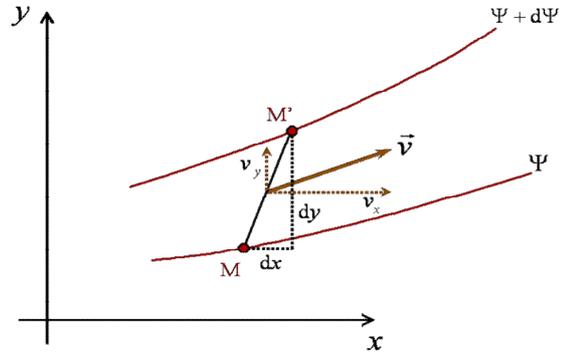
Ce qui représente la définition d'une ligne de courant selon la description d'Euler.

Autrement dit, la tangente à la courbe est en tout point identique à l'orientation du vecteur vitesse (voir **figure**). Une courbe qui présente cette propriété est alors une courbe que l'on a déjà définie comme étant une ligne de courant. Il en résulte que **la fonction de courant est constante le long d'une ligne de courant**.



11.2. Débit et lignes de courant

Considérons, au sein d'un écoulement plan, deux lignes de courant infiniment voisines (figure ci-contre) et caractérisées par des fonctions de courant dont les constantes sont infiniment proches : ψ et $\psi + d\psi$. Considérons par ailleurs deux points M et M' appartenant à chacune de ces deux lignes de courant et donnons nous pour objectif de calculer le débit volumique de l'écoulement à travers le segment $[MM']$. Il s'agit d'un débit élémentaire qui peut se décomposer en considérant la somme des débits traversant les projections selon x et y du segment MM' . On a ainsi :



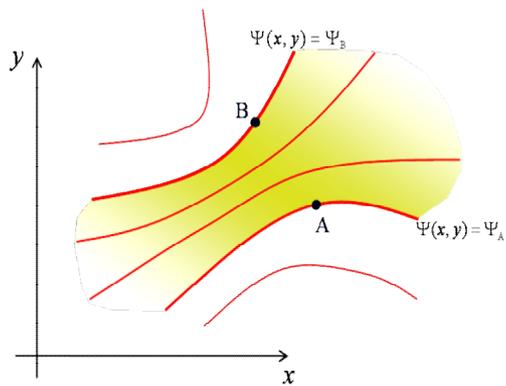
$$dq_v = udy - vdx$$

où le signe (-) rend compte du fait que le débit à travers dx contribue négativement au débit global. Or, les composantes de la vitesse peuvent se formuler en fonction des dérivées partielles de la fonction de courant : $u = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$; on obtient alors cette nouvelle formulation du débit élémentaire :

$$dq_v = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (56)$$

On vient ainsi de montrer que $dq_v = d\psi$.

Évidemment, l'intérêt de cette équivalence est qu'il est possible de calculer simplement le débit volumique de fluide s'écoulant entre deux lignes de courant quelconques en intégrant $d\psi$ entre deux points quelconques A et B appartenant à chacune de ces deux lignes (figure ci-contre) :



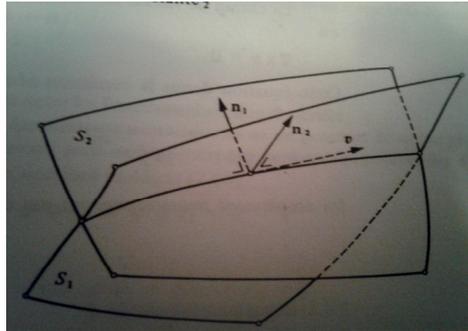
$$q_v = \int_A^B dq_v = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A \quad (57)$$

11.3. Fonction de courant d'un écoulement tridimensionnel

Une ligne de courant particulière de l'espace peut être relevée par l'intersection de deux surfaces de courant $S1$ et $S2$ (voir figure ci-dessous). Considérons un repère cartésien où deux surfaces $S1$ et $S2$ sont données par deux fonctions

$$S1 : \psi_1(x, y, z) = cst_1$$

$$S2 : \psi_2(x, y, z) = cst_2$$



La ligne d'intersection entre deux surfaces de courant $S1$ et $S2$ définit une ligne de courant particulière dans l'espace tridimensionnel.

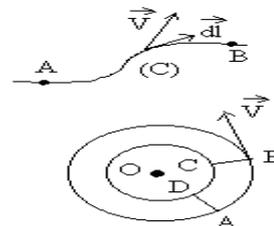
Exercice 04 : Un fluide incompressible s'écoule autour d'un axe de symétrie Oz ; sa fonction de courant est $\psi = -ar^2z$.

- Dessiner quelques lignes de courant dans un plan rz d'un système de coordonnées cylindriques.
- Déterminer la vitesse $\vec{V} = (v_r, 0, v_z)$ en tout point de l'écoulement.
- Montrer que cet écoulement est irrotationnel et déterminer le potentiel des vitesses.
- Calculer le débit passant à l'intérieur du tube de courant défini par $\psi_1 = cste$.
- Décrire la situation expérimentale décrite par cet écoulement.

12. Notion de circulation

La circulation de fluide est une conception très utile dans le traitement des problèmes de cinématique des fluides, en particulier, dans l'analyse aérodynamique.

Par définition, la circulation du vecteur vitesse suivant une courbe est égale à :



$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (58)$$

\vec{V} vecteur vitesse tangent à la ligne de courant en ce point

$d\vec{l}$: l'élément d'arc orienté de la courbe (vecteur tangent à (c) en un point M)

Remarque : notons que la circulation élémentaire $d\Gamma$ s'écrit : $d\Gamma = \vec{V} \cdot d\vec{l}$

Pour une courbe fermée :

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} \quad (59)$$

13. Écoulements irrotationnels et potentiel des vitesses

13.1. Ecoulement irrotationnel

Un écoulement est qualifié d'irrotationnel lorsque les particules fluides ne subissent pas de rotation pure, autrement dit quand le tenseur des rotations pures $\overline{\overline{\Omega}}$ est nul. Rappelons que ce tenseur antisymétrique est constitué des composantes du vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$ et qu'en conséquence ce dernier doit être nul en tout point de l'écoulement :

$$\overline{\overline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\Omega_z & \Omega_y \\ \Omega_z & 0 & -\Omega_x \\ -\Omega_y & \Omega_x & 0 \end{pmatrix} = \overline{\overline{0}} \Rightarrow \vec{\Omega} = \begin{pmatrix} \Omega_x \\ \Omega_y \\ \Omega_z \end{pmatrix} = 0 \quad (60)$$

Puisque le vecteur tourbillon n'est autre que le rotationnel du vecteur vitesse $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{rot}(\vec{V})$, il en résulte qu'un écoulement irrotationnel doit vérifier : $\overrightarrow{rot}(\vec{V}) = 0$.

