

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية  
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur  
et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -

X•⊙V•εX •K||ε □:κ:|A :||κ•X - X:ΦεO:ε -



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي  
جامعة أكلي محند أولحاج  
- البويرة -

Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées

كلية العلوم والعلوم التطبيقية

## Département de Génie Civil

### Polycopie de cours

En : Hydraulique

Spécialité : Hydraulique

Niveau : Licence

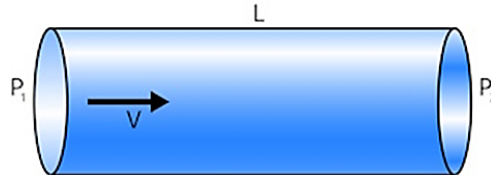


---

# Statique et dynamique des fluides

---

Par : MERIDJA Madani



Année 2023-2024

## ***AVANT-PROPOS***

L'hydraulique est une science qui étudie les lois de l'équilibre et du mouvement des fluides et fournit des méthodes d'applications de ces lois afin de résoudre divers problèmes pratiques de l'ingénierie.

L'hydraulique est divisée en deux parties : l'hydrostatique et l'hydrodynamique. L'hydrostatique étudie les propriétés physiques des liquides, les lois d'équilibre des fluides et leurs interactions avec les solides. La dynamique des fluides étudie les lois du mouvement des fluides et leurs interactions avec les solides. L'hydraulique moderne est basée sur les concepts théoriques de la mécanique des fluides classique, dans lesquels les lois de la mécanique des fluides sont étudiées de manière strictement mathématique conformément aux lois physiques générales de conservation de la matière et de l'énergie et à l'application des principes de base de la théorie mécanique. Son étude est nécessaire pour la bonne compréhension des principes de calcul et conception de canalisations, de machines hydrauliques, installations de production de chaleur, thermodynamique, systèmes de ventilation, etc.

Ce présent polycopié de cours sur l'hydraulique est destiné plus particulièrement aux étudiants de cycle LMD (Licence) en Hydraulique. Il s'inscrit dans les programmes de formation et de préparation de l'étudiant à réaliser ses projets de cours et aux mémoires de fin de cycles. Il comprend quatre chapitres, chaque chapitre fournit des informations théoriques et des exemples typiques de résolution de problèmes. Le choix des exercices couvre les propriétés physiques des fluides, l'hydrostatique des fluides, et la dynamique des fluides dans les conduites sous pression.

## **LISTE DES FIGURES**

Figure I.1	Profil de vitesse dans un écoulement de fluide visqueux	<b>04</b>
Figure II.1	Action des forces de masses	<b>11</b>
Figure II.2	Schéma de détermination de pression	<b>13</b>
Figure II.3	Schéma explicatif de l'équation d'équilibre du liquide	<b>14</b>
Figure II.4	Représentation graphique de l'équation fondamentale de l'hydrostatique.	<b>17</b>
Figure II.5	Schéma explicatif de différents types de pression	<b>19</b>
Figure II.6	Détermination de la pression par les manomètres	<b>20</b>
Figure II.7	Schéma explicatif du principe de Pascal	<b>21</b>
Figure II.8	Forces de pression hydrostatique sur une surface plane inclinée	<b>23</b>
Figure II.9	Forces de pression hydrostatique sur une surface plane horizontale	<b>25</b>
Figure II.10	Paradoxe hydrostatique	<b>26</b>
Figure II.11	Force de pression hydrostatique sur une surface courbe	<b>27</b>
Figure II.12	Principe d'Archimède	<b>30</b>
Figure II.13	Conditions de flottement des corps	<b>30</b>
Figure II.14	Stabilité d'un corps flottant partiellement immergé dans un liquide	<b>31</b>
Figure III.1	Lignes de courant	<b>48</b>
Figure III.2	Tube de courant	<b>48</b>
Figure III.3	Trajectoire de la particule fluide	<b>49</b>
Figure III.4	Lignes d'émission des particules	<b>49</b>
Figure III.5	Variation des masses fluide entrant et sortant d'un élément fluide	<b>50</b>
Figure III.6	Déformation de volume d'élément fluide de forme parallélépipédique	<b>52</b>
Figure IV.1	Schéma explicatif de l'équation de continuité	<b>63</b>
Figure IV.2	Variation de masse entrant et sortant d'un élément fluide	<b>65</b>
Figure IV.3	Filet liquide en écoulement permanent	<b>68</b>
Figure IV.4	Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli en écoulement permanent pour un liquide parfait.	<b>69</b>
Figure IV.5	Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli en écoulement permanent pour un liquide réel	<b>73</b>
Figure IV.6	Tube de Venturi	<b>73</b>
Figure IV.7	Tube de Pitot.	<b>74</b>
Figure IV.8	Écoulement en charge à travers un orifice	<b>74</b>
Figure IV.9	Schéma de définition de la répartition des vitesses	<b>78</b>
Figure IV.10	Répartition de vitesse en écoulement laminaire	<b>80</b>
Figure IV.11	Courbe de variation de vitesse d'un courant turbulent	<b>83</b>
Figure IV.12	Rugosité de la surface lors d'un mouvement turbulent a)Hydrauliquement lisse b) hydrauliquement rugueux	<b>83</b>
Figure IV.13	Expériences de Nikuradzé dans les conduites rugueuses	<b>84</b>
Figure IV.14	Diagramme de coefficient de frottement $\lambda$ .	<b>86</b>
Figure IV.15	Elargissement brusque de la section d'écoulement.	<b>87</b>
Figure IV.16	Elargissement brusque de la section d'écoulement.	<b>88</b>

## ***LISTE DES TABLEAUX***

Tableau I.1	Masse volumique $\rho$ et le poids spécifique (volumique) de quelques liquides	<b>02</b>
Tableau I.2	Viscosité cinématique de l'eau pour différentes températures	<b>05</b>
Tableau I.3	Valeurs de la viscosité cinématique pour certains liquides	<b>06</b>
Tableau II.1	Unités de mesures de pression.	<b>19</b>
Tableau II.2	Surfaces, Coordonnées du centre de gravité et centre de pression de quelques cas de figure.	<b>29</b>
Tableau IV.1	Récapitulatif des relations pour le calcul du coefficient de frottement $\lambda$	<b>85</b>

## ***TABLE DE MATIERES***

### ***Avant-propos***

## **Chapitre I. Propriétés des fluides**

I.1. Définition de l'hydraulique	<b>01</b>
I.2. Caractéristiques physiques et propriétés des liquides	<b>01</b>
I.2.1. Définition	<b>01</b>
I.3. Compressibilité et dilatation	<b>02</b>
I.4. Viscosité	<b>03</b>
I.5. Capillarité. Loi de Jurin	<b>06</b>
<b>Exercices avec solutions (Pages 08-10)</b>	

## **Chapitre II. la statique des fluides**

II. La statique des fluides (hydrostatique)	<b>11</b>
II.1.1. Forces agissantes sur un liquide en équilibre absolu	<b>11</b>
II.1.2. La pression hydrostatique et ses propriétés	<b>12</b>
II.1.3. L'équation de l'équilibre du liquide (équation d'Euler)	<b>14</b>
II.1.4. La surface libre, surface d'égale pression (surface isobare)	<b>16</b>
II.1.5. Equation fondamentale de l'hydrostatique	<b>16</b>
II.1.6. Types de pression	<b>18</b>
II.1.7. Hauteurs Piézométriques, hauteurs de vide	<b>19</b>
II.1.8 Principe de Pascal	<b>21</b>
II.1.9 Statique relatif des liquides (équilibre d'un liquide dans un récipient en mouvement)	<b>22</b>
II.1.10. La force de pression hydrostatique sur une surface plane	<b>22</b>
II.1.11. Centre de poussée et détermination de sa position	<b>24</b>
II.1.12. La pression d'un liquide exercée sur une surface plane horizontale	<b>25</b>
II.1.13. Force de pression sur une surface courbe	<b>26</b>

