

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

X•⊙V•EX •K||E C:K:|A :||K•Z - X:⊙EO÷t -



جامعة البويرة

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محمد أولحاج
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

كلية العلوم والعلوم التطبيقية

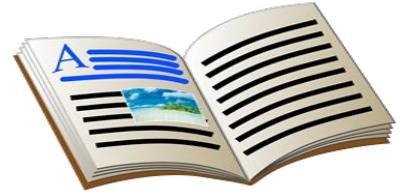
Département de Physique

Polycopié de cours

En : Physique

Spécialité : Physique Fondamentale

Niveau : Deuxième année Licence



Cours de Vibrations

Par : Dr SADOUN Mohamed Améziane

Année : 2022

Table des matières

Introduction	3
1 Formalisme de Lagrange	6
1.1 Degrés de liberté et coordonnées généralisées	6
1.2 Force généralisée	8
1.3 Equations de Lagrange	10
1.3.1 Systèmes conservatifs	13
1.3.2 Systèmes non conservatifs (dissipatifs)	13
1.3.3 Systèmes à N degrés de liberté	16
2 Généralités sur le mouvement d'oscillation	17
2.1 Introduction :	17
2.2 Conditions d'oscillation	18
2.3 Oscillateur linéaire	19
2.3.1 Équations différentielles linéaires	19
2.3.2 Oscillateur harmonique libre	20
3 Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté	22
3.1 Systèmes non amortis	22
3.1.1 Oscillations mécaniques	22
3.1.2 Oscillations électriques	30
3.1.3 Analogie électro-mécanique :	32

3.1.4	Exercices résolus	33
3.2	Systèmes amortis :	44
3.2.1	Introduction	44
3.2.2	Oscillations mécaniques :	45
3.2.3	Grandeurs caractéristiques	49
3.2.4	Oscillations électriques :	50
3.2.5	Exercices	51
4	Oscillations Forcées des systèmes à un degré de liberté	54
4.1	Excitation sinusoïdale d'un oscillateur mécanique	54
4.2	Mise en équation de l'oscillateur amorti en régime forcé	55
4.3	Amplitude et phase en régime permanent	56
4.4	Etude des variations de l'amplitude et résonance d'élongation	57
4.5	Discussion :	59
4.6	Bilan de puissance	60
4.6.1	La puissance dissipée par les frottements	60
4.6.2	La puissance fournie par l'excitation	61
4.7	Bande passante	62
4.8	Oscillations électriques	63
4.9	Exercice :	65
5	Oscillations des systèmes à deux degrés de liberté	66
5.1	Introduction	66
5.2	Oscillations libres des systèmes couplés à 2dll	67
5.2.1	Remarques :	71
5.3	Les modes d'oscillations	71
5.3.1	Le mode symétrique	71
5.3.2	Le mode antisymétrique	72
5.3.3	Phénomène de battement entre deux oscillateurs	72

5.4	Oscillations forcées des systèmes couplés à 2dll	73
5.4.1	Les équations de mouvement	73
5.4.2	Solutions du système en régime permanent	74
5.4.3	Résonances et antirésonances	75
5.5	Oscillations électriques couplées	76
A	Calcul du moment d'inertie	78
A.1	Définition	78
A.2	Exemples de calcul du moment d'inertie	79
A.2.1	Moment d'inertie d'une tige	79
A.2.2	Moment d'inertie d'un disque	80
A.2.3	Moment d'inertie d'un cylindre	81

Introduction

L'énergie est une grandeur fondamentale en physique. La matière et le rayonnement qui constituent la partie de l'univers que nous pouvons observer sont deux formes de cette entité fondamentale. Depuis Einstein, nous savons que l'une peut se transformer en l'autre. L'énergie se manifeste en particulier dans les mouvements de la matière. Les mouvements des objets sont de deux types :

- les mouvements continus point à point (l'objet décrit une trajectoire non répétitive pour aller d'un point à un autre),
- les mouvements oscillatoires pour lesquels un ou des objets restent au voisinage d'une position d'équilibre.

Les deux types de mouvement peuvent coexister, par exemple dans le cas d'un insecte dont le battement des ailes est un mouvement périodique, et qui se déplace suivant une trajectoire quelconque. Les vibrations sont omniprésentes dans la nature. Notre corps est source de multiples vibrations (cœur, tympan, cordes vocales, ...). En résumant la physique par les deux notions de matière et d'énergie, les vibrations peuvent être décrites comme un phénomène par lequel l'énergie se manifeste localement dans la matière en changeant périodiquement de forme. L'état du système en oscillation est alors décrit par une ou plusieurs fonctions périodiques.

D'un point de vue énergétique, un oscillateur est un système dans lequel l'énergie, présente sous deux formes distinctes, passe d'une forme à l'autre périodiquement ; en mécanique, l'énergie se présente sous les formes cinétique (liée à la vitesse) et potentielle (liée à la déformation de corps élastiques), en électricité l'énergie est électro statique et

magnétique.

Les oscillateurs élémentaires constituant tout système physique sont couplés entre eux ; l'énergie d'un oscillateur peut donc passer aux oscillateurs voisins et aller se déposer loin de l'élément d'origine, revenir partiellement pour se répartir dans un volume limité. Un système complexe peut donc évoluer spatialement et temporellement lorsqu'il est soumis à des oscillations. Le mouvement d'ensemble se traduit par un déplacement d'énergie sans déplacement de matière ; on attribue le nom d'onde à ce phénomène ; l'onde est progressive si l'énergie se propage dans une direction sans revenir vers sa source. Si une partie de l'énergie revient après réflexion sur des obstacles, l'onde peut devenir stationnaire. Le son, la lumière sont la manifestation de phénomènes ondulatoires dans les milieux qui nous entourent ; ces ondes sont couplées à nos organes sensoriels et présentent donc une importance particulière. L'étude des vibrations repose sur les principes de base de la physique (dynamique pour les systèmes mécaniques ou électromagnétisme pour les systèmes électriques).

Dans ce cours nous décrivons les aspects essentiels liés aux vibrations et nous établissons les analogies qui existent entre les différentes formes que prennent ces phénomènes dans les différents domaines de la physique.

Chapitre 1

Formalisme de Lagrange

1.1 Degrés de liberté et coordonnées généralisées

Definition 1 *Degré de liberté*

Le mouvement d'une particule dans l'espace est repéré par les coordonnées d'espace (x, y, z) . Lorsque la particule est soumise à des contraintes, ses coordonnées vérifient des équations appelées équations de liaisons¹. Le nombre de degrés de liberté (ddl) de la particule est donné par

$$ddl = n - m \tag{1.1}$$

où n est le nombre de coordonnées d'espace et m le nombre de liaisons.

Exemples :

1- Particule en mouvement dans l'espace (x, y, z)

$$ddl = 3 - 0 = 3. \tag{1.2}$$

¹Les coordonnées qui décrivent le mouvement dépendent l'une de l'autre

2- Particule en mouvement dans un plan ($z = 0$)

$$ddl = 3 - 1 = 2. \quad (1.3)$$

3- Particule en mouvement dans un plan ($z = 0$) et suivant un cercle ($x^2 + y^2 = R^2$)

$$ddl = 3 - 2 = 1. \quad (1.4)$$

4- Particule en mouvement sur la surface d'une sphère de rayon a , $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

Les coordonnées de la particule sont

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \sin \theta \\ y = a \sin \varphi \sin \theta \\ z = a \cos \theta \end{cases} \quad (1.5)$$

$$ddl = 3 - 1 = 2. \quad (1.6)$$

5- Pour un système de N particule en mouvement dans l'espace (x, y, z)

$$ddl = 3N. \quad (1.7)$$

Definition 2 *Coordonnées généralisées*

Le nombre de degrés de liberté détermine le nombre de coordonnées généralisées (coordonnées indépendantes) nécessaires à l'étude du mouvement.

$$ddl = \text{nbre de coordonnées généralisées}. \quad (1.8)$$

Considérons le mouvement d'une particule dans un plan suivant une trajectoire cir-

culaire. Les coordonnées de la particule sont données par :

$$\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = a \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases} \quad (1.9)$$

et vérifient les équations de liaison suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = a^2 \\ z = 0 \end{cases} \quad (1.10)$$

Le nombre de degrés de liberté est

$$ddl = 3 - 2 = 1. \quad (1.11)$$

Il existe donc une seule coordonnée généralisée nécessaire à l'étude du mouvement de la particule, c'est l'angle φ .

1.2 Force généralisée

Soit une particule de masse m en mouvement dans l'espace et repérée par son vecteur position

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (1.12)$$

Si la particule est soumise à une force \vec{F} , on peut alors définir la q_i -composante F_{q_i} de la force \vec{F} ou force généralisée² et on écrit

$$F_{q_i} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q_i} \cdot \vec{F} \quad (1.13)$$

Considérons le pendule de la figure ci-dessous.

²La projection de la force dans le système des coordonnées généralisées

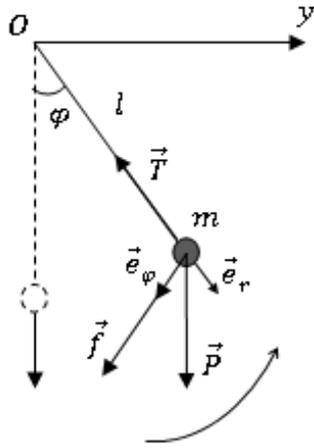


FIG. 1-1 – Mouvement d'un pendule simple sous l'effet des frottements fluides

La force \vec{f} est la force de frottements fluides donnée par :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}, \quad (1.14)$$

où α est coefficient de frottements et \vec{v} est la vitesse.

Les coordonnées de la masse m

$$\begin{cases} x = l \cos \varphi \\ y = l \sin \varphi \\ z = 0 \end{cases} \quad (1.15)$$

sont telles que

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = l^2 \\ z = 0 \end{cases} . \quad (1.16)$$

Le nombre de degrés de liberté est

$$ddl = 3 - 2 = 1, \quad (1.17)$$

et la coordonnée généralisée est l'angle φ . La force généralisée f_φ associée à la force de frottements \vec{f} est donnée par :

$$\begin{aligned}
 f_\varphi &= \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial \varphi} \cdot \vec{f} \\
 &= \frac{\partial l \vec{e}_r}{\partial \varphi} \cdot (-\alpha \vec{v}) \\
 &= l \vec{e}_\varphi \cdot (-\alpha l \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi) \\
 &= -\alpha l^2 \dot{\varphi}.
 \end{aligned} \tag{1.18}$$

1.3 Equations de Lagrange

Considérons un système mécanique à un degré de liberté (une coordonnée généralisée q), constitué d'une masse m en mouvement sous l'action d'une résultante de forces \vec{F} et repéré par son vecteur position $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. La relation fondamentale de la dynamique s'écrit

$$\begin{aligned}
 \vec{F} &= m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} \\
 &= m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \\
 &= m \frac{d\vec{v}}{dt}.
 \end{aligned} \tag{1.19}$$

Lors d'un déplacement infinitésimal $\delta \overrightarrow{OM} = \delta \vec{r}$, le travail infinitésimal δW fourni par la résultante \vec{F} est donné par l'expression

$$\begin{aligned}
 \delta W &= \vec{F} \cdot \delta \vec{r} \\
 &= \vec{F} \cdot \left(\frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q} \delta q \right).
 \end{aligned} \tag{1.20}$$

Sachant que

$$F_q = \vec{F} \cdot \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial q}, \tag{1.21}$$

nous obtenons

$$\delta W = F_q \delta q. \quad (1.22)$$

En utilisant maintenant la relation fondamentale de la dynamique nous écrivons δW sous la forme

$$\delta W = m \left(\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} \right) \delta q$$

Nous donnons quelques relations utiles

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \frac{d\vec{OM}}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} \frac{dq}{dt} \\ &= \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} \dot{q} \end{aligned} \quad (1.23)$$

ce qui donne

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q}, \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} \right) &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} + \vec{v} \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} \right) \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} + \vec{v} \cdot \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{d\vec{OM}}{dt} \right) \\ &= \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{OM}}{\partial q} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Il en résulte

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \vec{v}^2 \right) &= \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{1}{2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \\ &= \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}, \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) &= \frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\vec{v} \cdot \vec{v}\right) \\ &= \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}.\end{aligned}\tag{1.28}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}}\right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q}\tag{1.29}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)\tag{1.30}$$

Compte tenu des résultats obtenus ci-dessus, le travail infinitésimal prend la nouvelle forme

$$\begin{aligned}\delta W &= m \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}\vec{v}^2\right) \right] \delta q \\ &= \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right)\right) - \frac{\partial}{\partial q}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2\right) \right] \delta q\end{aligned}\tag{1.31}$$

Sachant que l'énergie cinétique est donnée par

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2,\tag{1.32}$$

l'expression du travail δW devient

$$\delta W = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} \right] \delta q.\tag{1.33}$$

Résultats : Par identification des expressions (1.22) et (1.33) du travail δW , nous obtenons enfin l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = F_q.\tag{1.34}$$

1.3.1 Systèmes conservatifs

Dans le cas d'un système conservatif³ ;

$$F_q = -\frac{\partial U}{\partial q}, \quad (1.35)$$

l'expression (15) devient

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial U}{\partial q}. \quad (1.36)$$

Sachant que

$$\frac{\partial U}{\partial \dot{q}} = 0, \quad (1.37)$$

nous pouvons écrire

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial U}{\partial \dot{q}}\right) - \left(\frac{\partial T}{\partial q} - \frac{\partial U}{\partial q}\right) = 0. \quad (1.38)$$

En posant

$$L = T - U, \quad (1.39)$$

nous obtenons enfin l'équation de Lagrange pour les systèmes conservatifs

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0, \quad (1.40)$$

où L est appelé lagrangien du système.

