Transformations intégrales dans les espaces L^p

BOUDREF Mohamed-Ahmed
Maitre de conférences (MCB)

Université de Bouira, Département des Mathématiques
2017/2018

Table des matières

Préface

Les méthodes qui se rattachent aux transformations inétgrales trouvent un vaste champ d'applications en analyse mathématique ces derniers temps. Elles ont été utilisées avec succès dans la résolution d'équations différentielles et intégrales, dans l'étude des fonctions spéciales et le calcul d'intégrales. L'avantage de ces méthodes est dans le fait qu'elles permettent de construire les tables des transformations directes et inverses des diverses fonctions que l'on rencontre dans les différentes applications.

Le présent polycopié traite cette partie importante d'analyse mathématique à savoir la théorie des transformtions intégrales dans les expaces L^p.

Le premier chapitre, est consacré aux rappels fondamentaux sur la théorie de l'intégration, puis à l'étude approfondie du produit de convolution dans les espaces L^p et à ses principales propriétés et applications.

Le deuxième chapitre est lié au premier, puisqu'il traite la transformation de Fourier dans l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$, ses propréiéts, ainsi que les formules de dualité, d'inversion et de dérivation. Dans un deuxième volet, nous allons étudier la transfomation de Fourier dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$, nous présenterons une formule très importante appellée Plancherell-Parseval qui permet de lier la transformée de Fourier et son inverse.

Le troisième chapitre, est consacré à l'étude d'une transformation de type Fourier à savoir la transformation de Laplace.

Ce polycopié a été écrit sur la base du cours que j'ai professé à la faculté des sciences et des sciences appliquées de l'université de Bouira.

Dans ce cours j'ai suivi le plan suivant, il sera divisé en 3 chapitres :

1) Les espaces L^p.

2) Transformation de Fourier et applications.

3) Transformation de Laplace.

Chaque chapitre se divisera en sous parties comme suit :

i) Rappels du cours sur le chapitre traité.

ii) Enoncés des exercices.

iii) Indications sur les réponses aux exercices.

iv) Corrigés détaillés de certains exercices.

v) Exercices supplémentaires.

Les exercices proposés tout au long de ce cours sont des applications directes de cours et ont pour objectif d'attirer l'attention de l'apprenant l'usage des transformations intégrales dans les applications.

Il parait que je propose quelques exercices ou problèmes supplémentaires qui ont un objectif d'aider les apprenants à préparer leurs révision et de rendre les notions plus solides dans ce domaine.

Ce polycopié s'adresse principalement aux étudiants de niveau Licence et Master d'analyse mathématique et même aux physiciens théoriciens, il est aussi déstiné aux enseignants comme un manuel pédagogique pour la préparation de leurs travaux dirigés.

Je dédie ce travail à ma grande famille scientifique du laboratoire des mathématiques appliquées de l'université de Béjaia, ainsi qu'au département de mathématiques de l'université de Bouira.

Sans oublier, j'aimerais bien dédier ce modeste travail au Professeur Osmanov Hamid Ibrahim Oglu, qui m'a enseigné plusieures années sans relâche.

Il n'est pas exclu que des erreurs se soient glissées au cours de la manipulation d'une telle quantité de formules, ainsi je serais très reconnaissant aux lecteurs de bien vouloir leur communiquer les incorrections relevées.

Boudref M. A.
Université de Bouira, septembre 2017.

Chapitre 1

Les espaces L^p

Dans le présent chapitre nous allons exposer, d'une part, les élèments fondamentaux de la théorie de l'intégration à savoir l'intégrale de Lebesgue, pour le confort de l'apprenant, nous rappelons la construction de cet outil essentiel et les principales propriétés, puis nous passerons à l'étude des espaces L^p, et d'autre part, nous étudierons les résultats les plus importants du produit de convolution.

1.1 Rappels sur quelques résultats d'intégration

Nous rappelons les résultats importants de l'intégrale de Lebesgue : la construction, le théorème de convergence, puis les définitions et les propriétés les plus connues des espaces L^p.

1.1.1 Intégrale de Lebesgue

La définition de l'intégrale de Lebesgue repose sur trois piliers fondamentaux :

- l'intégrale des fonctions étagées, qui se développe vers
- l'intégrale des fonctions mesurables, et avec le passage à la limite nous obtenons la définition de
- l'intégrale de Lebesgue.

Intégrale des fonctions étagées

Définition 1.1.1 *Soit $(X, \Im)$ un espace mesurable. Si*

$$X = \cup_{k=0}^{n} E_k \text{ avec } E_k \in \Im, E_k \neq \emptyset, E_i \cap E_j = \emptyset \text{ dès que } i \neq j,$$

alors on dit que $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *est une partition mesurable finie de* X.

Définition 1.1.2 *Une fonction mesurable* $f : X \to \mathbb{R}$ *est dite étagée si elle est de la forme* $f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$ *où* $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ *avec* $c_i \neq c_j$ *pour* $i \neq j$, *et* $\{E_1, E_2, ..., E_n\}$ *est une partition mesurable de* X.

Exemple 1.1.1 *La fonction indicatrice d'un ensemble mesurable est une fonction étagée.*

Remarque 1.1.1 *Il est facil de voir qu'une fonction mesurable est dite étagée si et seulement si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Théorème 1.1.1 *[1] Soient* $(X, \Im)$ *un espace mesurable et* $f : X \to [0, \infty]$ *une fonction mesurable. Alors il existe une suite croissante* (f_n) *de fonctions mesurables étagées positives, telle que*

$$\forall x \in X, \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x).$$

Ce théorème est fondamental par la suite dans la construction de l'intégrale de Lebesgue.

Intégrale de fonctions étagées positives

Définition 1.1.3 *Soit* $f : X \to [0, \infty]$ *une fonction mesurable et soit* (f_n) *une suite de fonctions étagées positives convergeant simplement vers* f *dans* X. *On appelle intégrale de* f *sur* X, *et on note* $\int_X f d\mu$ *la quantité*

$$\int_X f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu,$$

μ *est une mesure définie dans l'espace mesurable* $(X, \Im)$.

Théorème 1.1.2 (Beppo Levi " Convergence monotone") *[1] Soient* $(X, \Im, \mu)$ *un espace mesuré et* (f_n) *une suite monotone de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers* f, *alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \int_X f_n d\mu = \int_X \lim_{n \to +\infty} f_n d\mu = \int_X f d\mu.$$

1.1.2 Intégration des fonctions mesurables

Soit $(X, \Im, \mu)$ un espace mesuré, et $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$, alors

$$f = f^+ - f^-$$

où f^+, f^- sont la partie positive et la partie négative de f repectivement.

Définition 1.1.4 *[1] On dit q'une fonction $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est $\mu-$intégrable si elle est mesurable et $\int_X |f|\, d\mu < \infty$. On pose alors*

$$\int\limits_X f d\mu = \int\limits_X f^+ d\mu - \int\limits_X f^- d\mu.$$

Définition 1.1.5 *Si $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction intégrable et si A est une partie mesurable de X, alors*

$$\int\limits_A f d\mu = \int\limits_X f \chi_A d\mu.$$

Théorème 1.1.3 (Lemme de Fatou) *[1] Soient $(X, \Im, \mu)$ un espace mesuré et $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite de fonctions mesurables sur X à valeurs dans $[0, +\infty]$. Alors*

$$\int\limits_X \lim_{n\to+\infty} \inf f_n d\mu \leq \lim_{n\to+\infty} \inf \int\limits_X f_n d\mu.$$

1.1.3 Théorème de la convergence dominée

Théorème 1.1.4 (Convergence dominée) *[5] Soit $(X, \Im)$ un espace mesurable, et $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables convergeant simplement vers une fonction f. Supposons qu'il existe une fonstion intégrable g qui domine toutes les f_n i.e.*

$$\forall n \geq 0, |f_n| \leq g \quad sur\ X.$$

Alors

1. *f est $\mu-$intégrable.*
2. $$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X |f_n - f|\, d\mu = 0.$$

   En particulier,

   $$\lim_{n\to+\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int \lim_{n\to+\infty} f_n d\mu = \int f d\mu.$$

1.2 Quelques rappels sur les espaces L^p

1.2.1 Semi-norms N_p et espaces $\mathcal{L}^p$, $p \in [1, +\infty)$

Soient $(X, \Im, \mu)$ un espace mesuré, $f \in M(X, \Im, \mathbb{R})$ (l'ensemble des fonctions définies sur X et $\Im-$mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$), et pour tout $p \geq 1$, posons

$$N_p(f) = \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \; (\in \bar{\mathbb{R}}_+).$$

Définition 1.2.1 *Soient $(X, \Im, \mu)$ un espace mesuré, et p un réel tel que $p \geq 1$. Une fonction f dans $M(X, \Im, \mathbb{R})$ est dite de puissance $p-$ième intégrable si $N_p(f) < +\infty$. L'ensemble de telles fonctions est noté $\mathcal{L}^p$.*

Théorème 1.2.1 *$\mathcal{L}^p$ est un espace vectoriel, et l'application $f \longmapsto N(f)$ est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.*

1.2.2 Norme $\|.\|_p$et espaces $L^p, p \in [1, +\infty)$

La relation

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad \mu - p.p.$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^p$, compatible avec la structure d'espace vectoriel. Le quotient $\mathcal{L}^p / \sim$ est un espace vectoriel, on le note L^p.

Proposition 1.2.1 *L'application*

$$\begin{gathered} L^p \to \mathbb{R} \\ f \longmapsto N_p(f) \end{gathered}$$

définie une norme sur L^p. On la note $\|.\|_p$.

Proposition 1.2.2 (Inégalité de Hölder) *[5] Si $p > 1$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, alors pour $f \in L^p$ et $g \in L^q$, on a $fg \in L^1$ et*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q .$$

En outre, il y a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$tel que

$$\alpha |f|^p = \beta |g|^q \quad \mu - p.p.$$

Proposition 1.2.3 (Inégalité de Minkowski) *[5] Pour $f, g \in L^p$,*

$$\|f + g\|_p \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_p .$$

Remarque 1.2.1 *Il y a d'autres inégalités utilisées dans les espaces L^p à savoir l'inégalités de Clarkson et celle de Jensen, voir [1].*

Voici un résultat important dans la théorie des espaces L^p. Il intervient de façon décisive dans la démonstration de plusieurs théorèmes.

Théorème 1.2.2 (Riesz-Fischer) *[8] Soit $p \geq 1$. Alors*

1. *l'espace L^p est complet, ie. pour toute suite de Cauchy* $(f_n)_{n\geq 0}$ dans L^p, ilexiste $f \in L^p$ telle que
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_p = 0,$$
2. *il existe une sous suite* $(f_{n_k})_{k\geq 0}$ qui converge simplement $\mu - p.p.$ vers f.

Définition 1.2.2 *Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est dans $L^\infty(X)$ si*

1. *f est mesurable.*
2. *il existe $A \geq 0$ tel que l'ensemble $\{x \in X, |f(x)| > A\}$ soit de mesure nulle.*

La plus petite constante A ayant cette propriété sera notée $\|f\|_\infty$.

Théorème 1.2.3 (Séparabilité) *[1]*

1. *L'espace vectoriel normé L^p, pour $p \geq 1$, est séparable.*
2. *L'espace vectoriel L^∞ muni de la norme $\|.\|_\infty$ n'est pas séparable.*

1.2.3 Espaces $\mathcal{L}^\infty$ et L^∞

Définition 1.2.3 *Soit $(X, \Im, \mu)$ un espace mesuré. On dit que $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ (ou $\mathbb{C}$) est une ffonction $\mu-$essentiellement bornée si*
$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq \alpha \quad \mu - p.p.$$
On appelle alors borne supérieure essentielle de f (notée parfois $\sup ess(f)$*) de f, le réel*
$$N_\infty(f) = \inf\{\alpha \in \mathbb{R}_+ : |f| \leq \alpha \quad \mu - p.p.\}.$$

On note $\mathcal{L}^\infty$ l'ensemble des fonctions de $M(X, \Im, \mathbb{R})$ qui sont $\mu-$essentiellement bornées.

Proposition 1.2.4 *$\mathcal{L}^\infty$ est un espace vectoriel et l'application $f \longmapsto N_\infty(f)$ est une semi-norme de $\mathcal{L}^\infty$.*

Proposition 1.2.5 *La relation*

$$f \sim g \Longleftrightarrow f = g \quad \mu - p.p.$$

est une relation d'équivalence sur $\mathcal{L}^\infty$.

Définition 1.2.4 *On appelle espace des (classes de) fonctions $\mu-$essentiellement bornées, l'espace vectoriel $\mathcal{L}^\infty / \sim$, su'on notera L^∞.*

Théorème 1.2.4 *L^∞ muni de L_∞ est un espace vectoriel normé complet, non séparable.*

Proposition 1.2.6 *Soit B un borélien de $\mathbb{R}^d$ de mesure de Lebesgue $\lambda_d(B)$ finie. Si p et q sont deux nombres réels dans $[1, +\infty)$ tels que $p < q$, alors*

$$L^\infty(B) \subset L^q(B) \subset L^p(B) \subset L^1(B).$$

De plus, pour tout $f \in L^q(B)$, on a

$$\|f\|_p \leq \|f\|_q (\lambda_d(B))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

1.2.4 Dualité dans les espaces L^p . Réflexibilité

Rappelons que si $(E, \|.\|)$ est un espace vectoriel normée, son dual topologique E' est muni de la norme usuelle

$$\|u\|_{E'} = \sup_{f \in E \setminus \{0\}} \frac{\|u(f)\|}{\|f\|_E}.$$

On note $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$, l'espace des (classes de) fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}$ et de puissance $p-$ *ième* $\mu-$intégrables.

Théorème 1.2.5 *[8] Soit $(X, \Im, \mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure $\sigma-$finie. Soit p un réel tel que $p \geq 1$, et soit q son conjugué au sens de Young. Soit $u : L^p_{\mathbb{R}}(\mu) \longrightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire, continue et positive au sens où, pour tout $f \in L^p_{\mathbb{R}_+}(\mu)$ on ait $u(f) \geq 0$. Alors il existe un élément $g \in L^q_{\mathbb{R}}(\mu)$ tel que*

$$\forall f \in L^p_{\mathbb{R}}(\mu), u(f) = \int_X fg d\mu \quad \text{et } \|g\|_q = \|u\|_{(L^p)'}.$$

Définition 1.2.5 *Un espace vectoriel normé E est dit réflexif s'il est isomorphe à $(E)^{''}$.*

Exemple 1.2.1 *Tout espace de Hilbert est réflexif, ainsi que tout espace vectoriel normé de dimension finie.*

Corollaire 1.2.1 *Pour tout nombre réel $p \geq 1$, l'espace de Banach $L^p_{\mathbb{R}}(\mu)$ est réflexif.*

1.3 Convolution et régularisation

Des exemples simples montrent que le produit de deux fonctions intégrables n'est pas toujours intégrable. Plus généralement, la multiplication usuelle des fonctions n'opère pas dans les espaces L^p. L'objectif principal de cette section est de définir et étudier un type spécial de multiplication, appelé convolution, qui opère dans L^1 et permet de munir cet espace vectoriel normé d'une structure d'algèbre de Banach commutative.

Cette multiplication et la transformée de Fourier un des outils fondamentaux de l'analyse et notamment du traitement du signal.

1.3.1 Translation dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.3.1 *Soient $a \in \mathbb{R}^d$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, on appelle translatée de f par a, et on note $\tau_a(f)$, la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ par*

$$\tau_a(f)(x) = f(x-a). \tag{1.1}$$

Théorème 1.3.1 *1) Soit $a \in \mathbb{R}^d$ et soit λ_d la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^d$. Si deux fonctions boréliennes f et g vérifiant $f = g$ $\lambda_d-p.p.$ alors $\tau_a(f) = \tau_a(g)$ $\lambda_d - p.p.$ On peut donc définir pour tout $p \in [1, \infty)$ l'application quotient τ_a sur l'espace $L^p(\mathbb{R}^d)$ par la formule (1.1). De plus, τ_a est une isométrie linéaire de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans lui même.*
2) Pour tout $p \in [1, \infty)$ et pour tout $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$ on a

$$\lim_{a \to 0} \|\tau_a(f) - f\|_p = 0.$$

Corollaire 1.3.1 *Si $p \in [1, \infty)$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, l'application $a \mapsto \tau_a(f)$ est uniformement continue de $\mathbb{R}^d$ dans $L^p(\mathbb{R}^d)$.*

1.3.2 Produit de convolution

Définitions et premières propriétés

Définition 1.3.2 *On dit que deux fonctions* $f, g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ *sont convolables si pour presque tout* $x \in \mathbb{R}^d$ *la fonction* $t \mapsto f(x-t)g(t) \in L^1$. *On a alors le produit de convolution*

$$(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt. \tag{1.2}$$

Exemples :

1. Posons $f = g = \chi_{[0,1]}$ on a

$$\begin{aligned} (f*g)(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int\limits_{0}^{1} \chi_{[0,1]}(x-t)dt \\ &= mes\,([0,1] \cap [x-1, x]) \\ &= \begin{cases} 0, \ \text{ si } x \leq 0 \\ x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2-x, \text{ si } 1 \leq x \leq 2 \\ 0, \text{ si } x > 2 \end{cases} \end{aligned}$$

2. Calculer $f * g$ si : $f = e^x, g = \begin{cases} x, 0 \leq x \leq 1 \\ 0, x > 1 \end{cases}$

A l'aide des propriétés classiques de l'intégrale de Lebesgue, on déduit facilement les propriétés suivantes :

Proposition 1.3.1 *Dans* $L^1(\mathbb{R}^d)$ *le produit de convolution est*

1. Commutatif : si f et g sont convolables alors g et f le sont et on a $f * g = g * f$.
   En effet, pour $\mathbb{R}^1$ on a

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x-u)f(u)du \\ &= g * f(x), \ (\text{ pour } u \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

2. Bilinéaire : si f est convolable avec g et h, alors elle l'est avec $\alpha g + \beta h$,($\alpha, \beta \in \mathbb{C}$), et on a

$$f * (\alpha g + \beta h) = \alpha (f * g) + \beta (f * h) .$$

   De plus, si f et g sont convolables sur $\mathbb{R}$ alors $f * g$ est paire lorsque f, g sont paires ou impaires, et $f * g$ impaire lorsque f est paire g est impaire ou vice versa.

1.3.3 Supports et convolution

La notion de support joue un rôle important dans la convolution. Lorsqu'une fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est continue son support est l'adhérence de l'ouvert $\left\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\right\}$, c'est à dire que

$$Supp(f) = \overline{\left\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\right\}} .$$

Or que cette définition n'est pas valable lorsqu'on considère des fonction mesurables.

Pour éclaircir cette remarque, considérons la fonction de Dirichlet,

$$\chi_q(x) = \begin{cases} 1, x \in \mathbb{Q} \\ 0, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

D'après la définition du support,

$$Supp(\chi_q(x)) = \overline{\left\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\right\}} = \{\bar{\mathbb{Q}}\} = \mathbb{R}.$$

Mais $\chi_q(x)$ est nulle pour presque tout x, et la définition de support n'est pas valable pour la classe des fonctions nulles presque partout.

Proposition 1.3.2 (Support de fonction définie presque partout) *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et f une fonction définie dans Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$, considérons la famille $(\omega_i)_{i \in I}$ de tous les ouverts $\omega_i \subset \Omega$ tel que pour chaque $i \in I$ on ait $f = 0$ presque partout sur ω_i. On pose*

$$\omega = \cup_{i \in I} \omega_i$$

Alors $f = 0$ presque partout sur ω et par définition

$$Supp\,(f) = \Omega \backslash \omega.$$

Remarque 1.3.1 *Si f et g coïncident presque partout sur Ω alors $Supp(f) = Supp(g)$.*

Proposition 1.3.3 *[1] Soient f, g deux fonctions convolables, alors*

$$Supp(f * g) \subset \overline{Supp(f) + Supp(g)}.$$

Démonstration. Pour tout x on a

$$f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt = \int_{A(x)} f(x-t)g(t)dt,$$

où désigne l'ensemble mesurable définie par

$$A(x) = \left\{ t \in \mathbb{R}^d, t \in Supp(g), (x-t) \in Supp(f) \right\}.$$

Il est claire que si $x \notin (Supp(f) + Supp(g))$ alors $f * g(x) = 0$.