II.1.14. Principe d'Archimède. Flottement des corps	29
II.1.14.1. Équilibre d'un corps flottant partiellement immergé dans un liquide	31
Conclusion	38
➤ Exercices avec solutions (Pages 33-45)	

## **Chapitre III : Cinématique des fluides**

III.1. Définition	46
III.1.1 Description de Lagrange	46
III.1.2. Description d'Euler	47
III.1.3. Lignes de courant	48
III.1.4. Tube de courant	48
III.1.5. Trajectoire	49
III.1.6. Lignes d'émission	49
III.1.7. Écoulement permanent	50
III.2. Equation de continuité	50
III.2.1. Cas général	50
III.2.2. Analyse d'un élément fluide en mouvement	61
<b>Exercices avec solutions (Pages 58-59)</b>	

## **Chapitre IV. La dynamique des fluides dans les conduites fermées sous pression**

IV.1. Dynamique des fluides incompressibles	60
IV.2. Caractéristiques hydraulique du courant. Débit et vitesse moyenne	61
IV.3. Equation de continuité pour un filet liquide parfait incompressible	62
IV.4. Equation d'Euler du mouvement de fluide parfait	63
IV.5. L'équation de Bernoulli pour un filet liquide parfait	64
IV.6. Formulation de l'équation de Bernoulli à partir de l'énergie cinétique pour un filet liquide parfait	66
IV.6.1. Application du théorème de l'énergie cinétique	66
IV.7. Interprétation de l'équation de Bernoulli pour un écoulement permanent	67
IV.7.1. Interprétation de l'équation de Bernoulli du point de vue énergétique	68
IV.7.2. Interprétation de l'équation de Bernoulli du point de vue mécanique	68
IV.7.3. Interprétation de l'équation de Bernoulli du point de vue géométrique	69
IV.8. Equation de Bernoulli pour un filet liquide réel	69
IV.9. Equation de Bernoulli pour un courant liquide réel	70
IV.10. Application de l'équation de Bernoulli en pratique	72
IV.10.1. Tube de venturi	72
IV.10.2. Appareil de mesure de vitesse, tube de Pitot	73
IV.10.3. Cas d'un écoulement à travers un Orifice	73
IV.10.4. Résistances hydrauliques	74
IV.10.4.1. Formules générale des pertes de charge	75
IV.10.4.2. Formules pour déterminer la vitesse moyenne et le débit en écoulement uniforme du liquide	76
IV.10.4.3. Les régimes d'écoulement et le nombre de Reynolds	77
IV.10.4.3.1. Répartition des vitesses en écoulement laminaire	77
IV.10.4.3.2. Le débit et la vitesse moyenne d'écoulement dans une conduite circulaire	80
IV.10.4.3.3. La perte de charge en régime d'écoulement laminaire	81

IV.10.4.3.4. Régime turbulent	82
IV.10.4.3.5. Notions sur les conduites hydrauliquement lisses et rugueuses.	82
IV.10.5.3.6.1. Expression Générale d'une Perte de Charge Singulière	86
✚ Cas d'un élargissement brusque de la section d'écoulement	86
✚ Cas d'un rétrécissement brusque de la section d'écoulement	87
✚ Autres pertes de charge singulières :	88
IV.11. Coefficient de résistance du système	98
➤ <b>Exercices avec solutions (Pages 90-101)</b>	
Références bibliographiques	102

# Chapitre I. Propriétés des fluides

## I.1. Définition de l'hydraulique

L'hydraulique est une science qui étudie les lois de l'équilibre et du mouvement des fluides et fournit des méthodes d'applications de ces lois afin de résoudre divers problèmes pratiques de l'ingénierie.

Le mot "hydraulique" vient d'une combinaison de deux mots grecs "ὑδωρ" (hudor) – eau et "αὐλός" (aulos) – tuyau.

L'émergence de l'hydraulique ancienne en tant que science s'explique par la nécessité pratique de combiner règles et expérience afin de guider l'eau par les conduites, c'est-à-dire le calcul et la construction des conduites d'eau. Aujourd'hui, le spectre des phénomènes couverts par l'hydraulique est extrêmement large.

L'hydraulique est divisée en deux parties : l'hydrostatique et l'hydrodynamique. L'hydrostatique étudie les propriétés physiques des liquides, les lois d'équilibre des fluides et leurs interactions avec les solides. La dynamique des fluides étudie les lois du mouvement des fluides et leurs interactions avec les solides. L'hydraulique moderne est basée sur les concepts théoriques de la mécanique des fluides classique, dans lesquels les lois de la mécanique des fluides sont étudiées de manière strictement mathématique conformément aux lois physiques générales de conservation de la matière et de l'énergie et à l'application des principes de base de la théorie mécanique.

## I.2. Caractéristiques physiques et propriétés des fluides

### I.2.1. Définition.

On appelle fluide à l'échelle macroscopique, un milieu matériel continu qui est déformable (il prend la forme du récipient qui le contient), sans forme propre et qui peut s'écouler. Les fluides regroupent les liquides les gaz et les plasmas.

Le volume des liquides change peu à la variation de la température et de la pression (les liquides sont très peu compressibles). Par contre le volume des gaz change d'une manière distinguée à la variation de la température et de la pression (les gaz sont compressibles).

Les liquides n'occupent pas tout l'espace d'une capacité comme le font les gaz. Ils peuvent avoir une surface libre avec un milieu gazeux. Ils sont peu compressibles et prennent les formes des récipients qui les contiennent.

La masse volumique d'un liquide  $\rho$  est le rapport de la masse du liquide  $M$  à son volume  $V$ .

$$\rho = \frac{M}{V} \quad (\text{I.1})$$

$\rho$  s'exprime en  $\text{kg}/\text{m}^3$ ,  $V$  volume en  $\text{m}^3$ ,  $M$  la masse en kg.

Le liquide est dit homogène si sa masse volumique est la même sur tous les points. Le poids spécifique (volumique) d'un liquide homogène est le rapport dû à la masse du liquide à son volume :

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{M_g}{V} = \frac{\rho \times V_g}{V} = \rho \times g \quad (\text{I.2})$$

$\gamma$  - s'exprimes-en N/m<sup>3</sup>

**Tableau I.1** : La masse volumique  $\rho$  et le poids spécifique (volumique) de quelques liquides

Liquide	$t, ^\circ \text{C}$	$\rho, \text{Kg/m}^3$	$\gamma, \text{KN/m}^3$
Eau	0	999,87	9,80
	4	1000,00	9,80
	20	998,23	9,78
	50	988,07	9,68
Eau de mer	15	1020...1030	10,0...10,10
Acétone	15	790	7,74
Essence	15	680...740	6,66...7,25
Glycérine	20	1260	12,23
Kérosène	15	790...820	7,74...8,04
Huile de broche	20	889	8,71
Huile de machine	20	898	8,90
pétrole	15	700...900	6,86...8,82
Mercure	0	13596	133,33
Térébenthine	18	870	8,53

La densité ( $d$ ) du liquide est le rapport entre la masse volumique du liquide considéré et la masse volumique de l'eau pris en référence dans les mêmes conditions de température et de pression. La densité n'a pas d'unité de mesure.

$$d = \frac{\rho_{\text{liquide}}}{\rho_{\text{eau}}} \quad (\text{I.3})$$

### I.3. Compressibilité et dilatation

La compressibilité est la variation du volume d'un fluide sous l'action de pressions extérieures. L'une des principales propriétés d'un fluide idéal est leur incompressibilité complète. Les liquides réels sont pratiquement compressibles. Sous l'effet de forces externes, les liquides réels sont comprimés de manière insignifiante, par exemple, la densité de l'eau n'augmente que de 5% lorsque la pression augmente de 100 MPa.