1.3.2 Systèmes non conservatifs (dissipatifs)

Considérons un système soumis à des forces de frottements fluides ayant la forme

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}, \quad (1.41)$$

³La force qui agit sur le système dérive d'une énergie potentielle

où α est le coefficient de frottements⁴. La force généralisée s'écrit alors

$$\begin{aligned}
 f_q &= \vec{f} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial q} \\
 &= -\alpha \vec{v} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial q} \\
 &= -\alpha \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial q} \\
 &= -\alpha \left(\frac{\overrightarrow{OM}}{\partial q} \frac{dq}{dt} \right) \cdot \frac{\overrightarrow{OM}}{\partial q} \\
 &= -\alpha \left[\frac{\overrightarrow{OM}}{\partial q} \right]^2 \frac{dq}{dt} \\
 &= -\beta \dot{q}.
 \end{aligned} \tag{1.42}$$

L'équation de Lagrange prend alors la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = -\beta \dot{q}. \tag{1.43}$$

A ce stade, il convient de définir la fonction de dissipation \mathfrak{D} . Commençons par le calcul du travail dW_f fourni par la force de frottement pendant un intervalle de temps dt

$$\begin{aligned}
 dW_f &= \vec{f} \cdot d\vec{r} \\
 &= -\alpha \vec{v} \cdot d\vec{r} \\
 &= -\alpha \vec{v}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{1.44}$$

La chaleur dégagée est alors donnée par

$$\begin{aligned}
 dQ &= -dW \\
 &= \alpha \vec{v}^2 dt.
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

⁴Le coefficient de frottements fluides dépend de la viscosité du fluide

La puissance dissipée par les forces de frottements sous forme de chaleur, notée P_{diss} , est donnée par l'expression

$$\begin{aligned}
P_{diss} &= \frac{dQ}{dt} \\
&= \alpha \vec{v}^2 \\
&= \alpha \left[\frac{d\vec{r}}{dt} \right]^2 \\
&= \alpha \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \frac{dq}{dt} \right]^2 \\
&= \alpha \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q} \right)^2 \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \\
&= \beta \dot{q}^2.
\end{aligned} \tag{1.46}$$

Par définition, la fonction de dissipation est définie comme le demi de la puissance dissipée. Il s'ensuit

$$\mathfrak{D} = \frac{1}{2} \beta \dot{q}^2. \tag{1.47}$$

Il est facile de voir que

$$f_q = - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{q}}. \tag{1.48}$$

L'équation de Lagrange pour un système dissipatif s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = - \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{q}}, \tag{1.49}$$

ou

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{q}} = 0. \tag{1.50}$$

Si en plus de la force des frottements, il existe une force extérieure dépendant du temps $\vec{F}_{ext}(t)$, nous écrivons l'équation de Lagrange sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = f_q + F_{ext,q}(t) \tag{1.51}$$

ou

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{q}} = F_{ext,q}(t), \quad (1.52)$$

où $F_{ext,q}(t)$ est q -composante de la force extérieure $\vec{F}_{ext}(t)$.

1.3.3 Systèmes à N degrés de liberté

Dans le cas d'un système à N degrés de liberté, c'est-à-dire N coordonnées généralées (N variables indépendantes), nous obtenons N équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial \dot{q}_i} = F_{ext,q_i}(t), \quad (i = 1, \dots, N). \quad (1.53)$$

Chapitre 2

Généralités sur le mouvement d'oscillation

2.1 Introduction :

Les *systèmes oscillants* sont d'une variété impressionnante, rares sont les domaines de la physique dans lesquels ils ne jouent pas un rôle important. En voici quelques exemples : la corde vocale, le coeur humain, la balançoire, le circuit électrique oscillant, les électrons dans les atomes, les cordes en physique des particules

En acoustique, la production, le transport, et la perception des sons mettent en jeu des oscillateurs mécaniques, acoustiques et électriques. Nous allons étudier les oscillations de quelques systèmes oscillants simples, mécaniques et électriques.

Un oscillateur est un système physique manifestant la variation d'une grandeur physique de part et d'autre d'un *état d'équilibre stable*. Si les variations se reproduisent identiques à elles mêmes, l'oscillateur est dit périodique.

Un oscillateur est harmonique si la variation de la grandeur physique est une fonction sinusoïdale du temps.

2.2 Conditions d'oscillation

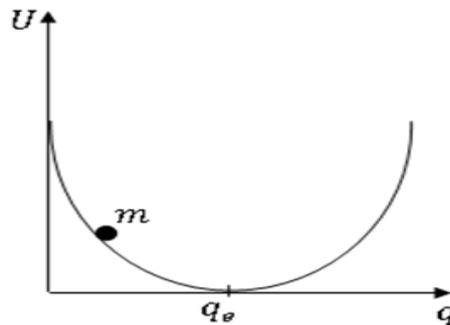
Considérons le mouvement d'une masse ponctuelle m repéré par la coordonnée généralisée q . L'énergie potentielle $U(q)$ de la masse ne dépend que de la coordonnée q . La position particulière q_e pour laquelle l'énergie potentielle est extrémale est appelée position d'équilibre et on écrit

$$\left. \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right|_{q=q_e} = 0. \quad (2.1)$$

Si à la position d'équilibre q_e , l'énergie potentielle présente un minimum (figure1) et on écrit

$$\left. \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_e} > 0, \quad (2.2)$$

alors l'équilibre est stable.

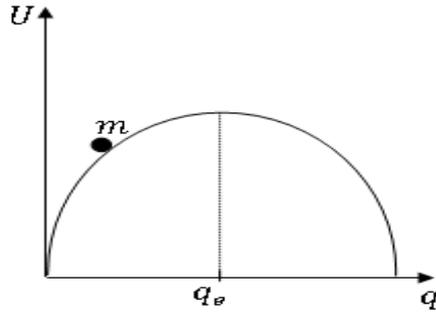


Equilibre stable

Si, par contre, à la position d'équilibre l'énergie potentielle présente un maximum (figure2) et on écrit

$$\left. \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_e} < 0, \quad (2.3)$$

l'équilibre est dit instable.



Equilibre instable

Il est facile de voir que, contrairement au cas de l'équilibre instable où la masse une fois quittée sa position d'équilibre, elle n'y reviendra jamais, dans le cas de l'équilibre stable, quand la masse quitte sa position d'équilibre, elle y reviendra et elle restera en mouvement de va et vient autour de cette position ; c'est la définition du mouvement d'oscillation. On peut alors définir les conditions d'oscillation comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equilibre : } \left. \frac{\partial U(q)}{\partial q} \right|_{q=q_e} = 0 \\ \text{Stabilité : } \left. \frac{\partial^2 U(q)}{\partial q^2} \right|_{q=q_e} > 0 \end{array} \right. . \quad (2.4)$$

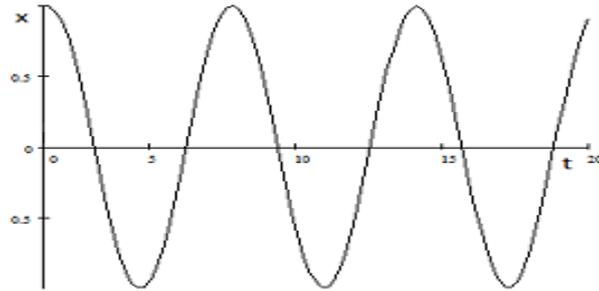
2.3 Oscillateur linéaire

2.3.1 Équations différentielles linéaires

On va étudier, dans ce qui suit, des systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes dont la dynamique est déterminée par une équation différentielle linéaire dans la variable temps t , ou par un système de telles équations. Le cas le plus simple est celui d'une équation d'ordre 2,

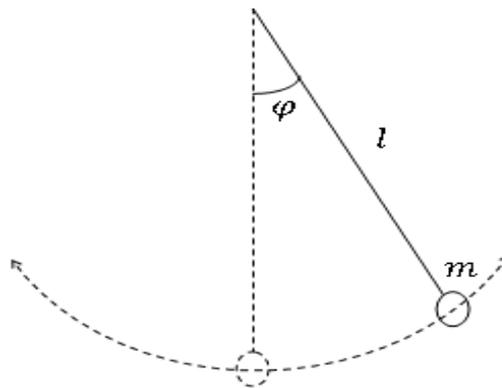
$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = C(t) \quad (2.5)$$

où A , B et C sont données et indépendantes de la variable dynamique x .



2.3.2 Oscillateur harmonique libre

Quand un objet est en oscillation, il passe continuellement d'un côté à l'autre d'une position appelée la position d'équilibre stable. Ce pourrait être, par exemple, un pendule simple ou pendule oscillant. Dans ce cas, la masse passe alternativement d'un côté à l'autre de la position d'équilibre, qui est au point le plus bas du mouvement du pendule.



Si on pose que la position d'équilibre est à $x = 0$, cela signifie que la position prend alternativement des valeurs positives et négatives. Le graphique de la position de l'objet en fonction du temps pourrait donc ressembler au graphique suivant.

Le graphique peut prendre une multitude de formes. La seule chose qui indique qu'il y a une oscillation c'est l'alternance entre les valeurs positives et négatives. Il y a cependant un cas particulier très important : le mouvement d'oscillation décrit par une fonction sinusoïdale.

L'équation caractérisant cette situation s'obtient simplement en écrivant la relation fondamentale de la dynamique appliquée à ce système ou en utilisant l'équation d'Euler-Lagrange, ce qui donne la forme générale de l'équation différentielle

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (2.6)$$

La solution de cette équation est

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (2.7)$$

où A , ω_0 et ϕ sont des constantes positives appelées respectivement amplitude des oscillations, pulsation propre et phase initiale. La période des oscillations T et la fréquence f sont définies à partir de la pulsation telles que

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \implies f = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (2.8)$$

L'amplitude A du mouvement permet d'ajuster la hauteur du cosinus. Normalement, un cosinus a une valeur maximale de 1 et une valeur minimale de -1. En multipliant par A , le cosinus aura alors une valeur maximale de A et une valeur maximale de $-A$. Cette amplitude indique la plus grande distance qu'il peut y avoir entre l'objet et la position d'équilibre.

La période T du mouvement indique le temps que prend l'objet pour faire un cycle d'oscillation. La fréquence f indique le nombre d'oscillations fait par l'objet en une seconde. Elle est mesurée en Hertz (Hz), qui sont des (s^{-1}).

Chapitre 3

Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

3.1 Systèmes non amortis

3.1.1 Oscillations mécaniques

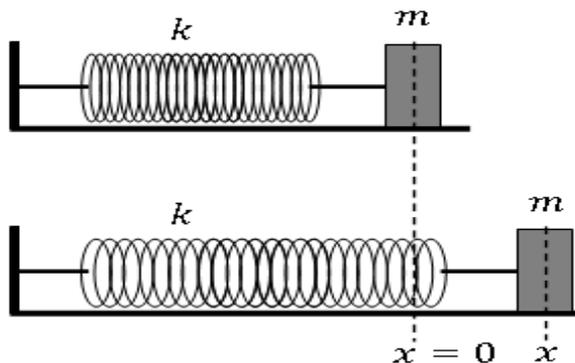
Introduction

Lorsque un système mécanique en mouvement d'oscillations n'est soumis à aucune force d'excitation extérieure, les oscillations sont dites libres. L'étude d'un tel système consiste d'abord à écrire l'équation du mouvement et déterminer ensuite la pulsation des oscillations pour enfin faire un bilan énergétique.

Equations de mouvement

Exemple 01 : Dispositif (masse + ressort) horizontal

Considérons un système constitué d'une masse m attachée à un ressort de constante de raideur k fixé à un bâti. La masse peut se mouvoir, sous l'effet de la force de rappel et sans frottements, sur un plan horizontal (voir la figure).



Pendule oscillant masse-ressort horizontal

Pour écrire l'équation du mouvement, nous allons utiliser le formalisme de Lagrange (Voir annexe) selon les étapes suivantes :

1- L'énergie cinétique de la masse est donnée par l'expression

$$T = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2, \quad (3.1)$$

où $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$ et $\vec{OM} = x\vec{i}$.

2- L'énergie potentielle

$$U = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2, \quad (3.2)$$

où Δx est l'allongement du ressort à l'équilibre.

3- Les conditions d'équilibre et de stabilité pour la position d'équilibre ($x = 0$) s'écrivent comme suit :

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \implies \Delta x = 0. \quad (3.3)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=0} = k > 0. \quad (3.4)$$

4- Le Lagrangien du système est défini par :

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

5- Le système en question est un système à 1ddl , nous avons donc une seule équation de Lagrange

$$\text{Système conservatif} \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0, \quad (3.6)$$

ceci donne

$$m\ddot{x} + kx = 0 \implies \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.7)$$

6- La solution de cette équation différentielle est une fonction sinusoidale, donnée par

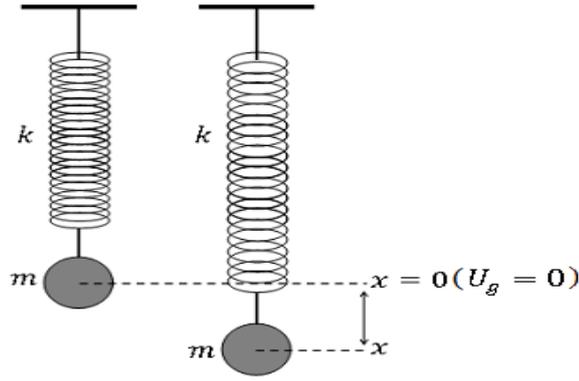
$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (3.8)$$

où ω_0 est la pulsation propre donnée par

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.9)$$

Exemple 02 : Dispositif (masse + ressort) vertical

La masse m est maintenant suspendue et elle peut se mouvoir suivant la verticale (voir la figure).



Pendule oscillant masse-ressort vertical

1- L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2. \quad (3.10)$$

2- L'énergie potentielle

$$U = U_k + U_g = \frac{1}{2}k(x + \Delta x)^2 - mgx, \quad (3.11)$$

3- Conditions d'équilibre et de stabilité

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \implies \Delta x = \frac{mg}{k}, \quad (3.12)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right|_{x=0} = k > 0. \quad (3.13)$$

4- Lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}k \left(x + \frac{mg}{k} \right)^2 + mgx. \quad (3.14)$$

5- Equation de Lagrange

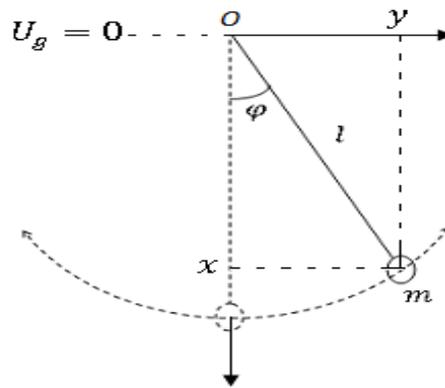
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies m\ddot{x} + k \left(x + \frac{mg}{k} \right) - mg = 0, \quad (3.15)$$

et nous obtenons la même équation que dans le cas précédent

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.16)$$

Exemple 03 : Pendule simple

Considérons un système constitué d'une masse ponctuelle m suspendue à un fil inextensible fixé au point O . La masse peut se mouvoir librement et sans frottements fluides dans le plan (Oxy) .