En d'autre terme, $f * g = 0$ presque partout sur

$$(Supp(f) + Supp(g))^c. \tag{1.3}$$

où B^c désigne le complémentaire de B dans $\mathbb{R}^d$.

En particulier, on déduit de (1.3)

$$f * g = 0 \text{ p.p. sur } Int\left[(Supp(f) + Supp(g))^c\right]$$

où $Int(B)$ désigne l'intérieur de B.

Comme

$$\overline{(Supp(f) + Supp(g))^c} \subset (Supp(f) + Supp(g))^c,$$

il en résulte que

$$Supp(f * g) \subset \overline{Supp(f) + Supp(g)}.$$

■

Remarque 1.3.2 *Si f et g sont à support compact, alors $Supp(f * g)$ est aussi compact (car fermé dans le compact $Supp(f) + Supp(g)$). Mais, si l'un des supports seulement est compact, alors $Supp(f * g)$ est fermé (pas forcément compact).*

Proposition 1.3.4 *[5] Si f, g sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tel que*

$$Supp(f) \subset [a, \infty) \text{ et } Supp(g) \subset [b, \infty),$$

alors $f * g$ existe et est continue sur $\mathbb{R}$, et son support est contenu dans $[c, \infty)$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Démonstration. On a

$$f(x-t) = 0 \text{ si } x - t < 0, \quad \text{et} \quad g(t) = 0 \text{ si } t < b.$$

Aors

$$f * g(x) = 0 \text{ si } x < a + b.$$

De plus, pour $x \geq a + b$ et $M > x$ on a

$$f * g(x) = \int_{b}^{M-a} f(x-t) g(t) dt,$$

ce qui montre que $f * g$ est à support borné à gauche. ■

1.3.4 Convolution dans $L^1(\mathbb{R}^d)$

Théorème 1.3.2 *Soient f et g deux fonctions de $L^1(\mathbb{R}^d)$.*

1. *Pour presque tout x l'application $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.*
2. *La fonction $f * g$* est intégrable sur $\mathbb{R}^d$.
3. $\|f * g\| \leq \|f\|_1 \|g\|_1$.

Démonstration. Nous traitons le cas $d = 1$.

1) D'après le théorème de Fubini-Tonelli, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t)| dt dx = \|g\|_1 \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| dx = \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

Ce qui montre que l'application $(x, t) \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$. Le théorème de Fubini-Tonelli affirme que cette application est intégrable pour presque tout x.

Montrons les points 2) et 3). On a

$$|f(x) * g(x)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| |g(t) dt|$$

et en intégrant par rapport à x sur $\mathbb{R}$ on obtient

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1 .$$

■

Définition 1.3.3 *On désigne par $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ boréliennes telles que*

$$\forall K \subset \mathbb{R}^d, \text{ (où } K \text{ compact) telle que } \int_K |f(x)|\, dx < \infty.$$

Proposition 1.3.5 *Soient $f_1 \in L^1_{loc}(\mathbb{R}), g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

1. *Si Supp(g) est borné, alors $f * g$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^d$ est appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*
2. *Si f est bronée, alors $f * g$ est définie partout sur $\mathbb{R}^d$ est appartient à $L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$.*

1.3.5 Convolution dans $L^p(\mathbb{R}^d)$

Définition 1.3.4 *Deux réels a, b dans $]1, \infty[$ sont dits conjugués si*

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

par conséquent 1 et $+\infty$ sont conjugués.

Théorème 1.3.3 *Soient $f \in L^p(\mathbb{R}^d), g \in L^p(\mathbb{R}^d)$, avec $1 \leq p < \infty$. Alors pour presque tout x la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d$, et $f * g$ est dans $L^p(\mathbb{R}^d)$. De plus, on a*

$$\|f * g\|_p \leq \|f\|_1 \|g\|_p .$$

Démonstration. Traitons le cas $d = 1$.

1) Pour $p = 1$, le cas sera le même comme le théorème précédent.

2) Pour $p > 1$, et soit q son conjugué.

Posons $\varphi = \chi_{[a,b]}$ (avec $a < b$). D'après le théorèmede Fubini-Tonelli et l'inégalité de Hölder on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|\, |g(x-t)|\, \varphi(x) dt \right) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x-t)|\, \varphi(x) dx \right) dt \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_p \|\varphi\|_q \\
&\leq \|f\|_1 \|g\|_p (b-a)^{\frac{1}{q}} \\
&< \infty.
\end{aligned}$$

On en déduit que, pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction

$$t \mapsto f(t)g(x-t)$$

est intégrable sur $\mathbb{R}$, et que l'application

$$x \mapsto \varphi(x) \int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(x-t)dt$$

est intégrable.

L'inégalité de Hölder appliquée à

$$t \mapsto |f(t)|^{\frac{1}{p}} \, |g(x-t)| \, |f(t)|^{\frac{1}{q}}$$

donne alors

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, |g(x-t)| \, dt \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, |g(x-t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| \, dt \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (1.4)$$

Alors

$$\|f * g\|_p^p = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy \right|^p \leq$$

$$\leq \int_{\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, |g(x-y)| \, dy \right\}^p dx$$

$$\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \left| \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, |g(x-y|^p \, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\frac{1}{q}} \right|^p \right\} dx$$

$$\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\frac{p}{q}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, |g(x-y|^p \, dy \right\}$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right) |g(u)|^p \, du$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\frac{p}{q}} \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^p \, du$$

$$= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\frac{p}{q}+1} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^p \, du,$$

donc

$$\|f * g\|_p^p \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\frac{p}{q}+1} \int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^p \, du,$$

alors

$$\begin{aligned} \|f * g\|_p &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right)^{\left(\frac{p}{q}+1\right)\frac{1}{p}} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^p \, du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| \, dy \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|^p \, du \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|f\|_1 \, \|g\|_p \, . \end{aligned}$$

■

1.3.6 Convolution dans l'espace $\left(L^p\left(\mathbb{R}^d\right), L^q\left(\mathbb{R}^d\right)\right)$

Définition 1.3.5 *On appelle espace des fonctions continues nulles à l'infini sur $\mathbb{R}^d$ et on note $C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ l'espace vectoriel donnée par*

$$C_0\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{C} \text{ continue, telle que, } \lim_{\|x\| \to +\infty} f(x) = 0. \right\}.$$

Remarque 1.3.3 *L'espace $C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$ munit de la norme de la convergence uniforme est un espace de Banach.*

Théorème 1.3.4 *Soit $p \in [1, \infty)$ et soit q son conjugué. Alors pour tout $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ et tout $g \in L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a*

1. $f * g$ est une fonction partout définie et bornée sur $\mathbb{R}^d$, de plus

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \, \|g\|_q \, .$$

2. $f * g$ est uniformement continue sur $\mathbb{R}^d$.
3. Si de plus, $p \neq 1, \infty$ alors $f * g \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Démonstration. 1) Montrons que $\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_p \|g\|_q$

On a pour $p > 1$, l'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned}
(|f| * |g|)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)| * |g(t)|\, dt \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)|^p\, dt\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|^q\, dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \|f\|_p \|g\|_q .
\end{aligned}$$

2) Montrons que $f * g$ est continue sur $\mathbb{R}^d$.

* Supposons d'abord que $f \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $g \in L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$ avec

$$C_c\left(\mathbb{R}^d\right) = \left\{f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ est continue support compact dans } \mathbb{R}^d\right\}.$$

Puisque $f \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ elle est continue sur $K = Supp\,(f)$, donc f est uniformement continue sur K (ceci est assuré par le théorème de Cantor).

Posons $\chi = \chi_K$, la fonction f étant uniformement continue sur K ie

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall u, v \in K : \|u - v\| \leq \eta \Longrightarrow |f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

On a aussi

$$|f(u) - f(v)| \leq \varepsilon\, |\chi(u) + \chi(v)|$$

donc

$$\begin{aligned}
|f * g(x) - f * g(y)| &= \left|\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt - \int_{\mathbb{R}^d} f(y-t)g(t)dt\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t) - f(y-t)|\, |g(t)|\, dt,
\end{aligned}$$

et si $\|x - y\| < \eta$ alors $\|(x-t) - (y-t)\| \leq \eta$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$.

Donc

$$\begin{aligned}
|f * g(x) - f * g(y)| &\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} (\chi(x-t) + \chi(y-t))\, |g(t)|\, dt \\
&\leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \chi(x-t)\, |g(t)|\, dt + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^d} \chi(y-t)\, |g(t)|\, dt
\end{aligned}$$

L'usage de l'inégalité de Hölder nous donne

$$\begin{aligned} |f*g(x)-f*g(y)| &\leq \varepsilon\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}[\chi(x-t)]^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|g(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &\quad+\varepsilon\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}[\chi(y-t)]^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|g(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}}. \\ &= 2\varepsilon\,\|\chi\|_p\,\|g\|_q\,. \end{aligned}$$

Comme $\|\chi\|_p \neq 0$, on a

$$\forall\varepsilon>0,\exists\eta=\eta\left(\frac{\varepsilon}{2\,\|\chi\|_p\,\|g\|_q}\right):\|x-y\|\leq\eta\Longrightarrow|f*g(x)-f*g(y)|<\varepsilon,$$

ce qui exprime la continuité uniforme de $f*g$ sur $\mathbb{R}^d$.

* Considérons maintenant $f\in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ où $p\neq\infty$.

D'après le résultat disant : *l'espace $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ des fonctions de classe C^∞ à support compact dans* $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Donc il existe une suite $\{f_k\}\in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ telle que

$$\lim_{k\to\infty}\|f_k-f\|_p=0.$$

D'où il vient que

$$\begin{aligned} |f*g-f_k*g| &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}^d}\{f(x-t)-f_k(x-t)\}\,g(t)dt\right| \\ &\leq \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|f(x-t)-f_k(x-t)|^p\,dt\right\}^{\frac{1}{p}}\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d}|g(t)|^q\,dt\right\}^{\frac{1}{q}} \\ &= \|f-f_k\|_p\,\|g\|_q\,, \end{aligned}$$

il en résulte que

$$\lim_{k\to\infty}|f*g-f_k*g|=0.$$

Ce qui montre que $\{f_k*g\}$ est une suite de fonctions continues, et

$$\|f*g-f_k*g\|_\infty\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Alors $f*g$ est uniformement continue sur $\mathbb{R}^d$ puisque la limite uniforme d'une suite de fonctions uniformement continues est une fonction uniformement continue.

3) Supposons que $p \neq 1, \infty$ montrons que $f * g \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Nous savons que $C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ dense dans $L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$.

On a

$$\forall \varepsilon > 0, \exists f_\varepsilon \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right) : \|f - f_\varepsilon\|_p < \varepsilon,$$

et

$$\exists g_\varepsilon \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right) : \|g - g_\varepsilon\|_q < \varepsilon,$$

donc

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f_\varepsilon * g_\varepsilon(x)| &\leq |f * g(x) - f * g_\varepsilon(x)| + |f * g_\varepsilon(x) - f_\varepsilon * g_\varepsilon(x)| \\ &\leq \|f\|_p \|g - g_\varepsilon\|_q + \|f - f_\varepsilon\|_p \|g_\varepsilon\|_q , \end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \|g_\varepsilon\|_q &= \|g - g_\varepsilon - g\|_q \leq \|g - g_\varepsilon\|_q + \|g\|_q \\ &\leq \varepsilon + \|g\|_q . \end{aligned}$$

Alors pour tout $\varepsilon \in [0, 1]$ on a

$$\begin{aligned} |f * g(x) - f_\varepsilon * g_\varepsilon(x)| &\leq \varepsilon \left(\|f\|_p + \|g\|_q\right) \\ &\leq \varepsilon \left(\|f\|_p + \|g\|_q + \varepsilon\right) \\ &< \varepsilon \left(\|f\|_p + \|g\|_q + 1\right), \end{aligned}$$

puisque $f_\varepsilon \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$, $g \in C_c\left(\mathbb{R}^d\right)$ alors

$$\begin{aligned} \exists A(\varepsilon) &\in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^d : \|x\| \geq A(\varepsilon) \Longrightarrow f_\varepsilon = 0, g_\varepsilon = 0. \\ &\Longrightarrow \left(f_\varepsilon * g_\varepsilon\right)(x) = 0. \end{aligned}$$

D'où il vient que pour $\|x\| \geq A(\varepsilon)$, on a $\forall \varepsilon > 0 : |(f * g)(x)| < M\varepsilon$, avec $M = \|f\|_p + \|g\|_q + 1$.

Et donc

$$\lim_{\|x\| \to \infty} (f * g)(x) = 0 \Longleftrightarrow f * g \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right).$$

■

Corollaire 1.3.2 *Soient p, q deux nombres réels conjugués. Si $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ est à support compact et si $g \in L^q_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$ donc la convolée $f * g$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^d$.*

Exemple 1.3.1 *La convolée de toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ par une fonction g bornée à support compact est une fonction continue.*

Théorème 1.3.5 (Inégalité de Young) *Soient $1 \leq p, q, r \leq +\infty$ trois nombres réels telle que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$, et soient $f \in L^p\left(\mathbb{R}^d\right)$, $g \in L^q\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors*

1. $f * g \in L^r\left(\mathbb{R}^d\right)$.
2. $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q$.

1.4 Régularisation

On note $D\left(\mathbb{R}^d\right)$ ou $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $\mathbb{R}^d$. Les éléments de $D\left(\mathbb{R}^d\right)$ sont appelés les fonctions test. La fonction nulle sur $\mathbb{R}^d$ est dans $D\left(\mathbb{R}^d\right)$.

1.4.1 Convolution et dérivation

Le théorème suivant donne une relation fonctionnelle entre la convolution et la dérivation.

Théorème 1.4.1 *Soient $f \in C^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $g \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$. Si f ou g est à support compact, alors $f * g$ est partout définie et de classe C^p. De plus, pour tout entier $k \in [0, p]$, on a*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(f * g) = \frac{\partial^k f}{\partial x_i^k} * g, \tag{1.5}$$

pour $i = 1, ..., d$.

Remarque 1.4.1 *Il est claire que la convolution figurant dans le deuxième membre de (1.5) est bien définie, car $f \in C^p\left(\mathbb{R}^d\right)$ et $g \in L^1_{loc}\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Ce théorème nous conduit à déduire le corollaire suivant

Corollaire 1.4.1 *Soit $\varphi \in D\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ la fonction $f*\varphi$ est partout définie et de classe C^∞. De plus, $\forall k = (k_1, k_2, ..., k_d) \in \mathbb{N}^d$ on a*

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k}(f * \varphi) = f * \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}, \tag{1.6}$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$ et $\frac{\partial^k}{\partial x^k} = \frac{\partial^{k_1+k_2+....+k_d}}{\partial x^{k_1}\partial x^{k_2}....\partial x^{k_d}}$.

Définition 1.4.1 *Si $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et $\varphi \in D(\mathbb{R}^d)$, on dit que $f * \varphi$ est une régularisation de f par φ.*

Théorème 1.4.2 *Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, et soit $g \in C^p(\mathbb{R}^d)$ $(p \geq 1)$ bornée ainsi que toutes ses dérivées. Alors $f*g$ est de classe C^p sur $\mathbb{R}^d$ et, pour tout entier $k \in [0,p]$, on a*

$$\frac{\partial^k}{\partial x_i^k}(f * g) = f * \frac{\partial^k g}{\partial x_i^k}, \quad i = 1, ..., d.$$

1.4.2 Suites régularisantes

Définition 1.4.2 *[1] On appelle suite régularisante une suite de fonctions ρ_n de $D(\mathbb{R})$ vérifiant*

1. $\rho_n(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. $\int_{\mathbb{R}} \rho_n(x)dx = 1$.
3. Le support de $\rho_n(x)$ est inclu dans $[-\varepsilon_n, \varepsilon_n]$ avec $\varepsilon_n > 0$ et $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Une telle suite existe. On peut prendre $\rho \in D(\mathbb{R})$définie par

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{c}e^{-\frac{1}{1-x^2}}, & \text{si } |x| \leq 1. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

avec

$$c = \int_{-1}^{1} e^{-\frac{1}{1-x^2}} dx.$$

Et choisissons la suite de la façon suivante

$$\rho_n(x) = n\rho(nx).$$

Définition 1.4.3 *Soit f une fonction de $L^1(\mathbb{R})$. On appelle régularisée de la fonction f les fonctions donnée par*

$$f * \rho_n.$$

Il est claire que $f * \rho_n \in C^\infty(\mathbb{R})$.

1.5 Exercices

I-1. Soit $a < b$ deux réels non nuls, et soient $f = \chi_{[-a,a]}, g = \chi_{[-b,b]}$. Montrer que f et g sont convolables sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f * g$. - Que remarquez-vous concernant la régularité des fonctions f, g et $f * g$?

I-2. Soient $f = \chi_{[0,+\infty)}; g = \chi_{[-1,0]} - \chi_{[0,1]}; h = \chi_{\mathbb{R}}$.

1. Calculer $(f * g) * h$ et $f * (g * h)$.
2. Commenter le résultat.

I-3. Soient $f$et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$, dont l'une au moins est à support compact.

- Etablir la formule de Leibniz suivante

$$x^p (f * g) = \sum_{q=0}^{p} C_p^q (x^p f) * \left(x^{p-q} g\right), \quad p \in \mathbb{N}^*.$$

I-4. Calculer la convolution $f * g$ si

$I.4.1)$ $f(x) = e^{ax}, g(x) = \chi_{[0,\infty)}, \quad a \neq 0.$

$I.4.2)$ $f(x) = \sin bx, g(x) = e^{-|a|x}, \ a > 0.$

$I.4.3)$ $f(x) = \chi_{[0,b]}, g(x) = x^2.$

$I.4.4) f(x) = e^{-x^2}, g(x) = x^{-x^2}.$

I-5.

1. Montrer qu'on ne peut convoler deux fonctions quelconques de $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
2. Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1(\mathbb{R})$. Montrer que si g est à support compact alors $f * g$ existe presque partout et appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.
3. On donne deux nombres réels a, b strictement positifs et on considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ comme suit

$$g_a(x) = e^{-a|x|}, \quad h_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2a^2}},$$

i) Montrer que $g_a * g_b \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}), p \in [1, \infty)$, puis calculer $g_a * g_b$.

ii) Répondre à la même question pour $h_a * h_b$.

I-6. On appelle la fonction gamma d'Euler la fonction donnée par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

La fonction Bêta d'Euler est donnée par

$$\beta(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} dx, \quad a > 0, b > 0.$$

i) Etablir la formule

$$\beta(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$

ii) Calculer l'expression suivante

$$\left(H(x) \frac{x^{a-1}}{\Gamma(a)} e^{\alpha x} \right) * \left(H(x) \frac{x^{b-1}}{\Gamma(b)} e^{\alpha x} \right),$$

où $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $H(x)$ est la fonction de Heaviside.

I-7. Soient les deux fonctions définies par

$$f(t) = \begin{cases} t^{-\frac{1}{2}}, & 0 < t < 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

$$g(t) = \begin{cases} (1-t)^{-\frac{1}{2}}, & 0 < t < 0, \\ 0, & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

i) Montrer que f et g sont absolument intégrables.

ii) Montrer que $(f * g)(1) = \int_0^1 \tau^{-1} d\tau$, et donc la convolution n'existe pas pour $t = 1$.

iii) En général, déduire que l'intégrabilité générale n'est pas une conditin suffisante pour l'existence de la convolution $f * g$.