La compressibilité du liquide est caractérisée par le coefficient de compression volumique  $\beta_c$  :



$$\beta_c = -\frac{dV}{V dp} = -\frac{1}{dp} \times \frac{dV}{V} \quad (\text{I.4})$$

Où  $V$  = le volume initial du liquide à la pression atmosphérique,  
 $dV$  = la diminution du volume du liquide à l'augmentation de la pression.  
 $\beta_c$  s'exprime en  $\text{m/N}^2$

**N.B** : Le signe (-) dans la formule (4) est dû au fait qu'une augmentation positive de la pression  $dP$  correspond à une diminution du volume du liquide.

L'eau à  $0^\circ\text{C}$  avec une augmentation de pression de 1 atmosphère ( $10^5 \text{ Pa}$ ) est comprimée de 1/21000 de son volume d'origine, c'est-à-dire son coefficient de compression volumique est très faible et égal à  $\beta_c = 1/21000 \text{ [cm}^2/\text{kg]}$ .

L'inverse du coefficient de compression volumique est appelé module d'élasticité volumique du liquide  $k \text{ (kg/cm}^2)$  et est défini comme suit :

$$k = \frac{1}{\beta_c} \quad (\text{I.5})$$

Lors de la résolution de problèmes pratiques impliquant l'eau comme milieu liquide, l'eau peut être considérée comme un milieu pratiquement incompressible avec de faibles variations de pression.

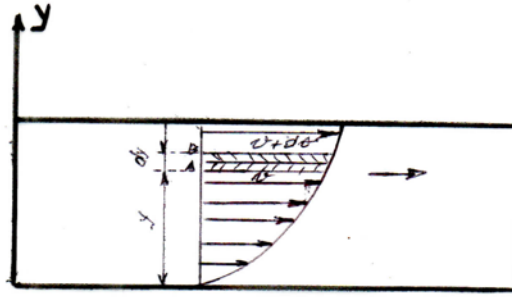
La dilatation du volume d'un corps due à une augmentation de la température est caractérisée par le coefficient de dilatation thermique  $\beta_t$  qui exprime l'augmentation du volume du liquide  $V$  lorsque sa température augmente de  $1^\circ \text{ C}$ .

$$\beta_t = \frac{1}{V} \times \frac{dV}{dT} \quad (\text{I.6})$$

#### **I.4. Viscosité**

La viscosité des liquides est la propriété de résister aux efforts tangentiels qui tendent à faire déplacer les couches du liquide les unes par rapport aux autres.

Soit un fluide qui s'écoule en couches le long de la paroi plane (Figure I.1). En raison de la contrainte exercée sur la paroi, la couche de fluide se déplacera à différentes vitesses, dont la valeur augmente avec l'éloignement de la paroi.



**Figure I.1.** Profil de vitesse dans un écoulement de fluide visqueux

Considérons deux couches se déplaçant d'une distance l'une de l'autre de  $\Delta n$ . En raison de la différence de vitesse, la couche B est décalée d'une valeur de vitesse  $dv$  par unité de temps par rapport à la couche A. La valeur  $dv$  est le cisaillement absolu de la couche B le long de la couche A, et  $\frac{dv}{dn}$  est le gradient de vitesse (cisaillement relatif ou vitesse de déformation).

Soit  $\tau$  la contrainte tangentielle générée lors de ce mouvement. La relation entre la contrainte de cisaillement et la vitesse de déformation s'écrit de manière similaire au phénomène de cisaillement dans les solides :

$$\tau = \mu \times \frac{dv}{dn} \quad (I.7)$$

Lorsque les couches sont infiniment proches, la loi de frottement visqueux de Newton est obtenue :

$$\tau = \pm \mu \times \frac{dv}{dn} \quad (I.8)$$

La grandeur  $\mu$ , qui caractérise la résistance du fluide au cisaillement tangentiel est appelée viscosité dynamique. Selon le choix de la direction considérée dans laquelle est mesurée la distance le long de la normale à partir de la paroi de la canalisation considérée ou de son axe, le gradient de vitesse peut être positif ou négatif.

Le signe  $\frac{dv}{dn}$  dans la formule (I.8) est pris de telle manière, que la contrainte de cisaillement soit positive.

La force de frottement interne d'un liquide est directement proportionnelle à la viscosité dynamique, à la surface des couches en frottement et au gradient de vitesse.

$$F = \tau \times s = \mu \times \frac{dv}{dn} \times s \quad (I.9)$$

Dans le système SI, la viscosité dynamique a pour unité de mesure  $\left(\frac{N \times s}{m^2}\right)$ . Dans le système CGS, l'unité de mesure de la viscosité dynamique est le poise ( $P_o$ ) = g/cm.s. Par conséquent  $1 \frac{N \times s}{m^2} = 10 \text{ poises}$  ou  $p_o = 0.1 \frac{N \times s}{m^2}$ .

L'unité de mesure de la viscosité cinématique  $\nu$  couramment utilisée dans les calculs est le  $m^2/s$ .

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \tag{I.10}$$

Ce coefficient a reçu le nom de "cinématique" en raison du fait que sa dimension contient uniquement des unités de mesure de paramètres cinématiques et n'inclut pas d'unités de mesure de force. Dans le système SI, la viscosité cinématique est mesurée en ( $m^2/s$ ), dans le système CGS, en  $cm^2/s$  ou stokes (St). Une valeur 100 fois plus petite que Stokes est appelée centistokes. Un centième de Stokes s'appelle un centistoke.

La viscosité d'un liquide dépend fortement de la température et diminue à mesure que la température augmente, en revanche, la viscosité du gaz augmente. Cela peut s'expliquer par le fait que les propriétés de viscosité des liquides et des gaz sont différentes. Dans le cas des gaz, la vitesse moyenne du flux thermique et l'agitation des molécules augmentent avec l'augmentation de la température, ce qui entraîne une augmentation de la viscosité. Dans le cas des liquides, les molécules ne peuvent osciller qu'autour de leurs positions intermédiaires. Lorsque la température augmente, la vitesse du mouvement vibratoire des molécules augmente. En conséquence, les liaisons qui les maintiennent ensemble peuvent être surmontées plus facilement, rendant le liquide plus fluide et moins visqueux.

La viscosité cinématique de l'eau à la pression atmosphérique est calculée par la formule de Poiseuille :

$$\nu = \frac{0.0178}{1 + 0.0337t + 0.000221t^2} \tag{I.11}$$

Où,

$t$  = est la température, °C.