Pendule simple

1- L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2. \quad (3.17)$$

2- L'énergie potentielle

$$U = U_g = -mgl \cos \varphi. \quad (3.18)$$

3- Conditions d'équilibre et de stabilité ($\varphi = 0$ position d'équilibre)

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \varphi} \right|_{\varphi=0} = mgl \sin 0 = 0, \quad (3.19)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right|_{\varphi=0} = mgl \cos 0 = mgl > 0. \quad (3.20)$$

4- Comme les conditions d'équilibre et de stabilité sont vérifiées, le mouvement est alors un mouvement d'oscillation. Nous allons maintenant supposé que les oscillations sont de faibles amplitudes ce qui signifie de $\varphi \ll 1$, et par conséquent nous procédons à un développement limité à l'ordre 2 de l'énergie potentielle, ce qui donne

$$U \approx \frac{1}{2}mgl\varphi^2 - mgl. \quad (3.21)$$

5- Lagrangien

$$L = \frac{1}{2}m(l\dot{\varphi})^2 - \frac{1}{2}mgl\varphi^2 + mgl. \quad (3.22)$$

6- Equation de Lagrange

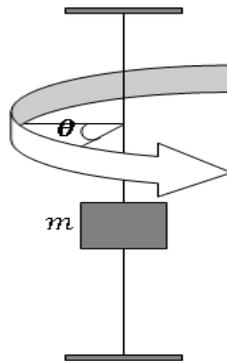
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \implies ml^2\ddot{\varphi} + mgl\varphi = 0, \quad (3.23)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0, \quad (3.24)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ est la pulsation.

Exemple 04 : Pendule de torsion

Considérons le pendule de torsion constitué d'un fil de torsion de constante de torsion τ auquel est attachée un corps rigide masse m et de moment d'inertie J par rapport à son axe de rotation.



Pendule de torsion

1- L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2. \quad (3.25)$$

2- L'énergie potentielle

$$U = U_\tau = \frac{1}{2}\tau\theta^2. \quad (3.26)$$

3- Lagrangien

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}\tau\theta^2. \end{aligned} \quad (3.27)$$

4- Equation de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \implies J\ddot{\theta} + \tau\theta = 0. \quad (3.28)$$

Nous obtenons l'équation différentielle relative au pendule de torsion ainsi que sa solution

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \text{ solution } \theta(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi), \quad (3.29)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{\tau}{J}}$ est la pulsation.

Bilan énergétique

a) **Pendule simple :** Calculons l'énergie cinétique et l'énergie potentielle

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \\ &= \frac{1}{2}m(-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi), \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2}kx^2 \\
&= \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi).
\end{aligned} \tag{3.31}$$

En calculant l'énergie mécanique du pendule simple, on constate que cette dernière est constante, en effet

$$\begin{aligned}
E &= T + U \\
&= \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}mA^2 \frac{k}{m} \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}kA^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}kA^2 (\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)) \\
&= \frac{1}{2}kA^2.
\end{aligned} \tag{3.32}$$

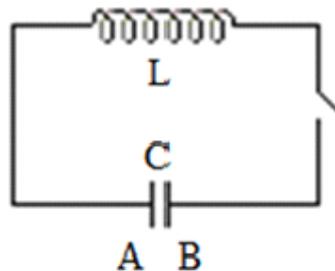
b) Pendule de torsion : L'énergie mécanique du pendule de torsion est conservée et elle est donnée par

$$\begin{aligned}
E &= T + U \\
&= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\tau\theta^2 \\
&= \frac{1}{2}JA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}\tau A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}JA^2 \frac{\tau}{J} \sin^2(\omega_0 t + \phi) + \frac{1}{2}\tau A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi) \\
&= \frac{1}{2}\tau A^2 (\sin^2(\omega_0 t + \phi) + \cos^2(\omega_0 t + \phi)) \\
&= \frac{1}{2}\tau A^2.
\end{aligned} \tag{3.33}$$

3.1.2 Oscillations électriques

Equation différentielle

Le montage suivant constitue un oscillateur électrique L, C. En l'absence de résistance on dit que l'oscillateur est non amorti. Etudions ce qui se passe lorsque, après avoir chargé le condensateur, on le relie à la bobine d'inductance L.

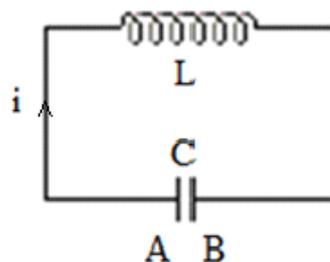


Circuit LC

Le condensateur est initialement chargé. L'armature A porte la charge Q positive, l'armature B porte la charge $(-Q)$. L'énergie potentielle initialement stockée par le condensateur sous forme électrostatique est :

$$E_C = \frac{Q^2}{2C}. \quad (3.34)$$

A l'instant $t = 0s$, on relie le condensateur chargé à la bobine.



La deuxième loi de Kirchhoff (loi des mailles)¹ s'écrit :

$$U_C + U_L = 0. \quad (3.35)$$

Exprimons ces différentes tensions :

$$U_C = \frac{q}{C}, \quad U_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } i = \frac{dq}{dt}. \quad (3.36)$$

Portons ces expressions dans l'équation (3.35)

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} = 0. \quad (3.37)$$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, nous obtenons l'équation différentielle de la charge

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \quad (3.38)$$

C'est une équation différentielle du second ordre avec des coefficients constants et sans second membre, sa solution est

$$q(t) = Q \cos(\omega_0 t + \phi). \quad (3.39)$$

La période propre T et la fréquence propre f des oscillations non amorties sont données par

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}, \\ f &= \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

¹Dans une maille d'un réseau électrique, la somme des tensions le long de cette maille est toujours nulle

Bilan énergétique :

L'énergie électromagnétique du circuit se conserve, cela s'écrit :

$$\begin{aligned} E &= E_C + E_L \\ &= \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2 \\ &= \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} L \dot{q}^2 \\ &= \frac{1}{2C} Q^2. \end{aligned} \tag{3.41}$$

Cette énergie, initialement stockée dans le condensateur, passe progressivement dans la bobine puis de la bobine dans le condensateur et le cycle recommence.

3.1.3 Analogie électro-mécanique :

Il est intéressant d'établir des analogies entre système mécanique et système électrique. En comparant l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique, on trouve l'analogie représentée ci-après. En utilisant cette analogie, il est parfois possible et plus simple de modéliser un système mécanique complexe par un ensemble d'oscillateurs électriques couplés afin de décrire son comportement.

Système mécanique	Système électrique
Ecart par rapport à la position d'équilibre $x(t)$	Charge électrique du condensateur $q(t)$
Vitesse $v(t)$	Intensité du courant dans le circuit $i(t)$
Masse en mouvement m	Inductance de la self L
Raideur du ressort k	Inverse de la capacité du condensateur $1/C$
Force F	Différence de potentiel v

3.1.4 Exercices résolus

Exercice 01 :

La figure (1-a) représente un système mécanique constitué d'une tige homogène de masse M et de longueur L qui oscille dans le plan xOy . En un point A de la tige on attache un ressort de constante de raideur k . A l'équilibre la tige est verticale $\theta = 0$.

- 1) Ecrire le vecteur position de la tige.
 - 2) Déterminer l'énergie cinétique, l'énergie potentielle du système et vérifier les conditions d'équilibre et de stabilité. Quelle est la déformation du ressort à l'équilibre.
 - 3) Dédire l'équation différentielle du mouvement ainsi que la pulsation propre ω .
 - 4) Résoudre cette équation avec les conditions initiales $\theta(0) = 0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.
- (*Répondre aux mêmes questions pour les systèmes représentés par les figures (1-b) et (1-c).

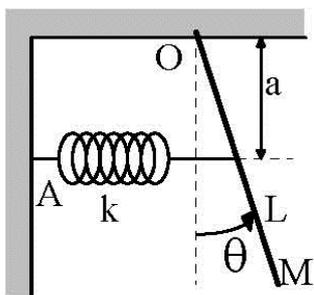


Figure (1-a)

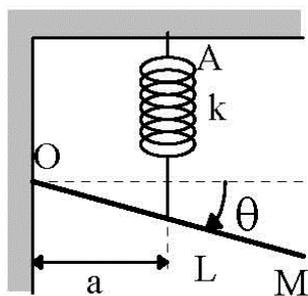


Figure (1-b)

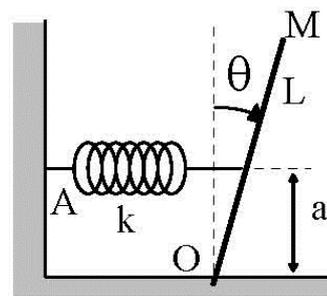
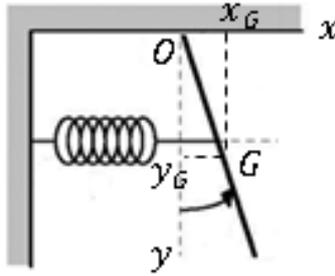


Figure (1-c)

Solution :

Le premier cas : système de la figure (1-a)



1) Vecteur position

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} \\ &= \frac{L}{2} \sin \theta \vec{i} + \frac{L}{2} \cos \theta \vec{j}.\end{aligned}\quad (3.42)$$

2) L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} M L^2 \right) \dot{\theta}^2, \quad (3.43)$$

L'énergie potentielle (l'axe ox est référence de l'énergie potentielle gravitationnelle)

$$\begin{aligned}U &= U_g + U_k \\ &= -Mg \frac{L}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k (x + x_0)^2 \\ &= -Mg \frac{L}{2} \cos \theta + \frac{1}{2} k (a \sin \theta + x_0)^2.\end{aligned}\quad (3.44)$$

La conditions d'équilibre

$$\theta \text{ position d'équilibre} \iff \left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0, \quad (3.45)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = Mg \frac{L}{2} \sin \theta + ka \cos \theta (a \sin \theta + x_0), \quad (3.46)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = kax_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0. \quad (3.47)$$

La condition de stabilité

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = Mg \frac{L}{2} \cos \theta + ka \cos 2\theta, \quad (3.48)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} = Mg \frac{L}{2} + ka > 0. \quad (3.49)$$

Il en résulte que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. En admettant que le mouvement est oscillatoire à faibles amplitudes (l'angle θ est très petit), l'énergie potentielle prend la nouvelle forme

$$U \approx \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MgL + ka \right) \theta^2 - Mg \frac{L}{2} \quad (3.50)$$

3) Pour écrire l'équation du mouvement, nous commençons par l'expression du Lagrangien L

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{6} ML^2 \dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} MgL + ka \right) \theta^2 + Mg \frac{L}{2}. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Le système est conservatif, l'équation de Lagrange s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (3.52)$$

il s'ensuit

$$\frac{1}{3} ML^2 \ddot{\theta} + \left(\frac{1}{2} MgL + ka \right) \theta = 0, \quad (3.53)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{\frac{1}{2} MgL + ka}{\frac{1}{3} ML^2} \theta = 0. \quad (3.54)$$

Nous obtenons enfin l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.55)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}MgL+ka}{\frac{1}{3}ML^2}}$ est la pulsation propre des oscillations.

Le deuxième cas : système de la figure (1-b)

1) Vecteur position

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG} &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} \\ &= \frac{L}{2} \cos \theta \vec{i} + \frac{L}{2} \sin \theta \vec{j}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

2) L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\theta}^2, \quad (3.57)$$

L'énergie potentielle (l'axe ox est référence de l'énergie potentielle gravitationnelle)

$$\begin{aligned}U &= U_g + U_k \\ &= -Mg\frac{L}{2}y_G + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 \\ &= -Mg\frac{L}{2}\sin \theta + \frac{1}{2}k(a \sin \theta + x_0)^2.\end{aligned}\quad (3.58)$$

La conditions d'équilibre

$$\theta \text{ position d'équilibre} \iff \left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = 0, \quad (3.59)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -Mg\frac{L}{2}\cos \theta + ka \cos \theta (a \sin \theta + x_0), \quad (3.60)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \theta}\right|_{\theta=0} = -Mg\frac{L}{2} + kax_0 = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{MgL}{2ka}. \quad (3.61)$$

La condition de stabilité

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right| = Mg\frac{L}{2}\sin \theta + ka^2 \cos 2\theta - kax_0 \sin \theta, \quad (3.62)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=0} = ka^2 > 0. \quad (3.63)$$

Il en résulte que $\theta = 0$ est une position d'équilibre stable. En admettant que le mouvement est oscillatoire à faibles amplitudes (l'angle θ est très petit), l'énergie potentielle prend la nouvelle forme

$$U \approx \frac{1}{2}ka^2\theta^2 + \frac{M^2g^2L^2}{8ka^2} \quad (3.64)$$

3) Pour écrire l'équation du mouvement, nous commençons par l'expression du Lagrangien L

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}ka^2\theta^2 - \frac{M^2g^2L^2}{8ka^2}. \end{aligned} \quad (3.65)$$

Le système est conservatif, l'équation de Lagrange s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (3.66)$$

il s'ensuit

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + ka^2\theta = 0, \quad (3.67)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{ka^2}{\frac{1}{3}ML^2}\theta = 0. \quad (3.68)$$

Nous obtenons enfin l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0, \quad (3.69)$$

où $\omega_0 = \sqrt{\frac{ka^2}{\frac{1}{3}ML^2}}$ est la pulsation propre des oscillations.