1.6 Indications sur les réponses aux exercices

I-1. f et g étant paires, il suffit de calculer $f * g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. Puis on discutera suivant les valeurs de x, l'intersection $[x-a, x+a] \cap [-b, b]$.

I-2. Avec le même raisonnement pour l'exercice précedent, nous obtenons

$$f * g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } |x| \geq 1, \\ 1+x, & \text{si } -1 \leq x \leq 0, \\ 1-x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

ce qui permet de mener les calculs pour $(f * g) * h(x)$.

I-3. Dans l'expression intégrale de $x^p\,(f * g)\,(x)$ écrire $x^p = (x - t + t)^p$.

I-5.

1. Penser aux fonstions constantes.
2. Pour $Supp\,(f) \subset [-a, a]$ et $c, d \in \mathbb{R}$, on montre que $f * g = \left(f\chi_{[c-a,d+a]}\right) * g$.
3. $a)$ Il suffit de calculer dans tout $\mathbb{R}$.

   $b)$ Dans l'intégrale $h_a * h_b(x)$ on utilise le changement de variable

$$u = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}\left(t - \frac{b^2 x}{a^2+b^2}\right)$$

qui nous permettra de ramener l'intégrale donnée à celle de Gauss

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

I-6.

i) Dans le calcule de l'intégrale double, nous allons utiliser les coordonnées polaires pour avoir l'intégrale

$$\Gamma(a)\Gamma(b) = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\infty} \left(\cos^{2a-1}\varphi \sin^{2b-1}\varphi\right)\left(r^{2a+2b}e^{-r^2}\right) dr d\varphi.$$

ii) Nous pouvons utiliser la formule suivante : pour deux fonctions $f(x), g(x)$ on a

$$(H(x-a)f(x)) * (H(x-b)g(x)) = H(x-a-b) \int_a^{x-b} f(t)g(x-t)dt.$$

I-7.

ii) Le calcul de la convolution $f * g(x)$ nous donne

$$f * g(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(x-t)(1-t)}},$$

pour $x = 1$, on aura

$$f * g(1) = \int_0^1 \frac{dt}{1-t},$$

cette intégrale n'est pas convergente.

1.7 Corrigés détaillés de certains exercices

I-1. On a

$$[x-a,x+a]\cap[-b,b]=\begin{cases}[x-a,x+a], \text{ si } 0\leq x\leq b-a\\ [x-a,b], \text{ si } b-a\leq x\leq b+a\\ \varnothing, \text{ si } x>b+a.\end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned} f*g(x) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int\limits_{x-a}^{x+a} g(t)dt \\ &= \begin{cases}\int_{x-a}^{x+a} dt = 2a, \text{ si } 0\leq x\leq b-a \Longleftrightarrow a\leq x+a\leq b,\\ \int_{x-a}^{b} dt = b-x+a, \text{ si } b-a\leq x\leq b+a\\ 0, \text{ si } x>b+a \Longleftrightarrow x-a>b.\end{cases}\end{aligned}$$

On a $x-a\leq t\leq x+a \Longleftrightarrow -a\leq t-x\leq a$, ce qui donne aussi $-a\leq x-t\leq a$ et $f(x-t)=1$. D'où

$$f*(x)=\begin{cases}2a, \text{ si } 0\leq x\leq b-a\\ b-x+a, \text{ si } b-a\leq x\leq b+a\\ 0, \text{ si } x>b+a.\end{cases}$$

On observe que f et g sont continues par morceaux sur toute la drore réelle, alors que leur convolée $f*g$ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 par morceaux.

I-3. On a pour $p \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
x^p (f * g) &= \int_{-\infty}^{\infty} x^p f(x-t) g(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} (x-t+1)^p f(x-t) g(t) dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{q=0}^{p} C_p^q (x-t)^p t^{p-q} f(x-t) g(t) dt \\
&= \sum_{q=0}^{p} C_p^q \int_{-\infty}^{\infty} (x-t)^p t^{p-q} f(x-t) g(t) dt \\
&= \sum_{q=0}^{p} C_p^q (x^p f) * \left(x^{p-q} g\right).
\end{aligned}$$

I-5.

1. Si f, g sont idientiquement égales à 1 sur $\mathbb{R}$ alors $f, g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ tandis que
$$\int_{-\infty}^{\infty} f * g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t) g(t) dt \right\} dx = +\infty$$
ce qui donne $\nexists\ f * g(x)$. Donc on ne peut pas convoler deux fonctions quelconques de l'espace $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

2. Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Si g est à support compact alors $\exists$ $f * g$ presque partout appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$. (g est à support compact i.e. $\exists a > 0$, telle que $g = 0$ à l'interieur de $[-a, a]$).

- Considérons c, d avec $c < d$, et montrons que $f * g$ est définie sur $[c, d]$ et appartient $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

On a pour tout $(x-t) \in [c, d] \times [-a, a]$

$$c - a \leq x - t \leq d + a,$$

et donc

$$f(x-t) g(t) = f(x-t) \chi_{[c-a, d+a]}(x-t) g(t)$$

alors

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-a}^{a} f(x-t)g(t)dt \\ &= \int_{-a}^{a} \chi_{[c-a,d+a]}(x-t)f(x-t)g(t)dt \\ &= \left(\chi_{[c-a,d+a]}f\right) * g, \end{aligned}$$

i.e. $f * g$ et $\left(\chi_{[c-a,d+a]}f\right) * g$ coïncident sur $[c, d]$.

Proposition 1.7.1 *Soient $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ et $g \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

i) *Si Supp(g) est borné alors $f * g$ existe presque partout sur $\mathbb{R}^d$, et appartient à $L^1_{loc}(\mathbb{R})$.*

ii) *Si f est bornée alors $f * g$ est définie preque partout et appartient à $L^\infty(\mathbb{R})$.*

3. $a, b > 0$

$$g_a(x) = e^{-a|x|}, h_a(x) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$$

i) Montrons que $g_a * g_b(x) \in C_0(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R}), p \geq 1.$

On sait que $g_a(x), g_b(x)$sont paires, alors il suffit de considérer le cas $x > 0$.

$$\begin{aligned}
g_a * g_b(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} g_a(x-t)g_b(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x-t)}e^{-bt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-t)}e^{bt}dt + \int_{0}^{\infty} e^{-a(x-t)}e^{-bt}dt \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-t)}e^{bt}dt + \int_{0}^{x} e^{-a(x-t)}e^{-bt}dt + \int_{x}^{\infty} e^{a(x-t)}e^{-bt}dt \\
&= e^{-at} \int_{-\infty}^{0} e^{(a+b)t}dt + e^{-at} \int_{0}^{x} e^{(a-b)t}dt + e^{ax} \int_{x}^{\infty} e^{-(a+b)t}dt \\
&= e^{-at} \left. \frac{e^{(a+b)t}}{a+b} \right|_{-\infty}^{0} + e^{-at} \left. \frac{e^{(a-b)t}}{a-b} \right|_{0}^{\infty} - e^{ax} \left. \frac{e^{-(a+b)t}}{a+b} \right|_{x}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-at}}{a+b} + e^{-at}\frac{e^{(a-b)x}-1}{a-b} + \frac{e^{-bx}}{a+b} \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}\left\{e^{-bx} - e^{-ax}\right\}, a \neq b.
\end{aligned}$$

Si $a = b$,

$$\begin{aligned}
g_a * g_b(x) &= \int_{-\infty}^{0} e^{-a(x-t)}e^{-at}dt + \int_{0}^{x} e^{-a(x-t)}e^{-at}dt + \int_{x}^{\infty} e^{-a(x-t)}e^{-at}dt \\
&= e^{-ax}\left(\frac{1}{a} + x\right), a > 0.
\end{aligned}$$

ii) On a

$$\begin{aligned}
h_a * h_b(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_a(x-t)h_b(t)dt \\
&= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-t)^2}{2a^2}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-x^2+2xt-t^2}{2a^2}} e^{-\frac{t^2}{2b^2}}dt \\
&= \frac{1}{2\pi ab}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}} e^{-\frac{1}{2}\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}\left(t-\frac{b^2x}{a^2+b^2}\right)dt,
\end{aligned}$$

Posons

$$\begin{aligned}
u &= \left(t-\frac{b^2x}{a^2+b^2}\right)\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}, \\
du &= \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{ab}dt, \\
dt &= \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}du,
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
h_a * h_b(x) &= \frac{1}{2\pi ab}\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}}\sqrt{2\pi} \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{a^2+b^2}}e^{-\frac{x^2}{2(a^2+b^2)}} \\
&= h_{\sqrt{a^2+b^2}}(x).
\end{aligned}$$

1.8 Exercices supplémentaires

1. Montrer les résultats suivants

1.1) $\delta(x) * f(x) = f(x)$.

1.2) $\delta^{'}(x) * f(x) = f^{'}(x)$.

1.3) $\dfrac{d}{dx}\left(f(x) * g(x)\right) = f^{'}(x) * g(x) = f(x) * g^{'}(x)$.

1.4) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)du \int_{-\infty}^{\infty} g(v)dv$.

1.5) $\dfrac{d^2}{dx^2}(f * g)(x) = \left(f^{'} * g^{'}\right)(x) = \left(f^{''} * g\right)(x)$.

1.6) $(f * g)^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) * g^{(l)}(x)$, (avec $l = 1, ..., n-1$).

1.7) Si f et g sont paires, $f * g$ le sera. Si f et g sont impaires ou l'une est paire l'autre est impaire, alors $f * g$ est impaire.

Chapitre 2

Transformation de Fourier et applications

Dans ce chapitre, nous allons étudier la transformation de Fourier dans les espaces L^p. Tout d'abord, nous exposerons un aperçu sur les séries et intégrales de Fourier. En deuxième lieu, une section sera consacrée à l'étude de la transformation de Fourier dans l'espace $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Une troisième section sera l'objet d'une étude de la transformation de Fourier dans l'espace $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Ainsi qu'une quatrième section sera reservée aux résultats supplémentaires sur la transformation de Fourier et quelques problèmes d'applications.

2.1 Intégrale de Fourier comme un cas limite de la série de Fourier

a) Soit $f(x)$ une fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ et lisse par morceau (continue ou discontinue) dans le segment $[-l, l]$ $(l < \infty)$. Alors $f(x)$ est développable en série trigonométrique de Fourier

$$f(x) \sim \frac{a_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \tag{2.1}$$

où

$$\left.\begin{array}{l} a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 0. \\ b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx, \quad n \geq 1. \end{array}\right\} \tag{2.2}$$

Les formules (2.2) sont appellées les coefficients de Fourier de la série (2.1). Les membres à droite de (2.1) sont tous $2l-$périodiques. On peut limiter l'étude à tout intérvalle de longueur $2l$.

Compte tenu de l'identité d'Euler

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

on peut mettre la série (2.1) sous une fome complexe comme suit

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{-i\frac{n\pi x}{l}}, \tag{2.3}$$

où

$$C_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)e^{-i\frac{n\pi x}{l}}dx, \quad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.4}$$

1) *Si f est paire, et elle est intégrable sur $[-l, l]$,alors*

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int_{0}^{l} f(x)dx.$$

2) *Si f est impaire sur $[-l, l]$, alors*

$$\int_{-l}^{l} f(x)dx = 0.$$

3) *Si f est paire sur $[-l, l]$, alors $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ l'est aussi et $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$* est impaire, donc

$$a_n = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx, \quad b_n = 0,$$

la série de Fourier obtenue sera appellée série cosinus.

4) *Si f est impaire sur $[-l, l]$, alors $f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$ l'est aussi et $f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$* est paire, donc$a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,$$

et la série de Fourier obtenue est dite série sinus.

Théorème 2.1.1 (Riemann-Lebesgue) *Si $f(x)$ une fonction intégrable sur l'intervalle (a, b) alors*

$$\int_a^b f(x) \cos \lambda x dx \underset{\lambda \to \infty}{\to} 0,$$

$$\int_a^b f(x) \sin \lambda x dx \underset{\lambda \to \infty}{\to} 0,$$

Corollaire 2.1.1 *Les coefficients de Fourier de toute fonction intégrable tendent vers* 0.

Corollaire 2.1.2 *Le comportement d'une série de Fourier en un point x depend uniquement du comortement de la fonction en un voisinage imédiat de ce point (principe de localisation).*

b) Convergence d'une série de Fourier

Si $f(x)$ est à variation bornée, sa série de Fourier converge en tout point x vers la valeur $\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}$. Si $f(x)$ est, de plus, continue sur $[a, b]$ la série de Fourier est uniformement convergente sur cet intervalle.

c) Remplaçons a_n, b_n dans l'expression (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} dt + \right. \\ & \left. \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} dt \right), \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \int_{-l}^{l} f(t) \left[\cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k\pi t}{l} + \right. \\ & \left. \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{k\pi t}{l} \right] dt, \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} f(t) dt + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi}{l} \int_{-l}^{l} f(t) \cos \frac{k\pi}{l} (t - x) dt. \tag{2.5}$$

Passons dans (2.5) à la limite quand $l \to \infty$. En vertu du fait que $\int_{-l}^{l} |f(t)|\, dt < \infty$, on obtient

$$\lim_{l\to\infty} \int_{-l}^{l} f(t)dt = 0.$$

Le deuxième terme peut être considére comme la somme intégrale (étendue à un intervalle infinie) de la fonction

$$F(\lambda) = \int_{-l}^{l} f(t) \cos \lambda(t-x)dt.$$

Pour l'intégrale $\int_0^\infty F(\lambda)d\lambda$ on a :

Si l'on pose $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$ et $\Delta\lambda = \frac{\pi}{l}$, par la suite, le passage à la limite dans (2.5) pour $l \to \infty$ conduit à l'égalité

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda(t-x)dt, \tag{2.6}$$

c'est exactement la représentation cherchée avec les notations

$$a_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cos \lambda t dt$$

$$b_\lambda = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \sin \lambda t dt.$$

L'expression (2.6) peut avoir la forme

$$f(x) = \int_0^\infty \left(a_\lambda \cos \lambda x + b_\lambda \sin \lambda x\right) d\lambda. \tag{2.7}$$

La formule (2.6) est dite formule de Fourier.

2.2 Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R})$

La formule intégrale de Fourier donnée avant peut être représentée sous forme de deux égalités. Posons

$$g(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\lambda t}dt, \tag{2.8}$$

alors

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{2.9}$$

La formule (2.8) est définie pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ et est dite la transfomation de Fourier de f, elle est définie sur $\mathbb{R}$. La formule (2.9) exprime la fonction $f(t)$ par sa transformée de Fourier, elle est appellée formule d'inversion de la transformation de Fourier.

On peut définir la fonction g par la formule

$$\hat{f}(\lambda) = g(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\lambda t} dt, \tag{2.10}$$

et alors la formule d'inversion nous donne

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda) e^{i\lambda t} d\lambda. \tag{2.11}$$

Exemple 2.2.1 *Soit la fonction suivante*

$$f(x) = e^{-\mu|t|}, \mu > 0$$

Sa transformée de Fourier $\hat{f}(\xi)$ est donnée par

$$\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|t|} e^{-i\xi t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu|t|} (\cos \xi t - i \sin \xi t)\, dt \\
&= 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu t} \cos \xi t dt \\
&= \frac{2\mu}{\xi^2 + \mu^2}.
\end{aligned}$$

Si la fonction $f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, la fonction $\hat{f}(\xi)$ existe pour tous les t. Si les fonctions $\hat{f}(\xi)$ et $f(t)$ sont les transformées de Fourier l'une de l'autre, on les appelle *couple de transformée de Fourier.* En posant

$$\hat{f}_c(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\cos\xi t dt,$$

et donc

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_c(\xi)\cos\xi t d\xi.$$

Les fonctions ainsi liées entre elles s'appellent *couple de consinus transformée de Fourier.* De façon analogue, on obtient le *couple de sinus-transformée de Fourier :*

$$\hat{f}_s(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t)\sin\xi t dt,$$

et donc

$$f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \hat{f}_s(\xi)\sin\xi t d\xi.$$

Si $f(t)$ est paire, alors

$$\hat{f}(\xi) = \hat{f}_c(\xi).$$

Si $f(t)$ est impaire, alors

$$\hat{f}(\xi) = i\hat{f}_s(\xi).$$

2.3 Transformation de Fourier dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

2.3.1 Position de problème

Etant donnée une fonction f Lebesgue-mesurable sur $\mathbb{R}^d$ à valeurs réelles ou complexes. On se propose d'étudier sa transformée de Fourier $\hat{f}$ et quel est son sens mathématique !

Concernant

$$\hat{f} : \begin{cases} \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \\ \xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_d) \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} f(x)e^{-i(\xi,x)}dx \end{cases}$$

où $x = (x_1, x_2, ..., x_d)$, $(\xi, x) = \sum_{i=1}^d x_i\xi_i$ et $d\xi = d\xi_1 d\xi_2 ... d\xi_d$, $dx = dx_1 dx_2 ... dx_d$.

Deux questions naturelles se posent :

1. Pour quelles fonctions f peut-on définir $\hat{f}$?
2. Peut-on construire f connaissant $\hat{f}$?

Il existe des variantes dans la définition de la transformation de Fourier, on rencontre aussi

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{e-2\pi i(x,\xi)} dx$$

ou

$$\hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x)^{e-i(x,\xi)} dx.$$

2.3.2 Résultat important

Nous donnons un résultat crucial qui sera utile par la suite.

Lemme 2.3.1 (de Riemann-Lebesgue) *[8] Pour tout $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\hat{f}$ existe et on a*

$$\lim_{\|\xi\| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Démonstration . Il suffit de traiter le cas $d = 1$.

* L'existence de $\hat{f}$ est assurée, puisque pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,et on a

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx < \infty.$$

* Pour le deuxième point, on a deux étapes à suivre :

i) supposons que $f \in C_c(\mathbb{R})$ avec $Supp(f) \subset]-a, a[, a > 0$.

Alors

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-a}^{a} f(x) e^{-ix\xi} dx$$

et une intégration par parties nous donne pour tout $\xi \neq 0$

$$\hat{f}(\xi) = \left[-\frac{1}{i\xi} f(x) e^{-ix\xi}\right]_{-a}^{a} + \frac{1}{i\xi} \int_{-a}^{a} f'(x) e^{-ix\xi} dx,$$

donc

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \frac{2a}{|\xi|} \left\|f'\right\|_\infty .$$

Et comme $f \in C_c(\mathbb{R})$ on obtient $\left\|f'\right\|_\infty < \infty$ d'où le résultat.

ii) Maintenant, soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. La classe des fonctions $C_c^1(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$ i.e.

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \varphi \in C_c^1(\mathbb{R}) : \|f - \varphi\|_1 < \frac{\varepsilon}{2},$$

et comme

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{\varphi}(\xi) = 0$$

alors

$$\exists M > 0, \forall \xi \in \mathbb{R}, |\xi| \geq M \Longrightarrow |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pour tout $\xi \in \mathbb{R}, (|\xi| \geq M)$ on a

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \left|\hat{f}(\xi) - \hat{\varphi}(\xi)\right| + |\hat{\varphi}(\xi)| = \left|(f \overset{\wedge}{-} \varphi)\right| + |\hat{\varphi}(\xi)|$$

alors

$$\left|(f \overset{\wedge}{-} \varphi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |f - \varphi| \, e^{-ix\xi} dx \leq \|f - \varphi\|_1,$$

donc

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \|f - \varphi\|_1 + |\hat{\varphi}(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

d'où il vient que

$$\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

■

Théorème 2.3.1 (Définition) *Pour tout $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ la fonction $\hat{f}$ est continue et bornée par $\|f\|_1$, i.e.*

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

La fonction $\hat{f}$ qu'on note aussi $\mathcal{F}(f)$ est appelée la transformée de Fourier de f, et l'application

$$\mathcal{F} : \begin{cases} L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \to C_0\left(\mathbb{R}^d\right) \\ f \longmapsto \mathcal{F}(f) = \hat{f} \end{cases}$$

est la transformation de Fourier dans $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Démonstration. - On a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx$$

donc

$$\left|\hat{f}(\xi)\right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|\, dx = \|f\|_1$$

ce qui revient à dire que $\hat{f}$ est bornée.