**Tableau I.2 :** La viscosité cinématique de l'eau pour différentes températures

$t, ^\circ C$	$\nu, 10^{-4} m^2/s$	$t, ^\circ C$	$\nu, 10^{-4} m^2/s$	$t, ^\circ C$	$\nu, 10^{-4} m^2/s$	$t, ^\circ C$	$\nu, 10^{-4} m^2/s$	$t, ^\circ C$	$\nu, 10^{-4} m^2/s$	$t, ^\circ C$	$\nu, 10^{-4} m^2/s$
0	0,0179	6	0,0147	12	0,0124	18	0,0106	30	0,0080	45	0,0060
2	0,0167	8	0,0139	14	0,0118	20	0,0101	35	0,0072	50	0,0055
4	0,0157	10	0,0131	16	0,0112	25	0,0090	40	0,0065	60	0,0048

**Tableau I.3** : valeurs de la viscosité cinématique pour certains liquides

Fluides	t, °C	$\nu, 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$	Fluides	t, °C	$\nu, 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$
Lait entier	20	0,0174	Glycérine	20	11,80
L'air	0	0,133			
Kérosène	15	0,027	Pétrole léger	18	0,25
Mazout	18	20	Pétrole brut	18	1,4
			Acier liquide	1550	0,0037
Huile pour les systèmes hydrauliques	50	0,1	Mercure	15	0,0011

En mécanique des fluides, pour faciliter la résolution de certains problèmes, le concept de fluide idéal (parfait) est utilisé. Un liquide parfait est un liquide imaginaire avec une mobilité absolue des particules dépourvu de viscosité, absolument incapable de résister à la rupture. Par conséquent, un fluide parfait est un modèle d'un fluide réel. Les conclusions tirées des propriétés d'un fluide parfait doivent en règle générale, être corrigées en introduisant des facteurs de correction.

Les liquides pour lesquels la loi de frottement interne de Newton est valide (I.9) sont appelés newtoniens. Cependant, il existe d'autres liquides, par exemples les produits pétroliers, les huiles de graissage à basse température, suspensions colloïdales, boues argileuses, sont caractérisés par des forces de frottements même en état d'équilibre. La relation entre la contrainte de cisaillement  $\tau$  et le gradient vitesse est exprimé par une relation différente.

$$\tau = \tau_0 \pm \mu \times \frac{dv}{dn} \quad (\text{I.12})$$

Le mouvement des liquides non newtoniens ne commence qu'après que le milieu extérieur surmonte la contrainte de cisaillement initiale  $\tau_0$ . Ainsi, les fluides non newtoniens se différencient des fluides newtoniens par la présence d'une contrainte de cisaillement au repos  $\tau_0$ .

### I.5. Capillarité : Loi de Jurin

Le phénomène de variation de la hauteur du niveau de liquide dans les tubes par rapport au niveau de liquide dans un récipient large, sont appelés phénomènes capillaires

Lorsqu'un tube est plongé dans un liquide qui devrais, soit monté dans le tube (cas d'un liquide mouillant), soit se trouver à un niveau plus bas (cas d'un liquide non mouillant). Les forces de tensions superficielles  $F$  sont directement responsables de ce phénomène, et la hauteur  $h$ , à laquelle le liquide se stabilise, est le résultat d'un équilibre entre la force de pesanteur et les forces de tensions superficielles.

Équilibre  $F = 2\pi \times r \times \rho g \times \cos \theta$  ,  $P = mg = \pi \times r^2 \times h \times \rho g$

Le poids de la colonne du liquide dans le tube  $P = mg = \pi \times r^2 \times h \times \rho g$

La force de tension superficielle  $F = 2 \times \pi \times r \times \sigma \times \cos \theta$

$$h = \frac{2 \times \sigma \times \cos \theta}{r \times \rho g} \quad (\text{Loi de Jurin}) \quad (\text{I.13})$$

$r$  – Rayon intérieur du tube ;  $\rho$  – masse volumique du liquide ;  $g$  – l'accélération de la pesanteur ;  
 $\sigma$  – de tension superficielle du liquide ;  $\theta$  – Angle de raccordement liquide/solide.

Les phénomènes capillaires sont très fréquents, en particulier, la remontée de l'eau dans le sol, le long du système racinaire des plantes, mouvement des fluides biologiques à travers le système de petits vaisseaux et tubules et de nombreux autres phénomènes.

## Exercices avec solutions-Partie propriétés des fluides

### **Exercice N°1.**

Déterminer le volume d'eau supplémentaire nécessaire à alimenter la conduite  $d = 500$  mm et longueur

$L = 1$  km pour augmenter la pression jusqu'à  $\Delta P = 5 \cdot 10^6 Pa$ . La conduite d'eau est préparée pour les tests hydrauliques et remplie d'eau à pression atmosphérique. La déformation de la conduite est négligeable.

#### **Solution :**

Le volume de la conduite :  $V = \frac{\pi d^2}{4} \times L = \frac{3.14 \times 0.5^2}{4} \times 10^3 = 196.2 m^3$

Le volume d'eau  $\Delta V$  supplémentaire nécessaire à alimenter la conduite :

$$\beta_c = \frac{\Delta V}{V \times \Delta P} \times L = \frac{\Delta V}{(V + \Delta V) \Delta P} =$$

A partir du tableau (1'annexe)  $\beta_c = 5 \cdot 10^{-10} \frac{m^2}{N} = \frac{1}{2} \cdot 10^9 Pa^{-1}$

Alors : 
$$\Delta V = \frac{V \cdot \beta_c \cdot \Delta P}{1 - \beta_c \cdot \Delta P} = \frac{196.2 \times 10^6}{2 \cdot 10^9 \left( 1 - \frac{5 \cdot 10^6}{2 \cdot 10^9} \right)} = 0.493 m^3$$

### **Exercice N°2.**

Dans le système de chauffage (chaudière, radiateurs et canalisations) d'une petite maison contient  $V = 0,4$  m<sup>3</sup> eau. Quelle quantité d'eau supplémentaire entrera dans le vase d'expansion lorsque la température passe de 20° à 90°C.

#### **Solution**

La masse volumique de l'eau pour une température de 20° = 998 kg/m<sup>3</sup>, la masse de l'eau

$m = 0.4 \times 998 = 399 kg$ . La masse volumique de l'eau pour une température de 90° = 965

kg/m<sup>3</sup>, le volume de l'eau :  $V_2 = \frac{m}{\rho_{90^\circ}} = \frac{399}{965} \approx 0.414 m^3$

Le volume supplémentaire :

$$\Delta V = V_2 - V_1 = 0.414 - 0.4 = 0.014 m^3$$

**Exercice N°3.**

Déterminer la variation de la masse volumique de l'eau sous l'effet de sa compression à partir de  $P_1 = 1.110^5 \text{ Pa}$  à  $P_2 = 1.110^7 \text{ Pa}$ .

**Solution**

A partir du tableau (N2 Annexe) on prend le coefficient de compression volumique  $\beta_c = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}$

La masse volumique de l'eau  $\rho = \frac{M}{V}$ . Lors de la compression de l'eau, son volume  $V$  varie de  $\Delta V$

$$\frac{\Delta V}{V} = \beta_c \times \Delta P$$

Ou,  $\Delta P = P_2 - P_1 = 1.1 \times 10^5 - 1.1 \times 10^7 = -0.99 \times 10^7$

La masse de l'eau reste constante :

$$n = \frac{\rho_{p2}}{\rho_{p1}} = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_1}{\left(1 + \frac{\Delta V}{V_1}\right) \times V_1} = \frac{1}{1 + \frac{\Delta V}{V_1}} = \frac{1}{1 + \beta_c \times \Delta P} = \frac{1}{1 - 5 \times 10^{-10} \times 0.99 \times 10^7} = 1.00 \text{ fois}$$

**Exercice N°4**

Le récipient est rempli d'eau occupant un volume  $V = 2 \text{ m}^3$ . De combien ce volume diminuera-t-il et à quoi sera-t-il égal lorsque la pression augmentera de 200 bar à une température de 20 °C ? Le module de compressibilité de l'eau à la température donnée est  $E_0 = 2110 \text{ MPa}$ .