Le troisième cas : système de la figure (1-c)

1) Vecteur position

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OG} &= x_G \vec{i} + y_G \vec{j} \\ &= \frac{L}{2} \sin \theta \vec{i} + \frac{L}{2} \cos \theta \vec{j}. \end{aligned} \quad (3.70)$$

2) L'énergie cinétique

$$T = \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ML^2\right)\dot{\theta}^2, \quad (3.71)$$

L'énergie potentielle (l'axe ox est référence de l'énergie potentielle gravitationnelle)

$$\begin{aligned} U &= U_g + U_k \\ &= -Mg\frac{L}{2}y_G + \frac{1}{2}k(x + x_0)^2 \\ &= Mg\frac{L}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}k(a\sin\theta + x_0)^2. \end{aligned} \quad (3.72)$$

La conditions d'équilibre

$$\theta \text{ position d'équilibre} \iff \left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = 0, \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial U}{\partial\theta} = -Mg\frac{L}{2}\sin\theta + ka\cos\theta(a\sin\theta + x_0), \quad (3.74)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial\theta}\right|_{\theta=0} = kax_0 = 0 \Rightarrow x_0 = 0. \quad (3.75)$$

La condition de stabilité

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right| = -Mg\frac{L}{2}\cos\theta + ka\cos 2\theta, \quad (3.76)$$

$$\left.\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=0} = -Mg\frac{L}{2} + ka > 0. \quad (3.77)$$

Il en résulte la condition de stabilité

$$k > \frac{MgL}{2a}$$

En admettant que le mouvement est oscillatoire à faibles amplitudes (l'angle θ est très

petit), l'énergie potentielle prend la nouvelle forme

$$U \approx \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}MgL + ka \right) \theta^2 + Mg\frac{L}{2} \quad (3.78)$$

3) Pour écrire l'équation du mouvement, nous commençons par l'expression du Lagrangien L

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{6}ML^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2} \left(ka - \frac{1}{2}MgL \right) \theta^2 + Mg\frac{L}{2}. \end{aligned} \quad (3.79)$$

Le système est conservatif, l'équation de Lagrange s'écrit alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (3.80)$$

il s'ensuit

$$\frac{1}{3}ML^2\ddot{\theta} + \left(ka - \frac{1}{2}MgL \right) \theta = 0, \quad (3.81)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{ka - \frac{1}{2}MgL}{\frac{1}{3}ML^2} \theta = 0. \quad (3.82)$$

Nous obtenons enfin l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0, \quad (3.83)$$

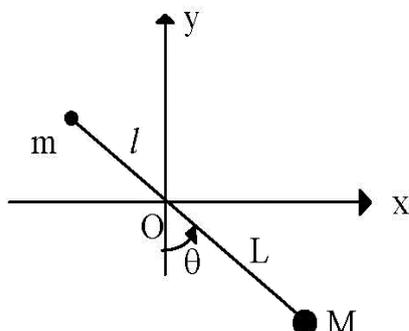
où $\omega_0 = \sqrt{\frac{ka - \frac{1}{2}MgL}{\frac{1}{3}ML^2}}$ est la pulsation propre des oscillations.

Exercice 02 :

Un métronome est schématisé sur la figure ci-contre. La masse M est soudée à l'extrémité de la tige. La position de la masse m sur la tige peut être réglée. La tige est supposée de masse négligeable ; elle est mobile sans frottements autour de O . La masse M étant en bas, on l'écarte d'un angle θ_0 petit et on l'abandonne sans vitesse initiale.

1) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour qu'il puisse osciller ?

- 2) Déterminer l'expression de la période pour des oscillations de faibles amplitudes.
 3) On veut augmenter la période d'oscillation du métronome. Faut-il rapprocher ou éloigner la masse m du point O ?



Solution :

- 1) Les conditions d'oscillation autour de la position $\theta = 0$ sont

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = 0 \text{ et } \left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} > 0 . \quad (3.84)$$

L'énergie potentielle du système est

$$\begin{aligned} U &= mgl \cos \theta - MgL \cos \theta \\ &= (ml - ML) g \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.85)$$

A la position d'équilibre la dérivée doit être nulle

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -(ml - ML) g \sin \theta. \quad (3.86)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial \theta} \right|_{\theta=0} = -(ml - ML) g \sin 0 = 0. \quad (3.87)$$

Pour vérifier la condition de stabilité on calcule la deuxième dérivée

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -(ml - ML) g \cos \theta, \quad (3.88)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow -(ml - ML)g > 0. \quad (3.89)$$

La condition de stabilité est donc

$$ML - ml > 0. \quad (3.90)$$

2) Pour les oscillations de faibles amplitudes, l'énergie potentielle prend la forme

$$U \approx (ml - ML)g - \frac{1}{2}(ml - ML)g\theta^2. \quad (3.91)$$

L'énergie cinétique du système est

$$T = \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\dot{\theta}^2. \quad (3.92)$$

Le lagrangien du système

$$\begin{aligned} L &= T - U \\ &= \frac{1}{2}(ml^2 + ML^2)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}(ml - ML)g\theta^2 - (ml - ML)g. \end{aligned} \quad (3.93)$$

L'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0, \quad (3.94)$$

il en résulte

$$(ml^2 + ML^2)\ddot{\theta} + (ML - ml)g\theta = 0, \quad (3.95)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{(ML - ml)g}{(ml^2 + ML^2)}\theta = 0. \quad (3.96)$$

La pulsation propre des oscillations est

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{(ML - ml)g}{(ml^2 + ML^2)}}, \quad (3.97)$$

La période est donnée par

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{2\pi}{\omega_0} \\
 &= 2\pi \sqrt{\frac{(ML^2 + ml^2)}{(ML - ml)g}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.98}$$

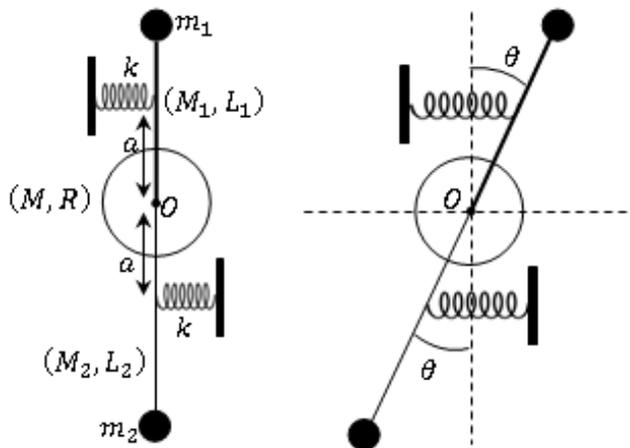
3) Pour augmenter la période des oscillations il faut éloigner la masse m du point O .
 En effet, d'après l'expression

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{(M\frac{L^2}{2} + m)l}{(M\frac{L}{l} - m)g}}
 \tag{3.99}$$

il est facile de constater que la période croît en fonction de l à condition que $M\frac{L}{l} - m > 0$.

Exercice 03 :

Considérons le système de la figure ci-dessous



- 1) Calculer l'énergie potentielle du système.
- 2) Quelle(s) condition(s) doit satisfaire le système pour osciller ?
- 3) Calculer l'énergie cinétique du système.
- 4) Ecrire l'équation de Lagrange pour les oscillations de faibles amplitudes. Déduire la pulsation propre des oscillations.

Solution :

1) L'énergie potentielle du système

$$U = \frac{1}{2}k(a \sin \theta)^2 + \frac{1}{2}k(a \sin \theta)^2 + m_1gh_1 + M_1gH_1 - m_2gh_2 - M_2gH_2, \quad (3.100)$$

où on a choisi l'axe horizontal qui passe par le point O comme référence de l'énergie potentielle gravitationnelle, ce qui permet d'écrire $h_1 = L_1 \cos \theta$, $h_2 = L_2 \cos \theta$, $H_1 = \frac{L_1}{2} \cos \theta$ et $H_2 = \frac{L_2}{2} \cos \theta$. On écrit alors

$$U = k(a \sin \theta)^2 + \left(m_1l_1 + M_1\frac{L_1}{2} - m_2l_2 - M_2\frac{L_2}{2} \right) g \cos \theta. \quad (3.101)$$

2) La condition d'oscillation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = 2ka^2 \cos 2\theta - \left(m_1l_1 + M_1\frac{L_1}{2} - m_2l_2 - M_2\frac{L_2}{2} \right) g \cos \theta, \quad (3.102)$$

$$\left. \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right|_{\theta=0} > 0 \Rightarrow 2ka^2 - \left(m_1l_1 + M_1\frac{L_1}{2} - m_2l_2 - M_2\frac{L_2}{2} \right) g > 0. \quad (3.103)$$

3) L'énergie cinétique du système

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(L_1\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}m_2(L_2\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M_1L_1^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}M_2L_2^2\right)\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\dot{\theta}^2 \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(m_1 + \frac{1}{3}M_1\right)L_1^2 + \left(m_2 + \frac{1}{3}M_2\right)L_2^2 + \frac{1}{2}MR^2\right]\dot{\theta}^2. \end{aligned} \quad (3.104)$$

4) Le lagrangien du système pour des oscillations de faibles amplitudes

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left[\left(m_1 + \frac{1}{3}M_1\right)L_1^2 + \left(m_2 + \frac{1}{3}M_2\right)L_2^2 + \frac{1}{2}MR^2\right]\dot{\theta}^2 - \left(m_1l_1 + M_1\frac{L_1}{2} - m_2l_2 - M_2\frac{L_2}{2}\right)g \\ &\quad - \left[ka^2 - \frac{1}{2}\left(m_1l_1 + M_1\frac{L_1}{2} - m_2l_2 - M_2\frac{L_2}{2}\right)g\right]\theta^2 \end{aligned} \quad (3.105)$$

L'équation de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$ donne

$$\ddot{\theta} + \frac{[2ka^2 - (m_1 l_1 + M_1 \frac{L_1}{2} - m_2 l_2 - M_2 \frac{L_2}{2}) g]}{[(m_1 + \frac{1}{3} M_1) L_1^2 + (m_2 + \frac{1}{3} M_2) L_2^2 + \frac{1}{2} M R^2]} \theta = 0, \quad (3.106)$$

c'est l'équation différentielle du mouvement où

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{[2ka^2 - (m_1 l_1 + M_1 \frac{L_1}{2} - m_2 l_2 - M_2 \frac{L_2}{2}) g]}{[(m_1 + \frac{1}{3} M_1) L_1^2 + (m_2 + \frac{1}{3} M_2) L_2^2 + \frac{1}{2} M R^2]}} \quad (3.107)$$

est la pulsation propre des oscillations.

3.2 Systèmes amortis :

3.2.1 Introduction

Dans un système physique réel, il y a toujours

- des frottements qui s'opposent au mouvement dans les systèmes mécaniques
- des résistances qui s'opposent au passage du courant dans les systèmes électriques.

En pratique, il faut donc tenir compte de l'amortissement qui a pour effet de diminuer la quantité d'énergie présente dans le système en la convertissant en chaleur. Le système est alors dit dissipatif. L'énergie dans le système évolue de façon non réversible. L'analyse d'un problème de vibration passe par une simplification dans laquelle les éléments essentiels de l'oscillateur sont identifiés. On ramène si possible le système à un ensemble de 3 éléments :

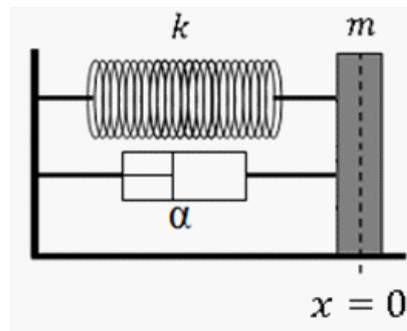
- l'élément élastique (symbole k)
- une masse équivalente m (aux masses réparties ou ponctuelles),
- des frottements dans les liaisons entre les divers éléments du système ou interne à la structure.

3.2.2 Oscillations mécaniques :

Dans un système mécanique, les frottements secs (le frottement entre deux corps solides en mouvement) peuvent être pratiquement supprimés par lubrification adéquate. Il subsiste alors un amortissement par frottement fluide qui ne peut pas être négligé. L'amortissement fluide ou visqueux se manifeste par une force proportionnelle à la vitesse, de coefficient α :

$$\vec{f} = -\alpha\vec{v}. \quad (3.108)$$

Dans la figure ci-après, une représentation d'un système masse-ressort, amorti par le frottement fluide. L'état de l'oscillateur est défini par l'écart $x(t)$ de la masse par rapport à une position d'origine $x = 0$ correspondant à la position d'équilibre statique.



Système masse-ressort horizontal sous l'action d'une force de frottements fluides

L'équation de mouvement de ce système s'obtient en injectant le terme relatif à la force de frottements (force généralisée) dans l'équation d'Euler-Lagrange du système non amorti, nous écrivons alors

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = -\alpha \dot{x}, \quad (3.109)$$

et nous obtenons l'équation différentielle suivante

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \quad (3.110)$$

ou

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0. \quad (3.111)$$

En posant

$$\gamma = \frac{\alpha}{2m} \text{ et } \omega_0^2 = \frac{k}{m}, \quad (3.112)$$

l'équation (3.111) prend la forme

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0. \quad (3.113)$$

On cherche une solution sous la forme suivante :

$$x(t) = Ae^{rt}. \quad (3.114)$$

Après remplacement dans l'équation différentielle (3.113) on obtient l'équation caractéristique pour r :

$$r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0. \quad (3.115)$$

Les solutions de cette équation du deuxième degré dépendent du discriminant réduit $\Delta' = \gamma^2 - \omega_0^2$. Ces solutions s'écrivent :

$$r = -\gamma \pm \sqrt{\Delta'} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (3.116)$$

ce qui donne la solution générale suivante pour $x(t)$

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}, \quad (3.117)$$

où les C_1 et C_2 sont définies par les conditions initiales (position et vitesse) : $x(t=0) = A$, $v(t=0) = v_0$.

On distingue 3 régimes en fonction de γ , c'est-à-dire de la quantité d'amortissement :

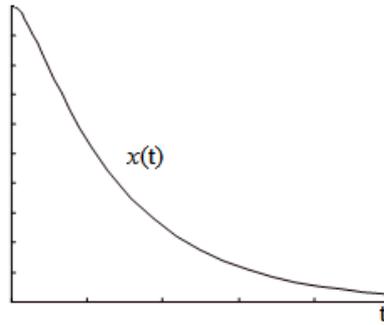
a) $\gamma > \omega_0$, l'équation (3.115) admet deux solutions réelles distinctes

$$r_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad r_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}, \quad (3.118)$$

et la solution de l'équation différentielle prend la forme

$$x(t) = C_1 e^{(-\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2})t}. \quad (3.119)$$

Dans ce cas, la réponse à une excitation est apériodique, le système n'oscille pas. C'est le régime **sur-amorti** (apériodique).