- Considérons la fonction

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(x,y)} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} g(x,y) dx. \end{aligned}$$

y est un paramètre par rapport à $g(x,y)$.

Posons

$$F(x,\xi) = f(x) e^{-i(x,\xi)}$$

vérifiant les conditions du théorème de l'intégrale dépendant d'un paramètre [9, 265], donc

$$\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-i(x,\xi)} dx$$

est continue sur $\mathbb{R}^d$.

Tenant compte du lemme de Reimann-Lebesgue $\hat{f} \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$. ■

Corollaire 2.3.1 *La transformation de Fourier* $\mathcal{F} : \left(L^1\left(\mathbb{R}^d\right), \|.\|_1\right) \to \left(C_0\left(\mathbb{R}^d\right), \|.\|_\infty\right)$ *est une application linéaire et continue.*

2.3.3 Lien avec la translation, la modulation et l'homotétie

Notations Soit $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

a) $f_\sigma(x) = f(-x)$ (la symétrie)
b) $\tau_a f(x) = f(x-a)$ (la translation)
c) $\bar{f}$ a conjuguée de f. (si f est à valeurs complexes)

Proposition 2.3.1 *Pour toute fonction* $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ *on a*

1. $\mathcal{F}\left(f_\sigma\right)=\left(\mathcal{F}\left(f\right)\right)_\sigma.$
2. $\mathcal{F}\left(\bar{f}\right)=\overline{\left(\mathcal{F}\left(f\right)\right)_\sigma}.$
3. $\bar{\mathcal{F}}\left(\bar{f}\right)=\overline{\mathcal{F}\left(f\right)}.$

Démonstration. 1) On a

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\left(f_\sigma\right) &= \int_{\mathbb{R}^d} f_\sigma(x)e^{-i(x,\xi)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(-x)e^{-i(x,\xi)}dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{i(y,\xi)}dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f(y)e^{-i(y,-\xi)}dy \\ &= \left(\mathcal{F}\left(f\right)\right)_\sigma.\end{aligned}$$

2) et 3) sont laissés aux lecteurs comme exercice ! ■

Corollaire 2.3.2 *Pour toute fonction $f\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a*

1. f est paire (resp. impaire) $\Longrightarrow \hat{f}$ est paire (resp. impaire).
2. f est réelle paire $\Longrightarrow \hat{f}$ est réelle paire.
3. f est réelle impaire $\Longrightarrow \hat{f}$ est imaginaire impaire.

Proposition 2.3.2 *Soit $f\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

i) *Pour tout $\lambda\in\mathbb{R}^*$ on a*

$$\mathcal{F}\left(f\left(\lambda x\right)\right)\left(\xi\right)=\frac{1}{\left|\lambda\right|^d}\mathcal{F}\left(f\right)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right).$$

ii) *Pour a fixé $\left(a\in\mathbb{R}^d\right)$ on a*

$$\mathcal{F}\left(\tau_a f\right)\left(\xi\right)=e^{-i(a,\xi)}\mathcal{F}\left(f\right)\left(\xi\right),$$

et

$$\mathcal{F}\left(e^{i(a,\xi)}f\right)\left(\xi\right)=\tau_a\left(\mathcal{F}\left(f\right)\right)\left(\xi\right).$$

Démonstration. **i)** Démontrons le résultat pour le cas $d = 1$. On a

$$\mathcal{F}\left(f\left(\lambda x\right)\right) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\lambda x\right) e^{-ix\xi} dx,$$

par le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} u &= \lambda x \Longrightarrow x = \frac{u}{\lambda} \\ &\Longrightarrow dx = \frac{du}{\lambda}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f\left(\lambda x\right)\right) &= \frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\frac{\xi}{\lambda}} du \\ &= \frac{1}{\lambda}\mathcal{F}\left(f\right)\left(\frac{\xi}{\lambda}\right). \end{aligned}$$

ii) Pour le cas $d = 1$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\tau_a f\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(f\left(x-a\right)\right)(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a) e^{-ix\xi} dx, \end{aligned}$$

On utilise le changement de variable suivant

$$\begin{aligned} x - a &= u \Longrightarrow x = u + a \\ &\Longrightarrow dx = du, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(\tau_a f\right)(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i(a+u)\xi} du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-ia\xi} e^{-iu\xi} du \\ &= e^{-ia\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-iu\xi} du \\ &= e^{-ia\xi} \mathcal{F}\left(f\right)(\xi). \end{aligned}$$

La deuxième s'obtient de la même manière. ∎

2.3.4 Convolution et transformation de Fourier dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$

Un des résultats fondamentaux de ca chapitre faisant le lien entre la transformation de Fourier dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ et la convolution, il ramène la résolution des équations de convolution à des problèmes de divisions.

Proposition 2.3.3 *[5] Pour tout $f, g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a*

$$\mathcal{F}\left(f * g\right) = \mathcal{F}\left(f\right)\mathcal{F}\left(g\right).$$

Démonstration . Puisque $f, g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ alors $f * g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f * g\right)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left(f * g\right)(x) e^{-i(x,\xi)} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt\right] e^{-i(x,\xi)} dx.
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|\left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt\right\} e^{-i(x,\xi)}\right| dx &\leq \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-t)g(t)\right| dt\right\} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left\{\left|g(t)\right| \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-t)\right| dx\right\} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|g(t)\right| \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-t)\right| dx\right\} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|g(t)\right| dt \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left|f(x-t)\right| dx \\
&= \left\|g\right\|_1 \left\|f\right\|_1.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(f * g\right)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt\right] e^{-i(x,\xi)} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t) \left\{\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x-t)e^{-i(x-t,\xi)} dx\right\} e^{-i(x,\xi)} dt,
\end{aligned}$$

on pose $u = x - t$,on aura

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t) \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i(x,\xi)} du \right\} e^{-i(t,\xi)} dt \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t) e^{-i(t,\xi)} dt \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(u) e^{-i(u,\xi)} du \\
&= \mathcal{F}(f) \mathcal{F}(g).
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.2 (Formule de Dualité) *Pour tout* $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$ *on a*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(u)\hat{g}(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)g(v)dv.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^d} f(u)\hat{g}(u)du &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(u) \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x) e^{-i(x,u)} dx \right\} du \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(x) \left\{ \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(v) e^{-i(x,v)} dv \right\} dx \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(v)\hat{f}(v)dv. \text{ (Conséquence du théorème de Fubini)}
\end{aligned}$$

■

Théorème 2.3.3 *La transformation de Fourier*

$$\mathcal{F} : \begin{cases} L^1(\mathbb{R}^d) \to C_0(\mathbb{R}^d) \\ f \mapsto \hat{f} \end{cases}$$

est une application injective.

Théorème 2.3.4 (Formule d'inversion) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *et* $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R})$ *alors*

$$\hat{\hat{f}} = (2\pi)^d f_\sigma.$$

En d'autre termes, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi.$$

Démonstration. Pour $d=1$, le résultat est immédiat. ■

Proposition 2.3.4 *[5] Si $f, \hat{f}$ et g sont dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors $f.g \in L^1(\mathbb{R})$, et de plus, on a*

$$\mathcal{F}(fg) = \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f} * \hat{g}.$$

Démonstration. 1) Puisque $f, \hat{f} \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, la formule d'inversion assure que f est la transformée de Fourier d'une fonction de classe $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, ie elle est continue et bronée donc $fg \in L^1(\mathbb{R})$.

2) On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(fg) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)e^{-i(x,\xi)}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\hat{f}}(x)g(x)e^{-i(x,\xi)}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\hat{f}}(x)g(-x)e^{i(x,\xi)}dx,
\end{aligned}$$

D'après le principe de dualité on aura

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(fg) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)\hat{g}(-v)e^{i(v,\xi)}dv \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)\left\{\int_{\mathbb{R}^d} g(x)e^{i(x,\xi)}dx\right\}e^{-i(x,v)}dv \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} g(x)\left\{\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)e^{-i(x,v-\xi)}dv\right\}dx \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)\left\{\int_{\mathbb{R}^d} g(x)e^{-i(x,v-\xi)}dx\right\}dv \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(v)\hat{g}(v-\xi)dv \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f} * \hat{g}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.3.1 *L'exemple simple de la fonction caractéristique* $f(x) = \varkappa_{[a,b]}$ *montre que*

$$f \in L^1(\mathbb{R}) \nRightarrow \hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}),$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \hat{\varkappa}_{[a,b]} &= \int_a^b e^{-ix\xi} dx = \left. \frac{e^{-ix\xi}}{-i\xi} \right|_a^b \\ &= \frac{e^{-i\xi b} - e^{-i\xi a}}{-i\xi} \notin L^1(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

Cependant, il existe une condition simple pour que, étant donné un point x*, où on peut inverser la transformée de Fourier ie*

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi,$$

l'intégrale étant définie comme valeur principale de Cauchy ie

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \hat{f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi, R > 0.$$

Posons

$$S_R(x, f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{f(x+u) + f(x-u)}{2} \frac{\sin Ru}{u} du,$$

on a le théorème suivant de Dini

Théorème 2.3.5 (de Dini) *Si* $f \in L^1(\mathbb{R})$*, et soit*

$$g_x(u) = \frac{f(x+u) + f(x-u) - 2f(x)}{2},$$

et $\exists \sigma > 0$*, telle que*

$$\int_0^{\sigma} \frac{|g_x(u)|}{u} du < +\infty,$$

alors

$$\lim_{R\to\infty} \{S_R(x, f) - f(x)\} = 0.$$

Remarque 2.3.2 *La condition de Dini est satisfaite en tout point si* f *est höldérienne ie*

$$|f(x+h) - f(x)| = O(|h|^{\alpha}), 0 < \alpha < 1.$$

2.3.5 Relation avec l'opérateur de dérivation

Théorème 2.3.6 (Transformée de Fourier d'une dérivée) *[12] Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap C^1(\mathbb{R}^d)$. Si $\partial_j f = \frac{\partial}{\partial x_j} f(x_1, x_2, ..., x_d)$ donc $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^d)$. Alors*

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^d, \mathcal{F}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi \hat{f}(\xi).$$

Théorème 2.3.7 (Dérivée d'une transformée de Fourier) *[12] Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ tel que*

$$x \mapsto x_j f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Alors $\hat{f}$ admet une dérivée $\partial_j \hat{f}$ continue et bornée sur $\mathbb{R}^d$, donnée par

$$\partial_j \hat{f}(\xi) = -i\mathcal{F}(x_j f)(\xi).$$

Pour $d = 1$, on a

$$\left(\hat{f}(\xi)\right)' = -i\mathcal{F}(xf)(\xi).$$

En général, pour $k \geq 1$, on a

$$\mathcal{F}\left(f^{(k)}\right)(\xi) = (i\xi)^k \hat{f}(\xi),$$

à condition que $f, f'', ..., f^{(k)} \in L^1(\mathbb{R})$.

Remarque 2.3.3 *Les deux théorèmes précédents montrent que plus une fonction est régulière (dérivable), plus sa transformée de Fourier tend rapidement vers 0 à l'infini. Inversement, plus f tend rapisement vers 0 à l'infini, plus que $\hat{f}$ est régulière.*

2.4 Transformation de Fourier dans $L^2(\mathbb{R}^d)$

Considérons la transformée de Fourier pour des fonctions données sur toute la droite réelle $\mathbb{R}$, et voyons s'il est possible ou non de traiter cette transformation comme un opérateur dans l'espace complexe $L^2(\mathbb{R})$.

La diffeculté principale réside ici dans le fait qu'une fonction de $L^2(\mathbb{R})$ peut ne pas appartenir à $L^1(\mathbb{R})$ ie la transformée de Fourier au sens habituelle peut ne pas exister !

Plancherel (1910) à étendu la notion de la transformée de Foruier pour des fonctions de $L^2(\mathbb{R}^d)$ .Nous commençonc par construire la transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ puis l'étendre par densité à $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Dans ce qui suit nous allons démontrer deux théorèmes fondamentaux répondant à la question posée avant.

Théorème 2.4.1 (Formule de Plancherel-Parseval) *[8] Pour tout $f \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a*

$$\left\|\hat{f}\right\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2 .$$

Théorème 2.4.2 *[8] Soit $f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$. Alors*

1. *Il existe une suite $(f_n) \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui converge vers f dans $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.*
2. *Pour une telle suite (f_n), la suite $\left(\hat{f}_n\right)$ converge dans $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ vers une limite $\tilde{f}$ indépendante du choix de la limite.*

Démonstration du théorème 2.4.1. 1) Supposons d'abord que f et $\hat{f}$ soient dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors $\hat{f}$ est bornée, et nous allons démontrer que $\hat{f} \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Si $\hat{f}$ n'est pas partout nulle, on peut supposer que $\left\|\hat{f}\right\| < \infty$, donc $\left|\hat{f}(\xi)\right|^2 \leq \left|\hat{f}(\xi)\right|$, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on a

$$\left\|\hat{f}\right\|_\infty = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \left|\hat{f}(\xi)\right| ,$$

alors $\hat{f} \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

2) On a

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d \|f\|_2^2 &= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) f(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \overset{\wedge}{\bar{f}}(u) \hat{f}(-u)\, du, \quad \text{(dualité)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\hat{f}}(u) \hat{f}(-u)\, du \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \bar{\hat{f}}(\xi) \hat{f}(\xi)\, d\xi \\
&= \left\|\hat{f}\right\|_2^2 .
\end{aligned}$$

En particulier, lorsque $f, \hat{f} \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, donc on établit le théorème 2.4.1 en particulier. ■

Démonstration du théorème 2.4.2. 1)Soit $B(0,n)$ la boule ouverte de $\mathbb{R}^d$ centrée en 0 et de rayon n, $(n \geq 1)$.

Posons $f_n = f\chi_{B(0,n)}$. In a évidement que $f_n \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, et donc $f_n \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ (ceci est assuré par la formule de Cauchy-Schwartz)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x)|\, dx &= \int_{B(0,n)} |f_n(x)|\, dx \\
&\leq \left(\int_{B(0,n)} |f_n(x)|^1\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{B(0,n)} dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&< \infty,
\end{aligned}$$

on a donc, $f_n \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.

2) Montrons que $f_n \overset{L^2}{\to} f$.

Pour cela on a

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_2^2 &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{\|x\|\geq n} |f(x)|^2\, dx \\
&= 0,
\end{aligned}$$

alors $f_n \overset{L^2}{\to} f$.

3) Montrons en suite que $\hat{f}_n \overset{L^2}{\to} \hat{f}$.

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{n,m\to\infty} \left\|\hat{f}_n - \hat{f}_m\right\|_2^2 &= (2\pi)^d \lim_{n,m\to\infty} \|f_n - f_m\|_2^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

donc la suite $\left(\hat{f}_n\right)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans l'espace $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, elle est donc convergente grâce la complétude de cet espace, notons sa limite par $\hat{f}$.

4) Reste à démontrer que $\tilde{f}$ ne dépend pas du choix de la suite $(f_n)_{n\geq 1}$.

Pour cela, considérons une suite $(g_n)_{n\geq 1}$ convergente vers $\hat{g}$. Alors $(f_n - g_n) \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, et est convergente dans $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$,donc

$$\lim_{n\infty} \left\|\hat{f}_n - \hat{g}_n\right\|_2^2 = (2\pi)^d \lim_{n\to\infty} \|f_n - g_n\|_2^2 = 0,$$

ce qui nous permet de conclure que

$$\left\|\tilde{f}-\hat{g}\right\|_2^2 = 0 \Longleftrightarrow \tilde{f}=\hat{g}.$$

■

Définition 2.4.1 *La limite $\tilde{f}$ définie par le théorème 2.4.2 est dite la transformée de Fourier de la fonction f dans l'espace $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.*

Proposition 2.4.1 *La définition ci-dessus étant celle dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, autrement dit, considérons une fonction $f\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ et notons par $\hat{f}$ sa transformée de Fourier dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, et par $\tilde{f}$ sa transformée de Fourier dans $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors $\hat{f}=\tilde{f}$.*

Proposition 2.4.2 *Soit $f\in L^2\left(\mathbb{R}^1\right)$, alors entre f et sa transformée de Fourier $\hat{f}$ on a les relations symétriques suivantes*

$$\lim_{A\to\infty}\left\|\varphi_A-\hat{f}\right\|_2=0 \quad et \quad \lim_{A\to\infty}\left\|\psi_A-f\right\|_2=0,$$

avec

$$\varphi_A(\xi)=\int_{-A}^{A} f(x)e^{-ix\xi}dx,$$

$$\psi_A(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-A}^{A}\hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Théorème 2.4.3 (Formule de dualité) *Soient $f,g\in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, et notons par $\hat{f},\hat{g}$ leurs transformées de Fourier respéctivement. Alors*

$$1)\ \hat{f}g \ \ et\ f\hat{g}\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right),$$

$$2)\ \int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}(u)g(u)du=\int_{\mathbb{R}^d}f(v)\hat{g}(v)dv.$$

En effet. D'après le théorème 2.4.2 il existe deux suites $(f_n)_{n\geq1},(g_n)_{n\geq1}\in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)\cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ convergentes dans $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ vers $\hat{f},\hat{g}$ respéctivement.

La formule de dualité dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$ nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^d}\hat{f}_n(u)g_n(u)du=\int_{\mathbb{R}^d}f_n(v)\hat{g}_n(v)dv, \tag{2.12}$$

et comme on a

$$\hat{f}_n = \tilde{f}_n \quad \text{et} \quad \hat{g}_n = \tilde{g}_n$$

donc la fomrule (2.12) nous donne

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}_n(u)g_n(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f_n(v)\tilde{g}_n(v)dv,$$

par passage à la llimite lorsque $n \to \infty$, on obtient

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \tilde{f}(u)g(u)du = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(v)\tilde{g}(v)dv.$$

■

2.4.1 Convolution et transformation de Fourier dans $L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$

La convolution dans (L^p, L^q) ,pour $p = q = 2$, définie une application continue

$$L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \times L^2\left(\mathbb{R}^d\right) \to L^\infty\left(\mathbb{R}^d\right) \cap C_0\left(\mathbb{R}^d\right).$$

Nous désignons par la suite la transformée de Fourier dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \times L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ par $\hat{f}\left(\xi\right)$ ou par $\mathcal{F}\left(f\right)$.

Théorème 2.4.4 *Soient $f, g \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$, alors*

1. $$f * g = \frac{1}{(2\pi)^d}\bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}.\hat{g}\right).$$

2. $$\mathcal{F}\left(fg\right) = \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f} * \hat{g}.$$

Démonstration. 1) D'après le théorème 2.4.2, on peut trouver deux suites $(f_n)_{n\geq 1}, (g_n)_{n\geq 1}$ dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right) \cap L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ qui convergent vers f et g respectivement en moyennel quadratique.

