الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques,
Commerciales et des Sciences de Gestion

قسم العلوم الاقتصادية

محاضرات وتمارين موجهة لطلبة السنة الثالثة
اقتصاد كمي السداسي الأول

تحليل المعـــــــطيات
Analyse des données

من إعداد الأستاذ:
وادي عز الدين

السنة الجامعية 2022-2023

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرس المحتويات

المحور الأول

مبادئ تحليل المعطـــــــيات

يعرف العالم في الوقت الحاضر تطورات متسارعة ونموا كبيرا شمل مختلف جوانب الحياة، أسفر عن ظهور مشكلات وظواهر معقدة تتطلب دراسة معمقة، وبناء على ذلك يسعى كل متخذ قرار إلى تطوير وتحديث وسائل وأدوات عمله بما يساهم في زيادة فعالية مستوى أدائه المهني، إذ لم تعد القرارات الإدارية في العصر الحديث تعتمد على الأساليب التقليدية في الإدارة التي تستند إلى الحدس الخبرة الشخصية لمتخذ القرار في معالجة المشاكل الإدارية التي تواجه المؤسسة، بل أصبحت تلجأ أكثر فأكثر إلى استخدام الأساليب والتقنيات الكمية للتوصل إلى قرارات أكثر دقة وموضوعية، حيث أوضحت العديد من الدراسات والبحوث عجز الأساليب التقليدية ومحدوديتها في معالجة المشكلات الإدارية المعاصرة. لذلك تبرز أهمية البحث في استخدام الأساليب العلمية عامة والأساليب الكمية المعتمدة في دعم وترشيد القرارات الإدارية داخل المؤسسات الاقتصادية، ويأتي تأثير استخدام الأساليب الكمية في دعم القرارات الإدارية من جانبين مهمين:

- تحسين مستوى الأداء العام للمؤسسات الاقتصادية والزيادة من قدرتها التنافسية؛
- تطوير أساليب التسيير داخل المؤسسات الاقتصادية وفق مع ما يتماشى والتطورات الحاصلة في محيطها؛
- مواجهة التحديات المستقبلية أو الأزمات الطارئة من خلال تعزيز دور اليقظة الاستراتيجية.

نسمي الاحصاء وصفي كل تحليل احصائي يتم على جداول احصائية ذات بعد واحد أي ذات متغير واحد أما في حالة جداول احصائية ذات متغيرات متعددة فإن الطريقة الملائمة لتحليلها في التحليل الاحصائي المتعدد الأبعاد والذي هدفه استخراج من الكم الهائل من المعطيات نتائج يمكن الاعتماد عليها وذلك بدون الاستعانة بالتوزيعات الاحصائية، حيث أن تحليل المعطيات يمكن أن يكون عن طريق طرق كمية أخرى مثل الاقتصاد القياسي أما تحليل المعطيات فتعتمد على طرق جبرية وهندسية خالية من الفرضيات متعلقة بتوزيع المتغيرات.

1– مفهوم تحليل المعطيات: اختلف الباحثون على إعطاء مفهوم واحد لتحليل المعطيات فمنهم من يراه من منظور رياضي يتجلى في معادلات رياضية وآخر يراه في مجموعة من العلاقات الاحصائية والثالث يراه من زاوية المعلوماتية فتحليل المعطيات هي وصف لجداول رقمية فأمام هذه الأرقام يتعين على الباحث القيام بتحليلها واستخراج النتائج التي تكون دعامة لاتخاذ القرار المناسب. وكتعريف شامل هي الميدان الذي يستعمل أرقاما مستمدة من واقع ما بهدف الحصول على معلومات مفيدة وغنية حول إشكالية مطروحة في أقل وقت ممكن وبأقل تكلفة وهذا بالاستعانة بأدوات رياضية وإحصائية ومعلوماتية.

2. علاقة تحليل المعطيات بغيرها من العلوم: ترتبط تحليل المعطيات بعلم الاحصاء الرياضيات والمعلوماتية فإذا أردنا معرفة العلاقة التي تربط تحليل المعطيات بالإحصاء فإنه يصعب علينا ذلك لأن تحليل المعطيات تعتبر جزءا من علم الاحصاء، أما إذا تعمقنا في علم الاحصاء بين المنهج الاستقرائي والمنهج الاستنباطي فإننا ندرج تحليل المعطيات ضمن الاحصاء الاستنباطي فالمنهج الأول يهتم بتحليل العلاقة بين المتغيرات موضع البحث عن طريقة صياغة نماذج وتقديرها ثم اختبارها مع الأخذ بعين الاعتبار فرضيات مسبقة وهذا بالاستعانة بنظرية الاحتمالات أما المنهج الثاني فيعتمد على بيانات موضع البحث سواء كانت بيانات مقطعية أو متصلة وبعد معالجة هذه البيانات نستخلص النتائج وبعد ذلك يمكننا إذ تطلب الامر وضع نموذج بدون فرضيات مسبقة وهذا عكس المنهج الاستقرائي الذي يعتمد عليه في صياغة النماذج القياسية.

أما عن علاقته بالمعلوماتية فإن تقنيات تحليل المعطيات تستدعي استخدام الكمبيوتر إذ أن تطور طرق تحليل المعطيات تطلب تغير وسيلة الحساب للحصول على نتائج دقيقة وغير مكلفة ومن بين هذه البرامج نجد *SPSS, SAS, XL stat....*

كما ترتبط تحليل المعطيات بالرياضيات ارتباطا وثيقا إذ أن طرق تحليل تستعمل الجبر الخطي والهندسة والمصفوفات من أجل تسيير وتحليل الجداول الرقمية للظواهر المدروسة بغية الوصول إلى نتائج تساهم في شكل كبير لإعطاء تفسير للإشكال المطروح.

3. مجالات تطبيق تحليل المعطيات: إن مفهوم تحليل المعطيات يلخص بشكل عام المجالات التي يمكن أن تدخل في دراستنا فمعالجة الارقام المبوبة في جداول من اختصاص علم الاحصاء بشكل عام وتحليل المعطيات بشكل خاص باعتبار هذه الاخيرة جزء من علم الاحصاء ومن ثم كان الاهتمام بتحليل المعطيات فقد استعملت من طرف علماء النفس لدراسة النقاط المحصل عليها من طرف الطلاب وعلاقتها بمتغيرات أخرى كالذكاء والذاكرة بعد ذلك اتسع المجال ليشمل مختلف الميادين والعلوم الميدان السياسي كالانتخابات وهيكلة الاحزاب والاقتصاد لمعرفة وتحليل السوق وفي الطب لتطبيق الامراض التي تشترك في اسباب وجودها.............الخ.

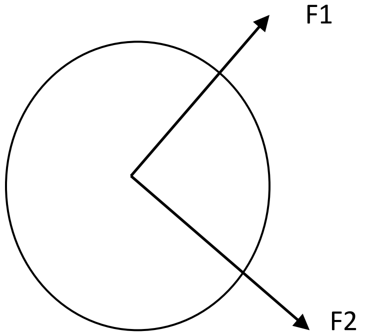
4. تقسيم طرق تحليل المعطيات: تنقسم طرق تحليل المعطيات إلى مجموعتين:

أ. طرق تحليل العوامل

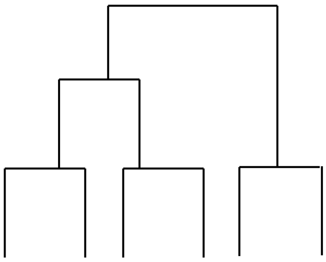
ب. طرق التصنيف الاتوماتيكي

يمكن أن نميز كل مجموعة بالرسم البياني التالي:

تحليل العوامل

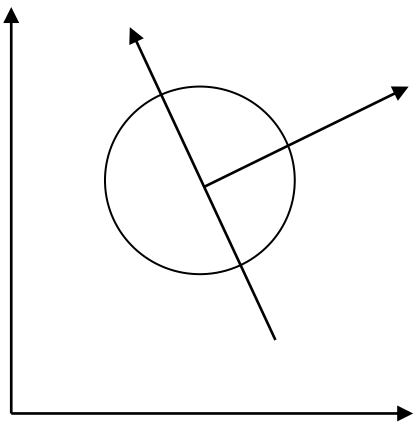


التصنيف الاتوماتيكي

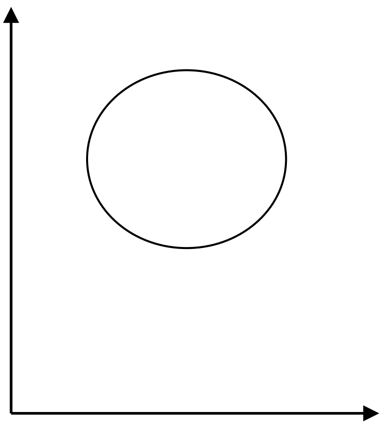


هدف المجموعة الأولى هو البحث عن متغيرات جديدة (العوامل) انطلاقا من المتغيرات الأصلية ومن خصائص هذه العوامل ما يلي:

- غير كثيرة (أي تكون قليلة مقارنة بالمتغيرات التي انتقلنا منها)
- غير مرتبطة فيما بينها مع تصغير خسارة المعلومات التي سببها هذا الانتقال وبالتالي نكون قد عوضنا المعطيات الأصلية إلى أننا ما نحصل عليه من الناحية العلمية نفسه من ناحية الدقة وبذلك فإن طرق تحليل العوامل تهدف لإيجاد التوجهات القصوى لامتداد سحابة النقط تدعى بمحاور العوامل وهذا من أجل تقليل فقدان المعلومات كما هو وضح في الشكل التالي:



سحابة النقط موجهة لمحاور العوامل



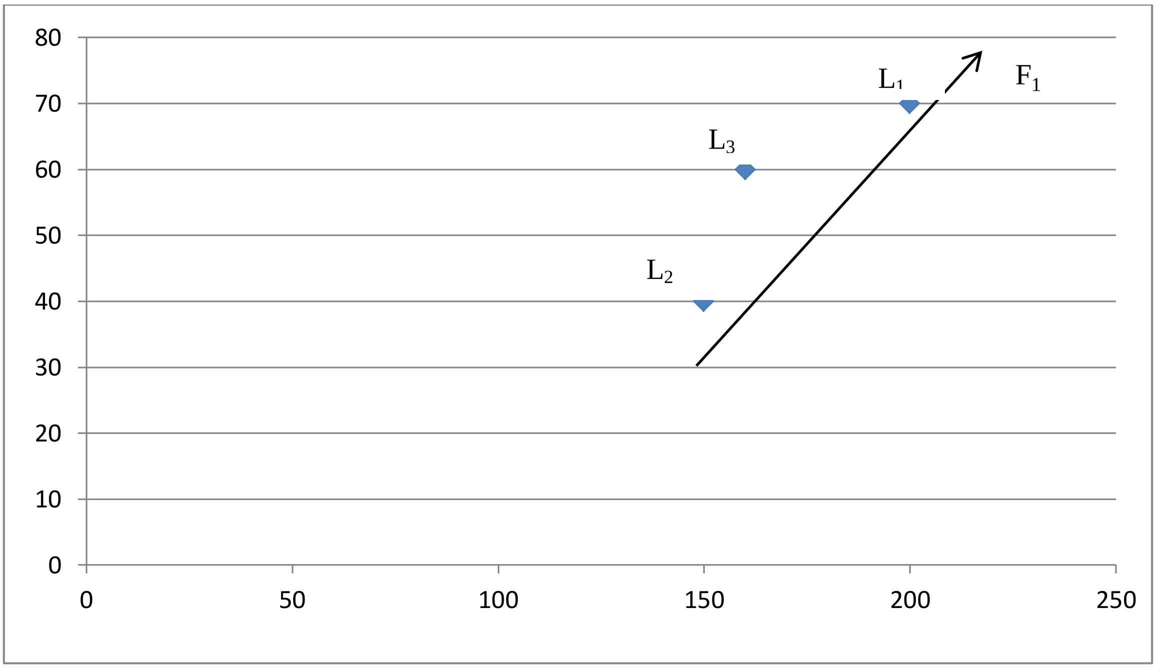
سحابة النقط في حالة المتغيرات الاصلية

لإيضاح ما سبق ذكره نذكر المثال الموالي:

نريد معرفة العلاقة بين المبلغ المدفوع من طرف 3 مكلفين بالضريبة على الدخل الاجمالي IRG والرسم على القيمة الضافة TVA وتكون لدينا المعطيات التالية:

IRG	TVA	الضريبة / الأفراد
70	200	L_1
40	150	L_2
60	160	L_3

نقوم بتجسيد هذه المعطيات في معلم متعامد ومتجانس كما هو مبين أدناه:



وبالتالي نكون قد عوضنا المتغيرات الأصلية TVA وIRG بمفسر جديد F_1 أما محتوى التصنيف الاوتوماتيكي فتستعمل لتصنيف بيانات الافراد إلى فئات متجانسة بشكل متسلسل أو غير متسلسل مع الأخذ بعين الاعتبار المتغيرات المدروسة كأن نضيف مثلا ولايات القطر الجزائري تبعا للإيرادات المحتملة وتأتي هذه الطرق لتكمل طرق تحليل العوامل إذن تعتمد هذه الأخيرة على دراسة علاقة المتغيرات فيما بينها بينما تقوم الأولى بتصنيف الافراد إلى مجموعات ثم تدرس كل مجموعة على حدى أي دراسة العلاقة بين الفئات المشكلة للمجموعة ثم دراسة العلاقة بين المجموعات فيما بينها.

5. مراحل تحليل المعطيات: تتميز تحليل المعطيات على العموم بالمراحل الرئيسية التالية:

أ. **تحديد الاشكالية**: قبل البدء في جمع البيانات لابد أن نعرف نوع الاشكالية المدروسة وهدفها لأنه لا يمكن تطبيق علاقة بين المتغيرات إلى بعد تحديد الغاية من الظاهرة المدروسة وجمع المعطيات بشكل دقيق بكيفية

تسمح بتغطية مختلف جوانب الموضوع وحصرها فهذه المرحلة تتوقف عليها جميع المراحل اللاحقة فأي خطأ في المعطيات أو عدم وضوح الاشكالية المدروسة تؤدي إلى مشاكل مشكوك في أمرها.

ب. استخلاص الجداول: حتى يتسنى أخذ فكرة على المعطيات المجمعة لابد من تنظيمها وترتيبها في جداول حيث تكون المعطيات المتعلقة بالأفراد أو المشاهدات في الأسطر والمتغيرات (المواصفات) المتعلقة بكل فرد في الأعمدة. وفي هذه المرحلة تطرح مسألة نوعية المتغيرات ونوعية الجداول المدروسة فمن ناحية المتغيرات نميز متغيرات كمية وكيفية، أما من ناحية الجداول فإننا نميز عدة أنواع تختلف من حيث الاستخدام حيث أن كل طريقة تستخدم جدول معين دون الآخر إلى أنها تتفق كلها في الغاية وهي استخلاص المعلومات بأقل خسارة ممكنة ومن بين هذه الجداول :

- **جدول القياسات (الجداول الكمية):** وهي جداول شائعة الاستعمال تكون فيها المشاهدات متجانسة القياس حيث توضع المجموعة I على الأسطر والمتغيرات j على الأعمدة. أما من ناحية المتغيرات التي يمكن أن تقع فإننا نستطيع أن نختصر ونركز المعطيات وهذا بطرح كل من المتوسط الحسابي والقسمة على الانحراف المعياري لتفادي الأرقام الكبيرة.
- **جدول التوافيق:** هو جدول مزدوج يكون على شكل مستطيل مقسم إلى أسطر وأعمدة يسمح كغيره من الجداول الاحصائية بتفسيرات سريعة للظاهرة المبوبة فيه.
- **جدول النقاط:** وهي جداول لها استعمال واسع لدى المؤسسات التربوية لدراسة العلاقة التي تربط بين التلميذ والنقاط المحصل عليها في مختلف المواد.
- **الجداول الثنائية:** يطلق على هذا النوع من الجداول اسم الجداول الثنائية لأنها تأخذ قيمتين إما الصفر أو الواحد بحيث العدد 1 يعبر عن وجود الصفة لدى الفرد و0 يعبر عن عدم وجودها. كذلك تستعمل عند الاجابة عن الاسئلة بنعم أو لا.
- **جداول الرتب:** تسمح بترتيب الظاهرة المدروسة ترتيبا تصاعديا أو تنازليا كأن ترتب الولايات حسب المنازعات التي ربحتها الإدارة الضريبية.
- **الجداول النوعية:** في هذا النوع من الجداول تكون الارقام معبرة عن رموز معينة ناتجة عن طبيعة الظاهرة المدروسة كأن تكون مثلا الاجابة عن استمارة أسئلة تتعلق بأفراد قصد تطبيق سلم الضرائب ....الخ فتأخذ هذه الحالات أرقام تعبر عن حالة الفرد.