Fonction potentielle

Quelle que soit la fonction scalaire ϕ , la relation mathématique $\overrightarrow{rot}(\overrightarrow{grad}\phi) = 0$ est toujours vraie. Donc, par identification de \vec{V} avec $\overrightarrow{grad}\phi$, on peut définir le champ de vecteurs vitesse d'un écoulement à partir de la seule fonction scalaire ϕ , que l'on nommera désormais potentiel des vitesses.

Cette propriété a pour conséquence $\vec{V} = \overrightarrow{grad}\phi$: le vecteur vitesse \vec{V} dérive d'une fonction potentiel ϕ . L'écoulement est dit à potentiel des vitesses ou plus simplement écoulement potentiel.

Il en résulte que les composantes du vecteur vitesse s'expriment en fonction des dérivées partielles du potentiel des vitesses :

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (61)$$

Remarque : Un écoulement irrotationnel est un écoulement à potentiel des vitesses et réciproquement.

13.2. Fonction potentielle et circulation

La circulation du vecteur vitesse s'écrit donc :

$$\Gamma = \int_{(C)} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{(C)} \overrightarrow{\text{grad}} \phi \cdot d\vec{l} = \int_A^B d\phi = \phi(B) - \phi(A) \quad (62)$$

La circulation du vecteur vitesse est indépendante du chemin suivi pour un écoulement potentiel.

Sur la base des mêmes hypothèses que celles posées pour définir la fonction de courant, supposons que l'écoulement soit conservatif en plus d'être irrotationnel : dans ces conditions, on doit vérifier l'équation de continuité sous sa forme : $\text{div}(\vec{V}) = 0$; ce qui conduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \Delta \phi = 0 \quad (63)$$

On en conclut que le potentiel des vitesses doit vérifier l'équation de *Laplace*.

Remarque : Si l'écoulement est irrotationnel, la fonction de courant doit également vérifier l'équation de *Laplace*. En effet, on a :

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} \partial\psi/\partial y \\ -\partial\psi/\partial x \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \Rightarrow \Delta \psi = 0 \quad (64)$$

13.3. Propriétés du potentiel des vitesses

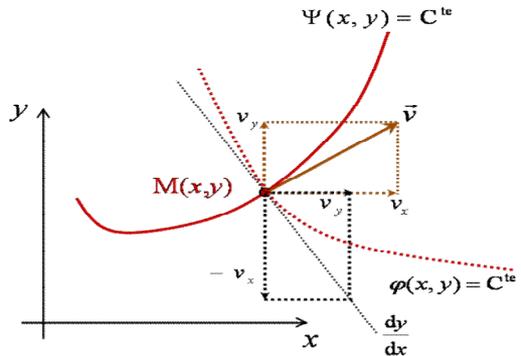
Au sein d'un écoulement plan, l'équation $\phi(x, y) = cst$ définit une courbe qu'on nommera « équipotentielle ». Le potentiel des vitesses étant constant le long d'une telle courbe, on

doit vérifier $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = 0$. Or,

$u = \frac{\partial\phi}{\partial x}$ et $v = \frac{\partial\phi}{\partial y}$, d'où : $udx + vdy = 0$ devant

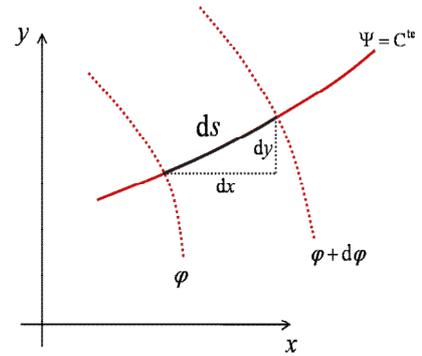
être vérifiée en tout point de l'équipotentielle. Autrement formulé, on a :

$$\frac{dx}{v} = -\frac{dy}{u} \quad (65)$$



Ce qui signifie qu'en chacun de ses points, la courbe est orthogonale au vecteur vitesse (voir figure ci-contre). Il en résulte par ailleurs que les équipotentiellees sont partout orthogonales aux lignes de courant. La figure illustre cette propriété à partir d'un exemple d'écoulement plan où les lignes de courant sont représentées en traits pleins et les équipotentiellees en traits pointillés.

La signification physique de ces équipotentiellees se comprend à travers le calcul de la longueur d'un élément d'arc le long d'une ligne de courant entre deux équipotentiellees (voir figure ci-contre). Si les deux équipotentiellees sont infiniment proches, on peut considérer que leurs deux constantes respectives diffèrent d'une quantité élémentaire $d\phi$ (l'une est de constante ϕ , l'autre de constante $\phi + d\phi$). Si on note ds la longueur de l'élément d'arc, il peut se décomposer en $ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$.



Par ailleurs, on a déjà établi que $d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = udx + vdy$, avec localement le

long de la ligne de courant $\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}$, d'où $dy = \frac{v}{u}dx$ et donc

$d\phi = udx + \frac{v^2}{u}dx = \frac{u^2 + v^2}{u}dx = \frac{V^2}{u}dx$. On obtient de même $d\phi = \frac{V^2}{v}dy$, et on en

déduit que : $dx = \frac{u}{V^2}d\phi$ et $dy = \frac{v}{V^2}d\phi$. Ainsi, la longueur de l'élément d'arc se reformule :

$$ds = \sqrt{\left(\frac{u}{V^2}d\phi\right)^2 + \left(\frac{v}{V^2}d\phi\right)^2} = \sqrt{\frac{u^2 + v^2}{V^4}}d\phi \quad (66)$$

soit :

$$ds = \frac{d\phi}{V} \quad (67)$$

Ce résultat permet de statuer sur le fait que la distance entre deux équipotentielle est inversement proportionnelle à la vitesse locale de l'écoulement. L'exemple de la figure précédente illustre bien qu'en choisissant un écart $\Delta\phi$ constant entre les équipotentielles tracées, un resserrement de celles-ci traduit une accélération de l'écoulement, alors qu'à l'inverse un espacement traduit une décélération. On comprend alors l'intérêt de représenter, en plus des lignes de courant, les équipotentielles qui permettent d'avoir une vision complète de l'écoulement en terme d'évolution spatiale des vitesses.

Exercice 04 : Un fluide incompressible s'écoule autour d'un axe de symétrie Oz ; sa fonction de courant est $\psi = -ar^2z$.