**Solution**

La variation du volume du liquide est déterminée par la formule :

$$\Delta V = -\beta_c \times \Delta P \times V$$

Le coefficient de compression volumique :

$$\beta_c = \frac{1}{E_0} = \frac{1}{2110 \times 10^6} = 4.74 \times 10^{-10} \frac{1}{\text{pa}}$$

L'augmentation de la pression :

$$\Delta P = 200 \text{ bar} = 20 \times 10^6 \text{ Pa}$$

Alors :

$$\Delta V = 4.74 \times 10^{-10} \times 2.20 \times 10^6 = 0.019 \text{ m}^3$$

Le volume final recherché :

$$V_F = V - \Delta V = 2 - 0.019 = 1.981 \text{ m}^3$$

**Exercice N°5**

Calculer la hauteur de l'ascension capillaire de l'eau et la descente du mercure à  $20^\circ$  dans un tube capillaire de diamètre  $d = 1 \text{ mm}$ . La tension superficielle  $\sigma$  de l'eau à  $20^\circ$  vaut  $0,0726 \text{ N/m}$ , sa masse volumique  $\rho$  est de  $998,2 \text{ kg/m}^3$ ; Celle du mercure  $\sigma_{Hg} = 0,49 \text{ N/m}$  et de masse volumique  $\rho_{Hg} = 13550 \text{ kg/m}^3$ .

**Solution :**

$$\text{L'ascension capillaire de l'eau : } h = \frac{2 \times \sigma \times \cos \theta}{r \times \rho g} = \frac{4 \times \sigma \times \cos \theta}{\rho \times g \times d} = \frac{4 \times 0,0726 \times 1}{998,2 \times 9,81 \times 0,001} = 0,0297 \text{ m ; } \theta = 0 \text{ pour l'eau.}$$

$$\text{La descente capillaire du mercure : } h = \frac{4 \sigma_{Hg} \cos \theta}{\rho_{Hg} g d} = \frac{4 \cdot 0,49 \cdot 0,643}{13550 \cdot 9,81 \cdot 0,001} = 0,0095 \text{ m}$$

Pour le mercure à  $20^\circ$   $\theta = 50^\circ$



## II. La statique des fluides (hydrostatique)

On appelle hydrostatique une branche de l'hydraulique qui s'occupe de l'équilibre du liquide et son interaction avec les corps solides.

### II.1.1. Forces agissantes sur un liquide en équilibre absolu

N'importe quel corps liquide de volume donné se trouvant en équilibre absolu, lorsque ses particules ne se déplacent pas les unes par rapport aux autres, est soumis à l'action des forces de volume (pesanteur) qui s'exercent sur tous les points du corps liquide de volume donné, et les forces de surface (pression) qui agissent seulement sur la surface du corps liquide.

Examinons séparément chacune de ces deux groupes de force :

Par la nature de l'action, Les forces de surface peuvent être tangentielles et normales à la surface considérée. Les forces tangentielles ne sont que les forces de résistance visqueuse, qui, comme mentionné ci-dessus, n'apparaissent que dans un fluide en mouvement. Par conséquent, seules les forces normales peuvent exister dans un fluide au repos. Les forces normales peuvent être de compression ou de traction. Comme les fluides réels ne résistent pas aux forces de traction, ils ne peuvent exister ni dans un fluide au repos ni dans un fluide en mouvement. Par conséquent, les forces normales dans un fluide sont toujours compressives, c'est-à-dire sont dirigés normalement vers la surface considérée à l'intérieur du volume sélectionné.

Les forces de masse agissant sur un fluide peuvent être la gravité, l'inertie, en particulier la force centrifuge.

Selon la deuxième loi de Newton, la force d'inertie peut avoir n'importe quelle direction dans l'espace et est égale à :  $F_m = m \times a$

Où  $m$  est la masse du liquide ;  $a$  est l'accélération transmise sur cette masse par la force  $F_m$ .

En développant la force  $F_m$  le long des axes de coordonnées  $x, y, z$ , on obtient :

$$F_{mx} = m \times a_x ; F_{my} = m \times a_y ; F_{mz} = m \times a_z \quad (\text{II.1})$$

Où :  $a_x, a_y$  et  $a_z$  sont les composantes d'accélération le long des axes de coordonnées.

Désignons par  $F$  la force de masse agissant sur une masse unitaire (c'est-à-dire  $m = 1$ ) et dénotons ses projections sur les axes de coordonnées  $X, Y, Z$ , respectivement.

Alors l'équation existante peut être écrite comme suit :

$$X = a_x ; Y = a_y ; Z = a_z \quad (\text{II.2})$$

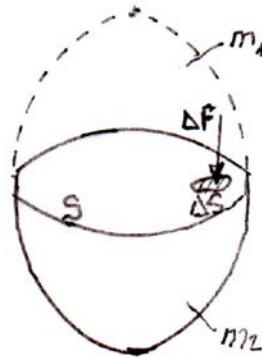
Alors la projection de la force de masse unitaire le long des axes de coordonnées est égale à la projection de l'accélération exercée par cette force sur le même axe.

Dans le cas où seule la gravité agit sur le liquide à partir des forces de masse, créant une accélération  $g$  dirigée vers le bas, et en considérant l'axe positif  $z$  dirigé vers le haut, on obtient :

$$X = 0; Y = 0; Z = -g \quad (\text{II.3})$$

### II.1.2. La pression hydrostatique et ses propriétés

Découpons un certain volume donné de liquide se trouvant au repos et en équilibre en deux parties contenant respectivement les masses  $m_1$  et  $m_2$ , et on supprime l'une d'entre elles (par exemple, celle du haut), et la partie du bas se retrouve en déséquilibre et se déplace vers le haut. Pour maintenir l'équilibre de la masse  $m_2$  restante, il est nécessaire de lui appliquer une force équivalente à l'action de la masse rejetée  $m_1$ , et cette force sera uniformément répartie sur la section transversale  $S$ . La section transversale  $S$  peut être représentée comme constituée du  $n$ -ième nombre de zones élémentaires  $\Delta S$ , à chacune desquelles une force  $\Delta F$ , équivalente à la masse supprimée  $m_1$ , agissant normalement à la surface (voir figure II.1).



**Figure II.1** : Action des forces de masse

La pression moyenne hydrostatique  $P_{moy}$  exercée par la force  $\Delta F$  sur la surface  $\Delta S$  est définie par l'expression :

$$P_{moy} = \Delta F / \Delta S \quad (\text{II.4})$$

En réduisant la dimension de la surface  $\Delta S$  et en passant à la limite lorsque la valeur  $\Delta S$  tend vers zéro, on obtient la valeur de la pression hydrostatique au point donné du liquide :

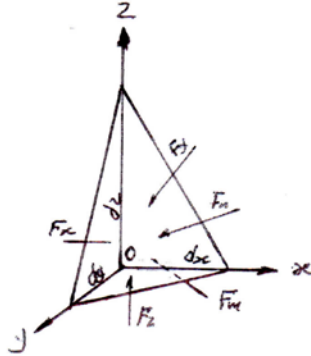
$$p = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta S} \quad (\text{II.5})$$

La pression hydrostatique est la contrainte qui se produit dans un liquide à la suite de forces de compression.