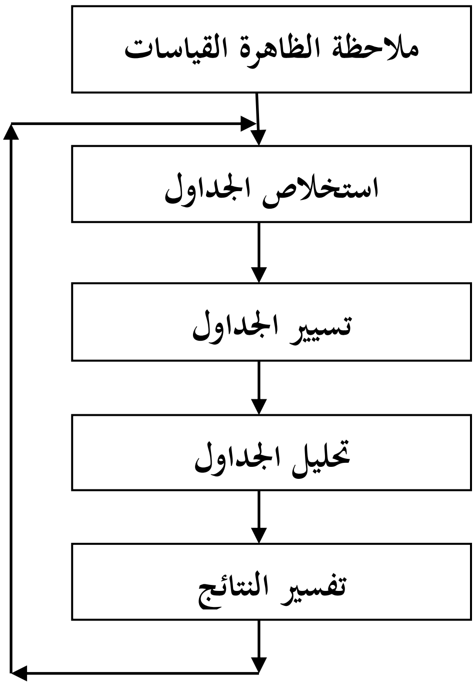
ج. تسيير الجداول: تعتبر هذه المرحلة بمثابة السلعة الوسطية للحصول على المنتوج النهائي بعد جمع المعطيات وتنظيمها في جدول لابد من القيام بتغيرات عليه حتى يكون قابل للتحليل.

د. تحليل الجداول: تشكل هذه المرحلة اهتمام أكبر لأي باحث مختص في تحليل المعطيات إذ يمكن أن يميز هذه المرحلة هو تمثيل المشاهدات عبر سحابة النقط واختصار المعطيات في عوامل جديدة مع الاحتفاظ بأكبر قدر ممكن من المعلومات.

و. تفسير النتائج: يتطلب من الباحث في هذه المرحلة أن يكون ملم بالأدوات الاحصائية المستعملة خلال مرحلة التحليل لكي يعطي تفسيرا موضوعيا للظاهرة المدروسة فتفسير النتائج يكون على أساس الهدف المراد بلوغه فانطلاقا من هذه المرحلة يمكن أخذ القرار اللازم سواء بالاكتفاء بالنتائج المحصل عليها أو إعادة النظر فيها بالعودة إلى المرحلة 2 أو 3 من مراحل تحليل المعطيات.

من خلال ما سبق ذكره يمكن استخلاص المخطط التالي:

مخطط مراحل تحليل المعطيات



مراجع المحور الأول:

- صواليلي صدر الدين، تحليل المعطيات، دار هومة للطباعة والنشر، الجزائر، 2012.
- ثروت مُحَّد عبد المنعم مُحَّد إبراهيم ، التحليل الإحصائي للمتغيرات المتعددة ، مكتبة الانجلو المصرية، القاهرة ، مصر ، 2011.
- مولاي بوعلام، تحليل المعطيات، مطبوعة جامعية، جامعة البويرة –الجزائر–، 2020/2019.
- يوسف صوار، تحليل المعطيات، مطبوعة جامعية، جامعة سعيدة –الجزائر–، 2020/2019.

المحور الثاني

جبر المصفوفـــــــــــــات

1- مفاهيم عامة على المصفوفات:

كما أشرنا سابقا فإنه يمكن تفسير الطرق الإحصائية متعددة المتغيرات باستخدام مفاهيم جبر المصفوفات حيث تعتبر المصفوفة هي منظومة مستطيلة من مجموعة من الأرقام أو العناصر الموجودة في صفوف وأعمدة. لهذا يجب أن يكون لدى الباحث حد أدنى من المعرفة لهذا الفرع من الرياضيات.

1-1. تعريف المصفوفة:

المصفوفة هي منظومة مستطيلة من مجموعة من الأعداد الحقيقية مرتبة في أسطر أفقية وأعمدة عمودية محددة من الجانبين بقوسين، وتستخدم في الغالب لحل العديد من المسائل الاقتصادية المرتبطة بأنظمة من المعادلات الخطية نرمز لها بالرمز $A_{m\times n}$ حيث تمثل m عدد الأسطر. و n عدد الأعمدة تكتب $(m,n\in \mathrm{N}^*)$ بشكل عام وفق ما يلي:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

حيث تمثل الأعداد $(a_{ij} / i=1,....,m,\ j=1,....,n)$ عناصر المصفوفة.

الشعاع عمود يكتب كما يلي:

$$C=\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

الشعاع سطر يكتب كما يلي:

$$R=\begin{pmatrix} r_1 & r_2 & \cdots & r_m \end{pmatrix}$$

مثال توضيحي:

مؤسسة تستخدم ثلاث مواد أولية (M1,M2,M3) لإنتاج سلعتين (P1,P2) ولإنتاج وحدة واحدة من المنتجات يتطلب:

- السلعة P1: يتطلب لإنتاجها 3 وحدات من M1 و وحدتين من M2 ووحدة واحدة من M3؛
- السلعة P2: يتطلب لإنتاجها 5 وحدات من M1 و 4 وحدات من M2 و 6 وحدات من M3.

مع العلم أن هذه المؤسسة تتوفر على مواد أولية تقدر بـ (M1=120,M2=100,M3=90)، مسير هذه المؤسسة يبحث عن برنامج إنتاج مناسب، إذن هذه المسألة الاقتصادية يمكن صياغتها والبحث عن حلها بالاعتماد على جبر المصفوفات وفق ما يلي:

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 120 \\ 2x_1 + 4x_2 = 100 \\ 1x_1 + 6x_2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \\ 90 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A.X = B$$

2-1. أنواع المصفوفات:

- **المصفوفة القطرية**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها معدومة ما عدا العناصر الواقعة على القطر الرئيسي فيها $(a_{ij} / i = j)$، تكتب من الشكل التالي:

$$A_{m\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \exp \Leftrightarrow A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>**حالات خاصة**</u>: إذا كانت العناصر الواقعة على القطر الرئيسي متساوية، سميت بالمصفوفة السلمية ومثال ذلك:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة المتناظرة**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية $(a_{ij} = a_{ji})$. ومثال ذلك:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad ; A_{2\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة المتناظرة عكسيا**: هي مصفوفة مربعة جميع عناصرها المتناظرة فيها بالنسبة للقطر الرئيسي متساوية بالقيمة المطلقة ومتعاكسة في الإشارة $(a_{ij} = -a_{ji})$. ومثال ذلك:

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \qquad ; A_{2\times 2} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

- **مصفوفة الوحدة**: في مصفوفة قطرية جميع عناصر قطرها الرئيسي مساوية للواحد $(a_{ij} = 1 / i = j)$ و $(a_{ij} = 0 / i \neq j)$ ويرمز لها بالرمز I_n ومثال ذلك:

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; I_2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة المعدومة**: هي مصفوفة جميع عناصرها معدومة $(\forall i; j : a_{ij} = 0)$. ويرمز لها بالرمز $0_{m\times n}$. ومن أمثلة ذلك:

$$;0_{2\times 2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة الشاذة**: هي مصفوفة مربعة محددها معدوم. $\left(\det(A_{m\times n}) = |A_{m\times n}| = 0\right)$
- **المصفوفة النظامية**: هي مصفوفة مربعة محددها غير معدوم. $\left(\det(A_{m\times n}) = |A_{m\times n}| \neq 0\right)$
- **المصفوفة المثلثية العلوية**: هي مصفوفة تكون فيها جميع العناصر الواقعة تحت القطر الرئيسي معدومة ومثال ذلك:

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **المصفوفة المثلثية السفلية**: هي مصفوفة مربعة تكون فيها جميع العناصر الواقعة فوق القطر الرئيسي معدومة ومثال ذلك:

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

<u>3–1. منقول مصفوفة *Transposition*:</u> منقول مصفوفة هي المصفوفة التي نتحصل عليها بقلب الأسطر أعمدة والأعمدة أسطر مع المحافظة على الترتيب، ويرمز لها بالرمز A^t ومثال ذلك:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 3 \\ 3 & 7 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ملاحظات:

- منقول المصفوفة A^t هو A أي: $(A^t)^t = A$
- إذا كانت المصفوفة A متناظرة فإن: $A = A^t$

2. العمليات الأساسية على المصفوفات:

1-2. أثر مصفوفة (*Trace of matrix*): أثر مصفوفة مربعة A هو مجموع مداخل المصفوفة الواقعة على القطر الرئيسي وفق الشكل التالي:

$$A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow trace(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{mn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

ملاحظة: أثر المصفوفة هو مجموع قيمها الذاتية.

مثال:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow trace(A) = 1 + 5 = 6$$

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 7 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow trace(A) = 1 + 7 + 1 = 9$$

$$A_{4\times 4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow trace(A) = 1 + 3 + 2 + 4 = 10$$

2-2. الجمع والطرح: لجمع وطرح مصفوفتين يجب أن يكونا من نفس النوع أي تعامل عنصر بعنصر.

مثال:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; B_{2\times 2}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 8 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}; A - B\begin{pmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix}1&3&5\\7&7&0\\3&4&1\end{pmatrix};B_{3\times3}\begin{pmatrix}1&2&3\\6&5&4\\7&6&5\end{pmatrix}$$

$$A+B=\begin{pmatrix}2&5&8\\13&12&4\\10&10&6\end{pmatrix};A-B=\begin{pmatrix}0&1&2\\1&2&-4\\-4&-2&-4\end{pmatrix}$$

خواص:

- جمع المصفوفات عملية تبديلية: $A+B=B+A$
- جمع المصفوفات عملية تجميعية: $A+(B+C)=(A+B)+C$
- المصفوفة الصفرية هي عنصر حيادي في جمع المصفوفات أي: $A+0=A$

2-4. الجداء:

- **ضرب مصفوفة بعدد:** إذا ضرب عدد λ في مصفوفة $A_{m\times n}$ فإن جميع عناصر $A_{m\times n}$ تضرب في λ. ومثال ذلك:

$$A_{2\times3}=\begin{pmatrix}2&1&2\\3&5&4\end{pmatrix}\Rightarrow 2.A_{2\times3}=\begin{pmatrix}4&2&4\\6&10&8\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة في شعاع:** لضرب شعاع C في مصفوفة $A_{m\times n}$ يجب أن يكون عدد أعمدة الشعاع C يساوي عدد أسطر المصفوفة $A_{m\times n}$ ومثال ذلك:

$$C=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix};A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\Rightarrow C\times A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left((1\times1+2\times3)\quad(1\times2+2\times4)\right)$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}7&10\end{pmatrix}$$

- **ضرب مصفوفة في مصفوفة:** لضرب مصفوفة $A_{m\times n}$ في مصفوفة $B_{m\times n}$ يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة $A_{m\times n}$ يساوي عدد أسطر المصفوفة $B_{m\times n}$ ومثال ذلك:

$$A_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix};B_{2\times2}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

$$A\times B=\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\2&5\end{pmatrix}$$

$$B\times A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0\\2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3\\2&3\end{pmatrix}$$

ومنه الجداء ليس تبديلي في المصفوفات أي: $A\times B\neq B\times A$

3. المحددات *Determinats:*

لكل مصفوفة مربعة A، يوجد رقم (ثابت) معروف باسم محدد المصفوفة، ويسمى det A أو يرمز له بالرمز $|A|$،عملية ايجاد قيمة المحدد تعرف باسم حساب أو فك او تخفيض المحدد، ويتم ذلك من خلال التعامل مع كل عناصر المصفوفة وفقا لشكل محدد كالتالي:

1.3. حساب قيمة محدد 2x2:

إذا كان:

$$A_{2\times2}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

فإن محدد هذه المصفوفة هو كالتالي:

$$|A_{2\times2}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

وينتج ذلك من الضرب التقاطعي لعناصر القطر الرئيسي مع طرحها من الضرب التقاطعي لعناصر القطر الآخر للمصفوفة A.

مثال:

$$A_{2\times2}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\Leftrightarrow|A_{2\times2}|=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}\Leftrightarrow 1\times4-2\times3=-2$$

$$B_{2\times2}=\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix}\Leftrightarrow|B_{2\times2}|=\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}\Leftrightarrow 6\times7-5\times8=2$$

1.3. حساب قيمة محدد 3x3:

إذا كان:

$$A_{3\times3}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

فإن محدد هذه المصفوفة هو كالتالي:

$$|A_{3\times3}|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$|A_{3\times3}|\Leftrightarrow a_{11}a_{22}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{23}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}+a_{13}a_{12}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}$$

بالنظر بدقة إلى حساب محدد من الدرجة 3x3 يوضح التالي:

- كل مقدار ناتج من فك المحدد يحتوي على عنصر واحد فقط من كل سطر وكل عمود×

- عدد العناصر في كل مقدار نفسها عدد الأسطر أو الأعمدة في المصفوفة، وبالتالي محدد 2x2 سيكون له عنصران في مقدار من مقادير فك هذا المحدد، وإذا كان المحدد 3x3 فسوف تكون هناك ثلاثة عناصر في كل مقدار من مقادير فك المحدد وهكذا؛
- المقادير في الفك تتبادل الإشارة من + إلى –.

مثال:

أوجد محدد المصفوفة A:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 4\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}\Leftrightarrow |A|=(1\times7\times3)-(1\times4\times1)+(2\times4\times2)-(2\times5\times3)+(3\times2\times1)-(3\times7\times2)=-24$$

المحدد 2x2 له مقدران فقط عند الفك، والمحدد 3x3 له ستة مقادير ومنه فإن القاعدة العامة تكون وفق ما يلي:

المحدد NxN له:

N !=N(N-1)(N-2).......3.2.1

وبالتالي فإن محدد من الدرجة 4x4:

4 !=4.3.2.1=24

محدد من الدرجة 5x5:

5 !=5.4.3.2.1=120

4. مقلوب مصفوفة *Matrix Inversion*:

لا يعرف مقلوب مصفوفة إلى في المصفوفات المربعة ولكن ليس لكل مصفوفة مربعة مقلوب وتكتب العبارة كالتالي:

$$A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$$

حيث أن I هي مصفوفة الوحدة التي لها نفس درجة المصفوفة A.