- a. Dessiner quelques lignes de courant dans un plan rz d'un système de coordonnées cylindriques.
- b. Déterminer la vitesse $\vec{V} = (v_r, 0, v_z)$ en tout point de l'écoulement.
- c. Montrer que cet écoulement est irrotationnel et déterminer le potentiel des vitesses.
- d. Calculer le débit passant à l'intérieur du tube de courant défini par $\psi_1 = cste$.
- e. Décrire la situation expérimentale décrite par cet écoulement.

14. Ecoulement rotationnel et vecteur tourbillon

Dans ce type d'écoulements, $\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot}(\vec{V})$

Le vecteur tourbillon représente le vecteur vitesse de rotation instantanée

14.1. Ligne tourbillon

On appelle ligne tourbillon une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon $\vec{\Omega}$, elle est telle que :

$$\frac{dx}{\Omega_x} = \frac{dy}{\Omega_y} = \frac{dz}{\Omega_z} \quad (68)$$

14.2. Tube tourbillon

On appelle tube tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur un contour fermé

Propriétés : Par définition, le champ des vecteurs tourbillon est à flux conservatif

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \Rightarrow \text{div}(\vec{\Omega}) = 0 \Rightarrow \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{\Omega}) d\Omega = \iint_S \vec{\Omega} d\vec{S} = 0 \quad (69)$$

Conséquence : le flux du vecteur tourbillon est constant dans un tube tourbillon.

On appelle intensité du tube tourbillon la quantité :

$$I = \iint_S \vec{\Omega} d\vec{S} = \iint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) d\vec{S} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{\omega} d\vec{S} \quad (70)$$

$\vec{\omega}$ est la vortacité

Pour une courbe fermée, $\Gamma = \oint_{(C)} \vec{V} d\vec{l} = \iint_S \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) d\vec{S} = \frac{1}{2} \iint_S \vec{\omega} d\vec{S}$ où S est une surface

quelconque s'appuyant sur le contour (C) [Théorème de Stokes]. La quantité $I = \Gamma$ est appelée intensité du tourbillon.

Exercice 05 : Calculer la circulation Γ autour d'un cercle de rayon a dans un champ de vitesse donné par : $\vec{V} = (ky, 0, 0)$, $k = \text{constante}$.

a) Par intégration de $\vec{V} d\vec{l}$

b) Par intégration de $\vec{\omega} \cdot d\vec{S}$

14.3. Filet tourbillon

On appelle filet tourbillon, l'ensemble des lignes tourbillon s'appuyant sur une courbe fermée infiniment petite.

14.4. Le vortex

le vortex est le cas particulier d'un filet tourbillon unique d'intensité finie. Le cas particulier du vortex rectiligne est particulièrement important : il correspond à un champ de vitesses contenu dans le plan perpendiculaire au filet tourbillon, de direction radiale et d'intensité de vitesse $V = \frac{I}{2\pi r}$ où r représente la distance entre le point considéré et le filet tourbillon.

15. Ecoulement potentiel avec circulation

Dans de nombreux cas, l'écoulement est irrotationnel dans tout l'espace sauf en un certain nombre de points singuliers pour lesquels le vecteur tourbillon est différent de zéro. Ces points se groupent suivant un certain nombre de filets tourbillons distincts.

De tels écoulements sont dits : écoulements à potentiel des vitesses avec circulation. Ils possèdent la propriété d'avoir une circulation du vecteur vitesse nulle suivant toute courbe fermée n'entourant pas un filet tourbillon, la circulation est constante et différente de zéro lorsque la courbe entoure (une fois) le filet tourbillon. Cette valeur est égale à l'intensité du filet tourbillon.

16. Ecoulement isovolume et rotationnel

Pour ce type d'écoulement :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \text{ et } \overline{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = 2\vec{\Omega} \neq 0 \Rightarrow \iiint_{\Omega} \operatorname{div}(\vec{\Omega}) d\Omega = \iint_S \vec{\Omega} d\vec{S} = 0.$$

On remarque que ces équations sont analogues à celles de la magnétostatique : $\operatorname{div}(\vec{B}) = 0$ et $\overline{\operatorname{rot}}(\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$ et donnent lieu aux mêmes traitements mathématiques.

Il existe donc l'équivalent de la loi de Biot-Savart :

$$\vec{V} = \frac{1}{2\pi} \overline{\operatorname{rot}}(\vec{V}) = \iiint_{\Omega} \frac{\vec{\Omega} \wedge \vec{r}}{r^3} d\Omega \quad (71)$$

17. Ecoulement isovolume et irrotationnel : les équations de Cauchy-Riemann

Pour ce type d'écoulement : $\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 \Rightarrow \vec{V} = \overline{\operatorname{rot}}\vec{\psi}$ et $\overline{\operatorname{rot}}\vec{V} = 0 \Rightarrow \vec{V} = \overline{\operatorname{grad}}\phi$.
On obtient :

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = 0 = \operatorname{div}(\overline{\operatorname{grad}}\phi) = \Delta\phi \quad (72)$$

$$\overline{\operatorname{rot}}\vec{V} = 0 = \overline{\operatorname{rot}}(\overline{\operatorname{rot}}\vec{\psi}) = \overline{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\vec{\psi}) - \Delta\vec{\psi} = -\Delta\vec{\psi} \quad (73)$$

en introduisant une relation de jauge : $\operatorname{div}\vec{\psi} = 0$.

On a donc, pour un écoulement plan Oxy :

$$\phi = \phi(x, y) \text{ et } \vec{\psi} = \vec{\psi}(x, y)$$

Et

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \end{cases} \quad (74)$$

qui sont les équations de Cauchy-Riemann pour un écoulement plan (Oxy) incompressible et irrotationnel.

La condition $\text{div} \vec{\psi} = 0$ est naturellement satisfaite, c'est à dire que la solution $\vec{\psi} = \psi(x, y) \vec{e}_z$ est unique.

Remarque : en coordonnées Polaires planes, les équations de Cauchy-Riemann pour les composants de vitesse au plan polaire (r, θ) en fonction de potentiel de vitesse et de ligne de courant ϕ et ψ sont :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (75)$$

Exercice 06 : Une tornade d'axe Oz de rayon a peut être modélisée par le champ de vitesse suivant dans les coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} \vec{V} = \Omega r \vec{u}_\theta & \text{si } r < a \\ \vec{V} = \frac{\Omega a^2}{r} \vec{u}_\theta & \text{si } r > a \end{cases}$$

- Montrer qu'il s'agit d'un écoulement plan stationnaire, que les lignes de courant et les trajectoires sont confondues, que l'écoulement est incompressible et tourbillonnaire et donner le rotationnel du champ de vitesse (pour $r < a$ et $r > a$).
- Déterminer la circulation de la vitesse sur un cercle centré sur O en dehors de la tornade ($r > a$).