Dans le système SI l'unité de mesure de la pression est un Pascal (Pa).

- ✚ La première propriété de pression hydrostatique est toujours dirigée suivant la normale intérieure vers la surface d'action.
- ✚ La deuxième propriété de la pression hydrostatique en un point donné, est que sa valeur est la même dans toutes les directions.

Examinons un tétraèdre de cotes  $dx, dy, dz$  parallèles à l'axe des coordonnées. Sur le tétraèdre agissent les forces de surfaces :



**Figure II.2** : Schéma de détermination de pression

$$F_x = \frac{1}{2} \times dy \times dz \times p_x; F_y = \frac{1}{2} \times dx \times dz \times p_y; F_z = \frac{1}{2} \times dx \times dy \times p_z \quad (\text{II.6})$$

$$F_n = p_n \times dF_n \times \cos(n, x)$$

La résultante des forces de masse agissantes sur le centre de gravité du tétraèdre

$$F_m = m \times a = \rho \times dV \times a = \frac{1}{6} \times \rho \times dx \times dy \times dz \times a \quad (\text{II.7})$$

$a$  = L'accélération résultante de toutes les forces de masse.

Puisque le tétraèdre est en équilibre, toutes les forces agissant sur lui s'équilibrent, et donc la somme des projections de toutes ces forces sur les axes de coordonnées doit être nulle. Considérons d'abord les projections sur l'un des axes, par exemple l'axe  $x$  :

$$\sum F_{ox} = F_x - F_n \times \cos(n, x) + F_{mx} = \sum F_{ox} = F_x - F_n \times \cos(n, x) + \frac{1}{6} \rho \times dx \times dy \times dz \times a_x = 0 \quad (\text{II.8})$$

$$F_n \times \cos(n, x) = p_n \times \frac{1}{2} \times dy \times dz$$

$$\text{Où : } \frac{1}{2} p_x \times dy \times dz + \frac{1}{6} \rho \times dx \times dy \times dz \times a_x = 0 \quad (\text{II.9})$$

Divisons l'équation par  $\frac{1}{2} \times dy \times dz$ , on obtient :

$$p_x - p_n + \frac{1}{3} \rho \times dx \times a_x = 0 \quad (\text{II.10})$$

Lorsque  $dx \rightarrow 0$ , on obtient :

$$P_x = P_n \quad (\text{II.11})$$

De la même façon on obtient les équations correspondantes aux axes OY et OZ :

$$\begin{aligned} p_x &= p_y = p_z = p_n \\ p_x &= p_y = p_z = p \end{aligned} \quad (\text{II.12})$$

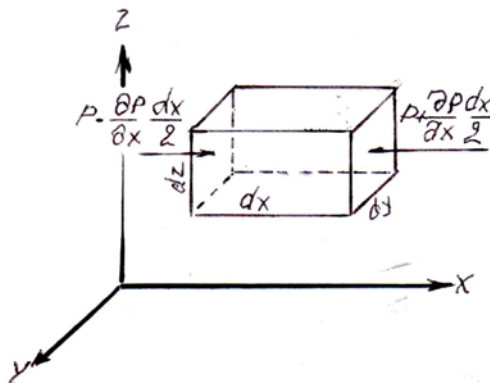
**N.B :** Par conséquent, la pression hydrostatique en point est égale dans toutes les directions.

La pression en un point donné dépend des coordonnées du point dans le volume du liquide et de sa masse volumique, c'est la troisième propriété de la pression hydrostatique.

$$P = P(x, y, z, \rho) \quad (\text{II.13})$$

### II.1.3. L'équation de l'équilibre du liquide (équation d'Euler)

Considérons un liquide se trouvant en équilibre statique, découpons un élément de ce fluide de forme parallélépipède rectangulaire de volume  $dx \cdot dy \cdot dz$  et examinons son équilibre :



**Figure II.3.** Schéma explicatif de l'équation d'équilibre du liquide

La face  $dzdy$  est soumise à la pression hydrostatique moyenne  $P_x$ , la face opposée est soumise à la pression hydrostatique  $p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} dx$ .

Où,

$$\frac{\partial p_x}{\partial x} = \text{La dérivée partielle de } P_x \text{ sur l'axe } O_x,$$

$\frac{\partial p_x}{\partial x} dx$  = l'accroissement de la pression hydrostatique moyenne  $P_x$  sur une distance  $dx$ .

En raisonnant de la même façon pour les directions Oy et Oz :

$$p_y; p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy \quad \text{et} \quad p_z; \frac{\partial p_z}{\partial z} dz$$

En plus des forces hydrostatiques, le volume élémentaire du liquide est soumis aux forces de masse. Sa résultante projetée sur l'axe Ox :  $X \times \rho \times V = X \times \rho \times dx \times dy \times dz$

L'équation de l'équilibre du liquide pour le volume élémentaire dans les directions Ox, Oy, Oz :

$$\left. \begin{aligned} p_x \times dy \times dz - \left( p_x + \frac{\partial p_x}{\partial x} \times dx \right) \times dy \times dz + \rho \times dx \times dy \times dz \times X &= 0 \\ p_y \times dx \times dz - \left( p_y + \frac{\partial p_y}{\partial y} \times dy \right) \times dx \times dz + \rho \times dx \times dy \times dz \times Y &= 0 \\ p_z \times dx \times dz - \left( p_z + \frac{\partial p_z}{\partial z} \times dz \right) \times dx \times dy + \rho \times dx \times dy \times dz \times Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.14})$$

Où :

$\rho$  = la masse volumique du liquide

Après transformation de l'équation (II.14), nous aurons :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{\partial p_x}{\partial x} + \rho \times X &= 0 \\ -\frac{\partial p_y}{\partial y} + \rho \times Y &= 0 \\ -\frac{\partial p_z}{\partial z} + \rho \times Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.15})$$

Divisons l'équation (II.15) par  $\rho$  et on aura le système d'équations suivant :

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_x}{\partial x} &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_y}{\partial y} &= 0 \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_z}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.16})$$

Le système d'équations (II.16) est la forme générale de l'équation d'équilibre liquide, qui décrit la loi de distribution de la pression hydrostatique et est appelée l'équation hydrostatique de L. Euler.

Dans le système d'équation (II.16) multiplions la première équation par  $dx$ , ensuite la deuxième et troisième équation par  $dy$  et  $dz$  respectivement :

$$\left( \frac{\partial p_x}{\partial x} \times dx + \frac{\partial p_y}{\partial y} \times dy + \frac{\partial p_z}{\partial z} \times dz \right) = \rho \times (X \times dx + Y \times dy + Z \times dz) \quad (\text{II.17})$$

L'expression entre crochets représente la différentielle totale de  $P(x, y, z)$ , et elle s'écrit de la façon suivante :  $dP = \left( \frac{\partial p_x}{\partial x} dx + \frac{\partial p_y}{\partial y} dy + \frac{\partial p_z}{\partial z} dz \right)$ , donc l'équation (II.17) peut s'écrire comme suit :

$$dP = \rho \times (X \times dx + Y \times dy + Z \times dz) \quad (\text{II.18})$$

**Conclusion** : l'équation(II.18) représente l'équation différentielle d'équilibre du liquide.

#### II.1.4. La surface libre, surface d'égale pression (surface isobare)

La surface dont tous les points sont soumis à la même pression est appelé surface d'égale pression. Il découle de l'équation (II.18) que dans un volume de liquide au repos, tous les plans horizontaux (si  $\rho = \text{const}$ ,  $z = \text{const}$ ) sont des surfaces d'égale pression.