يمكن تحديد مقلوب مصفوفة من النوع 2x2 كالتالي:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad \det(A) \neq 0$$

نقسم على المحدد:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{a_{22}}{|A|} & \frac{-a_{12}}{|A|} \\ \frac{-a_{21}}{|A|} & \frac{a_{11}}{|A|} \end{pmatrix}$$

مثال:

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |A_{2\times2}| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 1\times4 - 2\times3 = -2$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{4}{-2} & \frac{-2}{-2} \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{-3}{-2} & \frac{1}{-2} \end{pmatrix}$$

$$B_{2\times2} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \Leftrightarrow |B_{2\times2}| = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} \Leftrightarrow 6\times7 - 5\times8 = 2$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} \\ \frac{-8}{2} & \frac{6}{2} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{7}{2} & \frac{-5}{2} \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$

لما $n > 2$ نستعمل طريقة العمليات الأساسية على الأسطر:

$$(A/I_n) \cong (I_n / A^{-1})$$

طريقة المحددات:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(adjA)^t$$

$$(adjA) = C_{ij} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{pmatrix}$$

$$C_{ij} = (-1)^{ij} D_{ij}$$

D_{ij}: هو المحدد من النوع $(n-1)$ أي نزع السطر أو العمود j .

مثال:

أوجد مقلوب المصفوفة A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\5&7&4\\2&1&3\end{pmatrix}$$

الخطوة1: أول خطوة يجب القيام بها لحساب مقلوب المصفوفة هو إيجاد محدد المصفوفة كالتالي:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&3\\5&7&4\\2&1&3\end{vmatrix}\Leftrightarrow |A|=(1\times7\times3)-(5\times1\times3)+(2\times2\times4)-(3\times7\times2)+(4\times1\times1)-(3\times2\times5)=-24$$

الخطوة2: نحصل الآن على مصفوفة المرافقات كالتالي:

$$C=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}7&4\\1&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}5&4\\2&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}5&7\\2&1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2&3\\1&3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&3\\2&3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&2\\2&1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2&3\\7&4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&3\\5&4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&2\\5&7\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}17&-7&-9\\-3&-3&3\\-13&11&-3\end{pmatrix}$$

الخطوة3: نقوم بحساب منقول المصفوفة C فنحصل على المصفوفة التالية:

$$(adjC)=\begin{pmatrix}17&-3&-13\\-7&-3&11\\-9&3&-3\end{pmatrix}$$

الخطوة4: نقوم بالقسمة على المحدد نجد:

$$A^{-1}=\frac{1}{24}\begin{pmatrix}17&-3&-13\\-7&-3&11\\-9&3&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{17}{24}&\frac{3}{24}&\frac{13}{24}\\\frac{7}{24}&\frac{3}{24}&-\frac{11}{24}\\\frac{9}{24}&-\frac{3}{24}&\frac{3}{24}\end{pmatrix}$$

ومن السهل إثبات أن:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

5. القيم الذاتية والأشعة الذاتية:

- **القيم الذاتية**: إذا كانت A مصفوفة من النوع nxn يسمى شعاعا ذاتيا للمصفوفة A الشعاع غير الصفري $R^n \times U$ إذا كانت AU مضاعف قياسي للشعاعU:

$$AU=\lambda U$$

حيث تسمى λ القيمة الذاتية للمصفوفة A وU الشعاع الذاتي للعدد λ لإيجاد القيمة الذاتية للمصفوفة A نستخدم العلاقة التالية:

$$\left(A-\lambda I_n\right)=0$$

مثال1:

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$A=\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|A-\lambda I_2\right|=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2\\-1&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&\lambda\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}3-\lambda&2\\-1&-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\left(3-\lambda\right)\left(-\lambda\right)+2$$

$$\det(A)=\lambda^2-3\lambda+2$$

لحل المعادلة نستعمل المميز نجد: $\lambda_1=1,\lambda_2=2$

مثال2:

أوجد القيم الذاتية للمصفوفة A

$$A=\begin{pmatrix}6&0.5&1\\0.5&6.5&0.5\\1&0.5&6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|A-\lambda I_3\right|=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6&0.5&1\\0.5&6.5&0.5\\1&0.5&6\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6&0.5&1\\0.5&6.5&0.5\\1&0.5&6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6-\lambda&0.5&1\\0.5&6.5-\lambda&0.5\\1&0.5&6-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=\left((6-\lambda)(6.5-\lambda)(6-\lambda)\right)-\left((0.5)(0.5)(1)\right)+\left((1)(0.5)(0.5)\right)$$
$$-\left((0.5)(0.5)(6-\lambda)\right)+\left((6-\lambda)(0.5)(0.5)\right)-\left((1)(6.5-\lambda)(1)\right)$$

$$\det(A)=\left((6-\lambda)(6.5-\lambda)(6-\lambda)\right)-\left(6.5-\lambda\right)$$

بعد حل المعادلة نجد: $\lambda_1=7,\lambda_2=6,\lambda_3=5$

- **الأشعة الذاتية**: إن الأشعة الذاتية للمصفوفة A المناظرة للقيم الذاتية هي الأشعة الذاتية التي تحقق:

$$AU = \lambda U$$

الأشعة الذاتية المناظرة للقيم الذاتية في فضاء الحلول للمعادلة:

$$(A - \lambda I_n)U = 0$$

مثال: الاستعانة بمعطيات المثال السابق أوجد الأشعة الذاتية المرفقة للقيم الذاتية

U_1شعاع ذاتي المرفق لـ λ_1

$$(A - \lambda_1 I_3)U_1 = 0_{R^3}$$

$$\begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0..................(1) \\ 0.5x_1 - x_2 + 0.5x_3 = 0...................(2) \\ x_1 + 0.5x_2 - 1.5x_3 = 0...................(3) \end{cases}$$

$$2(1) + (2) \Rightarrow -2.5x_1 + 2.5x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$U_1 = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \|U_1\| = \sqrt{3}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix}$$

U_2شعاع ذاتي المرفق لـ λ_2

$$(A-\lambda_2 I_3)U_2 = 0_{R^3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.5x_1 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ x_1 + 0.5x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_3 = -0.5x_2$$

$$(3) \Rightarrow x_1 = -0.5x_2$$

$$U_2 = -x_2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix}; \|U_2\| = \sqrt{1.5}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.408 \\ -0.816 \\ 0.408 \end{pmatrix}$$

U_3 شعاع ذاتي المرفق لـ λ_3

$$(A-\lambda_3 I_3)U_3 = 0_{R^3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$$(1) - 2(2) \Rightarrow -2.5x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_3 = -x_1$$

$$U_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \|U_3\| = \sqrt{2}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \end{pmatrix}$$

مراجع المحور الثاني

- Gene H. Golub, harles F. Van Loan, "Matrix Computations", Johns Hopkins University Press, USA, 2012.
- Roger A. Horn,Charles R. Johnson, Matrix Analysis ,Cambridge University Press, USA, 2013.
- Thomas S. Shores, Applied Linear Algebra and Matrix Analysis, Springer,USA,2007.
- Gilbert Strang, Introduction to Linear Algebra, Wellesley-Cambridge Press,USA,2016.
- Carl D. Meyer, Matrix Analysis and Applied Linear Algebra, SIAM (Society for Industrial and Applied Mathematics),USA,2000.

المحور الثالث

نموذج الانحدار الخطـــــــــي المتعدد

إن الواقع الاقتصادي، يفرض التعامل مع ظواهر اقتصادية معقدة، وعادة ما تشمل العلاقات الاقتصادية لهذه الظواهر على أكثر من متغير واحد مستقل، ومن النادر أيضاً اعتماد حدوث ظاهرة اقتصادية معينة على عامل واحد فقط، ولا يمكن في هذه الحالة الاستعانة بنموذج الانحدار البسيط لمعالجة هذه المشاكل، لهذا تتم الاستعانة بنموذج الانحدار المتعدد وهو تعميم لنموذج الانحدار البسيط والذي يحتوي على العديد من المتغيرات.

1. عرض النموذج المتعدد الخطي.

يمكن نمذجة العلاقة بين المتغير التابع والمتغيرات المستقلة وفق العلاقة التالية:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2} + ... + \beta_k X_{ik} + \varepsilon_i \ / \ i = 1.2.....n$$

حيث:

- Y_i : المتغير التابع؛
- $(\beta_0, \beta_1, ..., \beta_k)$: معالم النموذج؛
- $(X_{t1}, X_{t2}, ..., X_{tk})$: المتغيرات المستقلة؛
- ε_i : المتغير العشوائي.

ويمكن كتابة هذا النموذج على الشكل المصفوفي وفق الصيغة التالية: $Y = X\beta + \varepsilon$

مع:

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} 1 & X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k} \\ 1 & X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2K} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk} \end{pmatrix}, \beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}, \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_k \end{pmatrix}$$

حيث:

- Y : المتغير التابع؛
- X : مصفوفة المتغيرات المستقلة؛
- β : شعاع المعالم؛
- ε : شعاع الأخطاء.

2. فرضيات نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

من أجل بناء نموذج الانحدار الخطي المتعدد يجب توفر مجموعة من الفرضيات الأساسية نوجزها كالتالي:

- القيمة المتوقعة لعنصر الخطأ أي وسطه الحسابي تساوي الصفر $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$ ؛

- تباين عنصر الخطأ ثابت في كل فترة $E(\varepsilon_i)^2 = \delta^2$ ؛
- القيمة التي يأخذها عنصر الخطأ في فترة ما تكون غير خطية أو غير مرتبطة بقيمة أخرى في أي فترة زمنية $E(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 / i, j = 1.2.....n / (i \neq j)$ ؛
- المتغيرة (X_i) لا تأخذ قيماً ثابتة لا ترتبط بقيم المتغير العشوائي $E(X_i, \varepsilon_i) = 0$ ؛
- عدد المشاهدات (n) أكبر من عدد المتغيرات المستقلة (k).

3. تقدير نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

تهدف طريقة المربعات الصغرى إلى تصغير مربعات الفروقات بين القيم الحقيقية (سحابة النقاط) والقيم المقدرة (القيم التي تقع على المنحى)، ولكي نحصل أفضل منحى لابد من الحصول على أفضل تقدير للشعاع β وذلك بتصغير قيم الأخطاء (ε_i) إلى الحد الأدنى، والشرط الجوهري للتصغير هو أخـذ التفاضـــل الجزئـــي لمجموع الانحرافات بالنسبة لمعالم النموذج حيث نضع:

$$\Rightarrow \hat{\varepsilon} = Y - \hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{\varepsilon}_1 \\ \hat{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \hat{\varepsilon}_n \end{pmatrix}$$

ومن أجل تطبيق طريقة المربعات الصغرى نضع:

$$Min\hat{\varepsilon}'\hat{\varepsilon} = Min\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2 = Min\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)^2 = Min\left(Y_i - \hat{Y}_i\right)'\left(Y_i - \hat{Y}_i\right) = \varphi$$

من أجل تصغير هذه العلاقة نضع:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \hat{\beta}} = -2X'Y + 2X'X\hat{\beta} + 0 \Rightarrow \hat{\beta} = \left(X'X\right)^{-1}\left(X'Y\right)$$

ومنه يمكن كتابة النموذج المقدر على الشكل:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_{i1} + \hat{\beta}_2 X_{i2} + ... + \hat{\beta}_k X_{ik} + \varepsilon_i$$

4. تقييم نموذج الانحدار الخطي المتعدد.

1-4. اختبار جودة التوفيق والارتباط: كما هو الحال بالنسبة للنموذج الخطي البسيط فإن:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2 + \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2$$

$$TSS = ESS + RSS$$

هذه المعادلة تسمح أن نحكم على جودة التوفيق للنموذج ويعطى معامل التحديد وفق العلاقة التالية:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n}\hat{\varepsilon}_i^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}_i\right)^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{Y}_i - \bar{Y}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \bar{Y}\right)^2}$$

تتراوح قيمة R^2 بين الصفر والواحد، وكلما ارتفعت قيمة معامل التحديد نتيجة إضافة عنصر مستقل جديد إلى النموذج فهذا يدل على أهمية هذا العنصر المستقل في تفسير سلوك المتغير التابع، أما إذا كانت إضافته لا تؤدي إلى زيادة محسوسة في معامل التحديد فهذا يعني أنه يجب حذفه من النموذج. نظرا لأن تباين الخطأ (δ_{ε}^2) يميل للتناقص خاصة عندما يقترب عدد المتغيرات المستقلة (k) في النموذج من عدد المشاهدات (n). في هذه الحالة فإن تباين الخطأ يقترب من الصفر ومعامل التحديد يقترب من الواحد حتى في حالة وجود علاقة تفسيرية ضعيفة بين المؤشرات المستقلة والمؤشر التابع. لتجنب الحصول على دلالة تقييمية غير صحيحة يستعمل معامل التحديد المصحح يأخذ الصيغة التالية:

$$\overline{R}^2 = 1-\left(1-R^2\right)\frac{(n-1)}{(n-k-1)}$$

2-4. اختبار فرضيات النموذج: يتم اختبار فرضيات النموذج الخطي المتعدد عن طريق الاعتماد على اختبار فيشر الذي يقوم باختبار جملة معنوية معلمات النموذج والبحث عن ما إذا كانت كل المتغيرات المستقلة لها تأثير على المتغير التابع، حيث ينطلق هذا الاختبار من الفرضيتين:

$$\begin{cases} H_0 : \beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_k = 0 \\ H_1 : \beta_0 \neq \beta_1 \neq \beta_2 \neq \cdots \neq \beta_k \neq 0 \end{cases}$$

يمكن صياغة اختبار فيشر على النحو التالي:

$$F_{cal} = \frac{R^2 / k}{\left(1-R^2\right)/(n-k-1)} \mapsto F_{\alpha}(k, n-k-1)$$

إذا كانت $F_{cal} > F_{tab}$ فإننا نرفض الفرضية H_0 أي أن للنموذج معنوية إحصائية.

5. نماذج الانحدار غير الخطي المتعدد.

كما هو الحال في نماذج الانحدار البسيط توجد أيضا في نماذج الانحدار المتعدد نماذج غير خطية حيث أن طريقة المربعات الصغرى العادية لا يمكنها تقدير هذه النماذج، لذلك وجب معالجتها وإجراء التحويلات اللازمة لتأخذ الصيغة الخطية وذلك من أجل تقديرها بطريقة المربعات الصغرى العادية، وتعتبر الصيغة الدالية التربيعية (كثير الحدود) والصيغ الدالية ذات المرونات من بين أهم النماذج غير الخطية المتعددة والتي من الممكن إجراء تحويل عليها من الصيغة غير الخطية إلى الصيغة الخطية كما يلي:

- الصيغ الدالية التربيعية (كثير الحدود) والتي تأخذ الشكل التالي: $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_{i1} + \beta_2 X_{i2}^2 + \varepsilon_i$

نضع: $X_{i2}^{2} = w_i$ لتصبح العلاقة وفق الصيغة الخطية $Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \beta_2 w_i + \varepsilon_i$ ويمكن تقديرها بطريقة المربعات الصغرى العادية.

- الصيغ الدالية ذات المرونات الثابتة وتعتبر دالة الإنتاج كوب دوغلاس من أهم النماذج غير الخطية المتعددة وهي تأخذ الشكل التالي:

$$Y_i = \beta_0 \quad X_{i1}^{\beta_1} X_{i2}^{\beta_2} e^{\varepsilon_i}$$

لتقدير العلاقة السابقة نقوم بإدخال اللوغاريتم الطبيعي لكلا طرفي المعادلة نحصل على:

$$\ln Y_i = \ln \beta_0 + \beta_1 \ln X_{i1} + \beta_2 \ln X_{i2} + \varepsilon_i$$

نضع: $\ln Y_i = z_i;\ \ \ln \beta_0 = A;\ \ \ln X_{i1} = w_{i1};\ \ \ln X_{i2} = w_{i2}$ لتصبح العلاقة وفق الصيغة الخطية $z_i = A + \beta_1 w_{i1} + \beta_2 w_{i2} + \varepsilon_i$ ويمكن تقديرها بطريقة المربعات الصغرى العادية.