18. Exemples d'écoulements plans stationnaires:

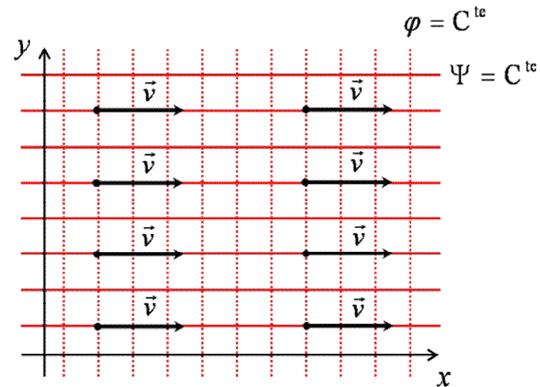
On présente dans ce paragraphe quelques exemples d'écoulements plans, stationnaires, et très simples. Tous sont décrits avec la description d'Euler. Le repère $(O; x, y)$ $[(\rho, r, \theta)]$ dans le plan est orthonormé, et les vecteurs unitaires des axes sont \vec{e}_x et \vec{e}_y $[\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta]$. Les composantes du vecteur vitesse \vec{V} sont $u(x, y)$ et $v(x, y)$ $[v_r(r, \theta)$ et $v_\theta(r, \theta)]$.

18.1. Ecoulement plan rectiligne uniforme

Soit l'écoulement dont le champ de vitesse est $\vec{V} = u \vec{e}_x + v \vec{e}_y = U_\infty \vec{e}_x$ avec U_∞ constant. Il est facile de vérifier qu'il existe un potentiel des vitesses ϕ et une fonction de courant ψ . En effet, on utilisant les équations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \quad (76)$$

En résolvant ces équations différentielles, le potentiel des vitesses est $\phi = U_{\infty}x$ et la fonction de courant est $\psi = cste$. Les lignes $\phi = cste$, ou $x = cste$, sont les lignes équipotentielles, et les lignes $\psi = U_{\infty}y$, ou $y = cste$, sont les lignes de courant. Ces deux réseaux de courbes se coupent à angle droit : on dit qu'ils sont orthogonaux (voir figure ci-contre).



18.2. Écoulement plan source ou puits

On introduit les coordonnées polaires (r, θ) , et le vecteur unitaire \vec{e}_r d'angle polaire θ . Soit l'écoulement dont le champ de vitesse est :

$$\vec{V} = \frac{m}{r} \vec{e}_r \quad (77)$$

avec: m une constante (m^2 / s) représentant l'intensité de la source/puits.

si $m > 0$ alors l'écoulement est divergent et correspond à l'effet d'une **source à l'origine** ;
si $m < 0$, l'écoulement est convergent et correspond à l'effet d'un **puits à l'origine**.

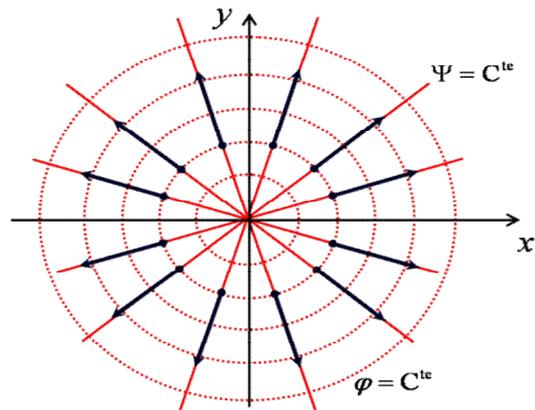
$$\begin{cases} m > 0 & : \text{ source} \\ m < 0 & : \text{ puits} \end{cases}$$

Remarquons qu'en un point de l'écoulement près de O la vitesse a un très grand module, et que loin du point O elle a un petit module.

En coordonnées polaires, on a :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (78)$$

Le potentiel des vitesses est $\phi = m \ln r$, les lignes $\phi = cste$ sont les lignes $r = cste$, et sont donc des cercles de centre O . La fonction de courant est $\psi = m\theta$, les lignes $\psi = cste$, sont les lignes $\theta = cste$, et sont donc des demi-droites issues de O . Les lignes équipotentielles sont donc des cercles et les lignes de courant sont des demi-droites. Ces deux réseaux de courbes se coupent à angle droit et sont orthogonaux (voir figure ci-contre).



18.2.1. Signification physique de la constante m

La signification physique de la constante m est en rapport avec le débit généré par cette source/puits.

Calculons le débit volumique de l'écoulement radial à travers un cylindre d'axe (oz) (perpendiculaire au plan de l'écoulement).

$$q_v = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS$$

L'écoulement ayant lieu à travers la surface latérale du cylindre, on peut considérer comme surface d'intégration un cylindre de hauteur $\Delta z = 1$, et donc :

$$q_v = \iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} dS = \oint_C \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot \Delta z \cdot r d\theta$$

Il reste alors à intégrer sur un cercle de rayon r , centré sur l'origine :

$$q_v = \int_0^{2\pi} \frac{m}{r} \vec{e}_r \cdot \vec{e}_r \cdot \Delta z \cdot r d\theta = 2\pi m$$

débit volumique par unité de hauteur.

Donc : $m = \frac{q_v}{2\pi}$, avec : $\begin{cases} q_v > 0 & : \text{ source} \\ q_v < 0 & : \text{ puits} \end{cases}$

Il est à remarquer que la vitesse n'est pas définie au point O . En particulier, on ne peut pas appliquer la formule de Green–Riemann sur un domaine contenant le point O .

Il est à remarquer aussi, que les calculs peuvent être faits en coordonnées cartésiennes en utilisant un formulaire pour les expressions de \overline{grad} , \overline{rot} ,

Entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires on a, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ d'une part, et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, d'autre part :

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{2} m \ln(x^2 + y^2) \\ \psi = m \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \end{cases} \quad (79)$$

Remarque : Si la source/puits est située en un point quelconque de coordonnées (a, b) :

$$\begin{cases} \phi = \frac{1}{2} m \ln[(x+a)^2 + (y+b)^2] \\ \psi = m \operatorname{arctg} \frac{y+b}{x+a} \end{cases} \quad (80)$$

Point Important: Une source ou puits ne produit pas une circulation. Sans tourbillons, la circulation sera zéro pour n'importe quelle trajectoire fermée autour de n'importe quel nombre de source ou puits.