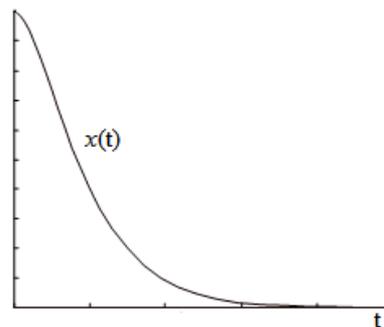


Régime sur-amorti

b) $\gamma = \omega_0$, l'équation (3.115) admet une solution réelle double $r = -\gamma$. La solution de l'équation (3.113) est

$$x(t) = (C_1 t + C_2) e^{-\gamma t}. \quad (3.120)$$

Le système après avoir été écarté de la position revient en un minimum de temps sans osciller. C'est le régime **critique**.



Régime critique d'un système amorti

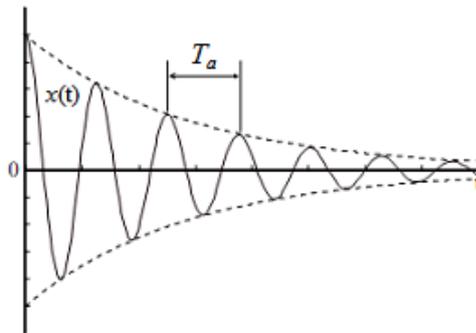
c) $\gamma < \omega_0$, nous avons deux solutions complexes,

$$r_1 = -\gamma + i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \quad r_2 = -\gamma - i\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}. \quad (3.121)$$

Un choix approprié des constantes C_1 et C_2 permet d'écrire la solution de l'équation différentielle sous la forme :

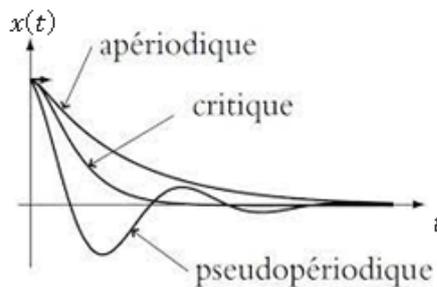
$$x(t) = A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \phi) = A(t) \cos(\omega_a t + \phi), \quad (3.122)$$

où $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ est la pseudo-pulsation. C'est le régime **pseudo-périodique** ou **sous-amorti** dans lequel on observe des oscillations mais avec une amplitude qui décroît dans le temps.



Régime sous-amorti ou pseudo-périodique

La figure ci-après résume les trois régimes d'un système amorti



Les trois régimes d'un système amorti (masse-ressort-amortisseur)

3.2.3 Grandeurs caractéristiques

Definition 3 *Pseudo-période*

On définit la pseudo-période T_a par :

$$\begin{aligned} T_a &= \frac{2\pi}{\omega_a} \\ &= T_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}}}. \end{aligned} \quad (3.123)$$

où $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Pour ω_0 donnée, la pseudo-période T_a est supérieure à la période propre T_0 et elle augmente quand le coefficient d'amortissement croît. En effet, $\omega_0^2 - \gamma^2 < \omega_0^2$ car $\gamma > 0$ et donc $\frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} > \frac{2\pi}{\omega_0}$, soit $T_a > T_0$.

Cas de l'amortissement très faible :

Par définition l'amortissement très faible correspond à un coefficient d'amortissement γ très petit tel que $\gamma \ll \omega_0$, dans ce cas $T_a \approx T_0$. En effet, rappelons que $(1 \pm \varepsilon)^\alpha \approx 1 \pm \alpha\varepsilon$, pour $\varepsilon \ll 1$ et $\forall \alpha$, par suite

$$T_a = T_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow T_a \approx T_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\gamma^2}{\omega_0^2} + \dots\right) \approx T_0, \text{ ici } \varepsilon = \frac{\gamma^2}{\omega_0^2}.$$

Definition 4 *Le décréement logarithmique*

On définit le décréement logarithmique δ par :

$$\delta = \ln \frac{A(t_n)}{A(t_n + T_a)}, \quad (3.124)$$

où $A(t_n)$ et $A(t_n + T_a)$ représentent les amplitudes des oscillations aux instants t_n et

$t_n + T_a$. Cette quantité mesure la décroissance des amplitudes. On montre facilement que

$$\delta = \gamma T_a = 2\pi \frac{\gamma}{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}. \quad (3.125)$$

Definition 5 *La constante de temps et le temps de relaxation*

Quelque soit le type de régime, l'amortissement des oscillations dépend du terme exponentiel $e^{-\gamma t}$, γ étant homogène à l'inverse d'un temps, on pose

$$\tau = \frac{1}{\gamma}, \quad (3.126)$$

où τ est une constante de temps, chaque fois qu'il s'écoule un intervalle de temps égal à τ , la valeur de l'exponentielle est divisée par 2, 7. En fait, on utilise la quantité τ_r appelée temps de relaxation défini par

$$\tau_r = \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2\gamma}, \quad (3.127)$$

qui est une quantité relative à l'énergie.

Definition 6 *Facteur de qualité*

On définit le facteur de qualité Q par l'expression

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \omega_0 \tau_r. \quad (3.128)$$

Plus l'amortissement est faible, plus la qualité du système est bonne. Or Q est d'autant plus grand, à ω_0 donné, que l'amortissement est faible, d'où le nom de facteur de qualité.

3.2.4 Oscillations électriques :

Dans le cas de l'oscillateur électrique amorti (circuit RLC), on obtient une équation analogue à celle d'un système mécanique, la force de frottement visqueux correspondant à la ddp aux bornes de la résistance R . En supposant qu'à l'instant initial le condensateur

contient une charge Q_0 , et que l'on ferme le circuit à cet instant, en appliquant la loi des mailles,

$$U_C + U_L + U_R = 0, \quad (3.129)$$

on a

$$\frac{q}{C} + L \frac{di}{dt} + Ri = 0. \quad (3.130)$$

En exprimant le courant i en fonction de la charge, on obtient :

$$\frac{q}{C} + L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = 0 \text{ ou } \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \quad (3.131)$$

On trouve donc une équation différentielle identique à celle obtenue pour l'oscillateur mécanique :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = 0, \quad (3.132)$$

où $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

Par un raisonnement identique au cas des oscillations mécaniques, on obtient les 3 régimes en fonction de la valeur de la résistance R : pseudopériodique, critique et suramorti. Dans le cas courant du régime pseudopériodique, la charge varie donc dans le temps suivant l'expression :

$$q(t) = Q_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \phi), \quad (3.133)$$

où $\omega_a = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}$ est la pseudo-pulsation.

3.2.5 Exercices

Exercice 01 :

Sur une poulie de rayon R et de masse M on soude une tige de masse m et de longueur l , comme le montre la figure 1 ci. L'ensemble (poulie+tige) est suspendu, en son centre, par une corde inextensible à un bati fixe. On fixe sur la périphérie de la poulie, de part

et d'autre, un ressort de constante de raideur k et un amortisseur α .

1) Déterminer les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.

2) Ecrire l'équation différentielle du mouvement.

3) Déterminer la période d'oscillation du système.

Exercice 02 :

La figure 2 représente un disque homogène de masse M , de rayon R qui peut osciller autour de son axe horizontal fixe O . Deux tiges de masses M_1 et M_2 de longueurs respectives L_1 et L_2 sont soudées au disque. A l'équilibre $\theta = 0$.

1. Déterminer l'énergie potentielle du système. Quel est l'allongement du ressort à l'équilibre ?

2. Quelle condition doit-on imposer à la constante de raideur k du ressort pour obtenir des oscillations ?

3. Calculer l'énergie cinétique du système ainsi que la fonction de dissipation

4. Etablir l'équation différentielle du mouvement pour les oscillations de faibles amplitudes.

5. On écarte l'une des tiges d'un angle θ_0 et on la relâche sans vitesse initiale. Quelle autre condition doit-on imposer au système pour avoir des oscillations ? Donner dans ce cas l'expression de $\theta(t)$.

Exercice 03 :

Dans le système représenté par la figure 3, la corde qui maintient la masse m est inextensible. Elle roule sans glisser sur la gorge de la poulie (M, R) . On prenant y comme variable généralisée.

1. Ecrire les variables y_0 et θ en fonction de y .

2. Déterminer les énergies cinétique et potentielle ainsi que la fonction de dissipation du système.

3. Etablir l'équation différentielle du mouvement.

4. Donner l'expression de $y(t)$ dans le cas où on écarte le système de sa position

d'équilibre et on le relâche sans vitesse initiale.

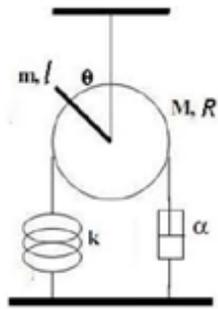


Figure 1

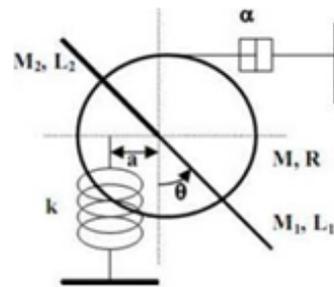


Figure 2

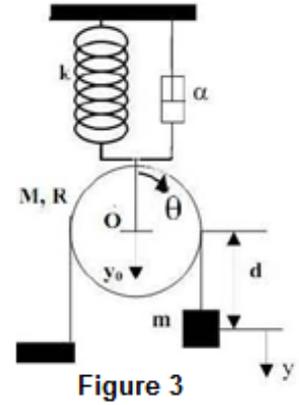


Figure 3

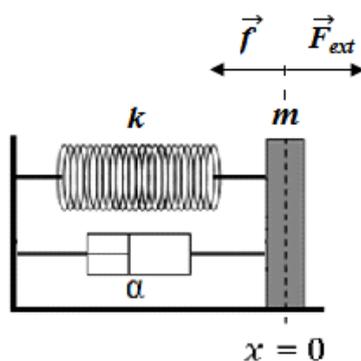
Chapitre 4

Oscillations Forcées des systèmes à un degré de liberté

4.1 Excitation sinusoïdale d'un oscillateur mécanique

Une masse m est reliée à un support rigide par l'intermédiaire d'un ressort idéal de raideur k et d'un amortisseur visqueux de coefficient de frottement α . La force excitatrice est donnée par

$$\vec{F}_{ext} = \vec{F}_0 \cos \omega t. \quad (4.1)$$



Système masse-ressort sous l'effet des frottements fluides soumis à une force d'excitation sinusoïdale

La forme sinusoïdale de la force ne constitue pas une limite à la généralité de l'étude, une fonction périodique pouvant toujours se ramener à une somme de fonctions sinusoïdales¹. Cette approche est d'une grande utilité dans de nombreuses situations : étude de circuits électriques, acoustiques, interaction lumière-matière On cherche $x(t)$, l'écart de la masse par rapport à sa position d'équilibre. En pratique, la réalisation de l'excitation peut se faire en imposant un mouvement sinusoïdal à l'extrémité du ressort attaché au support rigide.

4.2 Mise en équation de l'oscillateur amorti en régime forcé

Il convient comme dans le cas de l'oscillateur libre, de donner l'état du système par l'intermédiaire de son écart x par rapport à sa position d'équilibre. En suivant les étapes décrites dans le chapitre 2, on écrit l'équation

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos \omega t. \quad (4.2)$$

En reprenant la notation utilisée précédemment ($\gamma = \frac{\alpha}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$), et en posant $X_0 = \frac{F_0}{m}$, l'équation (4.2) prend la forme

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\gamma \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = X_0 \cos \omega t. \quad (4.3)$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants est la somme d'une solution générale de l'équation homogène (l'équation sans

¹La fonction périodique peut être ramenée à une somme de fonctions sinusoïdales par un développement en séries de Fourier

un second membre) et d'une solution particulière du type $x_p(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$, soit

$$\begin{aligned} x(t) &= x_h(t) + x_p(t) \\ &= A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \phi) + x_0 \cos(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Le premier terme de l'expression $A_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_a t + \phi)$ n'existe que pendant un régime transitoire dont la durée dépend de la quantité d'amortissement présent dans l'oscillateur. Cette durée est caractérisée par le temps de décroissance de l'énergie de déformation initiale en régime libre, soit : $\tau_r = \frac{1}{2\gamma}$.

Au bout d'un temps de quelques fois (4 à 5) τ_r , on peut considérer qu'on a un régime permanent auquel il convient de s'intéresser plus particulièrement. Les différents régimes des oscillations libres, en fonction de la valeur de $\gamma = \frac{\alpha}{2m}$ ont été obtenus dans le chapitre précédent. Le cas avec $\alpha = 0$, correspondant à l'absence d'amortissement, est irréaliste en pratique mais permet de définir une pulsation de référence ω_0 . Un régime de faible amortissement avec $\gamma \ll \omega_0$, est plus conforme à la réalité ; l'oscillation se caractérise alors par une pseudo-pulsation ω_a , peu différente de la pulsation de l'oscillateur libre ω_0 ($\omega_0 \approx \omega_a$). Lorsque l'excitation est permanente, la réponse du système est la solution particulière $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$. Cette solution s'applique d'autant plus vite que l'amortissement est important. ω est un paramètre que l'on fait varier ; X et φ dépendent de ω , k , α et m , mais ne dépendent pas des conditions initiales. Au début de l'excitation, on observe donc un **régime transitoire** pendant lequel les deux solutions coexistent. Le régime transitoire est suivi du **régime forcé permanent** (au bout d'un temps de 4 à 5 τ_r).