6. مشاكل تقدير نماذج الانحدار.

تظهر مشاكل القياس الاقتصادي في حالة اختراق فرضيات هذا النوع من النماذج واسقاط أحد الفرضيات الأساسية لطريقة المربعات الصغرى العادية وتتمثل هذه المشاكل في:

- الارتباط الذاتي؛
- الازدواج الخطي؛
- عدم ثبات تباين حدود الخطأ.

6-1. الارتباط الذاتي.

من بين الفرضيات الأساسية لتطبيق طريقة المربعات الصغرى العادية أن القيمة التي يأخذها عنصر حد الخطأ في فترة ما يجب أن تكون غير خطية أو غير مرتبطة بقيمة أخرى في أي فترة زمنية:

$$\mathrm{E}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0 / (i \neq j)$$

في حالة الاخلال بهذه الفرضية أي في حالة ما إذا كان $\mathrm{E}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \neq 0 / (i \neq j)$، تكون قيمة (ε_i) غير مستقلة عن قيمة (ε_j) و $(i \neq j)$ هذا ما يترتب عليه وجود مشكل الارتباط الذاتي للأخطاء، وبالتالي وجب معالجة هذا المشكل.

أ. **أسباب ظهور مشكل الارتباط الذاتي وآثاره:** ينشأ الارتباط الذاتي نتيجة عدة أسباب نذكر منها:

- إهمال بعض المتغيرات المستقلة من النموذج المراد تقديره؛
- الصياغة الرياضية غير الدقيقة لنموذج الانحدار المراد تقديره؛
- سوء توصيف المتغير العشوائي؛

- عدم دقة بيانات السلاسل الزمنية.

أما وجوده فيؤثر سلبا على نتائج طريقة المربعات الصغرى العادية من حيث:

- انخفاض المعنوية الاحصائية للنموذج ككل ولمعلماته أيضا؛
- تخفف دقة المعلمات المقدرة وتكون لها تباينات كبيرة نسبيا؛
- ارتفاع قيم الأخطاء المعيارية (SE) لمعلمات النموذج؛
- عدم دقة التوقعات المستخلصة باستخدام طريقة المربعات الصغرى العادية.

ب. **طرق الكشف عن مشكل الارتباط الذاتي**: في حالة وجود ارتباط ذاتي فإن تباين المتغيرات العشوائية المحسوبة بطريقة المربعات الصغرى العشوائية لا يعبر عن قيمته العشوائية، لذلك فإن اختبار ستودنت واختبار فيشر لا يمكنهما الكشف عن وجود ارتباط ذاتي، لذلك يتم الاعتماد على مجموعة من الاختبار البديلة للكشف عن مشكل الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى لعلى من أبرزها اختبار *Durbin-Watson* الذي يعتبر من أهم الاختبارات الشائعة والمستخدمة في الكشف عن الارتباط الذاتي من الدرجة الأولى والذي يقوم على الفرضيتين:

$$\begin{cases} H_0 : \rho = 0 \\ H_1 : \rho \neq 0 \end{cases}$$

يكتب اختبار *Durbin-Watson* وفق الصيغة التالية:

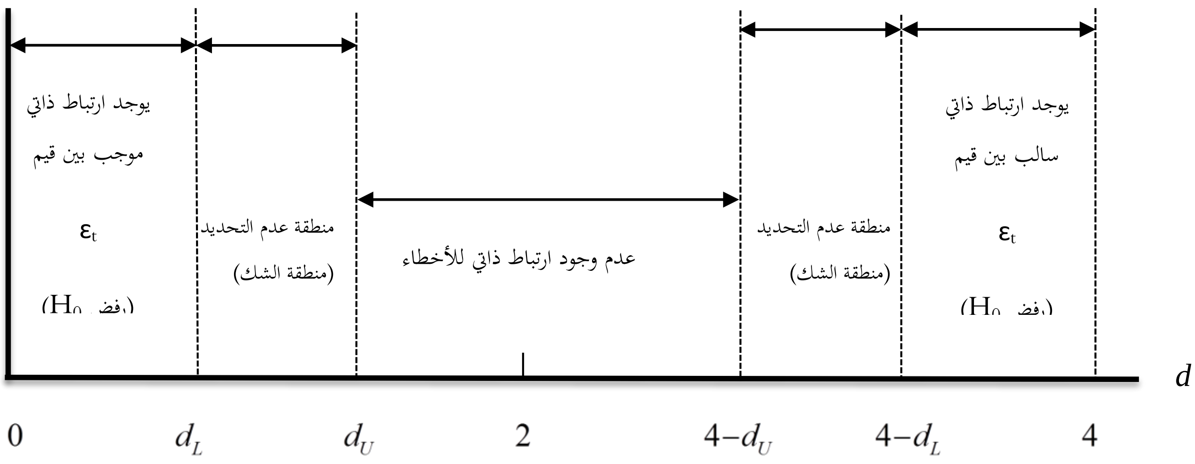
$$DW = \frac{\sum_{t=2}^{n} \left(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1}\right)^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{\varepsilon}_t^2}$$

يمكن كتابة الإحصائية أيضا بدلالة مقدر معامل الارتباط ρ :

$$DW \cong 2(1-\hat{\rho})$$

تتراوح قيمة DW المحسوبة بين 0 و4. ويوضح الشكل التالي قيم d (القيم المجدولة للاختبار)، وتوجد قيم كل من الحدين الأعلى والأدنى لـ d (d_L,d_U) في الجدول الإحصائي لتوزيع دربين واتسون.

الشكل رقم (02): مناطق القبول والرفض لاختبار *Durbin-Watson*



Source : *Gujarati D, Op Cit, P 469.*

بالاعتماد على الشكل رقم (02) يمكن القول أنه:

- إذا كانت $4-d_L < DW < 4$ يتم رفض الفرضية H_0؛
- إذا كانت $d_U < DW < 4-d_U$ يتم قبول الفرضية H_0؛
- إذا كانت $0 < DW < d_L$ يتم رفض الفرضية H_0؛
- إذا كانت $4-d_U < DW < 4-d_L$ أو $d_L < DW < d_U$ تكون نتيجة الاختبار غير محددة (منطقة الشك).

2-6. الازدواج الخطي (التعدد الخطي).

يقصد بالازدواج الخطي أو التعدد الخطي طبقا لـ *Ranger Frish* بشكل أساسي وجود علاقة خطية بين بعض أو كل المتغيرات المستقلة المتضمنة في نموذج الانحدار المراد دراسته.

أ. **أسباب ظهور مشكل الازدواج الخطي وآثاره**.:هناك عدة أسباب لظهور مشكل التعدد الخطي (الازدواج الخطي) بين المتغيرات المستقلة أهمها:

- اشتراك بعض المتغيرات المستقلة في التحرك باتجاه زمني واحد ودون تخلف زمني؛
- التغير المتداخل لعدم جمع بيانات كافية ومن عينات أكثر؛
- استخدام المتغيرات المتخلفة زمنيا؛
- التحرك باتجاه واحد أو معاكس بمعدل متزامن أو واحد ولنفس الفترة الزمنية.

أما وجود التعد الخطي فيؤثر سلبا على نتائج مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية من حيث:

- إذا كان الازدواج الخطي تاما فإن تقدير معاملات النموذج يكون محدد ومن ثم تكون غير دقيق؛

- الخطأ المعياري لهذه التقديرات يكون كبيرا جدا، مما يؤثر على قيم اختبار ستودنت المحسوبة لهذه المعاملات وبالتالي على المعنوية الإحصائية لها.

ب. طرق الكشف عن مشكل الازدواج الخطي: تجري عادة بعض الاختبارات لاكتشاف وجود الازدواج الخطي، من بين هذه الاختبارات اختبار *Farrar-Glauber* هذا الاختبار يجري وفق الخطوات التالية:

- **الخطوة الأولى:** تتمثل هذه الخطوة في حساب المحدد لمصفوفة معاملات الارتباط بين المتغيرات المستقلة.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & r_{X_1X_2} & r_{X_1X_3} & \cdots & r_{X_1X_k} \\ r_{X_2X_1} & 1 & r_{X_2X_3} & \cdots & r_{X_2X_k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{X_kX_k} & r_{X_kX_2} & r_{X_kX_3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

- **الخطوة الثانية:** تتمثل هذه الخطوة في استخدام اختبار χ^2 بدرجة حرية $\frac{1}{2}k(k-1)$ ونسبة معنوية α وذلك عن طريق طرح الفرضيتين:

$$\begin{cases} H_0 : D = 1 \\ H_1 : \mathrm{D} < 1 \end{cases}$$

إحصائية *Farrar-Glauber* (القيمة المحسوبة) تعرف كما يلي:

$$\chi^2 * = -\left[n - 1 - \frac{1}{6}(2k+5) \right] . \ln D$$

حيث:

- n : حجم العينة؛
- k : عدد المتغيرات المستقلة؛
- $\ln$: اللوغاريتم النبري.

أما قرار قبول أو رفض الفرضية H_0 فيتم وفق ما يلي:

- إذا كانت $\chi^2 * \geq \chi^2_\alpha\left(\frac{1}{2}k(k-1)\right)$ يتم رفض الفرضية H_0 أي هناك ازدواج خطي في نموذج الانحدار؛
- إذا كانت $\chi^2 * < \chi^2_\alpha\left(\frac{1}{2}k(k-1)\right)$ فإنه يتم قبول الفرضية H_0 .

3–6. عدم ثبات تباين حدود الخطأ.

إن الاخلال بفرضية تجانس التباين $\mathrm{E}(\varepsilon_i^{\,2})=\delta^2$ ينتج عنه مشكل عدم ثبات تباين حدود الخطأ، ومن هنا فإن مصفوفة التباين–التباين المشترك للأخطاء تعرف كما يلي:

$$\Omega_\varepsilon = E(\varepsilon\varepsilon^{'}) = \begin{pmatrix} \delta_{\varepsilon 1}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_{\varepsilon 2}^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \delta_{\varepsilon\, n}^2 \end{pmatrix} \neq \delta_\varepsilon^2 I_n$$

أ. **الآثار المترتبة عن ظهور مشكل عدم ثبات تباين حدود الخطأ**: يترتب على ظهور مشكلة عدم ثبات التباين حدود الخطأ في نموذج الانحدار مجموعة من الآثار نلخصها فيما يلي:

- المعلمات المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية تتصف بعدم التحيز؛
- مقدرات طريقة المربعات الصغرى العادية لا تعطي أصغر تباين ممكن؛
- تحيز التباينات المقدرة وكذلك التباينات المشتركة الخاصة بالمعالم المقدرة؛
- عدم كفاءة التوقعات القائمة على أساس المعالم المقدرة بطريقة المربعات الصغرى العادية.

ب. اختبارات اكتشاف عدم ثبات تباين حدود الخطأ.

اقترح *White (1980)* اختبارا يعتمد على العلاقة بين مربعات البواقي وجميع المتغيرات المستقلة وكذا مربعاتها وذلك من أجل الكشف عن مشكل عدم ثبات تباين الخطأ، يقوم هذا الاختبار على اختبار فرضية ثبات تباين الأخطاء H_0 كما يلي:

$$H_0 : \beta_0 = \alpha_1 = \beta_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_k = 0$$

كما يمكن إبراز أهم خطوات هذا الاختبار كما يلي:

- **الخطوة الأولى**: تقدير النموذج العام $Y = X\beta + \varepsilon$ بطريقة المربعات الصغرى العادية ثم حساب مربعات البواقي $\hat{\varepsilon}_t^2$؛
- **الخطوة الثانية**: تقدير المعادلة التالية:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + \alpha_1 X_{t1}^2 + \ldots + \beta_k X_{tk} + \alpha_k X_{tk}^2 + u_t$$

- **الخطوة الثالثة**: حساب معامل التحديد R^2 من المعادلة السابقة في الخطوة الثانية؛
- **الخطوة الرابعة**: حساب إحصائية مضاعف لاغرانج $LM = n \times R^2$ حيث تتبع توزيع χ^2 بدرجة حرية $2k$.

أما قرار قبول أو رفض الفرضية H_0 فيتم وفق ما يلي:

- إذا كانت $LM > \chi_{\alpha}^{2}(2k)$ يتم رفض الفرضية H_0 أي أن تباين الأخطاء غير متجانس؛
- إذا كانت $LM < \chi_{\alpha}^{2}(2k)$ فإنه يتم قبول الفرضية.

مراجع المحور الثالث

- *M. Hashem Pesaran, **Time Séries and Panel Data Econometrics**, Published to Oxford Scholarship Online, United Kingdom 2016.*
- *William H. Green, **Econometric Analysis,** M.G.H, N-Y, 2002.*
- وليد إسماعيل السيفو، فيصل مفتاح شلوف، صائب جواد إبراهيم جواد، **مشاكل الاقتصاد القياسي التحليلي**، الأهلية للنشر والتوزيع، الأردن، 2006.
- *Gilbert Saporta, **Probabilités, analyse des données et statistique**, Med tchini, Paris, 1990..*
- *Éric Dor, **Econométrie**, Pearson Education, France, 2009.*

المحور الرابع

طريقة التحليل بالمركبات الأساسية ACP

تهدف طريقة ACP إلى تحليل الجداول الإحصائية من خلال البحث عن فضاء شعاعي جزئي أقل بعد يسمح لنا بأحسن تمثيل وأكبر كمية من المعلومات، بشرط أن تكون كل المتغيرات ذات طبيعة كمية.

1. المتوسط والانحراف المعياري:

لنفرض أن حجم العينة عشوائية n وقيم العينة هي $X_1 , X_2 ...... X_n$ يكون:

- **المتوسط الحسابي:**

$$\overline{X}_j = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} X_j$$

- **الانحراف المعياري:**

$$\delta_j = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n} \left(X_j - \overline{X}_j \right)^2}{n}}$$

2. عرض وتمثيل المعطيات:

بعد جمع المعطيات المتعلقة بظاهرة ما نقوم بوضعها وتلخيصها في جداول تسمح لنا من تحليلها، حيث عادة ما نضع المتغيرات في الأعمدة والأفراد المدروسة في الأسطر.