Les plans horizontaux comprennent les surfaces d'égale température, d'égale pression, d'égale densité, etc. En mécanique des fluides, il est le plus souvent nécessaire de déterminer des surfaces d'égale pression (surface isobare).

Composant l'équation d'égale pression. Dans ce cas  $P = \text{const}$ , donc  $dp = 0$ , à partir de l'équation (II.18) on obtient l'équation différentielle d'égale pression pour le cas général :

$$X \times dx + Y \times dy + Z \times dz = 0 \quad (\text{II.19})$$

Déterminons l'équation d'égale pression dans le cas d'un liquide homogène( $\rho = \text{const}$ ) en équilibre lorsqu'il est soumis aux seules forces de gravité.

La projection des forces de masse sur les axes Ox, Oy, Oz.

$$X = 0; Y = 0; Z = -g \quad (\text{II.20})$$

En substituant dans (II.19), on aura

$$-g \times dz = 0 \quad (\text{II.21})$$

d'où  $Z = \text{const}$

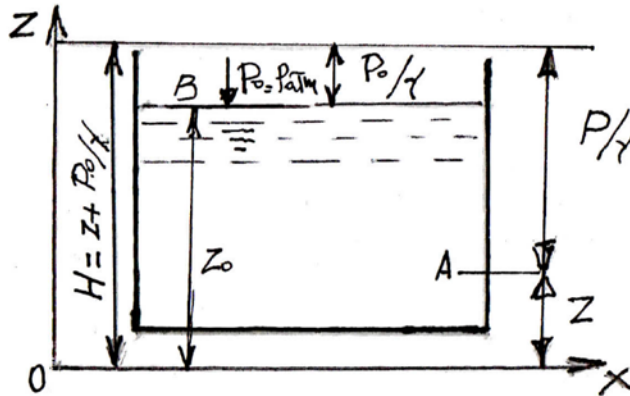
En conséquence, pour toute surface horizontale d'un liquide en équilibre, se trouvant dans un système de coordonnées absolu, la valeur de la pression est constante.

La surface du liquide en contact avec un milieu gazeux est appelée surface libre, tous ses points sont soumis à la même pression extérieure  $P_0$ .

#### II.1.5. Equation fondamentale de l'hydrostatique

Considérons un récipient plein de liquide, dont sa surface libre est soumise à la pression atmosphérique  $P_0$ . Prenons dans le volume de liquide un point arbitraire A, de coordonnée  $z$  et déterminons sa pression hydrostatique  $P$  (figure II.4). La coordonnée de la surface libre  $z_0$ .

Parmi les forces de masse qui agissent sur le liquide, la force de gravité dont l'accélération de sa pesanteur  $g$  de direction vers le bas.



**Figure II.4.** Représentation graphique de l'équation fondamentale de l'hydrostatique.

La projection de la force de gravité dans la direction X, Y, Z :

$$X = 0; Y = 0; Z = -g$$

Pour déduire l'équation fondamentale de l'hydrostatique, on applique la relation(II.18)

$$P = \rho (X. dx + Y. dy + Z. dz)$$

Qui devient :  $dP = -\rho g. dz$

Puisque :  $\rho g = \gamma,$

Alors :  $dP = -\gamma. dz$

Après intégration :

$$P = -\gamma z + C \tag{II.19}$$

Sachant qu'en surface libre :  $z = z_0 ; P = P_0$

Alors :  $P_0 = -\gamma z_0 + C \Rightarrow C = P_0 + \gamma z_0$

On remplace la valeur de C dans l'équation (II.19) et on obtient :

$$P = -\gamma z + P_0 + \gamma z_0 \tag{II.20}$$

Pour les deux points sélectionnés A, et B, l'équation (II.20) peut être écrite comme suit :

$$z + \frac{P}{\gamma} = z_0 + \frac{P_0}{\gamma} = H = const \tag{II.21}$$

Pour deux points d'un volume de liquide donnée à coordonnées  $z_1$  et  $z_2$ , on a :

$$z_1 + \frac{P_1}{\gamma} = z_2 + \frac{P_2}{\gamma} = H = \text{const} \quad (\text{II.22})$$

**Conclusion** : L'équation (II.22) exprime la répartition de la pression hydrostatique, c'est l'équation fondamentale de l'hydrostatique. La grandeur constante  $H$  est appelée charge hydrostatique.

La valeur de la pression hydrostatique en un point donné du liquide, peut être calculée par l'équation (II.20), en introduisant la profondeur d'immersion du point A par rapport à la surface libre

$$H = z_0 - z.$$

$$\begin{aligned} p &= -\gamma \times z + p_0 + \gamma \times z_0 \\ p &= p_0 + \gamma \times h \end{aligned} \quad (\text{II.23})$$

Il découle de l'équation (II.23) que la pression dans le liquide augmente avec la profondeur d'immersion, et exprime la pression hydrostatique absolue du liquide au repos.

Par conséquent, la pression d'un point d'un liquide en équilibre est égale à la somme de la pression extérieure ( $P_0$ ) agissant sur la surface libre et la pression  $\rho \times g \times h$ .

$\rho \times g \times h$  est le poids de la colonne d'eau d'une surface unitaire et la profondeur d'immersion  $h$  sous la surface libre du liquide.

### II.1.6. Types de pression

Selon le choix de la ligne de référence, la valeur numérique de la pression peut être différente. On distingue la pression absolue, la pression effective et vide (dépression). La pression absolue est la pression mesurée à partir du zéro absolu, qui est considérée comme la pression dans le vide. Sur la (Figure II.6), cette pression correspond à la ligne O-O.  $P_{abs}$  - pression absolue au point A. Comme déjà noté, il ne peut y avoir de contraintes de traction dans un liquide. Conformément à cela, on considère que la pression absolue ne peut être que positive.

Dans ce cas, si la valeur de pression est mesurée à partir de zéro (ligne a-a) qui est supposée être la pression atmosphérique, alors cette pression est appelée effective ou manométrique :

$$P_{eff} = P_{abs} - P_{atm} = \gamma \times h \quad (\text{II.26})$$

La pression effective (manométrique) est définie comme la différence entre les pressions absolue et atmosphérique.

Évidemment, la pression effective peut être positive ou négative. Sur la figure II.6, la pression effective positive correspond à la pression au point A. La pression effective sera négative lorsque la pression absolue sera inférieure à la pression atmosphérique (point B sur la figure II.6). Cette pression est appelée vacuum ou pression de vide. Le vide est le manque de pression par rapport à la pression atmosphérique.



$$P_{vide} = P_{atm} - P_{abs} ; P_{eff} = P_{abs} - P_{atm} = -\gamma \times h ; \quad (II.27) \quad (42)$$

La pression effective positive est mesurée avec un manomètre, négative (-) avec une jauge à vide.