4.3 Amplitude et phase en régime permanent

Pour résoudre l'équation différentielle du régime permanent utilisons la représentation complexe

$$\tilde{x}(t) = x_0 e^{j(\omega t + \varphi)}. \quad (4.5)$$

En remplaçant dans l'équation (4.3), nous obtenons

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\gamma\omega] x_0 e^{j(\omega t + \varphi)} = X_0 e^{j\omega t}, \quad (4.6)$$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\gamma\omega] x_0 (\cos \varphi + j \sin \varphi) = X_0, \quad (4.7)$$

qui a la solution réelle suivante

$$x_0(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (4.8)$$

et le déphasage de ce mouvement de la masse m par rapport à la force d'excitation

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (4.9)$$

4.4 Etude des variations de l'amplitude et résonance d'élongation

L'étude des variations de l'amplitude $x_0(\omega)$ des oscillations forcées se fait en calculant $\frac{dx_0(\omega)}{d\omega}$

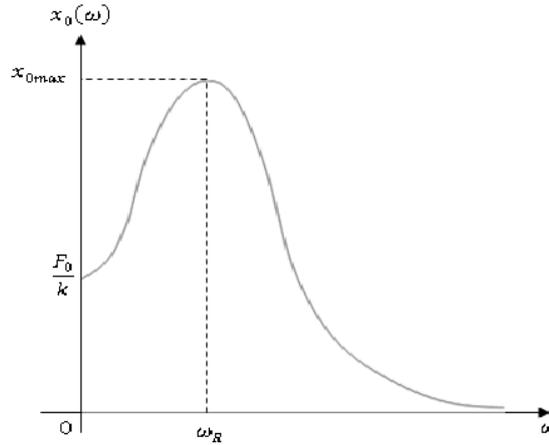
$$\begin{aligned} \frac{dx_0(\omega)}{d\omega} &= \frac{d}{d\omega} \left[\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \\ &= (F_0/m) \left[\left(-\frac{1}{2} \right) [2(-2\omega)(\omega_0^2 - \omega^2) + 8\gamma^2\omega] \right] \left[\left((\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2 \right) \right]^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

L'amplitude $x_0(\omega)$ présente des valeurs extrémales quand $\frac{dx_0(\omega)}{d\omega} = 0$, ceci donne

$$\omega = 0 \text{ ou } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}. \quad (4.11)$$

La valeur $\omega = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$ pour laquelle l'amplitude présente un maximum est

appelée pulsation de résonance et le phénomène est appelé résonance d'élongation.



Allure de la courbe de résonance d'élongation

Dans un but de généralisation, on introduit les paramètres relatifs sans dimension ci-après :

$$\hat{x}_0 = \frac{x_0(\omega)}{x_0(\omega=0)}, \Omega = \frac{\omega}{\omega_0}, \varepsilon = \frac{\alpha}{\alpha_c} = \frac{1}{2Q} \text{ où } \alpha_c = 2\sqrt{mk}. \quad (4.12)$$

Ce qui donne les nouvelles expressions

$$\hat{x}_0(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}} \text{ et } \varphi(\Omega) = \arctan\left(\frac{-2\varepsilon\Omega}{1-\Omega^2}\right). \quad (4.13)$$

Calculons maintenant la dérivée

$$\frac{d\hat{x}_0(\Omega)}{d\Omega} = -\frac{1}{2} [-4\Omega(1-\Omega^2) + 8\varepsilon^2\Omega] \left[(1-\Omega^2)^2 + (2\varepsilon\Omega)^2 \right]^{-\frac{3}{2}}. \quad (4.14)$$

Elle s'annule pour deux valeurs de Ω

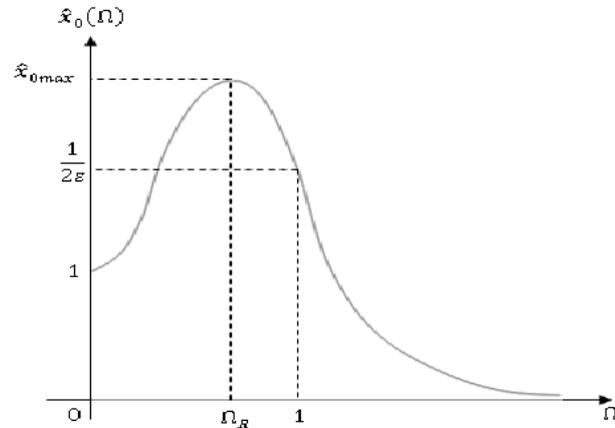
$$\Omega = 0 \text{ et } \Omega = \sqrt{1-2\varepsilon^2}. \quad (4.15)$$

Il est facile de voir que la deuxième valeur de Ω qui annule la dérivée $\frac{d\hat{x}_0(\Omega)}{d\Omega}$ ne peut exister que si $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce cas, pour $\Omega = \sqrt{1-2\varepsilon^2}$ l'amplitude sans dimension

\hat{x}_0 présente un maximum

$$\hat{x}_{0\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}, \quad (4.16)$$

comme le montre la figure suivante :



Courbe de variation de l'amplitude en fonction de la pulsation d'excitation en terme des paramètres sans dimension

4.5 Discussion :

- Il est facile de constater que, quelque soit l'amortissement (γ), $\hat{x}_0 = 1$ si $\Omega = 0$ et $\hat{x}_0 \rightarrow 0$ si $\Omega \rightarrow \infty$.
- Si l'amortissement est très faible ($\varepsilon^2 \ll 1$), la pulsation de résonance d'élongation $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\varepsilon^2}$ est confondue avec la pulsation propre ω_0 des oscillations libres ($\omega_R \approx \omega_0$). Nous obtenons alors $\hat{x}_{0\max} = \frac{1}{2\varepsilon} = Q$.
- Dans le cas où ε^2 n'est plus négligeable devant 1, la pulsation de résonance ω_R est $\omega_R = \omega_0\sqrt{1-2\varepsilon^2}$ avec $\varepsilon < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\hat{x}_{0\max} = \frac{1}{2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}}$.

4.6 Bilan de puissance

4.6.1 La puissance dissipée par les frottements

La puissance instantanée dissipée par les frottements exprimés par la force $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ est donnée par

$$\begin{aligned} P_{diss} &= \vec{f} \cdot \vec{v} \\ &= -\alpha \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= -\alpha \vec{v}^2 \\ &= -\alpha \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi). \end{aligned} \tag{4.17}$$

La puissance moyenne est

$$\begin{aligned} \langle P_{diss} \rangle &= \int_0^T [-\alpha \omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \varphi)] dt \\ &= (-\alpha \omega^2 x_0^2) \int_0^T \sin^2(\omega t + \varphi) dt \\ &= (-\alpha \omega^2 x_0^2) \int_0^T \frac{1}{2} (1 - \cos 2\omega t) dt \\ &= (-\alpha \omega^2 x_0^2) \frac{T}{2} \\ &= \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0} \frac{(\omega/Q\omega_0)^2}{\left[(1 - \omega^2/\omega_0^2)^2 + (\omega/Q\omega_0)^2 \right]}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

4.6.2 La puissance fournie par l'excitation

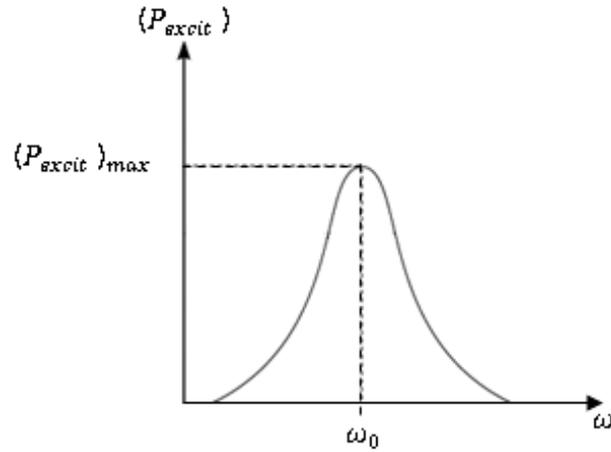
La puissance instantanée fournie par la force d'excitation au système est

$$\begin{aligned}
 P_{excit} &= \vec{F} \cdot \vec{v} \\
 &= -F_0 \omega x_0 \cos \omega t \sin(\omega t + \varphi) \\
 &= -F_0 \omega x_0 \cos \omega t [\cos \omega t \sin \varphi + \cos \varphi \sin \omega t] \\
 &= -F_0 \omega x_0 [\cos^2 \omega t \sin \varphi + \cos \varphi \cos \omega t \sin \omega t] \\
 &= -F_0 \omega x_0 \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cos \varphi \right]. \tag{4.19}
 \end{aligned}$$

La puissance moyenne est donnée par l'intégrale

$$\begin{aligned}
 \langle P_{excit} \rangle &= -F_0 \omega x_0 \int_0^T \left[\frac{1}{2} (1 + \cos 2\omega t) \sin \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\omega t \cos \varphi \right] dt \\
 &= -F_0 \omega x_0 \frac{T}{2} \sin \varphi \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0} \frac{(\omega / Q \omega_0)^2}{\left[(1 - \omega^2 / \omega_0^2)^2 + (\omega / Q \omega_0)^2 \right]}. \tag{4.20}
 \end{aligned}$$

Il est clair que $\langle P_{excit} \rangle + \langle P_{diss} \rangle = 0$. Ceci signifie que la puissance fournie au système par la force d'excitation compense la puissance dissipée par la force des frottements. La puissance moyenne fournie au système par la force d'excitation présente un maximum $\langle P_{excit} \rangle_{\max} = \frac{1}{2} \frac{Q F_0^2}{m \omega_0}$ pour une pulsation égale à la pulsation propre des oscillations libres ω_0 . C'est la résonance de puissance.

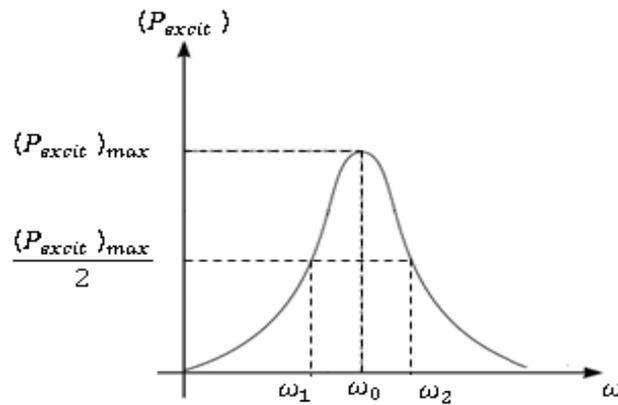


Allure de la courbe de résonance de puissance

4.7 Bande passante

Il est important de considérer la bande de pulsations d'excitation comprises entre deux valeurs particulières pour lesquelles la valeur moyenne de puissance fournie par la force d'excitation au système égale à $\langle P_{excit} \rangle = \frac{\langle P_{excit} \rangle_{max}}{2}$. En posant alors $\langle P_{excit} \rangle = \frac{\langle P_{excit} \rangle_{max}}{2}$ nous obtenons ces deux valeurs de la pulsation ω

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(\pm 1 + \sqrt{1 + 4Q^2} \right). \quad (4.21)$$



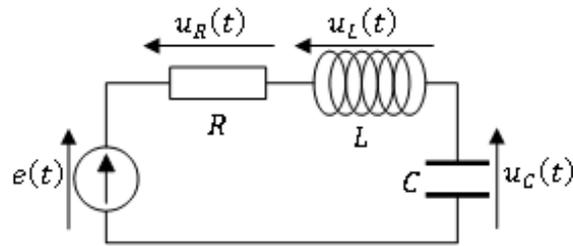
Bande passante

La largeur de la courbe de résonance de puissance à mi-hauteur appelée bande passante est définie par

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}. \quad (4.22)$$

4.8 Oscillations électriques

Considérons le circuit électrique représenté sur le dessin ci-après



Circuit (RLC)

L'application de la loi des mailles donne

$$u_L + u_R + u_C = e(t) \quad (4.23)$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = e(t), \quad i = \frac{dq}{dt} \quad (4.24)$$

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = e(t). \quad (4.25)$$

En choisissant une tension de la forme $e(t) = e_0 \cos \omega t$, l'équation (4.25) devient

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q =, \quad (4.26)$$

$$\ddot{q} + \frac{R}{L}\dot{q} + \frac{1}{LC}q = \frac{e_0}{L} \cos \omega t. \quad (4.27)$$

A ce niveau, il convient d'utiliser l'analogie avec le système mécanique décrit plus et nous écrivons la solution de l'équation différentielle de la charge en régime permanent

$$q(t) = q_0(\omega) \cos(\omega t + \varphi), \quad (4.28)$$

où

$$q_0(\omega) = \frac{e_0}{L\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}, \quad (4.29)$$

et

$$\varphi(\omega) = \arctan\left(\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \quad (4.30)$$

avec

$$\gamma = \frac{R}{2L} \text{ et } \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}. \quad (4.31)$$

La tension aux bornes du condensateur est

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{q(t)}{C} \\ &= \frac{e_0}{LC\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi) \\ &= e_0 \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (4.32)$$

avec les notations précédentes $\Omega = \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\varepsilon = \frac{1}{2Q}$. Autrement

$$\frac{u_C(t)}{e_0} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}} \cos(\omega t + \varphi). \quad (4.33)$$

Il est clair qu'à très basses fréquences ($f = \frac{\omega}{2\pi}$), l'inductance n'intervient pas est la tension aux bornes du condensateur tend vers la tension d'excitation.

On définit maintenant la fonction sans dimension $\hat{U} = \left| \frac{u_C(t)}{e_0} \right|$ donnée par l'expression

$$\hat{U}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - \Omega^2)^2 + (2\varepsilon\Omega)^2}}. \quad (4.34)$$

De manière identique au cas des oscillations mécaniques, on définit la bande passante

$$\Delta\omega = \frac{R}{L}. \quad (4.35)$$

4.9 Exercice :

Pour décrire l'interaction entre une onde lumineuse, caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$, et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié due à J. J. Thomson : l'électron est rappelé vers le centre O à l'atome par une force de rappel élastique isotrope $\vec{F}_R = -k\vec{OM}$, et il est freiné par une force de frottement visqueux linéaire (coefficient α). On précise que la force subie par une charge placée dans un champ électrique \vec{E} est $\vec{F} = q\vec{E}$. Le poids est négligeable. On notera $(-e)$ et m la charge et la masse de l'électron et on posera $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $2\gamma = \frac{\alpha}{m}$.

1-Etablir les équations du mouvement d'un électron quand il est excité par $\vec{E}(t)$.

2-Démontrer qu'en régime permanent, l'électron oscille parallèlement à \vec{e}_x .

3-Déterminer, en régime permanent, l'amplitude de $x(t)$ et celle de l'accélération $a_x(t)$.

4-Cet atome est éclairé par de la lumière visible (blanche), composée de champs ayant toutes les pulsations ω comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet), avec $\omega_2 = 2\omega_1$. Sachant que ω et γ sont tous les deux très inférieurs à ω_0 , montrer que dans ces conditions l'amplitude de $a_x(t)$ est proportionnelle à ω^2 .