يتم عرض ظاهرة تحتوي على أفراد معبر عنها عن طريق متغيرات كمية في جدول مستطيل يحتوي على n سطر و P عمود يسمى بجدول المعطيات كما يلي:

$$X_{ij} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1p} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{ip} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{np} \end{pmatrix}$$

مثال:

يمثل الجدول التالي علامات أربع طلبة موزعة على موزعة على ثلاثة مقاييس وفق النحو التالي:

	اقتصاد قياسي	بحوث العمليات	تحليل المعطيات
نسرين	**10**	**6**	**8**
أحمد	**6**	**11**	**10**
كريمة	**12**	**13**	**8**
مصطفى	**12**	**10**	**14**

حساب المتوسطات :

$$\overline{X}_1 = \frac{1}{4}(10+6+12+12) = \frac{40}{4} = 10$$

$$\overline{X}_2 = \frac{1}{4}(6+11+13+10) = \frac{40}{4} = 10$$

$$\overline{X}_3 = \frac{1}{4}(8+10+8+14) = \frac{40}{4} = 10$$

حساب الانحرافات المعيارية:

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{(10-10)^2 + (6-10)^2 + (12-10)^2 + (12-10)^2}{4}} = 2.45$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{(6-10)^2 + (11-10)^2 + (13-10)^2 + (10-10)^2}{4}} = 2.55$$

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{(8-10)^2 + (10-10)^2 + (8-10)^2 + (14-10)^2}{4}} = 2.45$$

	اقتصاد قياسي	بحوث العمليات	تحليل المعطيات
نسرين	**10**	**6**	**8**
أحمد	**6**	**11**	**10**
كريمة	**12**	**13**	**8**
مصطفى	**12**	**10**	**14**
المجموع	**40**	**40**	**40**
المتوسط	**10**	**10**	**10**
الانحراف المعياري	**2.45**	**2.55**	**2.45**
التباين	**6**	**6.5**	**6**

3. الجدول المركز:

1.3. طريقة المركبات الأساسية البسيطة *ACP- non normée*

يقصد بطريقة المركبات الأساسية البسيطة *ACP- non normée* أن كل المتغيرات متجانسة ولها نفس وحدة القياس حيث يتم استخراج الجدول المركز في حالة *ACP- non normée* وفق ما يلي:

$$X = X_{ij} - \overline{X}_j$$

وبالرجوع إلى المثال السابق نجد المصفوفة المركز X يمكن كتابتها وفق الصيغة التالية:

$$X = \begin{pmatrix} 10-10 & 6-10 & 8-10 \\ 6-10 & 11-10 & 10-10 \\ 12-10 & 13-10 & 8-10 \\ 12-10 & 10-10 & 14-10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ومنه الجدول المركز يكون وفق ما يلي:

	اقتصاد قياسي	بحوث العمليات	تحليل المعطيات
نسرين	0	−4	−2
أحمد	−4	1	0
كريمة	2	3	−2
مصطفى	2	0	4

يتم حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك في حالة بطريقة المركبات الأساسية البسيطة *ACP- non normée* حيث يمثل التباين الكلي للسحابة تشتت النقاط بالنسبة لمركزها، حيث أنه كلما كان هذا التباين كبير كلما كانت الأفراد متشتت بالنسبة لمركز ثقلها، وكلما كان التباين صغير كلما كانت الأفراد متمركزة حول مركز ثقلها، وهو عبارة عن مجموع العناصر القطرية لمصفوفة التباين والتباين المشترك والتي تعطي وفق الصيغة التالية:

$$V = \frac{1}{n} X'X$$

وعليه فإن التباين الكلي هو عبارة عن أثر مصفوفة التباين والتباين الكلي للمتغيرات:

$$VAR(V) = trac(V)$$

وبالرجوع إلى معطيات المثال السابق يمكن حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك وفق ما يلي:

$$V=\frac{1}{n}X'X \Leftrightarrow V=\frac{1}{n}\begin{pmatrix}0 & -4 & 2 & 2\\ -4 & 1 & 3 & 0\\ -2 & 0 & -2 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -4 & -2\\ -4 & 1 & 0\\ 2 & 3 & -2\\ 2 & 0 & 4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 6.5 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 6\end{pmatrix}$$

كما يمكننا حساب التباين الكلي والذي يعتبر أثر مصفوفة التباين والتباين المشترك وفق ما يلي:

$$VAR(V)=trac(V)=6+6.5+6=18.5$$

2.3. طريقة المركبات الأساسية المرجحة *ACP- normée*

يقصد بطريقة المركبات الأساسية المرجحة *ACP- normée* أن كل المتغيرات غير متجانسة وليس لها نفس وحدة القياس حيث يتم حساب مصفوفة الارتباط في حالة طريقة المركبات الأساسية المرجحة *ACP- normée* ويتم استخراج القيم الذاتية والأشعة الذاتية منها وهي تعطي وفق الصيغة التالية:

$$C=\frac{\frac{1}{n}\sum\sum\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)\left(x_{ij'}-\bar{x}_{j'}\right)}{\delta_j\delta_{j'}}=\begin{pmatrix}1 & & r_{jj'}\\ & \cdots & \\ & & 1\end{pmatrix}$$

وبالرجوع إلى معطيات المثال السابق يمكن حساب مصفوفة الارتباط وفق ما يلي:

$$Var_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{1i}\right)-\left(\bar{x}_1\right)^2=\left(\frac{1}{4}\left((10)^2+(6)^2+(12)^2+(12)^2\right)\right)-(10)^2=\frac{424}{4}-100=6$$

$$Var_2=\frac{426}{4}-100=6.5$$

$$Var_3=\frac{425}{4}-100=6$$

$$\operatorname{cov}\left(x_{1i}x_{2i}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{2i}-\bar{x}_1\bar{x}_2=\frac{1}{4}\left((10\times6)+(6\times11)+(12\times13)+(12\times10)\right)-(10)(10)=\frac{402}{4}-100=0.5$$

$$\operatorname{cov}\left(x_{1i}x_{3i}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}x_{3i}-\bar{x}_1\bar{x}_3=\frac{404}{4}-100=1$$

$$\operatorname{cov}\left(x_{2i}x_{3i}\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{2i}x_{3i}-\bar{x}_2\bar{x}_3=\frac{402}{4}-100=0.5$$

ومنه نجد مصفوفة التباين والتباين المشترك:

$$V=\begin{pmatrix}6 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 6.5 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 6\end{pmatrix}$$

والتي على أساسها نقوم بحساب مصفوفة الارتباط وفق ما يلي:

$$r_{11}=\frac{\operatorname{cov}(x_{1i}x_{1i})}{\sqrt{V_1}\sqrt{V_1}}=\frac{V_1}{V_1}=\frac{6}{6}=1$$

$$r_{11}=r_{22}=r_{33}=1$$

$$r_{12}=\frac{\operatorname{cov}(x_{1i}x_{2i})}{\sqrt{V_1}\sqrt{V_2}}=\frac{0.5}{2.45\times 2.55}=0.08$$

$$r_{13}=\frac{\operatorname{cov}(x_{1i}x_{3i})}{\sqrt{V_1}\sqrt{V_3}}=\frac{1}{2.45\times 2.45}=0.16$$

$$r_{23}=\frac{\operatorname{cov}(x_{2i}x_{3i})}{\sqrt{V_2}\sqrt{V_3}}=\frac{0.5}{2.55\times 2.45}=0.08$$

ومنه يمكن كتابة مصفوفة الارتباط وفق ما يلي:

$$C=\begin{pmatrix}1 & 0.08 & 0.16\\ 0.08 & 1 & 0.08\\ 0.16 & 0.08 & 1\end{pmatrix}$$

4. القيم الذاتية والأشعة الذاتية:

كما تم التطرق إليه في المحور السابق فإن عملية حساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية تتم وفق ما يلي:

- **القيم الذاتية:**

$$A=\begin{pmatrix}6 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 6.5 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 6\end{pmatrix}\Leftrightarrow |A-\lambda I_3|=0\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 6.5 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 6\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}6 & 0.5 & 1\\ 0.5 & 6.5 & 0.5\\ 1 & 0.5 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}6-\lambda & 0.5 & 1\\ 0.5 & 6.5-\lambda & 0.5\\ 1 & 0.5 & 6-\lambda\end{pmatrix}$$

$$\det(A)=((6-\lambda)(6.5-\lambda)(6-\lambda))-((0.5)(0.5)(1))+((1)(0.5)(0.5))$$
$$-((0.5)(0.5)(6-\lambda))+((6-\lambda)(0.5)(0.5))-((1)(6.5-\lambda)(1))$$
$$\det(A)=((6-\lambda)(6.5-\lambda)(6-\lambda))-(6.5-\lambda)$$

بعد حل المعادلة نجد: $\lambda_1=7.5,\lambda_2=6,\lambda_3=5$

ملاحظة1: في حالة استعمال طريقة المركبات الأساسية البسيطة *ACP- non normée* نقوم باستخراج القيم الذاتية من مصفوفة التباين والتباين المشترك، أما في حالة استعمال طريقة المركبات الأساسية المرجحة *ACP- normée* نقوم باستخراج القيم الذاتية من مصفوفة الارتباط.

ملاحظة2: $\sum_{\alpha=1}^{n}\lambda_\alpha=trac(A)\Leftrightarrow 7.5+6+5=18.5\Leftrightarrow 6+6.5+6=18.5$

- **الأشعة الذاتية:**

U_1 شعاع ذاتي المرفق لـ λ_1

$$(A-\lambda_1 I_3)U_1 = 0_{R^3}$$

$$\begin{pmatrix} -1.5 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & -1.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -1.5x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.5x_1 - x_2 + 0.5x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \\ x_1 + 0.5x_2 - 1.5x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...(3) \end{cases}$$

$$2(1)+(2) \Rightarrow -2.5x_1 + 2.5x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$U_1 = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \|U_1\| = \sqrt{3}$$

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix}$$

U_2 شعاع ذاتي المرفق لـ λ_2

$$\left(A-\lambda_2 I_3\right)U_2 = 0_{R^3}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.5x_1 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.5x_1 + 0.5x_2 + 0.5x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ x_1 + 0.5x_2 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_3 = -0.5x_2$$

$$(3) \Rightarrow x_1 = -0.5x_2$$

$$U_2 = -x_2 \begin{pmatrix} 0.5 \\ -1 \\ 0.5 \end{pmatrix} ; \left\| U_2 \right\| = \sqrt{1.5}$$

$$U_2 = \begin{pmatrix} 0.408 \\ -0.816 \\ 0.408 \end{pmatrix}$$

U_3 شعاع ذاتي المرفق لـ λ_3

$$\left(A-\lambda_3 I_3\right)U_3 = 0_{R^3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 1 \\ 0.5 & 1.5 & 0.5 \\ 1 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.5x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \\ x_1 + 0.5x_2 + x_3 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3) \end{cases}$$

$$(1) - 2(2) \Rightarrow -2.5x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 0$$

$$x_3 = -x_1$$

$$U_3 = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \left\| U_3 \right\| = \sqrt{2}$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \end{pmatrix}$$

5. نسبة التمثيل على المحاور:

يمكن استعمال نظرية *Huygens* بتفكيك التباين الكلي للأفراد كما يلي:

$$I_0 = I_{\Delta^*1} + I_{\Delta^*2} + ... + I_{\Delta^*p} = \lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p$$

- المساهمة المطلقة:

تقاس المساهمة المطلقة للمحور في التباين الكلي بـ:

$$ca(\Delta_k / I_0) = \lambda_k$$

إذا كل محور مساهمته تقاس بالقيمة الذاتية المقابل له.

- **المساهمة النسبية للمحور:**

تقاس المساهمة النسبية للمحور بالعلاقة التالية:

$$cr(\Delta_k / I_0) = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p} = \frac{\lambda_k}{trac(V)}$$

أما نسبة تمثيل المستوى تقاس بالعلاقة التالية:

$$cr(\Delta_1 \oplus \Delta_2 / I_0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_p} = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{trac(V)}$$

مثال: بالاستعانة بمعطيات المثال السابق نجد:

F3	F2	F1	
5	6	7.5	القيم الذاتية
28	32	40	النسبة المئوية
100	72	40	النسبة المئوية المتصاعدة

$$cr(\Delta_1 / I_0) = \frac{\lambda_1}{trac(V)} = \frac{7.5}{18.5} = 0.40$$

$$cr(\Delta_2 / I_0) = \frac{\lambda_2}{trac(V)} = \frac{6}{18.5} = 0.32$$

$$cr(\Delta_2 / I_0) = \frac{\lambda_3}{trac(V)} = \frac{5}{18.5} = 0.28$$

$$cr(\Delta_1 \oplus \Delta_2 / I_0) = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{trac(V)} = \frac{7.5 + 6}{18.5} = 0.72$$

$$cr(\Delta_1+\Delta_2+\Delta_2/I_0)=\frac{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}{trac(V)}=\frac{7.5+6+5}{18.5}=1$$

أي أن نسبة التمثيل الخاصة بالمحور العاملي الأول (المحور الأول) أو المركبة الأساسية الأولى F_1، تمثل حوالي 40% من قيمة الجمود الكلي، بالإضافة إلى نسبة التمثيل الخاصة بالمحور (F_2,F_3) التي تمثل (28%،32%) على التوال، فتكون نسبة التمثيل على المخطط العاملي في الفضاء IR^2 ذو المحورين المحور الأول والمحور الثاني والممثلة بنسبة جمود كلي 72% من التمثيل العام وهذه النسبة جيدة وكافية لإعطاء صورة واضحة لسحابة النقط على المخطط العاملي.

6. المركبات الأساسية للأفراد على المحاور:

يتم حساب المركبات الأساسية للأفراد على المحاور كما يلي:

$$F_\alpha = XU_\alpha$$

مثال: بالاستعانة بمعطيات المثال السابق نجد:

$$F_1 = XU_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3.46 \\ -1.73 \\ 1.73 \\ 3.46 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = XU_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.408 \\ -0.816 \\ 0.408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.44 \\ -2.44 \\ -2.44 \\ 2.44 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = XU_1 = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -2 \\ -4 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.41 \\ -2.82 \\ 2.82 \\ -1.41 \end{pmatrix}$$

7. نسبة تمثيل الأفراد على المحاور:

يتم قياس نسبة تمثيل الأفراد على المحاور باستعمال تجب الزاوية التي يشكلها مع المستوى، بحيث يتم حساب تجب الزاوية بالنسبة للمحاور وفق العلاقة التالية:

$$\cos^2\theta_{i\alpha} = \frac{F_\alpha^2(i)}{\sum_{\alpha=1}^{p} F_\alpha^2(i)}$$

حيث أن:

$$\sum_{i=1}^{p}\cos^2(\theta_{i\alpha})=1$$

بحيث كلما اقتربت هذه القيمة نت الواحد كلما كان الفرد ممثل أحسن تمثيل.

مثال: بالاستعانة بمعطيات المثال السابق نجد:

$$F_\alpha=\begin{pmatrix}-3.46 & 2.44 & 1.44\\ -1.73 & -2.44 & -2.82\\ 1.73 & -2.44 & 2.82\\ 3.46 & 2.44 & -1.41\end{pmatrix}$$

$$\cos^2\theta_{11}=\frac{F_1^2(1)}{\sum_{\alpha=1}^{p}F_\alpha^2(1)}=\frac{(-3.46)^2}{((-3.46)^2+(2.44)^2+(1.44)^2)}=0.60$$

بنفس الطريقة نقوم بحساب باقي القيم:

$\cos^2\theta_{i3}$	$\cos^2\theta_{i2}$	$\cos^2\theta_{i1}$	الفرد
0.10	0.30	0.60	1
0.47	0.35	0.18	2
0.47	0.35	0.18	3
0.10	0.30	0.60	4

من خلال النتائج السابقة يمكن القوم أن الفرد (1) و(4) ممثلين تمثيل جيد علة المحور الأول، في حين أن كل الأفراد ممثلين تمثيل سيئ في المحور الثاني، بينما الفرد (1) و(4) ممثلين بشكل سيئ في المحور الثالث.

8. نسبة مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور:

يتم حساب نسبة مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور بغرض تفسير المركبات الأساسية، حيث يتم حساب نسبة مساهمة الأفراد في تشكيل المحاور وذلك بتربيع المركبات الأساسية ثم القسمة على ثقل المصفوفة مضروب في القيمة الذاتية المقابل لها وفق ما يلي:

$$C_i^\alpha=\frac{F_\alpha^2(i)}{n\lambda_\alpha}$$

مثال:

$$C_1^1=\frac{F_1^2(1)}{4\lambda_1}=\frac{11.97}{4\times 7.5}=0.40$$

بنفس الطريقة نقوم بحساب باقي القيم نحصل على:

C_i^3	C_i^2	C_i^1	الفرد
0.10	0.25	0.40	1
0.40	0.25	0.10	2
0.40	0.25	0.10	3
0.10	0.25	0.40	4

عند حساب المساهمة المطلقة لكل الأفراد نجد المساهمة الكلية والتي تساوي 1، أي أن تمثيل الأفراد في المحور 100%.