On a

$$\begin{aligned}
(2\pi)^d \left(f_n * g_n\right)(x) &= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathcal{F}\left(f_n * g_n\right)(\xi) e^{i(x,\xi)} d\xi \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_n\left(\xi\right)\hat{g}_n\left(\xi\right) e^{i(x,\xi)} d\xi \\
&= \bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}_n \hat{g}_n\right).
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on a

$$\begin{aligned}\left\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\right\|_1 &= \left\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}_n + \hat{f}\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\right\|_1 \\ &\leq \left\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}_n\right\|_1 + \left\|\hat{f}\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\right\|_1 \\ &= \left\|\left(\hat{f}_n - \hat{f}\right)\hat{g}_n\right\|_1 + \left\|\hat{f}\left(\hat{g}_n - \hat{g}\right)\right\|_1 \\ &= \left\|\left(\hat{f}_n - \hat{f}\right)\right\|_1 \|\hat{g}_n\|_1 + \left\|\hat{f}\right\|_1 \|(\hat{g}_n - \hat{g})\|_1,\end{aligned}$$

En passant à la limite lorsque $n \to \infty$, et tenant compte du théorème 2.4.2 on obtient

$$\left\|\hat{f}_n\hat{g}_n - \hat{f}\hat{g}\right\|_1 \longrightarrow 0.$$

Donc $\left(\hat{f}_n\hat{g}_n\right)_{n\geq 1}$ converge vers $\hat{f}\hat{g}$ dans $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$.

Puisque $\mathcal{F}$ est continue donc $\left\{\bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}_n\hat{g}_n\right)\right\}_{n\geq 1}$ converge unformement vers $\bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}\hat{g}\right)$.

- Il reste à calculer la limite de $(f_n * g_n)_{n\geq 1}$. On a

$$\begin{aligned}\|f_n * g_n - f * g\|_\infty &= \|f_n * g_n - f * g_n + f * g_n - f * g\|_\infty \\ &\leq \|f_n * g_n - f * g_n\|_\infty + \|f * g_n - f * g\|_\infty \\ &= \|(f_n - f) * g_n\|_\infty + \|f * (g_n - g)\|_\infty \\ &\leq \|f_n - f\|_2 \|g_n\|_2 + \|f\|_2 \|g_n - g\|_2,\end{aligned}$$

le passage à limite lorsque $n \to \infty$,nous donne

$$\|f_n * g_n - f * g\|_\infty \to 0$$

donc $(f_n * g_n)_{n\geq 1}$converge uniformement vers $f * g$.

2) Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$ on a

$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)e^{-i(x,\xi)}dx.$$

Posons

$$h(x) = \bar{g}(x)e^{i(x,\xi)},$$

donc

$$\mathcal{F}(fg)(\xi) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\bar{h}(x)dx.$$

La formule de Plancherel-Parseval nous donne

$$(2\pi)^d \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\bar{h}(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(u)\mathcal{F}\left(\bar{h}(u)\right) du.$$

Pour $d = 1$, on a

$$\begin{aligned}
\hat{h}(x) &= \lim_{A\to-\infty} \int_{-A}^{A} h(x)e^{-ix\xi}dx, \quad (\in L^2(\mathbb{R})) \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \bar{g}(x)e^{ix\xi}e^{-ixy}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \bar{g}(x)e^{ix(\xi-y)}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_{-A}^{A} \overline{g(x)e^{-ix(\xi-y)}}\, dx \\
&= \overline{\hat{g}(\xi-y)}.
\end{aligned}$$

■

Remarque 2.4.1 *Pour $f, g \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$ on a $f * g \in C_0\left(\mathbb{R}^d\right)$, mais on ne sait pas si $f * g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Donc on ne peut parler à prioré de $\mathcal{F}(f * g)$.*

Proposition 2.4.3 *Soient $f \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right), g \in L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$, on a alors*

1. $\hat{f}.\hat{g} \in L^2\left(\mathbb{R}^d\right)$.
2. $f * g = \frac{1}{(2\pi)^d}\bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}.\hat{g}\right)$.

Récapitulatif

Dans cette partie, nous allons regrouper les résultats démontrés dans les sections passées.

1. $f \in L^1, g \in L^1 \Longrightarrow \mathcal{F}(f * g)$.
2. $\left.\begin{matrix} f, \hat{f} \in L^1 \\ g, \hat{g} \in L^1 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}$.

3. $f \in L^2, g \in L^2 \Longrightarrow \begin{cases} f * g = \bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}.\hat{g}\right) \\ \mathcal{F}(fg) = \hat{f} * \hat{g}. \end{cases}$
4. $f \in L^2, g \in L^1 \Longrightarrow f * g = \bar{\mathcal{F}}\left(\hat{f}.\hat{g}\right).$

2.5 Quelques applications de la transformation de Fourier

La transformation de Fourier joue un rôle très important dans la résolution d'un grand nombre de problèmes de physique mathématique, tels les problèmes aux limites posés pour l'équation de Laplace, de Helmholtz et de Fourier dans un domaine en forme d'une bande infinie, de demi-bande, de cylindre infinie, de demi-cylindre, etc.

En particulier, la transformation de Fourier est intéressante dans les problèmes qui se ramènent à une intégration d'équations de la forme

$$u''_{xx} + L(u) = f(x, y),$$

où $L(u)$ est un opérateur différentiel linéaire ne contenant pas la variable x et $f(x, y)$ une fonction donnée. Examinosn quelques problèmes de physique mathématique solubles par la transformation de Fourier.

2.5.1 L'équation de Laplace [3]

Considérons un problème d'hydrodynamique se ramenant à la résolution de l'équation de Laplace

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0 \quad (y < 0) \tag{2.13}$$

sous les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$u'_y(x, 0) = -\frac{1}{g}u''_{tt}, \tag{2.14}$$

$$u = \varphi(x), u'_t = 0, \quad \text{pour } y = 0, t = 0. \tag{2.15}$$

Soit

$$U(\omega, y, t) = \mathcal{F}\left[u(x, y, t)\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y, t)e^{-i\omega x}dx.$$

Si $u \to 0$ et $u'_x \to 0$ lorsque $|x| \to \infty$, on obtient

$$\mathcal{F}\left[u''_{xx}\right] = -\omega^2 U(\omega).$$

Sa solution qui tend vers 0 lorsque $y \to -\infty$ est de la forme

$$U = c(\omega, t)e^{|\omega| y},$$

où $c(\omega, t) = U|_{y=0}$. Compte tenu de cette dernière relation, en appliquant la transformation de fourier à l'équation (2.14), on obtient

$$c(\omega, t) = A(\omega)e^{i\sqrt{g|\omega|}t} + B(\omega)e^{-i\sqrt{g|\omega|}t}.$$

De (2.15) il vient

$$A(\omega) = B(\omega) = \frac{1}{2}\Phi(\omega),$$

où $\Phi(\omega)$ est la transformée de Fourier de la fonction $\varphi(x)$. Donc,

$$U = \Phi(\omega) \cos\left(\sqrt{g\,|\omega|}t\right) e^{|\omega| y}$$

et

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Phi(\omega) \cos\left(\sqrt{g\,|\omega|}t\right) e^{|\omega| y + i\omega x} d\omega.$$

2.5.2 L'équation de la chaleur [2]

Soit à déterminer la solution $u(x, t)$ de l'équation de la cahleur

$$u_t^{'} = u_{xx}^{''} \tag{2.16}$$

qui vérifie la condition initiale

$$u(x, 0) = f(x), \quad (-\infty < x < \infty). \tag{2.17}$$

Soit

$$U(\omega, t) = \mathcal{F}\left(u(x, t)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x, t)e^{i\omega x} dx. \tag{2.18}$$

Mouennant les mêmes conditions que dans l'équation de Laplace, il vient

$$\mathcal{F}\left(u_{xx}^{''}\right) = -\omega^2 U(\omega, t). \tag{2.19}$$

Donc (2.16) et (2.17) se ramènent à l'équation suivante

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = -\omega^2 U(\omega, t),$$

d'où

$$U(\omega, t) = A(\omega)e^{-\omega^2 t}.$$

En faisant $t = 0$, on obtient

$$A(\omega) = F(\omega)e^{-\omega^2 t},$$

et

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{-\omega^2 t - ix\omega} d\omega.$$

2.5.3 Le problème de Dirichlet dans le demi-plan supérieur [6]

Ce problème consiste à déterminer les fonctions u de classe C^2 sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\begin{cases} u'_{xx}(x, y) + u''_{yy}(x, y) = 0, \;\; (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \\ u(x, 0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}. \\ \sup_{y \geq 0} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x, y)| \, dx = 0. \end{cases} \tag{2.20}$$

où $f \in L^1(\mathbb{R})$ est une fonction donnée. La condition $u(x, 0) = f(x)$ signifie que

$$\lim_{y \to 0} u(x, y) = f(x) \text{ p.p.}$$

On suppose que pour tout $y > 0$ les fonctions u, u'_x, u''_{xx}et u''_{yy} sont intégrables sur $\mathbb{R}$.

Pour cela, posons pour tout $y > 0$

$$\hat{u}(\xi, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, y)e^{-ix\xi} dx.$$

En appliquant au problème (2.20) la transformée de Fourier par rapport à la variable x, on obtient

$$\begin{cases} \xi^2 \hat{u}(\xi, y) - \hat{u}''_{yy}(\xi, y) = 0 \\ \hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi) \\ |\hat{u}(\xi, y)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \left| u(x, y)e^{-ix\xi} \right| dx < \infty. \end{cases} \tag{2.21}$$

Pour $\xi \in \mathbb{R}$ fixé, l'équation différentielle en y

$$\xi^2 \hat{u}(\xi, y) - \hat{u}''_{yy}(\xi, y) = 0$$

admet pour solution générale

$$\hat{u}(\xi, y) = A(\xi)e^{-\xi y} + B(\xi)e^{\xi y}.$$

Comme $\hat{u}(\xi, 0) = \hat{f}(\xi)$, il vient $A(\xi) + B(\xi) = \hat{f}(\xi)$. De plus, si $\xi > 0$,

$$\lim_{y\to+\infty} e^{-\xi y} = 0, \text{et} \lim_{y\to+\infty} e^{\xi y} = +\infty,$$

donc la condition $\sup_{y\geq 0} |\hat{u}(\xi, y)| < +\infty$ implique $B(\xi) = 0$. On obtient de même $A(\xi) = 0$ si $\xi < 0$. Ainsi, le problème (2.21) a pour solution

$$\hat{u}(\xi, y) = \hat{f}(\xi)e^{-\xi y}. \tag{2.22}$$

Or, pour $y > 0$ fixé, la fonction $\hat{u}(\xi, y)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$, la formule d'inversion de Fourier donne alors

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{u}(\xi, y)e^{ix\xi}d\xi.$$

2.5.4 L'équation des cordes vibrantes [11]

Considérons l'équation des cordes vibrantes

$$\begin{cases} u''_{tt}(x,t) - a^2u''_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_+, \\ u(x,0) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u'_t(x,0) = g(x), \ \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{2.23}$$

On suppose que $f \in C^2(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $f', f'' \in L^1(\mathbb{R})$ et que $g \in C^1(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ est telle que $g' \in L^1(\mathbb{R})$. Il s'agit alors de déterminer $u \in C^2(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^*_+)$ solution du problème (2.23) telle que pour chaque $t > 0$ fixé, les fonctions

$$u(x,t), u'_t(x,t), u''_{tt}(x,t), u'_x(x,t) \ \text{ et } u''_{xx}(x,t)$$

appartiennent à $L^1(\mathbb{R})$, et que

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t)e^{-ix\xi}dx.$$

En appliquant la transformée de Fourier par rapport à la variable x on obtient

$$\frac{\partial^2\hat{u}}{\partial t^2} + a^2\xi^2\hat{u} = 0.$$

Cette équation différentielle admet comme solution

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos a\xi t + B(\xi) \sin a\xi t,$$

et, en vérifiant les conditions initiales on aura

$$\hat{u}(\xi, t) = A(\xi) \cos a\xi t + \frac{\hat{g}(\xi)}{a\xi} \sin a\xi t.$$

En remplaçant

$$A(\xi) \cos a\xi t = \frac{1}{2}\mathcal{F}\left(f(x + at) + f(x - at)\right)(\xi),$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{g}(\xi)}{a\xi} &= \frac{1}{2a}\mathcal{F}\left(g * \chi_{[-at,at]}\right)(\xi) \\ &= \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} g(x-y)dy = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(r)dr, \end{aligned}$$

donc, la transformée inverse de Fourier nous donne

$$u(x, t) = \frac{1}{2}\left[f(x + at) + f(x - at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(r)dr. \tag{2.24}$$

2.5.5 Application à l'astrophysique

Comment faire pour connaître la composition chimique d'un astre lointain ? Chaque atome possède un rayonnement qui lui est particulier : les photons émis n'ont que certaines fréquences très particulières. On peut donc observer le spectre du signal lumineux de l'étoile et reconnaître les marques particulières de certains éléments chimiques. Pour simuler cette observation, construire un signal composé uniquement de certaines fréquences, le bruiter légèrement et observer sa transformée de Fourier.

2.5.6 Application à la compression de signaux

Pour compresser un signal, on effectue sa transformation de Fourier et on ne garde que les fréquences dont le coefficient est parmi ceux de plus grande valeur. On stocke les coefficients à garder et le numéro de la fréquence correspondante, ce qui fait beaucoup moins de données que le signal d'origine. On recrée sur demande le signal par une transformation de Fourier inverse.

C'est le principe de la compression jpeg pour les images. La compression mp3 est aussi basée sur ce principe mais utilise aussi diverses astuces : suppression des fréquences inaudibles, codage en mono des sons de basse, suppression des sons masqués par d'autres fréquences. . .

2.6 Exercices

II-1. Développer la fonction $f(x)$ donnée en série de Fourier et indiquer le segment sur lequel la somme de la série de Fourier est égale à $f(x)$ et trouver la somme de la série au point donné x_0

$$II.1.1)\ f(x) = x, -\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi.$$

$$II.1.2)\ f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \pi \\ 0, -\pi \leq x < 0 \end{cases}, x_0 = 0.$$

$$II.1.3)\ f(x) = |x|, -\pi \leq x \leq \pi, x_0 = \pi.$$

II-2. Trouver les sommes des séries trigonométriques suivantes

$$II.2.4)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)!}.$$

$$II.2.5)\ \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n} \frac{\sin(2n-1)x}{(2n-1)!}.$$

II-3. Soit a un paramètre réel positif. Etablir les formules suivantes

$$II.3.6)\ \mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

$$II.3.7)\ \mathcal{F}\left(\frac{1}{a^2+x^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}.$$

$$II.3.8)\ \mathcal{F}\left(\left(1 - \frac{2|x|}{a}\right) \chi_{\left[\frac{-a}{2}, \frac{a}{2}\right]}\right)(\xi) = 8 \frac{\sin^2 \frac{a\xi}{4}}{a\xi^2}.$$

II-4. a) Montrer que la transformée de Fourier cosinus et sinus peut s'écrire sous forme

$$\hat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f_{paire}(x) \cos(2\pi\xi x)\, dx - 2i \int_0^{\infty} f_{impaire}(x) \sin(2\pi\xi x)\, dx.$$

b) Montrer que si f est paire, alors

$$\hat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \cos(2\pi\xi x)\, dx,$$

et si f est impaire

$$\hat{f}(\xi) = 2 \int_0^{\infty} f(x) \sin(2\pi\xi x)\, dx.$$

II-5. Donner la transformation de Fourier des fonctions suivantes

$II.5.9)\ f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad II.5.10)\ f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$, $\quad II.5.11)\ f(x) = x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$,

$II.5.12)\ f(x) = xe^{-a|x|}, (a > 0)$, $\quad II.5.13)\ f(x) = e^x e^{-e^x}$,

$II.5.6)\ f(x) = xe^{-\frac{ax^2}{2}}, (a > 0)$, $\quad II.5.7)\ f(x) = \delta^{(n)}(x)$,

$II.5.14)\ f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & |x| > 1 \end{cases}$

II-6. Pour $a > 0, b > 0, c > 0$. **Etablir les formules suivantes :**

$$II.6.15)\ \mathcal{F}\left(\delta(x-ct) + \delta(x+ct)\right)(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \xi ct.$$

$$II.6.16)\ \mathcal{F}\left(f\left(\frac{x}{a} + b\right)\right)(\xi) = ae^{iab\xi} \hat{f}(a\xi).$$

$$II.6.17)\ \mathcal{F}\left(e^{ibx} f(x)\right) = \frac{1}{a} \hat{f}\left(\frac{\xi + b}{a}\right).$$

II-7. a) Soit $f \in L^1(\mathbb{R}^2)$ une fonction radiale, il existe donc une fonction φ telle que $\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$f(x_1, x_2) = \varphi(r) \quad \text{où } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$

ainsi qu'une fonction $\psi(\rho)$ telle que $\forall (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\hat{f}(\xi_1, \xi_2) = \psi(\rho) \quad \text{où } \rho = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

b) Montrer que pour tout $\rho \in [0, +\infty)$ on a

$$\psi(\rho) = 2\pi \int_0^{2\pi} J_0(r\rho)\, \varphi(r) r dr,$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'indice 0 définie par

$$J_0(t) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-it\cos\theta} d\theta.$$

II-8. 1) Résoudre dans $L^1(\mathbb{R})$ l'équation de convolution $f * f = f$.
2) Même question pour $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$.
3) Résoudre l'équation intégrale d'inconu y

$$y * g(x) = \frac{1}{x^2 + b^2} \quad (0 < a < b),$$

avec g est la fonction intégrable définie pour $t \in \mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$.

II-9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{-ax^2} \quad a > 0.$$

i) Vérifier que la fonction f est solution de l'équation différentielle ordinaire

$$y^{'}2axy = 0.$$

ii) En appliquant la transformée de Fourier, montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle ordinaire à trouver.
iii) Intégrer l'équation différentielle trouvée dans (ii).

II-10. 1) Calculer la transformée de Fourier des fonctions définies sur $\mathbb{R}$

$$f(x) = (x-1)^2 e^{-x^2} \qquad g(x) = \frac{1}{x^2 + 2x + 2}.$$

2) a) Calculer l'intégrale

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2} dt.$$

b) Déterminer $g \in L^1(\mathbb{R})$ tel que

$$\hat{g}(\xi) = \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}.$$

c) En déduire la valeur de chacune des intégrales suivantes

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^3 t}{t^3} dt, \qquad I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^4 t}{t^4} dt.$$

d) Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixé, calculer

$$\int_0^{\infty} e^{-at} \frac{\sin t}{t} dt.$$

2.7 Indications sur les réponses aux exercices

II-1. - Après avoir vérifier le théorème de Dirichlet, nous développons les fonctions en séries de Fourier.

$II.1.1)$ La fonction $f(x) = x$ est continue sur $[-\pi, \pi]$, et vérifiée les conditions de Dirichlet.

$II.1.2)$ La fonction $f(x)$ admet $x = 0$ comme point de discontinuité de première espèce.

- Il est important d'étudier la convergence des séries de Fourier sur l'intérvalle d'étude.

II-2. En utilise la fromule d'Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$.

II-3. - Pour la première formule, remarquons que

$$ax^2 + ix\xi = a\left(\left(x + \frac{i\xi}{2a}\right)^2 + \frac{\xi^2}{4a^2}\right)$$

puis appliquer le théorème des résidus à la fonction $f(z) = e^{-az^2}$ sur le réctangle de sommets $-R, R, -R + \frac{i\xi}{2a}$ et $R + \frac{i\xi}{2a}$, avec $R > 0$.

- Pour la deuxième formule, considérer la fonction $g(z) = e^{-i\xi z}(z^2 + a^2)^{-1}$ sur le demi cercle $\{z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \text{ et } \operatorname{Im}(z) \geq 0\}$.

- La troisième formule s'obtient par une simple intégration par parties.

II-4. On sait qu'une fonction $f(x) = f_{paire}(x) + f_{impaire}(x)$, donc

$$f_{paire}(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \text{est une fonction paire.}$$

$$f_{impaire}(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad \text{est une fonction impaire.}$$

II-6. Il suffit d'éffectuer un changement de variables.

II-7. 1) Utiliser le théorème de Fubini et le changement de variables

$$\xi_1 = \rho \cos \alpha, \quad \xi_2 = \rho \sin \alpha.$$

2) Dans la formule établie au (1) remplacer $J_0(\rho r)$ par son expression intégrale et appliquer le théorème de Fubini.