18.3. Vortex- fil tourbillonnaire

Un fil tourbillonnaire rectiligne et parallèle à l'axe (oz) , engendre un écoulement irrotationnel dans le plan (oxy) . Dans ce cas le fluide s'écoule selon des profils circulaires.

On introduit aussi les coordonnées polaires (r, θ) , et le vecteur unitaire \vec{e}_r d'angle polaire θ . Soit l'écoulement dont le champ de vitesse est $\vec{V} = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta$. La quantité $K = \text{cste} : [m^2/s]$ est définie comme l'intensité de tourbillon.

$$\begin{cases} K < 0 : \text{ le vortex tourne dans le sens trigonométrique} \\ K > 0 : \text{ le vortex tourne dans le sens horaire} \end{cases}$$

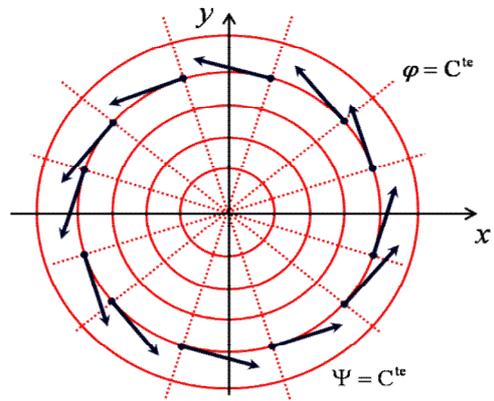
Utilisant les équations de Cauchy-Rieman :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \quad (81)$$

Le potentiel des vitesses et la fonction de courant sont donnés alors par :

$$\begin{cases} \phi = K \theta \\ \psi = -K \ln r \end{cases} \quad (82)$$

Les lignes de courant sont telles que $\psi = -K \ln r = cste \Rightarrow r = cste \forall \theta$, autrement dit il s'agit de cercles tous centrés sur l'origine du repère. Les équipotentiels doivent vérifier que $\phi = K \theta = cste \Rightarrow \theta = cste \forall r$: il s'agit de droites passant toutes par l'origine du repère. On vérifie encore qu'en tout point de l'écoulement les équipotentiels sont orthogonales aux lignes de courant.



On a donc un écoulement orthoradial, tournant autour de l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine (voir figure ci-dessus). On notera la différence avec l'écoulement radial généré par un puits ou une source : les lignes de courant et les équipotentiels sont inter-changées.

18.3.1. Signification physique de la constante K

La signification physique de K est en rapport avec la circulation du vecteur vitesse autour de l'origine du vortex.

Calculons la circulation du vecteur vitesse le long d'une ligne de courant définie par un cercle de rayon r centré sur l'origine :

$$\Gamma = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_0^{2\pi} \left(\frac{K}{r} \vec{e}_\theta\right) (r d\theta \vec{e}_\theta) = 2\pi K \quad (83)$$

$$\text{Donc : } K = \frac{\Gamma}{2\pi}$$

- $\left\{ \begin{array}{l} \Gamma < 0 : \text{ le tourbillon tourne autour de l'origine dans le sens des aiguilles d'une montre} \\ \Gamma > 0 : \text{ le tourbillon tourne en sens inverse} \end{array} \right.$

Entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires on a, $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ d'une part, et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\theta = \arctg \frac{y}{x}$, d'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi = -\frac{1}{2} K \ln(x^2 + y^2) \\ \phi = K \arctg \frac{y}{x} \end{array} \right. \quad (84)$$

19. Potentiel complexe des vitesses et exemples d'écoulements plans

19.1. Fonctions analytiques

Tout point du plan (Oxy) peut être représenté par un nombre complexe $z = x + iy$.

Soit $f(z) = f(x + iy)$ une fonction de la variable complexe supposée uniforme, c'est-à-dire à une valeur de la variable z correspond une seule valeur de la fonction $f(z)$.

La dérivée d'une fonction uniforme est définie comme la limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

Si cette limite existe et est indépendante de la façon dont Δz tend vers zéro, on dit que la fonction est analytique.

19.2. Fonction holomorphe

Une fonction holomorphe est une fonction à la fois continue, uniforme et analytique.

19.3. Potentiel complexe des vitesses

Lorsqu'un écoulement plan est conservatif et irrotationnel, il peut être complètement décrit au moyen d'une fonction analytique complexe appelée « potentiel complexe des vitesses ». Cette fonction complexe $f(z)$ comporte une partie réelle correspondant au potentiel des vitesses $\phi(x, y)$ et une partie imaginaire correspondant à la fonction de courant $\psi(x, y)$. On définit ainsi :

$$f(z) = \phi + i\psi \quad \text{où } z = x + iy = re^{i\theta} \quad (85)$$

Désignons par ϕ et ψ les parties réelles et imaginaires de $f(z)$. On peut écrire

$$\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta \phi + i \Delta \psi}{\Delta x + i \Delta y} \quad (86)$$

On peut faire tendre Δz vers 0 des deux façons suivantes :

$$\Delta z \rightarrow 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0 \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta f}{\Delta z} \right) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y = 0}} \left(\frac{\Delta \phi + i \Delta \psi}{\Delta x + i \Delta y} \right) = \lim_{\substack{\Delta x = 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \left(\frac{\Delta \phi + i \Delta \psi}{\Delta x + i \Delta y} \right) = \frac{df}{dz}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \phi}{\Delta x} + i \frac{\Delta \psi}{\Delta x} \right) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(-i \frac{\Delta \phi}{\Delta y} + \frac{\Delta \psi}{\Delta y} \right) \\
&= \frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} = -i \frac{\partial f}{\partial y}
\end{aligned} \tag{87}$$

On a donc :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \phi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{88}$$

D'où :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \end{cases} \tag{89}$$

qui sont les relations de Cauchy.

La définition d'une telle fonction analytique est légitime dans la mesure où le potentiel des vitesses et la fonction de courant vérifient les relations de *Cauchy* : $u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}$ et

$$v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} .$$

Par conséquent, l'écoulement peut aussi être décrit au moyen de la fonction analytique complexe : $f(z) = \phi + i\psi$

L'intérêt de l'utilisation du potentiel complexe des vitesses est double :

- il réunit en une seule fonction les deux fonctions descriptives de l'écoulement ;
- il permet la construction d'écoulements évolués par simple superposition d'écoulements élémentaires :

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + \dots$$

19.4. Vitesse complexe

On pose :

$$w = \frac{df}{dz} = u - iv \tag{90}$$

appelée fonction vitesse complexe.