9. إحداثيات المتغيرات على المحاور:

يمكن القيام بتمثيل المتغيرات باستعمال نفس الخطوات السابقة التي قمنا بها في تمثيل الأفراد وذلك على الفضاء الشعاعي R^n بدلا من الفضاء الشعاعي R^p، غير أننا نستعمل العملية المتمثلة في تحليل المتغيرات في فضاء الأفراد R^n ونقوم بتغيير الأساس في هذا الفضاء، وذلك وفق علاقة الانتقال التالية (عبارة ثاني انتقال):

$$G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} U_\alpha \Rightarrow U_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X'V_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} G_\alpha$$

أما في حالة تحليل الأفراد في فضاء المتغيرات R^p ونقوم بتغيير الأساس في هذا الفضاء، وذلك وفق علاقة الانتقال التالية (عبارة أول انتقال):

$$F_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} V_\alpha \Rightarrow V_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} XU_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} F_\alpha$$

مثال: بالاستعانة بمعطيات المثال السابق نجد:

$$G_\alpha = \sqrt{\lambda_\alpha} U_\alpha \Rightarrow U_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X'V_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} G_\alpha$$

$$G_1 = \sqrt{\lambda_1} U_1 = \sqrt{7.5} \begin{pmatrix} 0.577 \\ 0.577 \\ 0.577 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.58 \\ 1.58 \\ 1.58 \end{pmatrix}$$

$$G_2 = \sqrt{\lambda_2} U_2 = \sqrt{6} \begin{pmatrix} 0.408 \\ -0.816 \\ 0.408 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.999 \\ -1.998 \\ 0.999 \end{pmatrix}$$

$$G_3 = \sqrt{\lambda_3} U_3 = \sqrt{5} \begin{pmatrix} 0.707 \\ 0 \\ -0.707 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.581 \\ 0 \\ -1.581 \end{pmatrix}$$

10. إضافة أفراد ومتغيرات:

يعتبر تمثيل العناصر الإضافية مهم جدا عند تحليل المعطيات سواء كانت أفراد أو متغيرات، حيث تسمح هذه العملية من إدخال المتغيرات أو الأفراد التي لم يكون لها دور في عملية الحساب في التحليل.

10-1.حالة إضافة أفراد:

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{1j} & r_{1p}\\ r_{i1} & r_{ij} & r_{ip}\\ r_{ni} & r_{nj} & r_{np}\\ \hline & r_{ij}^{+} & \\ \\ \\ \end{pmatrix}\Rightarrow X=\begin{pmatrix} x_{ij}=\dfrac{r_{ij}-\bar{r}_j}{\delta_j}\\ \hline X^{+}\Rightarrow x_{ij}^{+}=\dfrac{r_{ij}^{+}-\bar{r}_j}{\delta_j}\end{pmatrix}$$

المركبات الأساسية للأفراد المضافة:

$$F_{\alpha}^{+}=X^{+}U_{\alpha}$$

10-2. حالة إضافة متغيرات:

$$R=\begin{pmatrix} r_{11} & r_{1j} & r_{1p}\\ r_{i1} & r_{ij} & r_{ip}\\ r_{n1} & r_{nj} & r_{np}\end{pmatrix}\left(r_{ij}^{+}\right)\Rightarrow X=\left(X\Rightarrow x_{ij}=\frac{r_{ij}-\bar{r}_j}{\delta_j}\right)\left(X^{+}\Rightarrow x_{ij}^{+}=\frac{r_{ij}^{+}-\bar{r}_j^{+}}{\delta_j^{+}}\right)$$

المركبات الأساسية للمتغيرات المضافة:

$$G_{\alpha}^{+}=X'^{+}V_{\alpha}$$

مثال:

تحصل الطالب أحمد على علامة 12 في مقياس اقتصاد قياسي، 8 في مقياس بحوث العمليات، 16 في مقياس تحليل المعطيات.

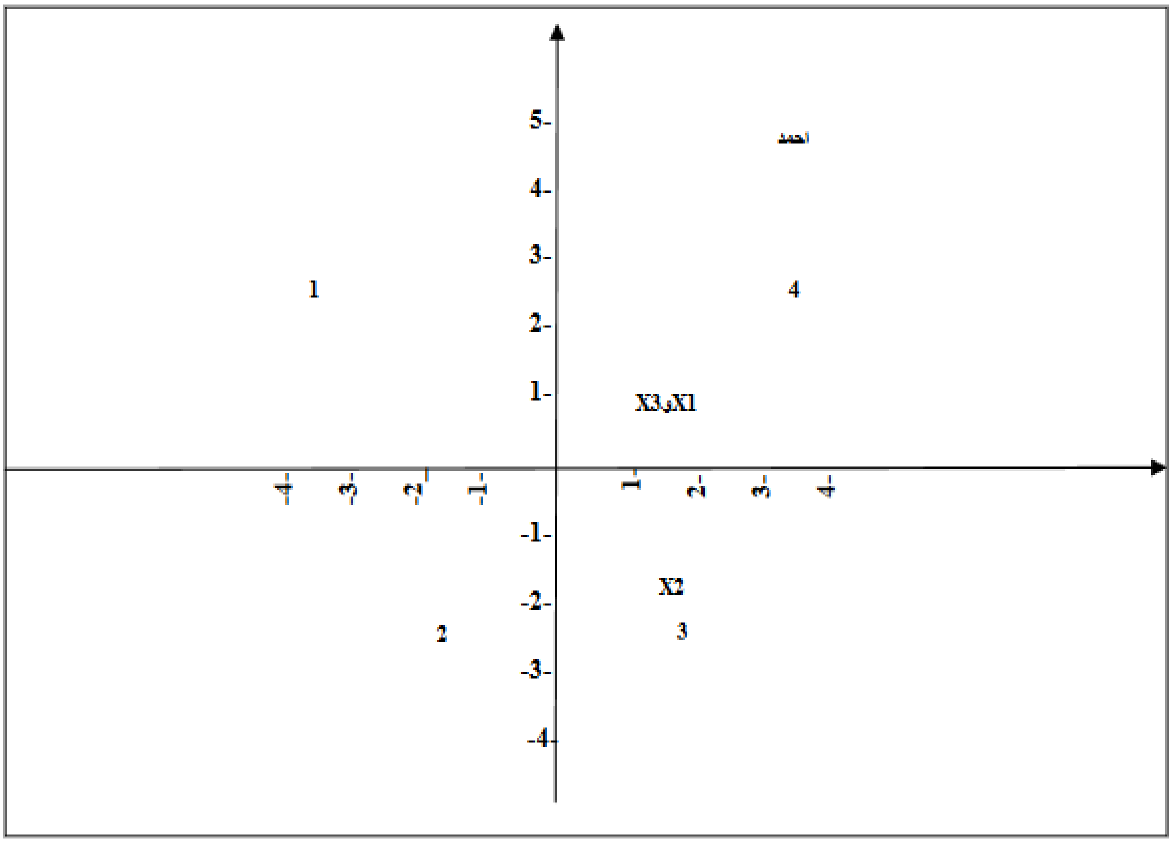
$$R^{+}=\begin{pmatrix}12 & 8 & 16\end{pmatrix}\Rightarrow X^{+}=\begin{pmatrix}12-10 & 8-10 & 16-10\end{pmatrix}\Rightarrow X^{+}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\end{pmatrix}$$

$$F_{\alpha}^{+}=X^{+}U_{\alpha}$$

$$F_{\alpha}^{+}=\begin{pmatrix}2 & -2 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.577 & 0.408 & 0.707\\ 0.577 & -0.816 & 0\\ 0.577 & 0.408 & -0.707\end{pmatrix}$$

$$F_{\alpha}^{+}=\begin{pmatrix}3.462 & 4.896 & -2.82\end{pmatrix}$$

التمثيل البياني:



تمارين الفصل الثالث

التمرين الأول:

لدينا مصفوفة المعطيات التالية والتي تمثل ثلاثة متغيرات متجانسة مشاهدة على أربعة أفراد وبعد تطبيق طريقة المركبات الأساسية تحصلنا على جزء من النتائج موضح كما يلي:

$$A=\begin{pmatrix}2&3&7\\3&4&6\\3&3&5\\4&6&6\end{pmatrix} \qquad U_1=\begin{pmatrix}0,46\\0,88\\-0,08\end{pmatrix};\ U_2=\begin{pmatrix}-0,37\\0,27\\0,89\end{pmatrix};\ \lambda_2=0,61\ ;\ \lambda_3=0,05$$

حيث أن: A هي المصفوفة المعطيات، U_1 و U_2 الأشعة الذاتية المرافقة للقيم الذاتية λ_1 و λ_2 على الترتيب.

المطلوب: أجب على الاسئلة أدناه بصفة دقيقة ومختصرة مع توضيح طريقة الحساب؟

1- أحسب كل من المتوسطات والانحرافات المعيارية للمتغيرات ثم استنتج المصفوفة المركزة X ؛

2- أحسب مصفوفة التباين والتباين المشترك؛

3- استنتج القيمة الذاتية المتبقية λ_1 ؛

4- أحسب المساهمة النسبية والمطلقة في تشكيل المحاور؛

5- أحسب مركبات الأفراد F_α ؛

6- أحسب نسبة مساهمة المحاور في تمثيل الأفراد $\cos^2\theta_{i\alpha}$ ؛

التمرين الثاني:

من خلال تطبيق طريقة المركبات الأساسية على جدول معطيات ($X_{4.3}$) متكون من 3 متغيرات متجانسة مشاهدة على 4 أفراد تحصلنا على نتائج، جزء منها موضح كما يلي:

$$g'=(3\quad 4\quad 6) \qquad U_1=\begin{pmatrix}0,46\\0,88\\-0,08\end{pmatrix};\ U_2=\begin{pmatrix}-0,37\\0,27\\0,89\end{pmatrix};\ F_1=\begin{pmatrix}-1,42\\0\\-0,80\\2,22\end{pmatrix}\ F_1=\begin{pmatrix}0,99\\0\\-1,16\\0,17\end{pmatrix};\lambda_2=0,61\ ;\ \lambda_3=0,05$$

حيث أن: g هو مركز سحابة الأفراد، و F_1 و F_2 هي مركبات (احداثيات) الافراد على المحاور المولّدة بالشعاعين الذاتيين U_1 و U_2 المرافقة لأكبر قيمتين ذاتيتين λ_1 و λ_2 على الترتيب.

المطلوب:

1. أكمل الفراغات الآتية :

$$M=\begin{pmatrix}-1 & .... & .... \\ 0 & 0 & 0 \\ .... & -1 & .... \\ .... & ..... & 0\end{pmatrix},\qquad X_{4.3}=\begin{pmatrix}..... & .... & .... \\ ..... & ..... & ..... \\ .... & ..... & .... \\ .... & ..... & ......\end{pmatrix}\quad V=\begin{pmatrix}.... & .... & .... \\ .... & .... & .... \\ .... & .... & ....\end{pmatrix}\qquad I=......\qquad \lambda_1=..........$$

2. وضح كيفية إتمام الفراغات أعلاه:

- بالنسبة إلى المصفوفة الممركزة (M)؛
- بالنسبة إلى مصفوفة المعطيات الأساسية ($X_{4.3}$)؛
- بالنسبة إلى مصفوفة التباين والتباين المشترك (V)؛
- بالنسبة إلى التباين الكلي (I)؛
- بالنسبة إلى القيمة الذاتية الأولى (λ_1).

حل تمارين المحور الرابع

حل التمرين الأول:

1. حساب المتوسطات والانحرافات المعيارية:

حساب المتوسط الحسابي:

$$\bar{X}_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$$

$$\bar{X}_1 = \frac{1}{4}(2+3+3+4) = \frac{12}{4} = 3$$

$$\bar{X}_2 = \frac{1}{4}(3+4+3+6) = \frac{16}{4} = 4$$

$$\bar{X}_3 = \frac{1}{4}(7+6+5+6) = \frac{24}{4} = 6$$

حساب الانحرافات المعيارية:

$$\delta_j = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}\left(X_j - \bar{X}_j\right)^2}{n}}$$

$$\delta_1 = \sqrt{\frac{(2-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2}{4}} = 0.7071$$

$$\delta_2 = \sqrt{\frac{(3-4)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2 + (6-4)^2}{4}} = 1.2247$$

$$\delta_3 = \sqrt{\frac{(7-6)^2 + (6-6)^2 + (5-6)^2 + (6-6)^2}{4}} = 0.7071$$

الجدول

	X1	**X2**	**X3**
M1	2	3	7
M2	3	4	6
M3	3	3	5
M4	4	6	6
$\sum$	**12**	**16**	**24**
$\overline{X}$	**3**	**4**	**6**
δ	0.7071	1.2247	0.7071

ومنه المصفوفة المركزة تكون كما يلي:

$$X=\begin{pmatrix}2-3 & 3-4 & 7-6\\ 3-3 & 4-4 & 6-6\\ 3-3 & 3-4 & 5-6\\ 4-3 & 6-4 & 6-6\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

2. حساب مصفوفة التباين– التباين المشترك:

$$V=\frac{1}{4}X'X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1 & 0 & 0 & 1\\ -1 & 0 & -1 & 2\\ 1 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & -1\\ 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow V=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4}\\ \frac{3}{4} & \frac{3}{2} & 0\\ -\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

3. استنتاج القيمة الذاتية المتبقية: لدينا

$$trac(V)=\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_{\alpha}$$

ومنه يمكن استنتاج القيمة الذاتية المتبقية وفق ما يلي:

$$trac(V)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_{\alpha}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=\frac{5}{2}\Leftrightarrow\lambda_1=\left(\frac{5}{2}-0.66\right)=1.84$$

4. **حساب المساهمة النسبية والمطلقة في تشكيل المحاور**: لدينا: $T_\alpha = \dfrac{\lambda_\alpha}{\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_\alpha}$

λ_α	T_α	$\sum T_\alpha$
1.84	$\frac{1.84}{2.5} = 0.736$	**0.736**
0.61	$\frac{0.61}{2.5} = 0.244$	**0.98**
0.05	$\frac{0.05}{2.5} = 0.02$	**1**

5. **حساب مركبات الأفراد** F_α

يتم حساب المركبات الأساسية للأفراد على المحاور كما يلي:

$$F_\alpha = XU_\alpha$$

ومنه نجد:

$$F_1 = XU_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.88 \\ -0.08 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1.42 \\ 0 \\ -0.8 \\ 2.22 \end{pmatrix}$$

$$F_1 = XU_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.27 \\ 0.89 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.99 \\ 0 \\ -1.16 \\ 0.17 \end{pmatrix}$$

6. **حساب نسبة مساهمة المحاور في تمثيل الأفراد** $\cos^2 \theta_{i\alpha}$

يتم قياس نسبة تمثيل الأفراد على المحاور وفق العلاقة التالية:

$$F_\alpha = \begin{pmatrix} -1.42 & 0.99 \\ 0 & 0 \\ -0.8 & -1.16 \\ 2.22 & 0.17 \end{pmatrix}$$

$$\cos^2 \theta_{11} = \frac{F_1^{\,2}(1)}{\sum_{\alpha=1}^{p} F_\alpha^{\,2}(1)} = \frac{(-1.42)^2}{\left((-1.42)^2 + (0.99)^2\right)} = 0.672$$

بنفس الطريقة نقوم بحساب باقي القيم:

$\cos^2\theta_{i2}$	$\cos^2\theta_{i1}$	الفرد
0.3270816	0.6729184	1
0	0	2
0.67767929	0.32232071	3
0.00582979	0.99417021	4

حل التمرين الثاني:

1-المصفوفة المركزة M

$$M=\begin{pmatrix} -1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & -1 & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & 0 \end{pmatrix}$$