II-8. 1) Appliquer la transformée de Fourier à l'équation proposée.

2) On a

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}, a > 0.$$

3) L'équation proposée s'écrit $y * g(x) = \frac{1}{x^2+b^2}$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(t) = \frac{1}{t^2+a^2}$.

II-9. i), ii) et iii) Vérification élémentaire.

II-10. 1) Utiliser la formule obtenue à l'exercice $II - 3$.

2)

a) Appliquer la formule de Plancherel-Parseval à la fonction $\chi_{[-1,1]}$.

b) Considérer $\mathcal{F}(f * f)$ où $f = \chi_{[-1,1]}$.

c) Utiliser la formule de Plancherel-Parseval.

d) Ecrire l'intégrale proposée sous la forme $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|}\hat{f}(t)dt$ puis utiliser la formule de dualité.

2.8 Corrigés détaillés de certains exercices

II-1. $II.1.2)$ $f(x) = \begin{cases} 1, 0 \leq x \leq \pi \\ 0, -\pi \leq x < 0 \end{cases}, x_0 = 0.$

La fonction $f(x)$ est monotone par morceaux sur $[-\pi, \pi]$ et admet unseul point de discontinuité de première espèce $x_0 = 0$. D'après le théorème de Dirichlet sa série de Fourier est convergente sur $[-\pi, \pi]$. Calculons les coefficients de la série de Fourier correspondante.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} dx = 1.$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos nx dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx dx \\ &= -\frac{1}{n\pi}\cos nx|_0^{\pi} = -\frac{1}{n\pi}\left[(-1)^n - 1\right] \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } n = 2k, \\ \frac{2}{\pi(2k+1)}, & \text{si } n = 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

Alors, on a

$$x \sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\pi(2k+1)}\sin(2k+1)x,$$

pour tout $x \in (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$.

La somme de la série au point $x_0 = 0$ est donnée par

$$\frac{f(0-0) + f(0+0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

La somme de cette série aux extrimités de l'intérvalle $x = \pm\pi$ est donnée par

$$\frac{f(-\pi+0) + f(\pi-0)}{2} = \frac{1}{2}.$$

II-3. $II.3.6)$ $\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) &= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2-ix\xi}dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x^2+\frac{ix\xi}{a}\right)}dx \\
&= \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left\{\left(x+\frac{ix\xi}{2a}\right)^2+\frac{\xi^2}{4a^2}\right\}}dx \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{4a^2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{ix\xi}{2a}\right)^2}dx
\end{aligned}$$

Calculons la valeur de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{ix\xi}{2a}\right)^2}dx$. Posons $z = x+\frac{ix\xi}{a}$, donc $dz = dx$.

Notons par $g(z) = e^{-az^2}$, et Γ_R le réctangle de sommets $-R, R, -R+\frac{ix\xi}{a}$ et $R+\frac{ix\xi}{a}$, avec $R > 0$.

D'après le théorème de Cauchy d'analyse complexe (voir [6]), on a

$$\int\limits_{\Gamma_R} = \int\limits_{-R}^{R} + \int\limits_{R}^{R+\frac{ix\xi}{a}} + \int\limits_{R+\frac{ix\xi}{a}}^{-R+\frac{ix\xi}{a}} + \int\limits_{-R+\frac{ix\xi}{a}}^{-R} g(z)dz.$$

Notons par

$$\begin{aligned}
J_1(R) &= \int\limits_{-R}^{R} e^{-az^2}dz = \int\limits_{-R}^{R} e^{-ax^2}dx \\
&= \int\limits_{-R}^{R} e^{-\frac{t^2}{2}}\frac{dt}{\sqrt{2a}} \to_{R\to\infty} \sqrt{\frac{\pi}{a}},
\end{aligned}$$

cette conclusion dûe de l'intégrale de Poisson

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}.$$

Soit

$$J_2(R) = \int_{R}^{R+\frac{ix\xi}{a}} g(z)dz = \int_{0}^{\frac{\xi}{2a}} e^{-a(R+it)^2}dt.$$

On a

$$|J_2(R)| \leq \int_{0}^{\frac{\xi}{2a}} e^{-aR^2}e^{at^2}dt$$

d'où

$$\lim_{R\to+\infty} J_2(R) = 0.$$

Soit

$$J_3(R) = \int_{R+\frac{ix\xi}{a}}^{-R+\frac{ix\xi}{a}} g(z)dz = -\int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}dx.$$

De même, avec

$$J_4(R) = \int_{-R+\frac{ix\xi}{a}}^{-R} g(z)dz$$

on obtient que $\lim_{R\to+R} J_4(R) = 0$.

Pour $R \to +\infty$, le théorème de Cauchy et le lemme de Jordan (voir [6]), donnent

$$\begin{aligned}
\lim_{R\to+\infty} \int_{\Gamma_R} g(z)dz &= 0 \Longleftrightarrow \lim_{R\to+\infty} (J_1 + J_2 + J_3 + J_4) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sqrt{\frac{\pi}{a}} - \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}dx = 0 \\
&\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\left(x+\frac{i\xi}{2a}\right)^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\mathcal{F}\left(e^{-ax^2}\right)(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}.$$

II-5. $II.5.10)$ $\mathcal{F}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right) \\
&= -\frac{1}{2}\mathcal{F}\left(\left(\frac{1}{1+x^2}\right)'\right) \\
&= -\frac{1}{2}i\xi\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right),
\end{aligned}$$

puisque $\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = \pi e^{-|\xi|}$ (d'après $II.3.7$, en posant $a = 1$), donc

$$\mathcal{F}\left(\frac{x}{1+x^2}\right)(\xi) = -\frac{1}{2}i\xi\pi e^{-|\xi|}.$$

$II.5.6)$ $\mathcal{F}\left(xe^{-\frac{ax^2}{2}}\right)$, $(a > 0)$.

On a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\left(xe^{-\frac{ax^2}{2}}\right) &= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{ax^2}{2}}e^{-ix\xi}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{ax^2}{2}-ix\xi}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-a\left(\frac{x^2}{2}+\frac{ix\xi}{a}\right)}dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{a}{2}\left\{\left(x-\frac{i\xi}{a}\right)^2+\frac{\xi^2}{a^2}\right\}}dx \\
&= e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{i\xi}{a}\right)^2}dx.
\end{aligned}$$

Le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{i\xi}{a}\right)^2}dx$ donne

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{i\xi}{a}\right)^2}dx = \frac{i}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\xi.$$

Donc

$$\mathcal{F}\left(xe^{-\frac{ax^2}{2}}\right) = \frac{i}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\xi e^{-\frac{\xi^2}{2a^2}}.$$

II-8. 1) La relation $f * f = f$ implique que $\hat{f}^2 = \hat{f}$, car $f * f = \hat{f}.\hat{f}$ dans $L^1(\mathbb{R})$, doù il vient que

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \hat{f}(\xi)(\hat{f}(\xi) - 1) = 0. \tag{2.25}$$

$\hat{f}$ est continue sur tout $\mathbb{R}$, on déduit de (2.25) que $\hat{f}(\xi) = 0$ ou $\hat{f}(\xi) = 1$.

Comme $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ donc $\hat{f} = 0$ et $\hat{f} \neq 1$. Alors $f = 0$ dans tout $L^1(\mathbb{R})$.

2) $f * e^{-2|x|} = e^{-3|x|}$.

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f * e^{-2|x|}\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(e^{-3|x|}\right)(\xi) \Longleftrightarrow \\ \mathcal{F}(f)\,\mathcal{F}\left(e^{-2|x|}\right) &= \mathcal{F}\left(e^{-3|x|}\right)(\xi). \end{aligned}$$

On sait que

$$\mathcal{F}\left(e^{-a|x|}\right)(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2},$$

donc

$$\begin{aligned} \hat{f}\frac{4}{4 + \xi^2} &= \frac{6}{9 + \xi^2} \Longleftrightarrow \\ \hat{f} &= \frac{3}{2}\frac{4 + \xi^2}{9 + \xi^2}. \end{aligned}$$

D'où $\lim_{|\xi| \to \infty} \hat{f}(\xi) = \frac{3}{2} \neq 0$ (ceci contredit le lemme de Riemann-Lebesgue), donc l'équation de départ n'a pas de solution dans $L^1(\mathbb{R})$.

3) Résolvons l'équation intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{y(t)dt}{(x-1)^2 + a^2} = \frac{1}{x^2 + b^2}, (0 < a < b).$$

On peut écrire autrement cette équation comme

$$y(x) * g(x) = \frac{1}{x^2 + b^2},$$

où $g(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$.

D'autre part,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(y(x) * g(x)\right)(\xi) &= \mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2 + b^2}\right)(\xi) \Longleftrightarrow \\ \hat{y}(\xi)\hat{g}(\xi) &= \frac{\pi}{b}e^{-b|\xi|}, \end{aligned}$$

car $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+b^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{b}e^{-b|\xi|}$,et aussi $\mathcal{F}\left(\frac{1}{x^2+a^2}\right)(\xi) = \frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|}$.

Donc

$$\begin{aligned} \hat{y}(\xi)\frac{\pi}{a}e^{-a|\xi|} &= \frac{\pi}{b}e^{-b|\xi|} \Longleftrightarrow \\ \hat{y}(\xi) &= \frac{a}{b}e^{(a-b)|\xi|}. \end{aligned}$$

En utilisant la transformée inverse de Fourier, on obtient

$$y(x) = \frac{a}{b\sqrt{2\pi}}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{(b-a)\xi}e^{ix\xi}dx + \int_{0}^{\infty} e^{(a-b)\xi}e^{ix\xi}dx\right\},$$

par intégration simple, et tenant compte des deux cas $b-a>0, b-a<0$ on obtient

$$y(x) = \frac{a}{b\sqrt{2\pi}}\frac{2(b-a)}{(b-a)^2+x^2}.$$

II-9. i) Vérifions que f est une solution de l'équation différentielle ordinaire

$$y' + 2axy = 0.$$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(y' + 2axy\right) &= 0 \Longleftrightarrow \\ \mathcal{F}\left(y'\right) + \mathcal{F}(2axy) &= 0 \Longleftrightarrow \\ \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-ix\xi}dx + 2a\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ix\xi}dx &= 0. \end{aligned}$$

ii) On a

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left(f'(x)\right)(\xi) &= -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ix\xi}dx \\ &\Longrightarrow\; i\mathcal{F}\left(f'(x)\right)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-ix\xi}dx, \end{aligned}$$

aussi

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{'}(x)e^{-ix\xi}dx = i\xi\hat{f}(\xi).$$

Alors on aura

$$i\xi\hat{f}(\xi) + 2ai\mathcal{F}\left(f^{'}(x)\right)(\xi) = 0,$$

ie

$$\xi\hat{f}(\xi) + 2a\mathcal{F}\left(f^{'}(x)\right)(\xi) = 0. \tag{2.26}$$

Résolvons (2.26)

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{F}\left(f^{'}(x)\right)(\xi)}{\hat{f}(\xi)} &= \frac{\xi}{2a} \Longleftrightarrow \\ \log\left|\hat{f}(\xi)\right| &= -\frac{\xi^2}{4a}. \end{aligned}$$

Donc, on aura

$$\begin{cases} \hat{f}(\xi) = ce^{-\frac{\xi^2}{4a}} \\ \hat{f}(0) = c = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

ce qui donne

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}},$$

d'où il vient que

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{\xi^2}{4a}}\right) = e^{-ax^2}.$$

2.9 Exercices supplémentaires

1. Utiliser la transformée de Fourier pour résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes

1.1) $y'' - y + 2f(x) = 0, \quad f(x) = 0$ lorsque $x < -a$.

1.2) $2y'' + xy' + y = 0$

1.3) $y'' + xy' + y = 0$.

2. Trouver la transformée de Fourier-cosinus

2.4) $f(x) = xe^{-ax}, a > 0.$ 2.5) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.6) $f(x) = e^{-ax}\cos x, a > 0.$

3. Trouver la transformée de Fourier-sinus

3.7) $f(x) = \dfrac{e^{-ax}}{x}$. 3.8) $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

3.9) $f(x) = \dfrac{1}{a^2 + x^2}$.

4. Utiliser la formule de Parseval pour calculer les intégrales suivantes

4.10) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$. 4.11) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2}dx$.

4.12) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin ax}{x\,(x^2+b^2)}dx$. 4.13) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-bx^2}}{x^2+a^2}dx$.

6. Montrer que

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\sin ax \sin bx}{x^2}dx = \frac{\pi}{2}\min(a, b).$$

Chapitre 3

Transformation de Laplace

Dans ce chapitre nous allons étudier les notions fondamentales sur la transformation de Laplace ainsi que ses propriétés fondamentales et que quelques applications.

3.1 Transformation de Laplace

Définition 3.1.1 *On appelle fonction causale (ou tout court original, voir [6, page 496]) toute fonction à valeurs complexes $f(t)$ d'argument réel t est satisfait aux conditions suivantes*

1. *$f(t)$ est intégrable sur tout intérvalle fini de l'axe des t (elle est localement intégrable).*
2. *Pour tout les t négatifs $f(t) = 0$.*
3. *$|f(t)|$ ne croît pas plus rapidement que la fonction exponentielle lorsque $t \to +\infty$, ie qu'il existe des constante $M > 0$ et a telles que pour tous les t,*
$$|f(t)| \leq Me^{at}, \tag{3.1}$$
(dans ce cas f est dite d'ordre exponentiel).

La borne inférieure a_0 de tous les nombres a vérifiant (3.1) est dite indice de croissance de la fonction $f(t)$.

Exemple 3.1.1 *La fonction de Heaviside définie par*

$$Y(t) = \begin{cases} 1, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

est un exemple fondamental de la fonction causale.

Exemple 3.1.2 *Montrer que la fonction donnée par*

$$f(t) = \begin{cases} e^{2t}\sin 3t, t > 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

est une fonction causale.

Solution. La fonction $f(t)$ est localement intégrable

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{2t}\sin 3t dt < \infty$$

pour tous t_1, t_2 finis.

La condition (2) est remplie en vertu de la définition de la fonction.

Pour la condition (3), on a pour tous les réels t

$$\left|e^{2t}\sin 3t\right| \leq e^{2t}$$

ce qui signifie que M peut être représenté par n'importe quel nombre supérieur à 1. ■

Soit $f(t)$ une fonction causale, et considérons pour tout $z \in \mathbb{C}$ l'intégrale suivante, dite de Laplace

$$\mathcal{L}(f)(z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt. \tag{3.2}$$

Définition 3.1.2 *Soit $f \in L_{loc}(\mathbb{R})$, on appelle transformée de Laplace de f, la fonction notée $\mathcal{L}f$ et définie sur l'ouvert $\{z \in \mathbb{C}, R(z) = a > a_0\}$ par*

$$\mathcal{L}f = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt.$$

Remarque 3.1.1 *Symboliquement, on peut noter l'image de la fonction $f(t)$ par la transformée de Laplace : $f(t) \doteqdot \mathcal{L}f$.*

Exemple 3.1.3 *En partant de la définition cu-dessus, trouver l'image de la fonction*

$$f(t) = e^{2t}.$$

Solution. Pour la fonction $f(t) = e^{2t}$, on a $a_0 = 2$. C'est pour cela que l'image $\mathcal{L}f(z)$ sera en tout cas définie et analytique dans le demi-plan $\mathrm{Re}(z) > 2$. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}f(z) &= \int_0^\infty e^{2t}e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-(z-2)t}dt \\ &= \frac{-1}{(z-2)}e^{-(z-2)t}\Big|_{t=0}^{t=\infty} \\ &= \frac{1}{z-2}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{L}f(z) = \frac{1}{z-2}$. Cette fonction est analytique pour $\mathrm{Re}(z) > 2$, étant en outre analytique partout, sauf au point $z = 2$. Cela, n'est pas en opposition avec l'affirmation ci-dessus, car cette dernière ne fait que *garantir* l'analyticité de $\mathcal{L}f(z)$ pour $\mathrm{Re}(z) > a_0$, sans affimer pour autant que si $\mathrm{Re}(z) < a_0$, $\mathcal{L}f(z)$, n'est pas analytique où que ce soit. ∎

Soit Σ l'ensemble de fonctions f sur $[0, \infty)$ qui sont continues par morceaux et vérifiant l'estimation

$$\forall t \in [0, \infty) : |f(t)| \leq ce^{at}, \quad \text{pour } c \geq 0, a \in \mathbb{R}.$$

Tout élément f de Σ peut être regarder comme une fonction causale, en considérons $f(t)Y(t)$.

$\mathcal{L}f$ a un sens si $|f(t)| \leq ce^{at}$, et $\mathrm{Re}\, z = a + r$ pour $r > 0$, alors

$$\int_0^\infty \left|f(t)e^{at}\right| dt \leq \int_0^\infty ce^{-rt}dt < \infty.$$

D'où l'intégrale (3.2) est absolument convergente si $\mathrm{Re}\, z > 0$.

3.2 Propriétés de la transformation de Laplace

Théorème 3.2.1 (d'unicité) *La transformation de Laplace*

$$\mathcal{L}f = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt$$

est unique dans le sens que deux fonctions $f(t), g(t)$ qui possèdent les mêmes transformations de Laplace coïncident en tous les points de continuité pour tous les $t > 0$.

Proposition 3.2.1 *Soit $f \in \Sigma$ avec $|f(t)| \leq ce^{at}$, alors*

1. *pour chaque x fixé, tel que $x > 0$ on a*
$$\lim_{|y| \to +\infty} \mathcal{L}f(x+iy) = 0.$$
2. *pour tout réel y*
$$\lim_{x \to +\infty} \mathcal{L}f(x+iy) = 0.$$

En effet. 1) $\mathcal{L}f(x+iy) = \hat{g}(y)$,où $g(t) = e^{-xt}f(t)$.

En passant à la limite lorsque $|y| \to +\infty$, en utilisant le lemme de Riemann-Lebesgue donc $\lim_{|y| \to +\infty} \hat{g}(y) = 0$.