Avec les composantes u et v de la vitesse \vec{V} on peut former $\bar{w} = u + iv$ image du vecteur vitesse dans le plan complexe. C'est un nombre complexe de module V et d'argument :

$$\omega : \bar{w} = V e^{i\omega} \quad (91)$$

Exercice 07: On considère l'écoulement plan autour d'un cylindre circulaire de rayon a . la fonction potentiel complexe s'écrit :

$$F = -U \left(z + \frac{a^2}{z} \right), \quad U = cst, \quad z \text{ nombre complexe}$$

- Déterminer la fonction du potentiel de vitesse ϕ et la fonction de courant ψ .

Exercice 08 : Considérons un écoulement homogène et parallèle, U_∞ en écoulement dans la direction de x et un tourbillon avec une intensité K situé à l'origine.

- Trouver les composants du vecteur vitesse.

19.5. Potentiel complexe de quelques écoulements plan élémentaires

19.5.1. Écoulement uniforme

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = U_\infty z \quad (92)$$

où U_∞ est une constante réelle.

Par identification des parties réelle et imaginaire avec respectivement le potentiel des vitesses et la fonction de courant, on obtient :

$f(z) = U_\infty(x + iy) = \phi + i\psi$, on obtient :

$$\begin{cases} \phi(x, y) = U_\infty x \\ \psi(x, y) = U_\infty y \end{cases} \quad (93)$$

On peut par ailleurs en déduire le champ de vecteurs vitesse en utilisant soit la fonction de courant, soit le potentiel des vitesses :

$$\begin{cases} u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = U_{\infty} \\ v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (94)$$

d'où $\vec{V} = U_{\infty} \vec{e}_x$ en tout point de l'écoulement, correspondant à un écoulement uniforme de vitesse U_{∞} selon l'axe x .

Remarque : L'utilisation d'une constante U_{∞} complexe permet d'orienter l'écoulement uniforme selon une direction quelconque.

19.5.2. Écoulement plan autour d'une source ou d'un puits

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = m \ln z \quad (95)$$

où $m = \frac{q_v}{2\pi}$ est une constante réelle.

Pour faciliter le traitement mathématique, il conviendra de travailler préférentiellement en coordonnées cylindriques ; ainsi :

$z = re^{i\theta}$ et $f(z) = m \ln(re^{i\theta}) = m \ln r + im\theta = \phi + i\psi$, où l'on peut identifier le potentiel des vitesses (partie réelle) et la fonction de courant (partie imaginaire) :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = m \ln r \\ \psi(r, \theta) = m\theta \end{cases} \quad (96)$$

Le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_{\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = \frac{m}{r} \\ v_{\theta} = 0 \end{cases} \quad (97)$$

d'où : $\vec{V} = \frac{m}{r} \vec{e}_r$

On a donc un écoulement radial, centré sur l'origine du repère, où la vitesse est inversement proportionnelle à la distance à l'origine.

Remarque : Cette formulation est valable pour un puits ou une source centrée à l'origine du repère. On peut très bien envisager un écoulement centré en un point quelconque du plan, de coordonnées $z_0 = a + ib$, en formulant simplement $f(z) = m \ln(z - z_0)$.

On a alors : $f(z) = m \ln(z - z_0) = m \ln z_1 = m \ln r_1 e^{i\theta_1}$

Avec : $r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + (y+b)^2}$ et $\theta_1 = \text{arctg} \frac{y+b}{x+a}$

On obtient :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = m \ln r_1 = \frac{1}{2} m \ln((x+a)^2 + (y+b)^2) \\ \psi(r, \theta) = m \theta_1 = m \text{arctg} \frac{y+b}{x+a} \end{cases} \quad (98)$$

19.5.3. Vortex ou tourbillon libre

Considérons l'écoulement plan dont le potentiel complexe des vitesses se formule :

$$f(z) = -iK \ln z \quad (99)$$

Où $K = \frac{\Gamma}{2\pi}$ est une constante réelle.

Une nouvelle fois, il est plus approprié de travailler dans un système de coordonnées cylindriques.

Développons cette fonction pour identifier le potentiel des vitesses et la fonction de courant :

$$f(z) = -iK \ln(re^{i\theta}) = K\theta - iK \ln r = \phi + i\psi$$

d'où :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = K\theta \\ \psi(r, \theta) = -K \ln r \end{cases} \quad (100)$$

Le champ de vecteurs vitesse s'obtient en calculant :

$$\begin{cases} v_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ v_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = \frac{K}{r} \end{cases} \quad (101)$$

d'où : $\vec{V} = \frac{K}{r} \vec{e}_\theta$

En conséquence, on formulera plus communément le potentiel complexe des vitesses correspondant à un vortex en faisant apparaître sa circulation :

Remarque : Cette formulation est valable pour un vortex tournant autour de l'origine du repère. On peut très bien envisager un vortex tournant autour d'un point quelconque du plan, de coordonnées $z_0 = x_0 + iy_0$, en formulant simplement $f(z) = -iK \ln(z - z_0)$. C'est facile de montrer que :

$$\begin{cases} \phi(r, \theta) = K \theta_1 = K \operatorname{arctg} \frac{y+b}{x+a} \\ \psi(r, \theta) = -\frac{1}{2} K \ln((x+a)^2 + (y+b)^2) \end{cases} \quad (102)$$

19.6. Superposition des écoulements potentiels

Nous avons vu les trois écoulements potentiels : (a) écoulement homogène et parallèle, (b) source ou puits, et (c) fil tourbillonnaire. Nous pouvons les utiliser pour développer des écoulements potentiels plus complexes.