نعلم أن

$$\left(F_1=MU_1;F_2=MU_2\right)$$

$$F_1=\begin{pmatrix} -1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & -1 & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0.46 \\ 0.88 \\ -0.08 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1.42 \\ 0 \\ -0.80 \\ 2.22 \end{pmatrix}$$

وكذلك

$$F_2=\begin{pmatrix} -1 & m_{12} & m_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & -1 & m_{33} \\ m_{41} & m_{42} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -0.37 \\ 0.27 \\ 0.89 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0.99 \\ 0 \\ -1.16 \\ 0.17 \end{pmatrix}$$

إذن يصبح من أجل إيجاد $\left(m_{12};m_{13}\right)$ ما يلي:

$$\begin{cases} -0.46+0.88m-0.08m=-142..................(1) \\ 0.37+0.27m+0.89m=0.99..................(2) \end{cases}$$

بحل جملة معادلتين نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.88m_{12} - 0.08m_{13} = -1.42 + 0.46 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.27m_{12} + 0.89m_{13} = 0.99 - 0.37 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.88m_{12} - 0.08m_{13} = -0.96 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.27m_{12} + 0.89m_{13} = 0.62 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.88m_{12} = -0.96 + 0.08m_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.27m_{12} + 0.89m_{13} = 0.62 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{12} = \dfrac{-0.96 + 0.08m_{13}}{0.88} \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.27m_{12} + 0.89m_{13} = 0.62 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{12} = -1.09 + 0.09m_{13} \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ 0.27m_{12} + 0.89m_{13} = 0.62 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$0.27(-1.09 + 0.09m_{13}) + 0.89m_{13} = 0.62$$
$$\Rightarrow -0.29 + 0.02m_{13} + 0.89m_{13} = 062$$
$$\Rightarrow 0.91m_{13} = 0.91$$
$$\Rightarrow m_{13} = \frac{0.91}{0.91}$$
$$\Rightarrow m_{13} = 1$$

بتعويض في المعادلة (1) نجد:

$$-0.46 + 0.88m_{12} - 0.08(1) = -1.42$$
$$\Rightarrow 0.88m_{12} = -0.88$$
$$\Rightarrow m_{12} = \frac{-0.88}{0.88}$$
$$\Rightarrow m_{12} = -1$$

بنفس الطريقة نجد باقي القيم

من أجل إيجاد $(m_{31}; m_{33})$ ما يلي:

$$\begin{cases} 0.46m_{31} - 0.88 - 0.08m_{33} = -0.08 \ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -0.37m_{31} - 0.27 + 0.89m_{33} = -1.16 \ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

بحل جملة معادلتين نجد:

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.46m_{31} + 0.08m_{33} = -0.08 + 0.88 \ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -0.37m_{31} + 0.89m_{33} = -1.16 + 0.27 \ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.46m_{31} - 0.08m_{33} = 0.08 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -0.37m_{31} + 0.89m_{33} = -089 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.46m_{31} = 0.08 + 0.08m_{33} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -0.37m_{31} + 0.89m_{33} = -0.89 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{31} = \dfrac{0.08 + 0.08m_{33}}{0.46} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -0.37m_{31} + 0.89m_{33} = -0.89 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{31} = 0.17 + 0.17m_{33} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1) \\ -0.37m_{31} + 0.89m_{33} = -0.89 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...(2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$-0.37(0.17 + 0.17m_{33}) + 0.89m_{33} = -0.89$$
$$\Rightarrow -0.06 - 0.06m_{33} + 0.89m_{33} = 0.89$$
$$\Rightarrow -0.06m_{33} + 0.89m_{33} = -0.89 - 0.16$$
$$\Rightarrow 0.83m_{33} = -0.83$$
$$\Rightarrow m_{33} = \frac{-0.83}{0.83}$$
$$\Rightarrow m_{33} = -1$$

بتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$-0.37m_{31} - 0.27 + 0.89(-1) = -1.16$$
$$\Rightarrow -0.37m_{31} = -1.16 + 1.16$$
$$\Rightarrow -0.37m_{31} = 0$$
$$\Rightarrow m_{31} = 0$$

من أجل إيجاد $(m_{41}; m_{42})$ ما يلي:

$$\begin{cases} 0.46m_{41} + 0.88m_{42} = 2.22 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ -0.37m_{41} + 0.27m_{42} = 0.17 \ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

بحل جملة معادلتين نجد:

$$\begin{cases} m_{41} = \dfrac{2.22 - 0.88m_{42}}{0.46} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(1) \\ -0.37m_{41} + 0.27m_{42} = 0.17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots...(2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_{41} = 4.82 - 1.91m_{42} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(1) \\ -0.37m_{41} + 0.27m_{42} = 0.17 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2) \end{cases}$$

نعوض (1) في (2) نجد:

$$
\begin{aligned}
& -0.37(4.82-01.91m_{42})+0.27m_{42}=0.17 \\
& \Rightarrow -1.78+0.7m_{42}+0.27m_{42}=0.17 \\
& \Rightarrow 0.97m_{42}=1.95 \\
& \Rightarrow m_{42}=\frac{1.95}{0.97} \\
& \Rightarrow m_{42}=2
\end{aligned}
$$

بتعويض في المعادلة (2) نجد:

$$
\begin{aligned}
& -0.37m_{41}+0.27(2)=0.17 \\
& \Rightarrow -0.37m_{31}=-0.37 \\
& \Rightarrow m_{41}=\frac{-0.37}{-0.37} \\
& \Rightarrow m_{41}=1
\end{aligned}
$$

ومنه:

$$
M=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}
$$

2- مصفوفة المعطيات الأساسية

نعلم أن:

$$
\begin{aligned}
& M=X-1ng' \\
& \Leftrightarrow X=M+1ng' \\
& \Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

وعليه

$$
X=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 6 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}\Leftrightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 3 & 4 & 6 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 6 & 6 \end{pmatrix}
$$

3- مصفوفة التباين- التباين المشترك

$$V=\frac{1}{4}X'X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1&0&0&1\\-1&0&-1&2\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&-1&1\\0&0&0\\0&-1&-1\\1&2&0\end{pmatrix}\Rightarrow V=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{3}{4}&-\frac{1}{4}\\\frac{3}{4}&\frac{3}{2}&0\\-\frac{1}{4}&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

4- التباين الكلي

$$I=\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_{\alpha}=trac(V)$$
$$I=\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}$$
$$I=2.5$$

5- القيمة الذاتية المتبقية:

لدينا:

$$trac(V)=\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_{\alpha}$$

ومنه يمكن استنتاج القيمة الذاتية المتبقية وفق ما يلي:

$$trac(V)=\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=2.5\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{\alpha}\lambda_{\alpha}=\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2.5\Leftrightarrow\lambda_1=(2.5-0.66)=1.84$$

مثال تطبيقي باستخدام برنامج *Xlstat 2020*:

لا يخفى في الواقع الاقتصادي دور الطرق الكمية في ضبط مؤشرات النشاط الاقتصادي سواء من ناحية تحديد العلاقات من منظور رياضي او القيام بالدراسات الميدانية والاستشرافية حول بعض الظواهر الاقتصادية، فمن خلال هذه الورقة البحثية حاولنا باستخدام احدى الطرق الكمية التحليلية وهي طريقة تحليل المركبات الاساسية القيام بدراسة تحليلية ميدانية على مستوى عينة نشاط اقتصادي لولاية البويرة لغرض تحديد العلاقات الاقتصادية بين انواع النشاطات الاقتصادية كالصناعة والزراعة والمهن الحرة من جهة وبين المناخ المناسب لذلك حسب المناطق بأخذ عينة لمجموعة من الدوائر وهذا عن طريق التمويل بواسطة احدى وكالات تشغيل الشباب *ANSEJ*

تعتبر المؤسسات الصغيرة والمتوسطة أداة دعم للاقتصاد الوطني عامة والاقتصاد المحلي خاصة، حيث أنها تتضمن تداخلات بين العديد من العوامل منها الخاصة بصاحب المؤسسة ومنها الخاصة بمحيطها الخارجي وغيرها من العوامل، من هذا المنطلق يبرز دور جهاز *ANSJE* في مرافقة الشباب في إنشاء وتمويل مشاريعهم الصغيرة والمتوسطة في إطار اتفاقية بين الطرفين، لذلك فإننا سنحاول من خلال هذا المحور دراسة واقع مشاريع المؤسسات الصغيرة والمتوسطة الممولة في إطار جهاز *ANSJE* وتحديد أهم الخصائص المشتركة بين مختلف المشاريع الممولة من حيث القطاع وكذلك حسب الدائرة الإدارية للمشروع وذلك حسب المعطيات المتاحة لسنة 2022. وبغية ذلك سنقوم باستخدام طريقة التحليل بالمركبات الأساسية (*ACP*) والتي تستخدم في تحليل الجداول الإحصائية بشرط أن تكون كل المتغيرات ذات طبيعة كمية وتهدف هذه الطريقة إلى إيجاد فضاءات شعاعية جزئية أقل بعد تسمح بتمثيل البيانات بشكل واضح. وقد تطرقنا إلى تسعة قطاعات كونها الأكثر، موزعة عبر مختلف بلديات ولاية البويرة. وبعد عملية تطبيق طريقة التحليل بالمركبات الأساسية باستخدام برنامج (*Xlstat 2020*) توصلنا إلى ما يلي:

1. عدد المحاور المأخوذة للتفسير.

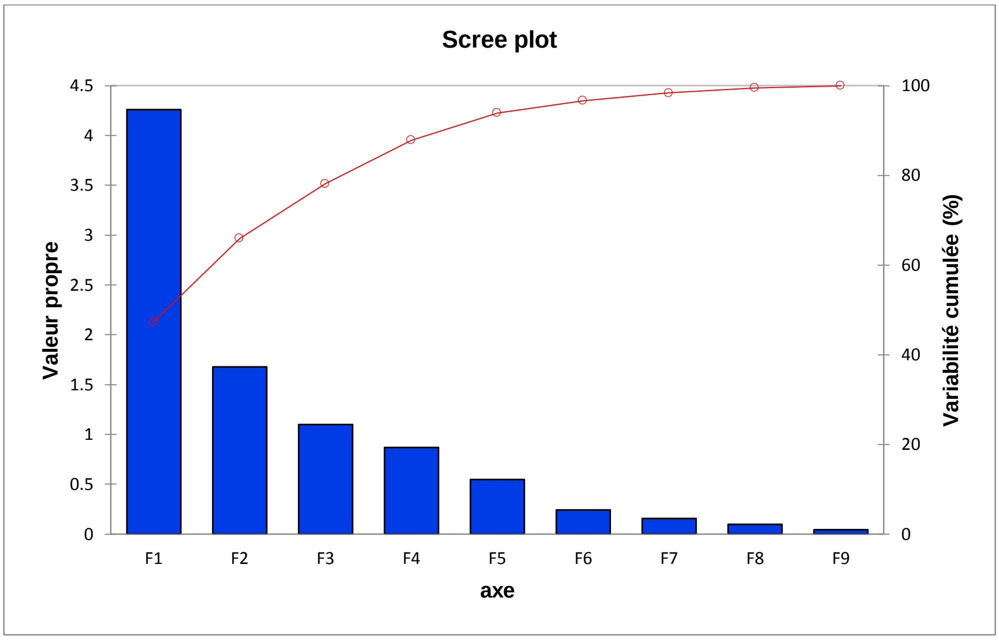
بغية تحديد عدد المحاور المأخوذة لتفسير الظاهرة المدروسة نقوم بحساب القيم الذاتية والأشعة الذاتية لتكوين محاور المخطط العاملي "*Plan factoriel*" الذي يمثل الأفراد والمتغيرات.

الجدول رقم (05): القيم الذاتية.

	F1	F2	F3	F4	F5	F6	F7	F8	F9
القيم الذاتية	4,259	1,676	1,100	0,871	0,550	0,242	0,160	0,100	0,043
النسبة المئوية	47,323	18,620	12,217	9,676	6,115	2,691	1,772	1,108	0,477
النسبة المئوية المتصاعدة	47,323	65,944	78,161	87,836	93,952	96,642	98,415	99,523	100,00

المصدر: مخرجات برنامج *"xlstat"*

الشكل رقم (01): التمثيل البياني للقيم الذاتية.



المصدر: مخرجات برنامج *"xlstat"*

بالاعتماد على معيار كايزر "***critère de kaiser***" و الذي يأخذ بعين الاعتبار القيم الذاتية الأكبر من الواحد الصحيح ($\lambda_i > 1$)، فإن القيمة الذاتية ($\lambda_1 = 4,259$) الخاصة بالمحور العاملي الأول (المحور الأول) أو المركبة الأساسية الأولى F_1، تمثل حوالي 47,323% من قيمة الجمود الكلي، بالإضافة إلى القيم الذاتية الخاصة بالمحور (F_2,F_3) التي تساوي ($\lambda_2 = 1,676, \lambda_3 = 1,100$) بنسبة (18,620%,12,217%) على التوالي، بعكس القيم الذاتية الأخرى والتي جميع قيمها أقل تماما من الواحد، وبالتالي فإننا سنكتفي مباشرة بتحليل و تفسير سحابة نقط المتغيرات والأفراد على المستوي (F_1,F_2)، فتكون نسبة التمثيل على المخطط العاملي في الفضاء IR^2 ذو المحورين المحور الأول والمحور الثاني والممثلة بنسبة جمود

كلي 65,944% من التمثيل العام وهذه النسبة جيدة وكافية لإعطاء صورة واضحة لسحابة النقط على المخطط العاملي لهذا نكتفي بتمثيل المتغيرات على معلم متعامد ومتجانس واحد ذو بعدين.

2. نسبة تمثيل الأفراد على المحاور.

بعد إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية المرفقة بالقيم الذاتية لمصفوفة الارتباط قمنا بحساب إحداثيات المتغيرات على المحاور العاملية وهي موضحة وفق الجدول التالي:

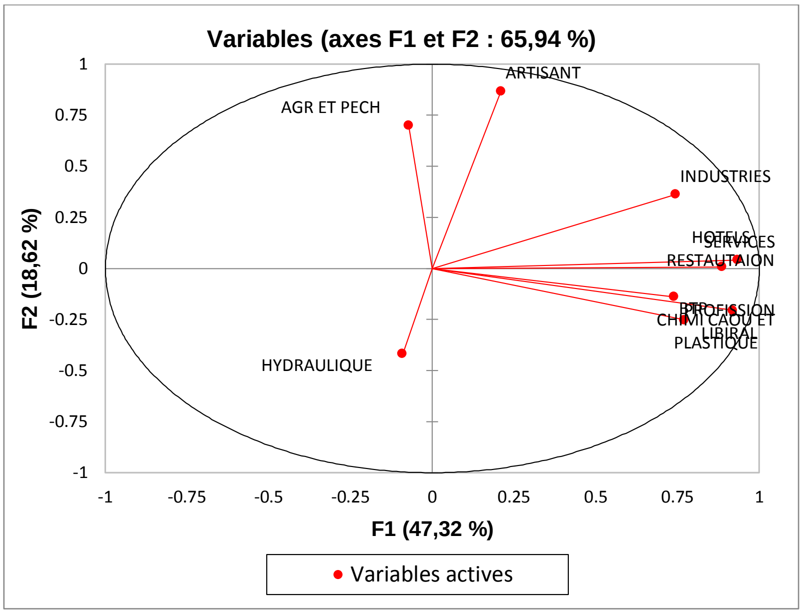
الجدول رقم (06): نسبة تمثيل الأفراد على المحاور.