2) Pour tout $x > a+1$, on a $\left|f(t)e^{-(x+iy)t}\right| \leq ce^{-t}$,où $e^{-t} \in L^1(\mathbb{R}^+)$. On peut appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue qui montre que pour toute suite (z_n) telle que $\operatorname{Re}(z_n) \to +\infty$, on a

$$\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}f(z_n) = \int_0^{+\infty} \lim_{n \to \infty} f(t)e^{-z_n t}dt = 0.$$

■

Propriété de linéarisation

Théorème 3.2.2 *Si $f, g \in \Sigma$, et $\forall t \geq 0$,telleq que $|f(t)| \leq c_1 e^{a_1 t}, |g(t)| \leq c_2 e^{a_2 t}$, alors sur un domaine non vide* $\operatorname{Re}(z) > \max(a_1, a_2)$ *:*

1. *$\mathcal{L}f, \mathcal{L}g$ existent.*
2. *$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} : \mathcal{L}(\alpha f + \beta g) = \alpha \mathcal{L}f + \beta \mathcal{L}f$.*

En partant de cette propriété, on peut, par exemple, à l'aide des formules suivantes
$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{z}, \quad \mathcal{L}\left(e^{a_0 t}\right) = \frac{1}{z - a_0}$$
obtenir la relation
$$\begin{aligned} \sin \omega t &= \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i} \doteqdot \frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z - i\omega} - \frac{1}{z + i\omega}\right) \\ &= \frac{\omega}{z^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

D'une façon analogue,
$$\cos \omega t \doteqdot \frac{z}{z^2 + \omega^2}, \quad sh\omega t \doteqdot \frac{\omega}{z^2 - \omega^2}, \quad ch\omega t \doteqdot \frac{z}{z^2 - \omega^2}.$$

Théorème d'homotétie

Théorème 3.2.3 *Soit $f \in \Sigma$, pour tout $a > 0$ on a*

$$\mathcal{L}f(at) = \frac{1}{a}\mathcal{L}f\left(\frac{z}{a}\right).$$

En effet. Posant $at = \tau$, nous avons

$$\begin{aligned} f(at) &\risingdotseq \int_0^\infty f(at)e^{-zt}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_0^\infty f(\tau)e^{-\frac{z}{a}\tau}d\tau \\ &= \frac{1}{a}\mathcal{L}f\left(\frac{z}{a}\right). \end{aligned}$$

■

Dérivation de l'original

Théorème 3.2.4 *Si f est continue et de classe C^1 par morceau sur $[0, \infty)$ et si $f \in \Sigma$, alors*

$$\mathcal{L}\left(f^{'}(t)\right)(z) = z\mathcal{L}f(t) - f(0).$$

En effet. Puisque $f, f^{'} \in \Sigma$, $\exists c_1, c_2 > 0$ et $a \in \mathbb{R}$, telles que

$$|f(t)| \leq c_1 e^{at}, \quad \left|f^{'}(t)\right| \leq c_2 e^{at}, \quad \text{pour } \operatorname{Re}(z) > a,$$

on a donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(f^{'}(t)\right)(z) &= f(t)e^{-zt}\big|_0^\infty - \int_0^\infty -zf(t)e^{-zt}dt \\ &= -f(0) + z\mathcal{L}f(t). \end{aligned}$$

■

Théorème 3.2.5 *[6, page 505] Si $f^{(n)}(t)$ est une fonction causale, donc*

$$\mathcal{L}\left(f^{(n)}(t)\right)(z) = z^n\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) - z^{n-1}f(0) - z^{n-2}f^{'}(0) - ... - f^{(n-1)}(0).$$

où $f^{(k)}(0)$ est la valeur limite à droite $\lim_{t\to 0+0} f^{(k)}(t)$.

Exemple 3.2.1 *Trouver l'image de la fonction $f(t) = \sin^2 t$ à l'aide du théorème de dérivation de l'original.*

Solution. Soit $f(t) \doteqdot \mathcal{L}(f(t))(z)$. Alors

$$f^{'}(t) \doteqdot z\mathcal{L}(f(t))(z) - f(0).$$

Mais $f(0) = 0$, alors

$$f^{'}(t) = 2\sin t \cos t = \sin 2t \doteqdot \frac{2}{z^2+4}.$$

Donc

$$\frac{2}{z^2+4} = z\mathcal{L}(f(t))(z) \Longrightarrow \mathcal{L}(f(t))(z) = \frac{2}{z(z^2+4)}.$$

■

Dérivation de l'image

La dérivation de l'image se ramène à la multiplication de l'original par $(-t)$

$$\frac{d}{dz}\{\mathcal{L}(f(t))(z)\} = -\mathcal{L}(tf(t))(z).$$

En général,

$$\frac{d^n}{dz^n}\{\mathcal{L}(f(t))(z)\} = \mathcal{L}((-1)^n f(t))(z).$$

Exemple 3.2.2 *Trouver l'image de la fonction*

$$f(t) = t^2 e^t.$$

Solution. On a $\mathcal{L}(e^t) = \frac{1}{z-1}$. D'après le théorème de dérivation de l'image

$$\left(\frac{1}{z-1}\right)' = -\mathcal{L}\left(te^t\right)(z)$$

d'où

$$\frac{1}{(z-1)^2} = \mathcal{L}\left(te^t\right)(z).$$

En suite,

$$\left(\frac{1}{(z-1)^2}\right)' = -\mathcal{L}\left(te^t\right)(z),$$

ou

$$\mathcal{L}\left(t^2e^t\right)(z) = \frac{2!}{(z-1)^2}.$$

■

Intégration de l'original

L'intégration d'une fonction causale revient à la dérivation de l'image par z, ie pour toute fonction $f \in \Sigma$, et $a > 0$ on a

$$\mathcal{L}\left(\int_a^x f(t)dt\right)(z) = \frac{1}{z}\mathcal{L}(f(t))(z) - \frac{1}{z}\int_0^a f(t)dt.$$

Intégration de l'image

Si l'intégration $\int_z^\infty \mathcal{L}(f(t))(z)dz < \infty$, elle est alors l'image de la fonction $\frac{f(t)}{t}$, ie

$$\mathcal{L}\left(\frac{f(t)}{t}\right)(z) = \int_z^\infty \mathcal{L}(f(t))(z)dz.$$

Exemple 3.2.3 *Trouver la transformation de Laplace de la fonction* $\frac{\sin t}{t}$.

Solution. On sait que $\mathcal{L}(\sin t)(z) = \frac{1}{z^2+1}$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{\sin t}{t}\right)(z) &= \int_z^\infty \frac{dz}{z^2+1} \\ &= arctgz|_z^\infty \\ &= \frac{\pi}{2} - artctgz.\end{aligned}$$

■

Remarque 3.2.1 *Le théorème d'intégration de l'image permet de calculer facilement certaines intégrales impropres. Soit $\mathcal{L}(f(t))(z)$ la transformée de Laplace de fonction $f(t)$ et admettons que l'intégrale impropre $\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt < \infty$. Alors*

$$\int_0^\infty \frac{f(t)}{t}dt = \int_0^\infty \mathcal{L}(f(t))(z)dz.$$

Translation

Théorème 3.2.6 *Si $\mathcal{L}(f(t))(z)$ est la transformée de Laplace de la fonction $f(t)$, alors pour tout $a_0 \in \mathbb{C}$*

$$\mathcal{L}\left(e^{a_0 t}f(t)\right)(z) = \mathcal{L}(f(t))(z - a_0).$$

Le théorème ci-dessus permet, connaissant les images des fonctions, de trouver les images de ces mêmes fonctions multipliées par l'exponontielle, par exemple

$$\mathcal{L}\left(e^{-\lambda t}\sin\omega t\right)(z) = \frac{\omega}{(z+\lambda)^2+\omega^2},$$

$$\mathcal{L}\left(e^{-\lambda t}t^n\right)(z) = \frac{n!}{(z+\lambda)^{n+1}}.$$

Théorème de multiplication (théorème de convolution)

Une place importante revient dans la méthode opérationnelle aux propositions exprimant un lien entre les fonctions causales et les transformées de Laplace du produit de fonctions.

Théorème 3.2.7 *Le produit de deux transformées de Laplace est également une transformée de Laplace, de plus, pour deux fonctions $f, g \in \Sigma$, on a*

$$\mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f * g)\,.$$

Pour les applications nous avons un corollaire utile du théorème de multiplication pour le cas où on cherche l'original du produit $z\mathcal{L}(f(t))(z)\mathcal{L}(g(t))(z)$.

Corollaire 3.2.1 *Si $\mathcal{L}(f(t))(z) = F(z)$, et $\mathcal{L}(g(t))(z) = G(z)$, alors on a l'intégrale de Duhamel*

$$f(0)g(t) + \int_0^t f'(\tau)g(t-\tau)d\tau \doteqdot zF(z)G(z).$$

Le changement de rôle des fonctions $F(z)$ et $G(z)$ conduit à la formule

$$g(0)f(t) + \int_0^t g'(\tau)f(t-\tau)d\tau \doteqdot zF(z)G(z).$$

3.3 Table de transformation de Laplace

Nous donnons dans cette section, une table des transformations de Laplace de certaines fonctions usuelles (pour plus de formules, on peut consulter [6, pages : 533-536]).

$f(t)$	$\mathcal{L}f(t)$
$t^\alpha (\alpha > -1)$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{z^{\alpha+1}}$
$e^{-\lambda t}$	$\frac{1}{z+\lambda}$
$e^{-\lambda t} t^\alpha$	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(z+\lambda)^{\alpha+1}}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{z^2+\omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{z}{z^2+\omega^2}$
$t^n \sin \omega t$	$n! \frac{\mathrm{Im}(z+i\omega)^{n+1}}{(z^2+\omega^2)^{n+1}}$

3.4 Transformation de Laplace inverse

La transformée de Laplace étant un opérateur bijectif, sa bijection inverse existe. Elle est unique et on l'appelle original de $F(z)$, on a alors

$$\mathcal{L}^{-1}\left(F(z)\right) = f(t).$$

La définition mathématique de la transformée de Laplace inverse se base sur une intégrale de contour dans le plan complexe, l'utilisation de cette définition exige une connaissance de l'Analyse complexe.

En pratique :

- On détermine la transformée inverse de $F(z)$ directement de la table.
- Il faut d'abord exprimer ou décomposer $F(z)$ en une somme de termes dont les transformées inverses sont dans la table.
- Utiliser la table conjointement avec une ou plusieurs propriétés.
- S'il y a des retards, les traiter en premier,séparément.
- Pour des fractions rationnelles, on décompose dans l'ensemble des réels en éléments simples. Pour les éléments simples de première espèce se traitent facilement. Pour ceux de seconde espèce, on doit mettre leur dénominateur sous forme canonique, pour retrouver des originaux en sinus ou en cosinus.

Exemple 3.4.1 *Trouver l'original de la fonction*

$$F(z) = \frac{1}{z(z-1)(z^2+4)}.$$

Solution. On décompose F en éléments simples comme suit

$$F(z) = -\frac{1}{4}\frac{1}{z} + \frac{1}{5}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{20}\frac{z}{z^2+4} - \frac{1}{5}\frac{1}{z^2+4}.$$

Les fonctions causales de chacune des fractions, sont données comme suit, en utilisant la linéarité de la transformée de Laplace et la table donnée ci-dessus, on a

$$f(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{5}e^t + \frac{1}{20}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t.$$

■

3.5 Comportement asymptotique des intégrales de Laplace

Dans de nomreux problèmes, on est amené à étudier le comportement asymptotique quand λ tend vers l'infini, d'intégrale du type Laplace

$$F(\lambda) = \int_a^b e^{-\lambda\varphi(x)} f(x)dx,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction à valeurs réelles. On suppose que cette inntégrale est définie pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, ie :

$$\forall\lambda \geq \lambda_0, \int_a^b e^{-\lambda\varphi(x)} |f(x)|\, dx < +\infty.$$

La contribution la plus importante à une telle intégrale, pour les grandes valeurs de λ, est celle du voisinage des points où la fonction φ atteint son minimum.

Théorème 3.5.1 *[8] Supposons que $\varphi(x)$ est de classe $C^1([a,b))$, $\varphi'(x) > 0$ sur $[a,b)$, f est continue en a et $f(a) \neq 0$. Alors, quand $\lambda \to +\infty$ on a*

$$F(\lambda) \sim \frac{f(a)}{\varphi'(a)}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda\varphi(a)}.$$

3.6 Applications

Nous considérons ici quelques applications de la transfomée de Laplace à la résolution de problèmes liés aux équations différentielles et aux dérivées partielles.

3.6.1 Equations différentielles ordinaires

Soit, pour simplifier l'exposé, une équation différentielle ordinaire d'ordre 2

$$a_0 \frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x(t) = f(t), \tag{3.3}$$

où a_0, a_1 et a_2 sont des constantes, $a_0 \neq 0$, $f(t)$ est une fonction de Σ.

Cherchons la solution de (3.3) vérifiant les conditions initiales suivantes

$$x(0) = x_0, \quad x^{'}(0) = x_1. \tag{3.4}$$

Soient $\mathcal{L}(x(t)) = X(z)$, $\mathcal{L}(f(t)) = F(z)$. En appliquant la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation (3.3) et en faisant appel au théorème de dérivation de l'original et à la propriété de linéarité de cette transformation, on obtient à la place de l'équation (3.3) avec ses données initiales (3.4) l'équation suivante dite opérationnelle

$$\left(a_0 z^2 + a_1 z + a_2\right) X(z) - (a_0 z x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0) = F(z). \tag{3.5}$$

De (3.5), on trouve

$$X(z) = \frac{F(z) + a_0 z x_0 + a_0 x_1 + a_1 x_0}{a_0 z^2 + a_1 z + a_2}. \tag{3.6}$$

L'utilisation de la transformation de Laplace inverse à la solution (3.6) nous donne la solution $x(t)$ cherchée.

Itinéraire à suivre pour la résolution du problème de Cauchy à l'aide de la transformation de Laplace

$$\boxed{\text{Problème de Cauchy dans l'espace des originaux}}$$
$$\Downarrow \mathcal{L}$$
$$\boxed{\text{Equation opérationnelle dans l'espace des images}}$$
$$\Downarrow$$
$$\boxed{\text{Solution de l'équation opérationnelle}}$$
$$\Downarrow \mathcal{L}^{-1}$$
$$\boxed{\text{Solution du problème de Cauchy}}$$

Exemple 3.6.1 *Résoudre le problème de Cauchy suivant*

$$x^{''} + x = 2\cos t, \qquad x(0) = 0, x^{'}(0) = -1.$$

Solution. Notons $X(z) = \mathcal{L}x(t)$, donc

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(x^{'}(t)\right) &= zX(z) - x(0) \\ &= zX(z).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(x^{''}(t)\right) &= z^2X(z) - zx(0) - x^{'}(0) \\ &= z^2X(z) + 1.\end{aligned}$$

$$\cos t \doteqdot \frac{z}{z^2+1}.$$

L'équation opérationnelle est donnée par

$$z^2X(z) + 1 + X(z) = \frac{2z}{z^2+1}$$

d'où

$$X(z) = \frac{2z}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{z^2+1}.$$

On utilise la transformée inverse de Laplace, on aura la fonction causale

$$\begin{aligned}x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{2z}{(z^2+1)^2} - \frac{1}{z^2+1}\right) \\ &= t\sin t - \sin t\end{aligned}$$

qui est la solution du problème de Cauchy. ■

3.6.2 Résolution des systèmes d'équations différentielles linéaires

La résolution d'un système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants avec l'utilisation de la transformation de Laplace est entreprise en suivant le même chemin que celui aboutit à la résolution d'une seule équation différentielle.

Nous considèrons, comme exemple illustratif, le système suivant

$$\begin{cases} x^{'''} = 3(y - x + z), \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = 0, \\ y^{''} = x - y, \quad y(0) = 0,\ y^{'}(0) = -1, \\ z^{''} = -z, \quad z(0) = 1, \quad z^{'}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.7}$$

Solution. En passant au système oppérationnel, après avoir appliquer la transformation de Laplace au système (3.7), on trouve

$$\begin{cases} z^2X = 3(Y - X + Z), \\ z^2Y + 1 = X - Y, \\ z^2Z - z = -Z. \end{cases} \tag{3.8}$$

où $\mathcal{L}x(t) = X(z), \mathcal{L}y(t) = Y(z)$ et $\mathcal{L}z(t) = Z(z)$.

En résolvant le dernier système par rapport à $X(z), Y(z)$ et $Z(z)$, on aura

$$X(z) = \frac{3(z-1)}{z^2(z^2+4)}, \quad Y(z) = \frac{3(z-1)}{z^2(z^2+1)(z^2+4)} - \frac{1}{z^2+1},$$

$$Z(z) = \frac{z}{z^2+1}.$$

L'utilisation de la transformation inverse de Laplace, nous donne les originaux suivants

$$x(t) = \frac{3}{4}(1-t) - \frac{3}{4}\cos 2t + \frac{3}{8}\sin 2t,$$

$$y(t) = \frac{3}{4}(1-t) + \frac{1}{4}\cos 2t - \frac{1}{8}\sin 2t - \cos t,$$

$$z(t) = \cos t.$$

■

3.6.3 Résolution des problèmes de la physique mathématique

Nous allons nous limiter au cas où la fonction inconnue u dépend de deux variables indépendantes x, t. La variable x sera considérée comme une coordonnée spatiale, tandis que t désignera le temps.

Soit une corde, ses extrémités sont fixées $(x = 0, x = l)$.

L'écart initial est donné par l'égalité

$$u(x, 0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, (0 \leq x \leq l).$$

La vitesse initiale est nulle. Trouvons les écarts $u(x, t)$, pour $t > 0$.

Il est claire que la fonction $u(x, t)$ est la solution de l'équation de l'équation

$$u''_{xx} - \frac{1}{a^2}u''_{tt} = 0, \tag{3.9}$$

soumise aux conditions initiales suivantes

$$u(x,0) = A \sin \frac{\pi x}{l}, \quad u_t^{'}(x,0) = 0, \tag{3.10}$$

et aux conditions frontières

$$u(0,t) = u(l,t) = 0. \tag{3.11}$$

Eppliquant la transformation de Laplace par rapport au temps t, on aura

$$\frac{d^2U}{dx^2} - \frac{z^2}{a^2}U = \frac{z^4}{a^2} \sin \frac{\pi x}{l}, \tag{3.12}$$

avec

$$U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0. \tag{3.13}$$

En résolvant l'équation (3.12) on aura

$$U(x,z) = c_1 e^{\frac{zx}{a}} + c_2 e^{-\frac{zx}{a}} + \frac{Az}{z^2 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Tenant compte des conditions aux limites (3.13) on aura

$$U(x,z) = \frac{Az}{z^2 + \frac{a^2\pi^2}{l^2}} \sin \frac{\pi x}{l}.$$

En appliquant la transformation inverse de Laplace on obtient l'original

$$u(x,t) = A \cos \frac{\pi a t}{l} \sin \frac{\pi x}{l},$$

qui représente la solution du problème posé.

3.7 Exercices

III-1. Calculer la transformée de Laplace des fonctions suivantes

$$\begin{aligned} III.1.1) f(t) &= t. \\ III.1.2) f(t) &= \sin 3t. \\ III.1.3) f(t) &= te^t. \\ III.1.4) f(t) &= t^\alpha, (\alpha > -1). \end{aligned}$$

III-2. a) Trouver la transformée de Laplace des fonctions

$III.2.5)\ f(t) = t{+}1.\quad III.2.6)\ f(t) = 2\sin t{-}\cos t.\quad III.2.7)\ f(t) = t{+}\frac{1}{2}e^{-t}.$

b) En appliquant le théorème d'homotétie, trouver les images des fonctions suivants

$$\begin{aligned} III.2.8)\ f(t) &= e^{at}. \\ III.2.9)\ f(t) &= \sin 4t. \\ III.2.10)\ f(t) &= \cos \omega t. \\ III.2.11) f(t) &= sh3t. \end{aligned}$$

III-3. En utilisant le théorème de dérivation de l'original, trouver les images des fonctions suivantes

$III.3.12)\ f(t) = \cos^2 t.\quad III.3.13)\ f(t) = \sin^3 t.\quad III.3.14)\ f(t) = t \sin \omega t.$

$III.3.15)\ f(t) = t \sin \omega t.\quad III.3.16)\ f(t) = te^t.\quad III.3.17)\ f(t) = \cos^4 t.$

III-4. Trouver les images des fonctions suivantes

$III.4.18)\ f(t) = t^2 \cos t.\quad III.4.19)\ f(t) = t\left(e^t + cht\right).$

$III.4.20)\ f(t) = (t{+}1) \sin 2t.\quad III.4.21)\ f(t) = tsh3t.$

III-5. Trouver les images des fonctions suivantes

$$III.5.22) f(t) = \int_0^t \sin \tau d\tau. \qquad III.5.23) f(t) = \int_0^t (\tau + 1) \cos \omega \tau d\tau$$

$$III.5.24)\ f(t) = \int_0^t \tau sh 2\tau d\tau. \qquad III.5.25)\ f(t) = \int_0^t \cos^2 \omega \tau d\tau.$$

III-6. Trouver les images des fonctions suivantes

$$III.6.26)\ f(t) = \frac{e^t - 1}{t}. \quad III.6.27)\ f(t) = \frac{1 - e^{-t}}{t}. \quad III.6.28)\ f(t) = \frac{\sin^2 t}{t}.$$

$$III.6.29)\ f(t) = \frac{1 - \cos t}{t}. \quad III.6.30)\ f(t) = \frac{\cos t - \cos 2t}{t}. \quad III.6.31)\ f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{t}.$$

III-7. Trouver la transfromation de Laplace des fonctions suivantes

$$III.7.32)\ f(t) = \begin{cases} 0, t < 1, \\ t^2, 1 < t < 2, \\ 0, t > 2. \end{cases} \qquad III.7.33)\ f(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq a, \\ e^{-b-(t-a)}, t > a. \end{cases}, (a > 0).$$

$$III.7.34)\ f(t) = \begin{cases} 0, 0 \leq t \leq a, \\ 1 - e^{-b(t-a)}, t > a. \end{cases}, (a > 0).$$

III-8. Admettons qu'une fonction périodique $f(t)$ de période T soit un original. Montrer que son image $F(z)$ par la transformation de Laplace est donnée par la formule

$$F(z) = \frac{1}{1 - e^{-zT}} \int_0^T e^{-zt} f(t) dt$$

et qu'elle définie dans le demi-plan $\text{Re}\,(z) = a > 0$.