5-Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance lumineuse proportionnelle au carré de son accélération, expliquer alors la couleur du ciel...

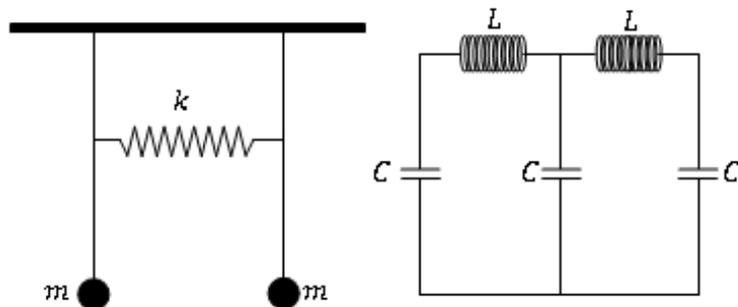
Chapitre 5

Oscillations des systèmes à deux degrés de liberté

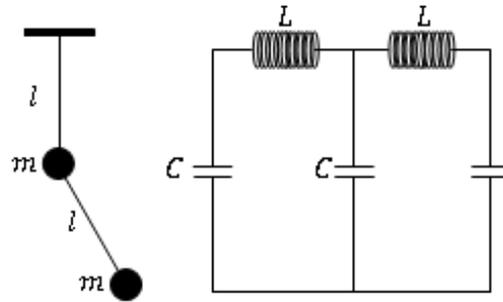
5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux oscillations des systèmes à 2 degrés de liberté, c'est-à-dire des systèmes dont le mouvement est décrit par deux coordonnées généralisées et par conséquent deux équations de Lagrange. Les systèmes mécaniques à 2 dll en mouvement d'oscillation sont souvent couplés de différentes formes de couplages. Les trois formes de couplages habituels entre deux oscillateurs sont :

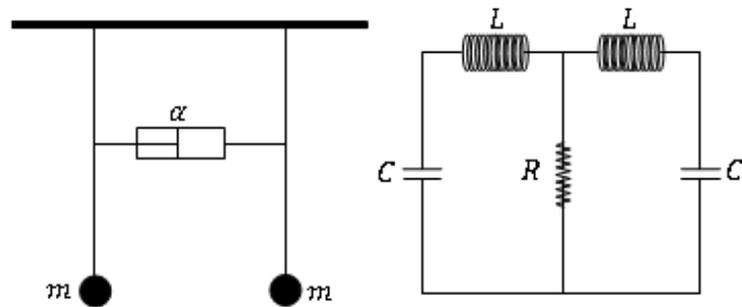
- Couplage élastique : Le couplage par élasticité se fait dans les systèmes mécaniques par l'intermédiaire d'un ressort, dans les systèmes électriques par une capacité (analogie électro-mécanique).



- Couplage inertiel : Ce couplage est assuré pour les systèmes mécaniques par une masse, par inductance dans les systèmes électriques.



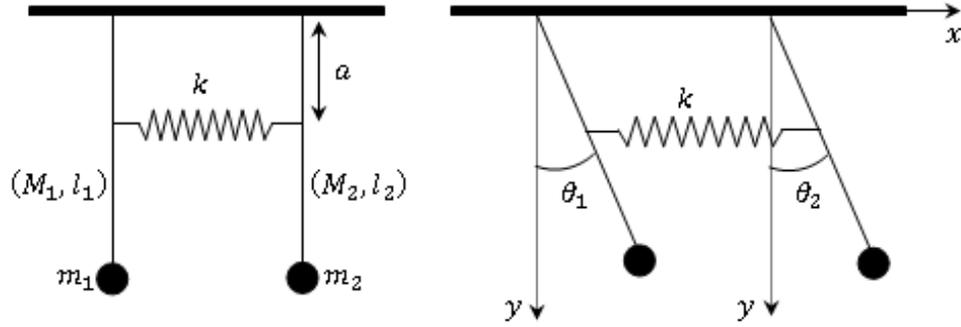
- Couplage visqueux : Deux oscillateurs sont couplés par viscosité par l'intermédiaire d'un amortisseur, pour les systèmes électriques ce couplage est assuré par une résistance.



L'étude des oscillations couplées est importante du fait que le couplage produit des phénomènes physiques importants et utiles comme le phénomène de battements.

5.2 Oscillations libres des systèmes couplés à 2ddl

Dans cette section nous étudions le mouvement d'un système mécanique constitué de deux pendules couplés par un ressort (couplage élastique) comme le montre la figure



Les deux pendules sont composés respectivement de deux tiges (M_1, l_1) et (M_2, l_2) et deux masses ponctuelles m_1 et m_2 .

L'énergie cinétique du système est la somme des énergies cinétiques de rotation des tiges et les énergies de translation des masses, nous écrivons ainsi

$$T = \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{3} M_1 \right) (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{3} M_2 \right) (l_2 \dot{\theta}_2)^2. \quad (5.1)$$

L'énergie potentielle du système est la somme de l'énergie élastique du ressort et les énergies des masses

$$U = \frac{1}{2} k (a \sin \theta_1 - a \sin \theta_2)^2 - \left(m_1 + \frac{M_1}{2} \right) l_1 g \cos \theta_1 - \left(m_2 + \frac{M_2}{2} \right) l_2 g \cos \theta_2, \quad (5.2)$$

où nous avons choisi l'axe (Ox) comme référence pour l'énergie potentielle gravitationnelle.

L'approximation des oscillations de faibles amplitudes permet de réécrire l'énergie potentielle sous la forme

$$U \approx \frac{1}{2} k a^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{M_1}{2} \right) l_1 g \theta_1^2 + \left(m_2 + \frac{M_2}{2} \right) l_2 g \theta_2^2 - \left[\left(m_1 + \frac{M_1}{2} \right) l_1 + \left(m_2 + \frac{M_2}{2} \right) l_2 \right] g \quad (5.3)$$

Le lagrangien du système est donné par l'expression suivante :

$$\begin{aligned}
L &= T - U \\
&= \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{1}{3} M_1 \right) (l_1 \dot{\theta}_1)^2 + \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{1}{3} M_2 \right) (l_2 \dot{\theta}_2)^2 - \frac{1}{2} k a^2 (\theta_1 - \theta_2)^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} \left(m_1 + \frac{M_1}{2} \right) l_1 g \theta_1^2 - \frac{1}{2} \left(m_2 + \frac{M_2}{2} \right) l_2 g \theta_2^2 \\
&\quad + \left[\left(m_1 + \frac{M_1}{2} \right) l_1 + \left(m_2 + \frac{M_2}{2} \right) l_2 \right] g.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Nous avons un système à deux degrés de liberté, il en résulte alors deux équations de Lagrange

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_1} = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_2} = 0 \end{cases}. \tag{5.5}$$

Ceci conduit à un système de deux équations différentielles

$$\begin{cases} (m_1 + \frac{1}{3} M_1) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + (m_1 + \frac{M_1}{2}) l_1 g \theta_1 + k a^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \\ (m_2 + \frac{1}{3} M_2) l_2^2 \ddot{\theta}_2 + (m_2 + \frac{M_2}{2}) l_2 g \theta_2 - k a^2 (\theta_1 - \theta_2) = 0 \end{cases}, \tag{5.6}$$

$$\begin{cases} (m_1 + \frac{1}{3} M_1) l_1^2 \ddot{\theta}_1 + [(m_1 + \frac{M_1}{2}) l_1 g + k a^2] \theta_1 = k a^2 \theta_2 \\ (m_2 + \frac{1}{3} M_2) l_2^2 \ddot{\theta}_2 + [(m_2 + \frac{M_2}{2}) l_2 g + k a^2] \theta_2 = k a^2 \theta_1 \end{cases}. \tag{5.7}$$

Il est facile de voir que si on pose $k = 0$ ou $a = 0$, on retrouve deux équations relatives à deux pendules indépendants.

Pour résoudre le système (5.7), on pose $\theta_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, $\theta_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

Ceci permet d'écrire le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} [(m_1 + \frac{M_1}{2}) l_1 g + k a^2 - (m_1 + \frac{1}{3} M_1) l_1^2 \omega^2] \theta_1 - k a^2 \theta_2 = 0 \\ -k a^2 \theta_1 + [(m_2 + \frac{M_2}{2}) l_2 g + k a^2 - (m_2 + \frac{1}{3} M_2) l_2^2 \omega^2] \theta_2 = 0 \end{cases}. \tag{5.8}$$

Ce système d'équations admet des solutions si le déterminant est nul, on écrit alors

$$\begin{vmatrix} (m_1 + \frac{M_1}{2}) l_1 g + ka^2 & -ka^2 \\ -(m_1 + \frac{1}{3}M_1) l_1^2 \omega^2 & \\ -ka^2 & (m_2 + \frac{M_2}{2}) l_2 g + ka^2 \\ & -(m_2 + \frac{1}{3}M_2) l_2^2 \omega^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.9)$$

Dans ce qui suit, on considère le cas particulier où $m_1 = m_2$, $l_1 = l_2$ et $M_1 = M_2$. On obtient alors l'équation

$$\left[\left(m + \frac{M}{2} \right) lg + ka^2 - \left(m + \frac{1}{3}M \right) l^2 \omega^2 \right]^2 - k^2 a^4 = 0, \quad (5.10)$$

qui admet deux solutions

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{(m + \frac{M}{2})g}{(m + \frac{M}{3})l}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{2ka^2 + (m + \frac{M}{2})gl}{(m + \frac{M}{3})l^2}}. \quad (5.11)$$

Nous pouvons facilement obtenir ces résultats en utilisant les fonctions $S(t)$ et $D(t)$ définies comme la somme et la différence des déplacements des deux masses m_1 et m_2 . Nous écrivons donc

$$S(t) = \theta_1(t) + \theta_2(t) \text{ et } D(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t). \quad (5.12)$$

Le système d'équations différentielles (5.8) s'écrit alors

$$\begin{cases} \frac{d^2 S}{dt^2} + \omega_+^2 S = 0 \\ \frac{d^2 D}{dt^2} + \omega_-^2 D = 0 \end{cases}, \quad (5.13)$$

avec $\omega_+ = \omega_1$ et $\omega_- = \omega_2$. En comparant les équations du système (5.13) avec celle relative à l'oscillateur harmonique libre non amorti à $1ddl$, nous pouvons facilement voir

que les fonctions $S(t)$ et $D(t)$ sont sinusoidales :

$$\begin{cases} S(t) = S_0 \cos(\omega_+ t + \varphi_+) \\ D(t) = D_0 \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{cases} \quad (5.14)$$

Les positions des masses sont obtenues en passant de $[S(t), D(t)]$ à $[\theta_1(t), \theta_2(t)]$:

$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{S(t) + D(t)}{2} = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) + \frac{D_0}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \\ \theta_2(t) = \frac{S(t) - D(t)}{2} = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+) - \frac{D_0}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-) \end{cases} \quad (5.15)$$

5.2.1 Remarques :

- Les constantes $(S_0, D_0, \varphi_+$ et $\varphi_-)$ sont obtenues à partir des conditions initiales choisies.
- Comme la somme de deux fonctions sinusoidales de pulsations différentes n'est pas forcément une sinusoïde, on constate que les oscillations couplées ne sont en général pas sinusoidales.
- Le mode d'oscillations est l'état dans lequel les éléments dynamiques du système considéré effectuent des oscillations harmoniques avec l'une et la même de ses deux pulsations. Nous distinguons alors deux modes : un mode symétrique et un mode antisymétrique.

5.3 Les modes d'oscillations

5.3.1 Le mode symétrique

Le mode symétrique est obtenu pour $S_0 = 0$ et $\theta_1(t) = -\theta_2(t) = \frac{D_0}{2} \cos(\omega_- t + \varphi_-)$ avec $\omega_- = \sqrt{\frac{2ka^2 + (m + \frac{M}{2})gl}{(m + \frac{M}{3})l^2}}$, les oscillations sont en opposition de phase. La fré-

quence propre de ce mode est

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2ka^2 + (m + \frac{M}{2}) gl}{(m + \frac{M}{3}) l^2}}. \quad (5.16)$$

5.3.2 Le mode antisymétrique

Ce mode est obtenu pour $D_0 = 0$ et $\theta_1(t) = \theta_2(t) = \frac{S_0}{2} \cos(\omega_+ t + \varphi_+)$ avec $\omega_+ = \sqrt{\frac{(m + \frac{M}{2}) g}{(m + \frac{M}{3}) l}}$. Dans ce cas les oscillations sont en phase et la fréquence propre de ce mode est

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{(m + \frac{M}{2}) g}{(m + \frac{M}{3}) l}}. \quad (5.17)$$

5.3.3 Phénomène de battement entre deux oscillateurs

Lorsque le couplage est faible, en choisissant un ressort de faible constante ou en diminuant la distance a , et que les pulsations propres sont voisines, il se produit un phénomène de battement. Les pulsations sont alors

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2ka^2 + (m + \frac{M}{2}) gl}{(m + \frac{M}{3}) l^2}} = \omega_2 + \Delta\omega, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{(m + \frac{M}{2}) g}{(m + \frac{M}{3}) l}}. \quad (5.18)$$

Si à l'instant initial, on écarte l'une des masses d'une valeur A_0 et l'autre étant retenue, après avoir lâché la masse on observe une oscillation modulée en amplitude. Dans ces conditions, les solutions sont écrites sous la forme suivante :

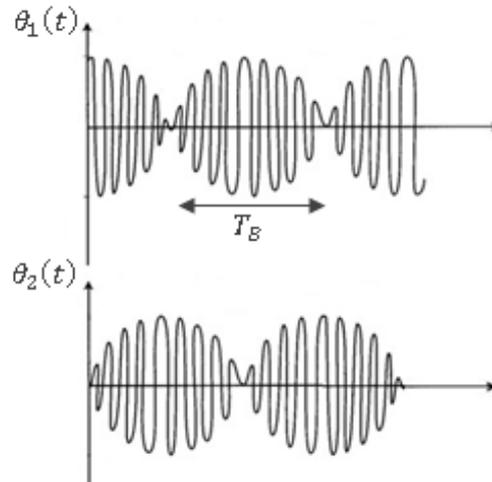
$$\begin{cases} \theta_1(t) = \frac{A_0}{2} \cos(\omega_2 t) + \frac{A_0}{2} \cos(\omega_2 + \Delta\omega) t \\ \theta_2(t) = \frac{A_0}{2} \cos(\omega_2 t) - \frac{A_0}{2} \cos(\omega_2 + \Delta\omega) t \end{cases} \quad (5.19)$$

ou encore

$$\begin{cases} \theta_1(t) = A_0 \cos(\omega_2 t) \cos(\frac{1}{2}\Delta\omega) t \\ \theta_2(t) = A_0 \sin(\omega_2 t) \sin(\frac{1}{2}\Delta\omega) t \end{cases}, \quad (5.20)$$

où $\varphi_+ = \varphi_- = 0$ et $S_0 = D_0$.