	المحور الأول	المحور الثاني
الفلاحة	-0,072	0,700
الحرف اليدوية	0,211	0,868
الأشغال العمومية	0,740	-0,139
الصناعات البلاستكية	0,772	-0,252
الفندقة	0,887	0,007
البناء والري	-0,091	-0,418
الصناعة	0,744	0,362
الأعمال الحرة	0,920	-0,205
الخدمات	0,934	0,042

المصدر: مخرجات برنامج *"xlstat"*

ومن خلالها قمنا برسم التمثيل البياني لنقاط المتغيرات والذي كان على الشكل التالي:

الشكل رقم (02): التمثيل البياني لإحداثيات نقاط المتغيرات (F_1,F_2)



المصدر: مخرجات برنامج "$xlstat$"

من خلال الشكل رقم (02) يمكننا تحديد مجموعتين من المتغيرات المتجانسة، حيث تساهم المجموعة الأولى (الأشغال العمومية، الصناعة البلاستكية، الفندقة، الصناعة، الأعمال الحرة، الخدمات) في تكوين المحور العاملي الأول F_1 بنسبة (%12,845، %13,980، %18,493، %12,999، %19,854، %20,473) على التوالي، أما المجموعة الثانية (الفلاحة، الحرف اليدوية، البناء والري) فتساهم في تكوين المحور العاملي الثاني F_2 بنسبة (%29,258، %44,916، %10,442) على التوالي وذلك ما تؤكده قيم (cos^2)، فالمجموعة الأولى (الأشغال العمومية، الصناعة البلاستكية، الفندقة، الصناعة، الأعمال الحرة، الخدمات) والتي تأخذ القيم (0,547، 0,595، 0,788، 0,554، 0,846، 0,872) على التوالي تمثل بشكل جيد المحور العاملي الأول F_1 لأن جميع قيمها تقترب من الواحد.

3. تفسير معاملات الارتباط الخطي:

انطلاقا من الشكل السابق (الشكل رقم 2) وبالاعتماد على الزوايا المحصورة بين المتغيرات وكذا مصفوفة الارتباط المبينة كما يلي:

جدول رقم (07): مصفوفة الارتباط بين المتغيرات.

	الفلاحة	الحرف	أ.العمومية	ص.بلاستكية	الفندقة	ب.والري	الصناعة	أ.الحرة	الخدمات
الفلاحة	**1**	0,423	-0,098	-0,060	0,128	-0,233	-0,093	-0,102	-0,189
الحرف	0,423	**1**	0,021	-0,114	0,148	-0,122	0,532	-0,036	0,305
أ.العمومية	-0,098	0,021	**1**	0,470	0,667	-0,046	0,429	0,631	0,580
ص.بلاستكية	-0,060	-0,114	0,470	**1**	0,667	-0,097	0,343	0,788	0,650
الفندقة	0,128	0,148	0,667	0,667	**1**	-0,014	0,514	0,855	0,741
البناء والري	-0,233	-0,122	-0,046	-0,097	-0,014	**1**	-0,151	-0,049	-0,009
الصناعة	-0,093	0,532	0,429	0,343	0,514	-0,151	**1**	0,522	0,829
أ.الحرة	-0,102	-0,036	0,631	0,788	0,855	-0,049	0,522	**1**	0,826
الخدمات	-0,189	0,305	0,580	0,650	0,741	-0,009	0,829	0,826	**1**

المصدر : مخرجات برنامج *"xlstat"*

يمكن القول أن:

- الزاوية المحصورة بين كل من (الخدمات والأعمال الحرة) و (الاعمال الحرة والفندقة) و (الخدمات والصناعة) هي زاوية حادة (تقترب من الصفر) مما يدل على وجود ارتباط قوي وموجب فيما بينها أي: $(\cos\theta(\theta \simeq 0)) \simeq 1$ ، ومثال ذلك درجة الارتباط الموجودة بين الخدمات والأعمال الحرة والتي بلغت (0,826)، وهذا يدل على أن معظم المشاريع الممولة من طرف وكالة ذات الطابع الخدماتي تندرج في قطاع الأعمال الحرة بالدرجة الأولى؛
- إن الزوايا القائمة أو الشبه قائمة تدل على عدم وجود ارتباط أو ارتباط ضعيف جدا بين المتغيرات $\left(\cos\theta\left(\theta \simeq \frac{\pi}{2}\right)\right) \simeq 0$، ويظهر ذلك جليا بين الحرف والأشغال العمومية بدرجة ارتباط (0,021)؛
- إن الزوايا المنفرجة تدل على وجود ارتباط سالب فيما بينها أي $(\cos\theta(\theta \simeq \pi)) \simeq -1$، ومثال ذلك درجة الارتباط الموجودة بين الفلاحة والاعمال الحرة فدرجة الارتباط بينهما بلغت (-0,102).

4. المركبات الأساسية للأفراد على المحاور.

بعد إيجاد الأشعة الذاتية الوحدوية المرفقة بالقيم الذاتية لمصفوفة الارتباط قمنا بحساب إحداثيات المتغيرات على المحاور العاملية وهي موضحة وفق الجدول التالي:

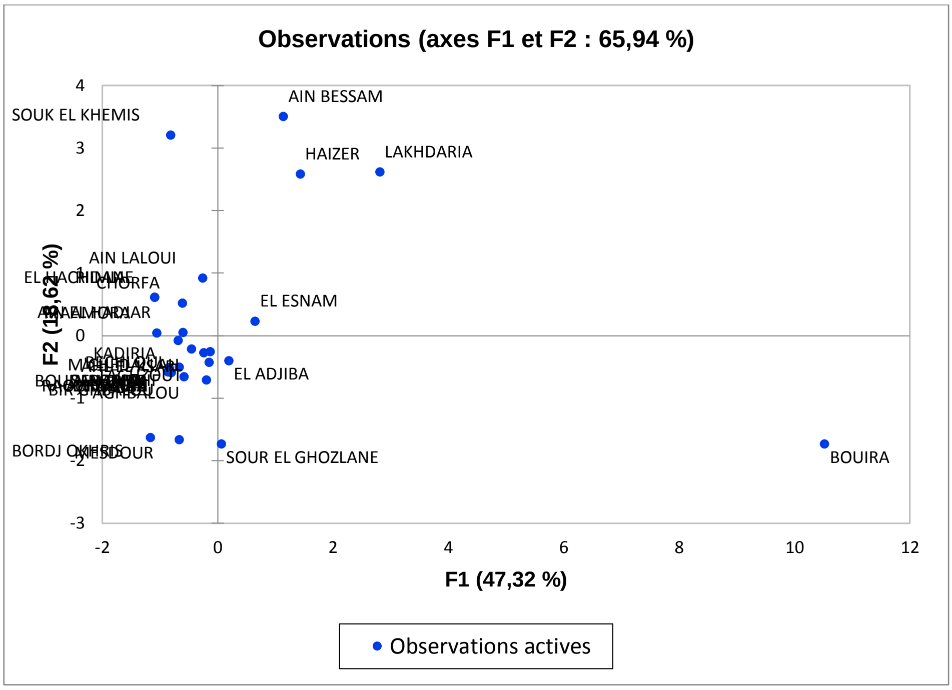
الجدول رقم (08): إحداثيات المتغيرات على المحاور العاملية

	المحور الأول	المحور الثاني		المحور الأول	المحور الثاني
البويرة	10,531	-1,743	جباحية	-0,792	-0,597
آيت لعزيز	-0,792	-0,597	برج أخريص	-1,158	-1,641
عين الترك	-0,833	-0,520	مسدور	-0,659	-1,670
حيزر	1,439	2,577	الأخضرية	2,822	2,610
تاغزوت	-0,142	-0,433	بودربالة	-0,833	-0,520
بشلول	-0,446	-0,221	بئر أغبالو	-0,576	-0,662
العجيبة	0,207	-0,408	الروراوة	-0,792	-0,597
أهل القصر	-0,231	-0,285	عين بسام	1,148	3,497
الأسنام	0,659	0,226	عين العلوي	-0,246	0,912
مشدالة	-0,121	-0,262	عين الحجر	-0,596	0,043
صهاريج	-0,833	-0,520	سوق الخميس	-0,808	3,202
الشرفة	-0,604	0,511	الهاشمية	-1,080	0,606
أغبالو	-0,187	-0,714	سور الغزلان	0,069	-1,739
أحنيف	-0,658	-0,508	ريدان	-1,080	0,606
قادرية	-0,677	-0,081	المعمورة	-1,043	0,037
عمر	-0,833	-0,520	ديرة	-0,856	-0,586

المصدر: مخرجات برنامج *"xlstat"*

ومن خلالها قمنا برسم التمثيل البياني لنقاط المتغيرات والذي كان على الشكل التالي:

الشكل رقم (03): التمثيل البياني لنقاط المتغيرات.

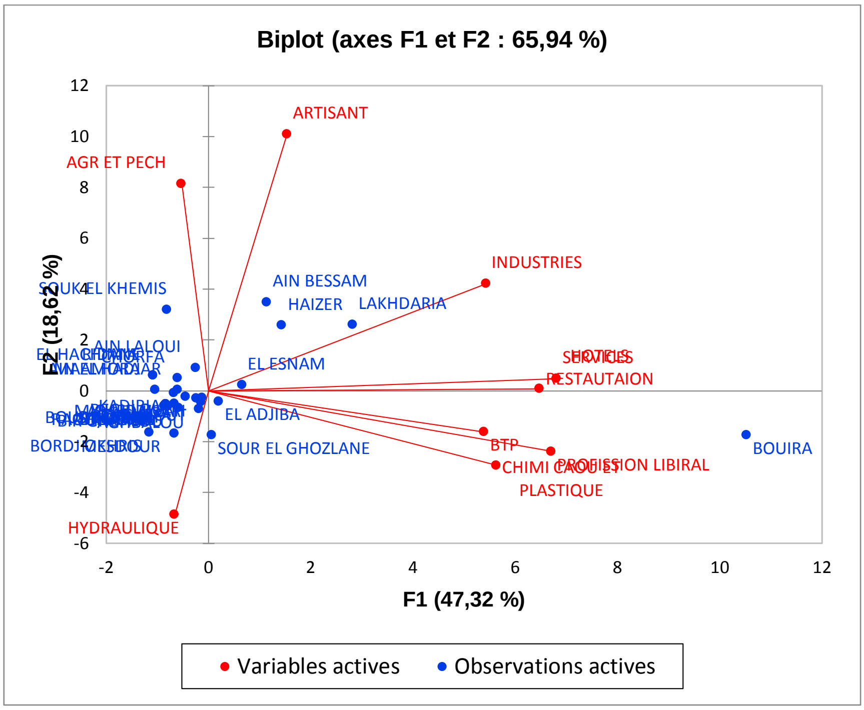


المصدر: مخرجات برنامج *"xlstat"*

من خلال الشكل رقم (03) يمكننا تحديد ثلاثة مجموعات حيث تساهم المجموعة الأولى (بلدية البويرة) في تكوين المحور العاملي الأول F_1 بنسبة (81,365%)، أما المجموعة الثانية (بلدية حيزر، بلدية الأخضرية، بلدية عين بسام، بلدية سوق الخميس) فتساهم في تكوين المحور العاملي الثاني F_2 بنسبة (12,385%، 12,700%، 22,809%، 19,119%) على التوالي وذلك ما تؤكده قيم (cos^2)، فالمجموعة الأولى (بلدية البويرة) والتي تأخذ القيم (0,961) تمثل بشكل جيد المحور العاملي الأول F_1 لأن قيمتها تقترب من الواحد، أما المجموعة الثالثة فهي تشمل باقي الدوائر والتي تشاهم في تشكيل باقي المحاور العاملية.

5. التمثيل البياني للمتغيرات والأفراد على المستوى الأول.

الشكل رقم (04): التمثيل البياني للمتغيرات والأفراد على المستوى الأول.



المصدر: مخرجات برنامج *"xlstat"*

من خلال الشكل رقم (04) والنتائج السابقة يمكن القول أن جل المشاريع الممولة من طرف الوكالة لسنة 2016 في قطاع الصناعة، قطاع الخدمات، قطاع الفندقة، قطاع الأشغال العمومية، قطاع الصناعات البلاستكية وقطاع الأعمال الحرة تتركز بشكل أساسي في بلدية البويرة، أما بالنسبة للمشاريع الممولة من طرف الوكالة في بلدية الأخضرية، بلدية عين بسام، بلدية حيزر وبلدية الأسنام فهي تتركز في ثلاثة قطاع يأتي قطاع الصناعة في الدرجة الأولى حيث يتركز في بلدية الأخضرية بالإضافة إلى كل من قطاع الحرف اليدوية وقطاع البناء والري والذي يتركز في باقي البلديات (الأسنام، عين بسام وحيزر)، أما المشاريع الممولة في قطاع الفلاحة فهي تتركز بدرجة أكبر فهي كل من بلدية سوق الخميس، بلدية عين العلوي، بلدية العجيبة وبلدية الهاشمية...الخ، في حين أن قطاع البناء والري فهو يتركز في باقي بلديات الولاية من بينها بلدية سور الغزلان وبلدية برج أخريص.........الخ، ومنه يمكن القول أن المشاريع الممولة من طرفة الوكالة حسب الدوائر تتركز وفق ستة مجموعات

- **المجموعة الألى:** وهي تتشكل من بلدية البويرة حيث تتميز بقطاع خدماتي وفندقي جيد باعتبارها عاصمة الولاية وهو ما يساهم في تشجيع الاستثمار في هذا القطاع على مستوى بلدية البويرة؛

- **المجموعة الثانية**: تتشكل من بلدية الأخضرية والتي تميزت بطابع صناعي من خلال المشاريع الممولة من طرف الوكالة على مستوى هذه البلدية؛
- المجموعة الثالثة: وهي تتشكل من بلدية الأسنام والتي تتمحور جل النشاطات الممولة بها من طرف الوكالة في قطاعي الحرف اليدوية والبناء والري؛
- **المجموعة الرابعة**: وهي تتشكل من بلدية عين بسام وبلدية حيزر وهي تشترك في قطاع الحرف اليدوية والذي يساهم بشكل كبير في تعزيز الجانب السياحي لولاية البويرة ككل
- **المجموعة الخامسة**: وهي البلديات التي تشترك في المشاريع الممولة في القطاع الفلاحي حيث نجد كل من بلدية سوق الخميس وبلدية عين العلوي التابعة لدائرة عين بسام والتي تتميز بتربعها على أراض فلاحية من سهل حمزة، ويتميز هذا السهل بخصوبته وامتداد أراضيه، وتزرع فيه محاصيل مهمة كالحبوب (القمح والشعير)، والخضروات وعلى رأسها البطاطا، كما نجد أيضا بلدية الهاشمية، بلدية الشرفة وبلدية العجيبة والتي تتميز أيضا بطابعها الفلاحي وذلك من خلال مجموعة من النشطات الفلاحية على غرار تربية الدواجن والمواشي وبعض المحاصيل الزراعية المهمة كالحبوب والفواكه؛
- **المجموعة السادسة**: وهي تتشكل من باقي الدوائر وهي تشترك في كون أن نسبة التمويل فيها ضعيفة ومتركز على قطاع البناء والري.

مراجع المحور الرابع

- Jolliffe, I.T. (2002). Principal Component Analysis. Springer-Verlag New York, Inc.
- Abdi, H. and Williams, L.J. (2010). Principal Component Analysis. Wiley Interdisciplinary Reviews: Computational Statistics, 2(4), 433-459.
- Pearson, K. (1901). On Lines and Planes of Closest Fit to Systems of Points in Space. Philosophical Magazine, 2(11), 559-572.
- Jackson, J.E. (1991). A User's Guide to Principal Components. Wiley-Interscience.
- Rencher, A.C. (2002). Methods of Multivariate Analysis. John Wiley & Sons.
- Shlens, J. (2014). A Tutorial on Principal Component Analysis. arXiv preprint arXiv:1404.1100.