19.6.1. Doublet

Considérons l'association d'un puits et d'une source au sein d'un même écoulement plan. Positionnons la source d'intensité m en $(x = +a, y = 0)$ et le puits d'intensité $-m$ en $(x = -a, y = 0)$. Il s'agit alors de l'écoulement généré par un « **doublet** ». Puisque la superposition d'écoulements élémentaires s'opère par simple addition de leurs potentiels complexes des vitesses, l'association du puits et de la source se formule par :

$$f(z) = +m \ln(z + a) - m \ln(z - a) \quad (103)$$

Le traitement mathématique de cette fonction est simplifié en faisant appel à deux systèmes de coordonnées ; définissons alors deux repères cylindriques tels que :

$$\begin{cases} z_1 = z + a = r_1 e^{i\theta_1} \\ z_2 = z - a = r_2 e^{i\theta_2} \end{cases} \quad (104)$$

Avec :

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \quad , \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} \quad , \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a}$$

et reformulons $f(z)$ en conséquence :

$$f(z) = m (\ln z_1 - m \ln z_2) = m (\ln r_1 + i \theta_1 - \ln r_2 - i \theta_2) = m \left(\ln \frac{r_1}{r_2} + i (\theta_1 - \theta_2) \right)$$

Par identification de la partie réelle avec le potentiel des vitesses et de la partie imaginaire avec la fonction de courant, on obtient :

$$\begin{cases} \phi = m \ln \frac{r_1}{r_2} \\ \psi = m (\theta_1 - \theta_2) \end{cases} \quad (105)$$

En prenant en considération les expressions de $r_1, r_2, \theta_1, \theta_2$:

$$\phi = m \ln \frac{\sqrt{(x+a)^2 + y^2}}{\sqrt{(x-a)^2 + y^2}} = \frac{1}{2} m \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2} \quad (106)$$

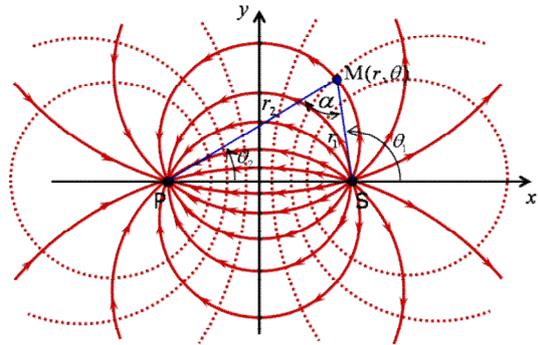
$$\psi = m \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \right) \quad (107)$$

Utilisons la propriété : $\operatorname{arctg} \alpha - \operatorname{arctg} \beta = \operatorname{arctg} \frac{\alpha - \beta}{1 + \alpha\beta}$, on obtient :

$$\psi = m \left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x+a} - \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a} \right) = m \operatorname{arctg} \frac{\frac{y}{x+a} - \frac{y}{x-a}}{1 + \frac{y}{x+a} \frac{y}{x-a}}$$

$$\psi = -m \operatorname{arctg} \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2} \quad (108)$$

Par définition, les lignes de courant sont telles que $\psi = cst$ et conduisent à tracer des courbes vérifiant : $\theta_1 - \theta_2 = cst$. La figure ci-contre montre alors que de telles courbes sont des cercles passant par l'origine du puits et l'origine de la source et ayant comme centre un point de l'axe y . Sans faire le calcul du champ de vecteurs vitesse, on oriente intuitivement le parcours des particules fluides en constatant logiquement que l'écoulement diverge depuis la source et converge vers le puits.



Remarque : Intervertir les positions de la source et du puits ne change que le sens de parcours des particules le long des lignes de courant, ces dernières restant inchangées. Par ailleurs, les équipotentiels étant orthogonales en tout point aux lignes de courant, on comprend graphiquement qu'elles prennent la forme de cercles centrés sur l'axe x .

19.6.2. Dipôle

Faisons tendre à présent vers zéro la distance entre le puits et la source : $2a \rightarrow 0$. Dans ces conditions, on superpose le puits et la source à l'origine, en créant ainsi un « dipôle ». Il convient alors de reformuler la fonction complexe dans un système de coordonnées unique par le passage aux limites $a \rightarrow 0$ et $m \rightarrow \infty$ du doublet :

$$f(z) = +m \ln(z+a) - m \ln(z-a) = m \ln \frac{z+a}{z-a} = m \ln \frac{z(1+a/z)}{z(1-a/z)} = m \ln \frac{1+a/z}{1-a/z}$$

Donc :

$$(f(z))_{Dipole} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} (f(z))_{Doublet} \quad (109)$$

On a :

$$\lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ m \rightarrow \infty}} m \ln \frac{1+a/z}{1-a/z} = -\frac{2am}{z} \quad (110)$$

Posons alors $\lambda = 2am$ le moment dipolaire caractérisant ce dipôle. Il en résulte la formulation suivante pour le dipôle : $f(z) = -\frac{\lambda}{z}$

Donc :

$$f(z) = -\frac{\lambda}{z} = -\frac{\lambda}{r} e^{-i\theta} = -\frac{\lambda}{r} (\cos \theta - i \sin \theta)$$

d'où :

$$\begin{cases} \phi = -\frac{\lambda}{r} \cos \theta \\ \psi = \frac{\lambda}{r} \sin \theta \end{cases} \quad (111)$$

où λ est une constante, qui peut être considérée complexe et permettre ainsi d'orienter à loisir le dipôle dans le plan de l'écoulement.

En coordonnées cartésiennes : ($x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$)

$$\begin{cases} \phi = -\frac{\lambda x}{x^2 + y^2} \\ \psi = \frac{\lambda y}{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (112)$$

Une ligne de courant devant vérifier $\psi = cst$, son équation se formule : $\frac{\lambda y}{x^2 + y^2} = cst$. Montrons alors qu'il s'agit de l'équation d'un cercle :

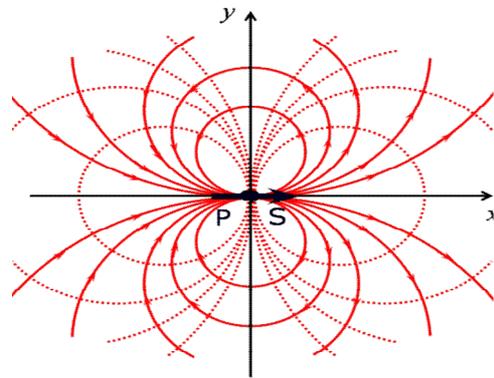
$$x^2 + y^2 - cst \cdot y = 0$$

Appelons D la constante et poursuivons :

$$x^2 + y^2 - Dy = 0 \Rightarrow x^2 + (y - D/2)^2 = (D/2)^2$$

où l'on reconnaît l'équation d'un cercle de rayon

$D/2$ et de centre se trouvant à $D/2$ sur l'axe y . Ainsi, à chaque valeur différente de D correspond une ligne de courant prenant la forme d'un cercle passant par l'origine et dont le centre se trouve sur l'axe y (voir figure ci-contre). On remarquera que, logiquement, les équipotentielles sont aussi des cercles passant par l'origine mais dont les centres se trouvent sur l'axe x .