Il y'a donc un transfert d'énergie d'un pendule sous forme d'un battement à la pulsation $\omega_B = \Delta\omega = \omega_1 - \omega_2$ qui est représenté ci-dessous

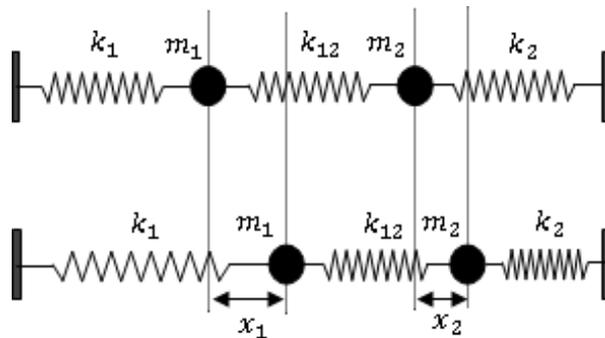


où $T_B = \frac{2\pi}{\omega_1 - \omega_2}$ représente la période de battement. La fréquence de battement est donc la différence des fréquences propres $f_B = f_1 - f_2$.

5.4 Oscillations forcées des systèmes couplés à 2dll

5.4.1 Les équations de mouvement

Considérons un système à 2dll constitué de deux masses (m_1, m_2) reliées à des supports rigides par deux ressorts (k_1, k_2) et couplées par un troisième ressort k_{12} .



En négligeant l'amortissement et en appliquant une force excitatrice $\vec{F} = \vec{F}_0 \cos \omega t$ sur l'une des masses (soit m_1), nous obtenons un système forcé à 2ddl. Les équations de mouvement prennent alors la forme :

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_{12}) x_1 - k_{12} x_2 = F_0 \cos \omega t \\ m_2 \ddot{x}_2 + (k_1 + k_{12}) x_2 - k_{12} x_1 = 0 \end{cases}, \quad (5.21)$$

ou encore

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 + a_1 x_1 - b_1 x_2 = c \cos \omega t \\ \ddot{x}_2 + a_2 x_2 - b_2 x_1 = 0 \end{cases} \quad (5.22)$$

avec $a_1 = \frac{k_1 + k_{12}}{m_1}$, $a_2 = \frac{k_2 + k_{12}}{m_2}$, $b_1 = \frac{k_{12}}{m_1}$, $b_2 = \frac{k_{12}}{m_2}$ et $c = \frac{F_0}{m_1}$.

5.4.2 Solutions du système en régime permanent

En considérant uniquement le régime forcé permanent, on cherche des solutions de la forme $x_{1,2}(t) = X_{1,2} \cos(\omega t + \varphi_{1,2})$ qu'on peut écrire sous la forme complexe telle que $x_{1,2}(t) = \tilde{X}_{1,2} e^{j\omega t}$ et $\tilde{X}_{1,2} = X_{1,2} e^{j\varphi_{1,2}}$.

Le système (5.22) prend alors la forme

$$\begin{cases} (a_1 - \omega^2) \tilde{X}_1 - b_1 \tilde{X}_2 = c \\ -b_2 \tilde{X}_1 + (a_2 - \omega^2) \tilde{X}_2 = 0 \end{cases}. \quad (5.23)$$

Pour résoudre ce système d'équations, on peut utiliser la méthode matricielle de Kramer qui consiste à écrire le système sous forme d'une équation matricielle

$$\begin{bmatrix} a_1 - \omega^2 & -b_1 \\ -b_2 & a_2 - \omega^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_1 \\ \tilde{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (5.24)$$

Les solutions de cette équation matricielle sont données par :

$$\begin{cases} \tilde{X}_1 = \frac{c(a_2 - \omega^2)}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2} e^{j\varphi_1} \\ \tilde{X}_2 = \frac{cb_2}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2} e^{j\varphi_2} \end{cases} \quad (5.25)$$

et

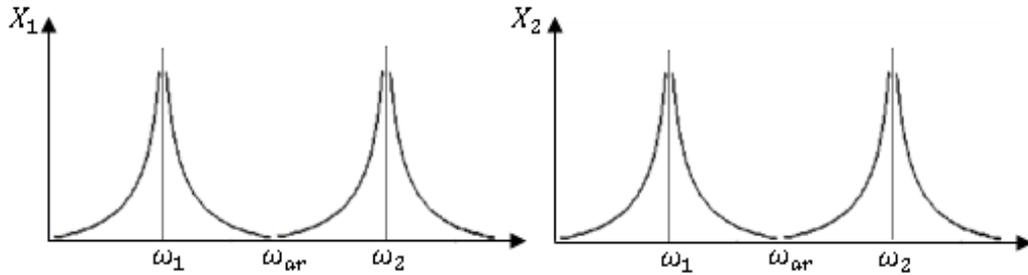
$$\begin{cases} X_1 = \left| \frac{c(a_2 - \omega^2)}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2} \right| \\ X_2 = \left| \frac{cb_2}{(a_1 - \omega^2)(a_2 - \omega^2) - b_1 b_2} \right| \end{cases} \quad (5.26)$$

5.4.3 Résonances et antirésonances

Les amplitudes X_1 et X_2 tendent vers l'infini lorsque le dénominateur est nul, autrement dit, lorsque ω prend les valeurs des pulsations propres

$$\omega_{1,2} = \frac{a_1 + a_2}{2} \pm \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4b_1 b_2}}{2}, \quad (5.27)$$

ce sont les **résonances**. En pratique, il y'a toujours de l'amortissement qui augmente avec l'amplitude ce qui limite les amplitudes de résonance.



Pour la pulsation $\omega = \sqrt{a_2} = \sqrt{\frac{k_2 + k_{12}}{m_2}}$, l'amplitude X_1 s'annule, on a donc une **antirésonance**.

Dans le cas particulier où $m_1 = m_2 = m$ et $k_1 = k_2 = k$, les pulsations de résonances sont

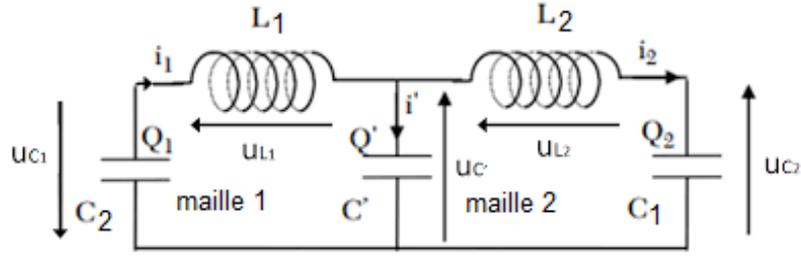
$$\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ et } \omega_2 = \sqrt{\frac{k + 2k_{12}}{m}}. \quad (5.28)$$

et la pulsation d'antirésonance est

$$\omega = \Omega = \sqrt{\frac{k + k_{12}}{m}}. \quad (5.29)$$

5.5 Oscillations électriques couplées

Considérons le cas d'un couplage électrique élastique représenté par le circuit ci-après :



Si à l'instant $t = 0$ les condensateurs sont chargés, alors en fermant les circuits à cet instant des courants électriques i_1 et i_2 circulent respectivement dans les mailles 1 et 2. En appliquant les lois de Kirchhoff (loi des mailles et loi des noeuds) sur le circuit, nous écrivons

$$\begin{cases} \frac{Q_1}{C_1} + L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{Q'}{C'} = 0 \\ -\frac{Q_2}{C_2} + L_2 \frac{di_2}{dt} + \frac{Q'}{C'} = 0 \end{cases}, \quad (5.30)$$

où $i_1 = \frac{dQ_1}{dt}$, $i_2 = -\frac{dQ_2}{dt}$ et $i_1 - i_2 = i_0 = -\frac{dQ'}{dt}$. En dérivons les équations du système (5.30) et en tenant compte des expressions précédentes nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} i_1 + \frac{1}{C'} (i_1 - i_2) = 0 \\ L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} i_2 - \frac{1}{C'} (i_1 - i_2) = 0 \end{cases} \quad (5.31)$$

ou encore

$$\begin{cases} \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{L_1} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C'} \right) i_1 - \frac{1}{L_1 C'} i_2 = 0 \\ \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{L_2} \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C'} \right) i_2 - \frac{1}{L_2 C'} i_1 = 0 \end{cases} . \quad (5.32)$$

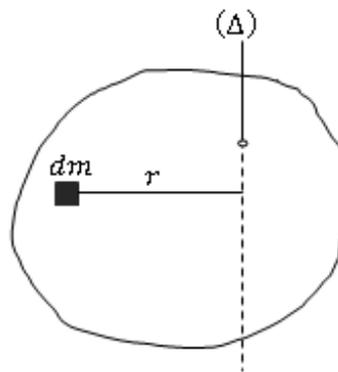
Ce système peut être résolu en utilisant l'analogie avec le système mécanique.

Annexe A

Calcul du moment d'inertie

A.1 Définition

Le moment d'inertie d'un corps solide (S) en rotation par rapport à un axe (Δ)



est donné par la relation

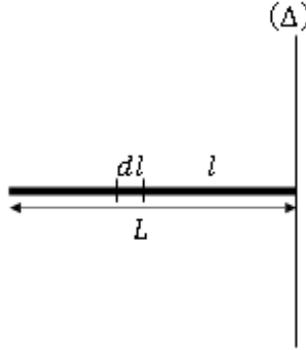
$$I = \int r^2 dm, \quad (\text{A.1})$$

où dm est un élément de masse et r sa distance de l'axe de rotation.

A.2 Exemples de calcul du moment d'inertie

A.2.1 Moment d'inertie d'une tige

1. Tige de masse M et de longueur L en rotation par rapport un axe qui passe par son extrémité



Le moment d'inertie est

$$\begin{aligned} I &= \int l^2 dm \\ &= \int l^2 \lambda dl \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

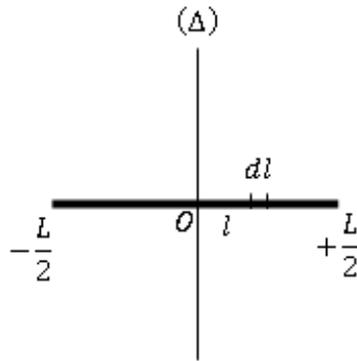
En admettant que la distribution est uniforme ($\lambda = \text{cste}$), on écrit

$$\begin{aligned} I &= \lambda \int_0^L l^2 dl \\ &= \lambda \frac{L^3}{3}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Sachant que $M = \lambda L$, le moment d'inertie de la tige est alors

$$I = \frac{1}{3} ML^2. \quad (\text{A.4})$$

2. Tige de masse M et de longueur L en rotation par rapport un axe qui passe par son centre

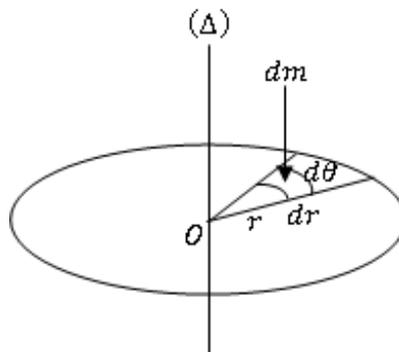


Le moment d'inertie dans ce cas est

$$\begin{aligned}
 I &= \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dl \\
 &= \lambda \frac{L^3}{12} \\
 &= \frac{1}{12} ML^2.
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

A.2.2 Moment d'inertie d'un disque

Le moment d'inertie d'un disque de masse M et de rayon R



est

$$\begin{aligned}
 I &= \int r^2 dm \\
 &= \int r^2 \sigma ds.
 \end{aligned}
 \tag{A.6}$$

Pour une distribution uniforme ($\sigma = cste$)

$$\begin{aligned}
 I &= \sigma \int r^2 ds \\
 &= \sigma \iiint r^2 r dr d\theta \\
 &= \sigma \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
 &= \sigma \frac{\pi R^4}{2}.
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

Sachant que $M = \sigma \pi R^2$, le moment d'inertie du disque est alors

$$I = \frac{1}{2} M R^2. \tag{A.8}$$

A.2.3 Moment d'inertie d'un cylindre

1. **Cylindre creux** : Considérons un cylindre creux de rayon de la base R et de hauteur H .

$$I = \int r^2 dm; \tag{A.9}$$

où $dm = \sigma ds$ et $ds = R d\theta dz$. Nous écrivons alors

$$\begin{aligned}
 I &= \int R^2 \sigma ds \\
 &= \sigma R^3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \\
 &= \sigma R^3 2\pi H \\
 &= (\sigma 2\pi R H) R^2 \\
 &= M R^2.
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

2. **Cylindre plein** : Pour un cylindre plein la distribution est volumique $dm = \rho dV =$

$\rho r dr d\theta dz$ et le moment d'inertie dans ce cas est

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^R r^3 dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^H dz \\ &= \rho \frac{R^4}{4} 2\pi H \\ &= (\rho\pi R^2 H) \frac{R^2}{2} \\ &= M \frac{R^2}{2}. \end{aligned} \tag{A.11}$$

Bibliographie

- [1] L. LANDEAU ET E. LIFCHITZ, « Mécanique », Edition MIR MOSCOU, 1966.
- [2] H. Djelouah, « Vibrations et Ondes Mécaniques Cours & Exercices » ; Polycopié de l'université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2012.
- [3] Murray R. Spiegel, Théorie et applications de la mécanique générale, Collection Série Schum, New York, Montréal : McGraw-Hill , C 1972.
- [4] M. Lalanne, J. Der Hogapian, P. Berthier, Mécanique des vibrations linéaires (2eme Edition), Masson, 1986.
- [5] J. Bruneaux, « Vibrations, ondes » ; Ellipses éditions, Paris, 2008.