III-9. Trouver les images des fonctions suivantes

$$III.9.35)\ \int\limits_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau. \qquad III.9.36)\ \int\limits_0^t \cos(t-\tau)\, e^{2\tau}d\tau.$$

$$III.9.37)\ \int\limits_0^t (t-\tau)^2\, ch\tau d\tau. \qquad III.9.38)\ \int\limits_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau.$$

III-10. Trouver les fonctions causales correspondantes aux images suivantes

$$III.10.39)\ F(z)=\frac{2e^{-z}}{z^3}. \quad III.10.40)\ F(z)=\frac{e^{-2z}}{z-1}. \quad III.10.41)\ F(z)=\frac{e^{-3z}}{z+3}.$$

$$III.10.42) F(z)=\frac{1}{z^2+4z+5}. \quad III.10.43) F(z)=\frac{1}{z^2+4z+3}.$$

$$III.10.44) F(z)=\frac{1}{(z-1)^2(z+2)}. \quad III.10.45)\ F(z)=\frac{z}{z^3+1}.$$

$$III.10.46)\ F(z)=\frac{z+2}{(z+1)(z-2)(z^2+4)}.$$

III-11. Résoudre les équations différentielles ordinaires suivantes

$$III.11.47)\ x' + x = e^{-t},\ x(0)=1.$$

$$III.11.48)\ x' - x = 1, \quad x(0) = -1.$$

$$III.11.49)\ x'' + x' = 1, \quad x(0)=0, x'(0)=1.$$

$$III.11.50)\ x'' + 3x' = e^t, \quad x(0)=0, x'(0)=-1.$$

III-12. Résoudre les systèmes différentiels suivants

$$III.12.51)\ \begin{cases} x' + y = 0 \\ y' + x = 0 \end{cases} \quad x(0)=1, y(0)=-1.$$

$$III.12.52)\ \begin{cases} x + x' = y + e^t \\ y + y' = x + e^t \end{cases} \quad x(0)=y(0)=1.$$

$$III.12.53)\ \begin{cases} x' = y + z, \\ y' = 3x + y, \\ z' = 3y - x, \end{cases} \quad x(0)=1, y(0)=1.$$

3.8 Indications sur les réponses aux exercices

III-1. Application directe de la définition de la transformation de Laplace, pour toute fonction $f \in \Sigma$

$$\mathcal{L}\left(f(t)\right)(z) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}dt.$$

Un calcul simple de l'intégrale impropre nous mène vers les résultats souhaités.

III-2. a) On utilise la propriété de linéarité de la transformée de Laplace.
b) Le théorème d'homotétie

$$f(\alpha t) \risingdotseq \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{z}{\alpha}\right).$$

III-3. Une application directe du théorème de dérivation de l'original.

III-4. En utilise le théorème de dérivation de l'original pour la fonction $tf(t)$, ie

$$tf(t) \risingdotseq F(z),$$

en suite en dérivnat le résultat ie

$$t^2 f(t) \risingdotseq -F^{'}(z).$$

III-5. Une application immédiate de l'intégration de l'original

$$\int_0^t f(u)du \risingdotseq \frac{F(z)}{z}.$$

III-6. Application directe de l'intégration de l'image

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_z^{\infty} F(z)dz.$$

III-7.

$$III.7.32) f(t) = \begin{cases} 0, t < 1, \\ t^2, 1 < t < 2, \\ 0, t > 2. \end{cases}$$

Exprimons $f(t)$ par les puissances des différences $t-1$ et $t-2$.

III-8. Efféctuant un changement de variable dans l'intégralle

$$F(z) = \int_0^\infty f(t+T)e^{-zt}dt,$$

avec T est la pérdiode de $f(t)$.

III-9. Application du théorème de multiplication (convolution).

III-10. $III.10.42), III.10.43), III.10.44), III.10.45)$ et $III.10.46)$: Après avoir décomposé les fractions en éléments simples, on utilise la transformée inverse de Laplace et la table de la transformation de Laplace.

3.9 Corrigés détaillés de certains exercices

III-1.

$III.1.2) f(t) = \sin 3t.$

On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin 3t)(z) &= \int_0^\infty (\sin 3t)\, e^{-zt} dt \\ &= I_1. \end{aligned}$$

En intégration par parties on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin 3t)(z) &= I_1 \\ &= -\frac{1}{z} e^{-zt} \sin 3t \Big|_0^\infty + \frac{3}{z} \int_0^\infty (\cos 3t)\, e^{-zt} dt \\ &= -\frac{1}{z} e^{-zt} \sin 3t \Big|_0^\infty - \frac{3}{z^2} e^{-zt} \cos 3t \Big|_0^\infty - \frac{9}{z^2} I_1 \\ &= \frac{3}{z^2} - \frac{9}{z^2} I_1 \end{aligned}$$

donc

$$\mathcal{L}(\sin 3t)(z) = \frac{3}{9+z^2}.$$

III-2. b) Théorème d'homotétie.

$III.2.9) f(t) = \sin 4t.$

On a

$$f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{z}{\alpha}\right),$$

donc

$$\mathcal{L}(\sin 4t) = \frac{1}{4} \mathcal{L}(\sin t)\left(\frac{z}{4}\right),$$

avec

$$\mathcal{L}(\sin t) = \frac{1}{z^2+1}.$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\sin 4t) &= \frac{1}{4} \frac{1}{\left(\frac{z}{4}\right)^2 + 1} \\ &= \frac{4}{z^2+16}. \end{aligned}$$

III-3. En utilisant le théorème de dérivation de l'original

$III.3.12) f(t) = \cos^2 t.$

Soit $\mathcal{L}(f(t)) = F(z)$. Alors

$$f^{'}(t) \doteqdot zF(z) - f(0).$$

Donc

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= -2\sin t \cos t \\ &= -\sin 2t \\ &\doteqdot zF(z) - 1, \end{aligned}$$

et

$$\sin 2t \doteqdot \frac{2}{z^2+4},$$

alors

$$\begin{aligned} -\frac{2}{z^2+4} &= zF(z) - 1 \Longleftrightarrow \\ F(z) &= \frac{z^2+2}{z(z^2+4)}. \end{aligned}$$

$III.3.16) f(t) = te^t.$

On a $f(t) \doteqdot F(z)$. Et donc

$$\begin{aligned} f^{'}(t) &= e^t + f(t) \\ &\doteqdot zF(z). \end{aligned}$$

Or

$$\mathcal{L}\left(e^t + f(t)\right) = \mathcal{L}\left(e^t\right) + F(z),$$

avec

$$\mathcal{L}\left(e^t\right) = \frac{1}{z-1}.$$

D'où il vient que

$$\frac{1}{z-1} + F(z) = zF(z)$$

donc

$$F(z) = \frac{1}{(z-1)^2}.$$

III-5.

$III.5.22) f(t) = \int\limits_0^t \sin u du.$

Le théorème d'intégration de l'original donne

$$\int\limits_0^t f(t)dt \doteqdot \frac{F(z)}{z}.$$

Donc

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t \sin u du &\doteqdot \frac{\mathcal{L}(\sin t)(z)}{z} \\ &= \frac{1}{z(z^2+1)}.\end{aligned}$$

$III.5.24) f(t) = \int\limits_0^t \tau sh2\tau d\tau.$

Posons $\mathcal{L}(sh2\tau) = F(z)$.

Tout d'abord, calculons $\mathcal{L}(\tau sh2\tau)$.

Nous savons d'après la table de la transformation de Laplace que $\mathcal{L}(sh2\tau) = \frac{2}{z^2-4} = F(z)$. Le théorème de dérivation de l'image nous donne

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\tau sh2\tau) &= -F^{'}(z) \\ &= \left(\frac{2}{z^2-4}\right)^{'} \\ &= \frac{4z}{(z^2-4)^2}.\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}\int\limits_0^t \tau sh2\tau d\tau &\doteqdot \frac{F(z)}{z} \\ &= \frac{4}{(z^2-4)^2}.\end{aligned}$$

III-6.

$III.6.26) f(t) = \dfrac{e^t - 1}{t}.$

On utilise le théorème d'intégration de l'image

$$\frac{f(t)}{t} \risingdotseq \int_z^{\infty} F(z)dz.$$

Posons $F(z) = \mathcal{L}(e^t - 1)$, donc

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{L}\left(e^t\right) - \mathcal{L}(t) \\ &= \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \int_z^{\infty} F(z)dz &= \int_z^{\infty} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}\right) dz \\ &= \ln \frac{z}{z-1}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{e^t - 1}{t} \risingdotseq \ln \frac{z}{z-1}.$$

$III.6.30) f(t) = \dfrac{\cos t - \cos 2t}{t}.$

Posons $F(z) = \mathcal{L}(\cos t - \cos 2t)$, donc

$$\begin{aligned} F(z) &= \mathcal{L}(\cos t) - \mathcal{L}(\cos 2t) \\ &= \frac{z}{z^2+1} - \frac{2}{z^2+4}. \end{aligned}$$

Alors l'intégration de l'image nous donne

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left(\frac{\cos t - \cos 2t}{t}\right) &= \int_z^{\infty} \left(\frac{z}{z^2+1} - \frac{z}{z^2+4}\right) dz \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{z^2+4}{z^2+1}. \end{aligned}$$

III-7.

$$III.7.32) f(t) = \begin{cases} 0, & t < 1, \\ t^2, & 1 < t < 2, \\ 0, & t > 2. \end{cases}$$

Exprimons $f(t)$ par les puissances des diffétrences $t-1$ et $t-2$.
On a

$$t^2 = [(t-1)+1]^2 = (t-1)^2 + 2(t-1) + 1,$$
$$t^2 = [(t-2)+2]^2 = (t-2)^2 + 4(t-1) + 2.$$

Donc, la fonction donnée $f(t)$ va s'écrire sous la forme

$$f(t) = \left[(t-1)^2 + 2(t-1) + 1\right]\eta(t-1) - \left[(t-2)^2 + 4(t-1) + 2\right]\eta(t-2),$$

avec

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, t > 0, \\ 0, t < 0. \end{cases}$$

En passant àa la transformation de Laplace, on obtient

$$f(t) \doteqdot F(z) = \left(\frac{2}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}\right)e^{-z} - \left(\frac{2}{z^3} + \frac{4}{z^2} + \frac{4}{z}\right)e^{-2z}.$$

III-9. La formule de convolution

$$\mathcal{L}(f)\,\mathcal{L}(g) = \mathcal{L}(f * g),$$

permet d calculet l'image des fonctions :

$$III.9.35) \int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau.$$

On a $f(t) = e^t \doteqdot \frac{1}{z-1} = F(z)$,et $g(t) = \sin t \doteqdot \frac{1}{z^2+1} = G(z)$.

Donc

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{t-\tau}\sin\tau d\tau &= f(t) * g(t) \\ &\doteqdot F(z)G(z) \\ &= \frac{1}{(z-1)(z^2+1)}. \end{aligned}$$

$III.9.38) \int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau.$

Considérons $g(t) = t^n$, donc

$$g(t) \doteqdot \frac{n!}{z^{n+1}} = G(z),$$

et que

$$f(t) \doteqdot F(z).$$

Donc le théorème de convolution nous donne

$$\begin{aligned}\int_0^t (t-\tau)^n f(\tau)d\tau &= g(t) * f(t)\\ &\doteqdot G(z)F(z)\\ &= \frac{n!}{z^{n+1}}F(z).\end{aligned}$$

III-10.

$III.10.39) F(z) = \frac{2e^{-z}}{z^3}.$

Trouvons l'original $f(t)$.

La présence du facteur e^{-z} implique l'utilisation du théorème de suivant dit de retardement :

Théorème 3.9.1 *Si $f(t) \doteqdot F(z)$, pour tout τ positif,*

$$f(t-\tau) \doteqdot e^{-z\tau}F(z).$$

On a pour la fonction $g(t) = t^2\eta(t)$, donc

$$f(t) \doteqdot \frac{2}{z^3}.$$

D'après le théorème de retardement, pour la fonction $f(t) = (t-1)^2\eta(t)$, on a

$$f(t) \doteqdot \frac{2e^{-z}}{z^3},$$

donc la fonction causale est

$$f(t) = (t-1)^2\eta(t).$$

$III.10.42)$ $F(z) = \dfrac{1}{z^2+4z+5}.$

On a

$$F(z) = \frac{1}{z^2+4z+5} = \frac{1}{(z+2)^2+1},$$

en utilise le théorème de translation

$$e^{a_0 t} f(t) \doteqdot F(z-a_0),$$

alors

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z+2)^2+1}\right) = e^{-2t}\sin t,$$

avec

$$\sin t \doteqdot \frac{1}{z^2+1}.$$

$III.10.46)$ $F(z) = \dfrac{z+2}{(z+1)(z-2)(z^2+4)}.$

Tout d'abord, on décompose $F(z)$ en éléments simples, comme suit

$$F(z) = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z-2} + \frac{Cz+D}{z^2+4},$$

donc on aura l'équation algébrique

$$z+2 = A(z-2)(z^2+4) + B(z+1)(z^2+4) + (Cz+D)(z+1)(z-2)$$

par identification on aura

$$A = -\frac{1}{15}, B = \frac{1}{6}, C = -\frac{1}{10}, D = -\frac{2}{5}.$$

Donc

$$F(z) = -\frac{1}{15(z+1)} + \frac{1}{6(z-2)} - \frac{z}{10(z^2+4)} - \frac{2}{5(z^2+4)}.$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse on aura

$$\begin{aligned} f(t) &= \mathcal{L}^{-1}(F(z)) \\ &= -\frac{1}{15}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{2t} - \frac{1}{10}\cos 2t - \frac{1}{5}\sin 2t. \end{aligned}$$

III-11.

$III.11.47)$ $x^{'} + x = e^{-t}, \quad x(0) = 1.$

On applique la transformée de Laplace aux deux membres de l'équation différentielle, on aura une équation opérationnelle.

$$\begin{aligned} x^{'} &\doteqdot zX(z) - x(0) \\ &= zX(z) - 1, \end{aligned}$$

et

$$e^{-t} \doteqdot \frac{1}{z+1},$$

donc on obtient

$$\begin{aligned} zX(z) + X(z) &= 1 + \frac{1}{z+1} \Longleftrightarrow \\ X(z) &= \frac{z+2}{(z+1)^2} \\ &= \frac{1}{z+1} + \frac{1}{(z+1)^2}. \end{aligned}$$

On utilise la transformée de Laplace inverse, on aura

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left(X(z)\right) \\ &= \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+1}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(z+1)^2}\right) \\ &= e^{-t} + te^{-t} \\ &= (t+1)e^{-t}, \end{aligned}$$

c'est la solution de l'équation différentielle donnée.

$III.11.50)$ $x^{''} + 3x^{'} = e^{t}, \quad x(0) = 0, x^{'}(0) = -1.$

De la même façon, en utilise la transformée de Laplace dans les deux membres de l'éuation différentielle, avec

$$\begin{aligned} x^{''} &\doteqdot z^2X(z) - zx(0) - x^{'}(0) \\ &= z^2X(z) + 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^{'}(t) &\doteqdot zX(z) - x(0) \\ &= zX(z). \end{aligned}$$

et

$$e^t \doteqdot \frac{1}{z-1},$$

on obtient l'équation opérationnelle

$$z^2X(z) + 3zX(z) + 1 = \frac{1}{z-1}$$

donc

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{3-z}{z(z+3)(z-1)} \\ &= -\frac{2}{3z} + \frac{5}{12\,(z+3)} + \frac{1}{4(z-1)} \end{aligned}$$

On utilise la transformée inverse de Laplace on aura

$$\begin{aligned} x(t) &= -\frac{2}{3}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{5}{12}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z+3}\right) + \frac{1}{4}\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{z-1}\right) \\ &= -\frac{2}{3} + \frac{5}{12}e^{-3t} + \frac{1}{4}e^t. \end{aligned}$$

3.10 Exercices supplémentaires

1. Calculer les intégrales suivantes

1.1) $$\int_0^\infty \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt \ (a > 0, b > 0).$$

1.2) $$\int_0^\infty \frac{e^{-at} \sin bt}{t} dt \ (a > 0, b > 0).$$

1.3) $$\int_0^\infty \frac{Ae^{-\alpha t} + Be^{-\beta t} + Ce^{-\gamma t} + De^{-\delta t}}{t} dt,$$

$(A + B + C + D = 0, \ \alpha > 0, \beta > 0, \gamma > 0, \delta > 0)$

2. Montrer que si $f(t) \doteqdot F(z)$,**alors**

$$f(t)\eta(t - a) \doteqdot F(z) - \int_0^a f(t)e^{-zt} dt,$$

où

$$\eta(t) = \begin{cases} 1, & \textbf{si } t > 0 \\ 0, & \textbf{si } t < 0. \end{cases}$$

3. L'état de repos d'un pendule simple de longueur l est perturbé à la suite des petits écarts que subit son point de suspension dans le sens horizontal. Montrer qu'à un déplacement a du point de suspension il correspond un écart du pendule égale à $a(1 - \cos nt)$,avec $n^2 = \frac{g}{l}$.

4. Un point pesant de masse m tombe dans un milieu dont la résistance est directement proportionnelle à la puissance 1 de la vitesse. Trouver la vitesse maximale du point en sachant que pour $v = 1m/s$ la résistance est égale à un tiers $(\frac{1}{3})$ du poinds du point et que la vitesse initiale $v_0 = 0$.

Bibliographie

[1] Brezis H., Analyse fonctionnelle, Masson, 1993.

[2] C. Casquet, P. Witomski, Analyse de Fourier et applications. Edition Dunod 1994.

[3] L. Debnath, D. Bhatta, Integral transfoms and their applications. Second edition, Champan & Hall/CRC, 2007.

[4] V. Ditkine, A. Proudnikov, Transformations intégrales et calcul opérationnel. Editions Mir Moscou, deuxième édition, 1978.

[5] Laamri E. H., Mesures, intégration, convolution et transformée de Fourier de fonctions. Dunod, 2001.

[6] M. Lavrentiev, B. Chabat, Méthodes de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Editions Mir, Moscou, 1972.

[7] V. Lévine, Séries et intégrales de Fourier, éléments de calcul opérationnel. Sovietskoe radio, 1948.

[8] Vo-Khac K., Mesure, intégration, convolution et analyse de Fourier. Intérprétation dans le langage des probabilités. Ellipses, 1998.

[9] M. R. Speigel, Théorie et applications de l'analyse. Série Schaum1984.

[10] M. R. Speigel, Theory and Problems Of Laplace Transforms. Schaums outline series, 1965.

[11] G. P. Tolstov, Fourier Series. (Translated from the russian) Dover Pulications, INC, New-York, 1976.

[12] A. Zygmund, Trigonometric series. Combridge University Press, 1968.