Remarque : Les écoulements élémentaires présentés ici peuvent ensuite être associés pour former des écoulements plus évolués et susceptibles de décrire des situations concrètes. L'exemple le plus typique étant la superposition d'un écoulement uniforme

avec un dipôle qui conduit à la description d'un écoulement autour d'un cylindre. Ce même cylindre peut ensuite être considéré en rotation autour de son axe en introduisant un vortex : l'analyse des vitesses au contact de la paroi du cylindre montre alors que la répartition des pressions (par simple application l'équation de *Bernoulli*) est à l'origine d'une force qui s'exerce perpendiculairement à la direction de l'écoulement uniforme. Il s'agit de la portance générée par l'effet *Magnus*.

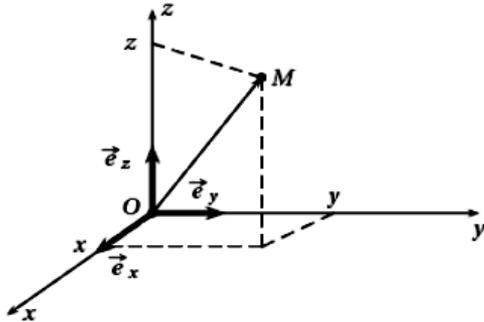
Références

- [1] **Inge L. Ryhming**, Dynamiques des fluides, 2eme Edition, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, France. 1991.
- [2] **درید عزوز**، ميكانيك الموائع، الجزء الثاني، مديرية الكتب و المطبوعات، سوريا. 1981.
- [3] **Raymond Comolet**, Mécanique expérimentale des fluides - Tome 2 - 4ème edition, *DUNOD*, 2006.
- [4] **Pijush K. Kundu, Ira M. Cohen**, Fluid Mechanics, 2en Edition, *ACADEMIC PRESS*, USA, 1990.
- [5] **Sakir Amiroudine, Jean-Luc Battaglia, Michel Combarous**, Mécanique des fluides, 2e édition, *DUNOD*, France, 2014.
- [6] **Frank M. White**, Fluid Mechanics, Fourth Edition, *McGraw-Hill*, USA, 1998.

Annexe

FORMULAIRES D'ANALYSE VECTORIELLE

1) Coordonnées cartésiennes



$$U = U(x, y, z)$$

$$\vec{A} = A_x(x, y, z) \vec{e}_x + A_y(x, y, z) \vec{e}_y + A_z(x, y, z) \vec{e}_z.$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{dU}{dx} \vec{e}_x + \frac{dU}{dy} \vec{e}_y + \frac{dU}{dz} \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{d^2 A_x}{dx^2} + \frac{d^2 A_y}{dy^2} + \frac{d^2 A_z}{dz^2}$$

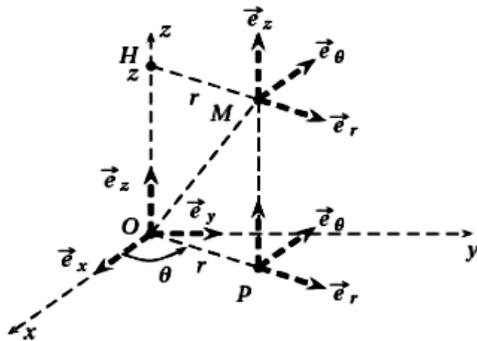
$$\text{div} \vec{A} = \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{dA_z}{dy} - \frac{dA_y}{dz} \right) \vec{e}_x \dots$$

$$+ \left(\frac{dA_x}{dz} - \frac{dA_z}{dx} \right) \vec{e}_y \dots$$

$$+ \left(\frac{dA_y}{dx} - \frac{dA_x}{dy} \right) \vec{e}_z$$

2) Coordonnées cylindriques



$$U = U(r, \theta, z);$$

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, z) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, z) \vec{e}_\theta + A_z(r, \theta, z) \vec{e}_z.$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{dU}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{dU}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{dU}{dz} \vec{e}_z$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dU}{dr} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 U}{d\theta^2} + \frac{d^2 U}{dz^2}$$

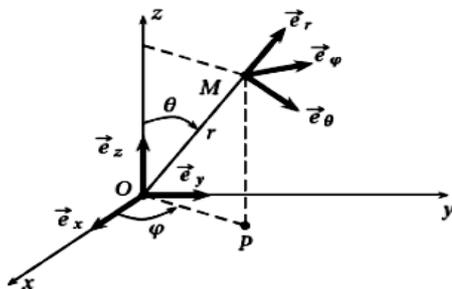
$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{d(rA_r)}{dr} + \frac{1}{r} \frac{dA_\theta}{d\theta} + \frac{dA_z}{dz}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{dA_z}{d\theta} - \frac{dA_\theta}{dz} \right) \vec{e}_r \dots$$

$$+ \left(\frac{dA_r}{dz} - \frac{dA_z}{dr} \right) \vec{e}_\theta \dots$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{d(rA_\theta)}{dr} - \frac{dA_r}{d\theta} \right) \vec{e}_z$$

3) Coordonnées sphériques



$$U = U(r, \theta, \varphi);$$

$$\vec{A} = A_r(r, \theta, \varphi) \vec{e}_r + A_\theta(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\theta + A_\varphi(r, \theta, \varphi) \vec{e}_\varphi.$$

$$\vec{\text{grad}} U = \frac{dU}{dr} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{dU}{d\theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dU}{d\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$\Delta U = \frac{1}{r} \frac{d^2(rU)}{dr^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dU}{d\theta} \right) \dots$$

$$+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 U}{d\varphi^2}$$

$$\text{div} \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 A_r)}{dr} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d(\sin \theta A_\theta)}{d\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dA_\varphi}{d\varphi}$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{A} = \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{d(\sin \theta A_\varphi)}{d\theta} - \frac{dA_\theta}{d\varphi} \right) \vec{e}_r \dots$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{dA_r}{d\varphi} - \frac{d(rA_\varphi)}{dr} \right) \vec{e}_\theta \dots$$

$$+ \frac{1}{r} \left(\frac{d(rA_\theta)}{dr} - \frac{dA_r}{d\theta} \right) \vec{e}_\varphi$$

4) Quelques formules importantes

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}} \vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(UV) = U \overrightarrow{\text{grad}} V + V \overrightarrow{\text{grad}} U$$

$$\text{div}(U \vec{A}) = U \text{div} \vec{A} + \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}} U$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(U \vec{A}) = U \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + \overrightarrow{\text{grad}} U \wedge \vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{B} + \vec{B} \wedge \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = (\text{div} \vec{B}) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{B} - (\text{div} \vec{A}) \vec{B} + (\vec{B} \cdot \overrightarrow{\text{grad}}) \vec{A}$$

5) Théorème de Stokes :

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{l} = \iint_S \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

6) Théorème de Green-Ostrogradsky :

$$\oiint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{A}) d\Omega$$