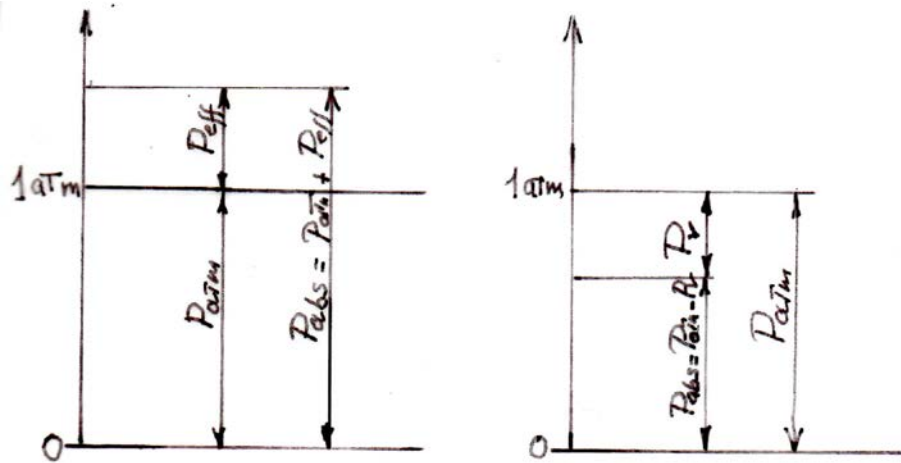


Figure II.5. Schéma explicatif de différents types de pressions

Tableau II.1 : Unités de mesures de pression.

	N/m <sup>2</sup>	bar	Kgf/cm <sup>2</sup>	Atmosphère	mm.col .Hg	mm.col.d'eau
1 N/m <sup>2</sup> (Pa)	1	10 <sup>-5</sup>	1,0197. 10 <sup>-5</sup>	0,987. 10 <sup>-5</sup>	750. 10 <sup>-5</sup>	0,10197
1bar=10 <sup>6</sup> dyne/c m <sup>2</sup>	10 <sup>5</sup>	1	1,0197	0,987	750	1,0197. 10 <sup>4</sup>
1 Kgf/cm <sup>2</sup> =1 atm (technique)	0,981. 10 <sup>5</sup>	0,981	1	0,968	735,6	10 <sup>4</sup>
1 atmosphère (physique)	1,013. 10 <sup>5</sup>	1,013	1,033	1	760	1,0332. 10 <sup>4</sup>
1mm.c .Hg	133,32	133. 10 <sup>-3</sup>	1,3595. 10 <sup>-3</sup>	1,316. 10 <sup>-3</sup>	1	13,6
1 mm .col .d'eau	9,81	9,81. 10 <sup>-5</sup>	10 <sup>-4</sup>	9,678. 10 <sup>-5</sup>	7,356. 10 <sup>-2</sup>	1

### II.1.7. Hauteurs Piézométriques, hauteurs de vide

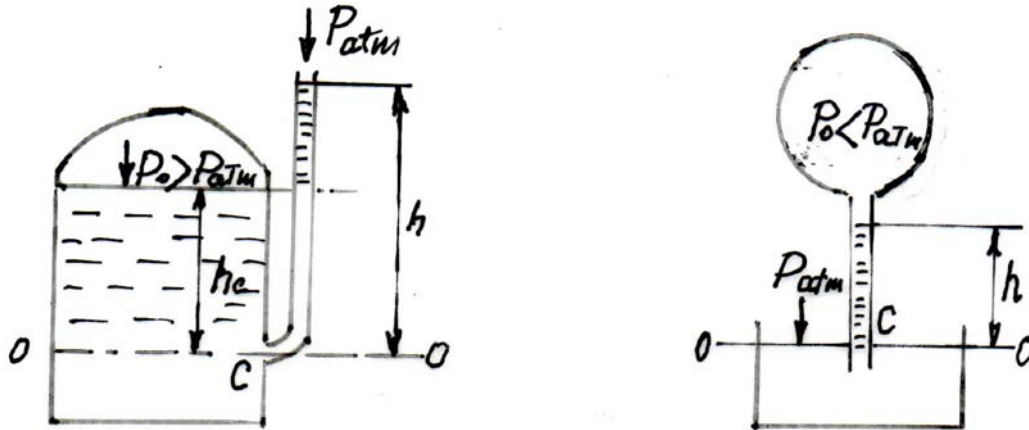
Pour représenter les hauteurs piézométriques et vides, prenons un récipient fermé rempli de liquide (Figure II.7a), muni d'un orifice au point C auquel nous attacherons un tube ouvert par le haut.

Si la pression  $P_0$  appliquée à la surface du liquide est supérieure à la pression atmosphérique, alors le liquide monte dans le tube jusqu'à une hauteur  $h$ . Le tube indiqué est appelé piézomètre et la hauteur  $h$  est appelée piézométrique.

Soit un point C située à une profondeur d'immersion  $h_c$  dans un fluide au repos et en équilibre. La pression hydrostatique au point C peut être représentée par la relation :

$$P_{abs} = P_{atm} + \gamma \times h \quad (\text{II.28})$$

$$p_{abs} = p_0 + \gamma \times h_c \quad (\text{II.29})$$



**Figure II.6.** Détermination de la pression par les manomètres

En équivalant les parties droites des équations(II.28) et (II.29) on obtient :

$$p_{atm} + \gamma \times h = p_0 + \gamma \times h_c$$

Donc :

$$h = \frac{P_0 - P_{atm}}{\gamma} + h_c \quad (\text{II.30})$$

Par conséquent, la hauteur piézométrique indique la pression effective au point où le piézomètre est fixé. Pour un piézomètre attaché à une cuve ouverte, l'équation (II.30) est simplifiée :

$$h_c = h$$

Si,  $P_0 < P_{atm}$  : on aura alors l'équation suivante :

$$h_v = \frac{P_{atm} - P_0}{\gamma} = \frac{P_v}{\gamma} \quad (\text{II.31})$$

Le vide se mesure en mètres de colonne d'eau (m. c. d'eau), en atmosphère (atm) ou en millimètres de mercure (mm c Hg), 1 mm c Hg. =133,332 N/m<sup>2</sup>. De l'équation (II.31), il en résulte que la valeur limite du vide est une atmosphère (10 m c d'eau = 1 kgf / cm<sup>2</sup> = 98 065,5 N / m<sup>2</sup>).

Les jauges à vide sont installées sur les conduites d'aspiration de pompe, dans les siphons, etc.

## II.1.8 Principe de Pascal

Prenons un récipient rempli de liquide (Figure II.8). Une pression  $P_0$  est créée sur la surface libre du liquide à l'aide du piston en position 1-1.

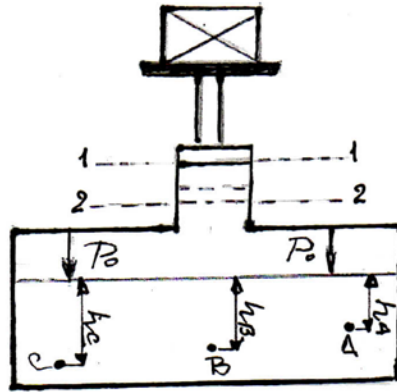


Figure II.7. Schéma explicatif du principe de Pascal

La pression hydrostatique en points arbitrairement choisis est :

$$\left. \begin{aligned} p_A &= p_0 + \gamma \times h_A \\ p_B &= p_0 + \gamma \times h_B \\ p_C &= p_0 + \gamma \times h_C \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.32})$$

Lorsque le piston se déplace vers la position 2-2, la pression sur la surface libre augmente de  $\Delta P$ , et la pression hydrostatique aux points sélectionnés s'écrit :

$$\left. \begin{aligned} p_A &= (p_0 + \Delta p) + \gamma \times h_A \\ p_B &= (p_0 + \Delta p) + \gamma \times h_B \\ p_C &= (p_0 + \Delta p) + \gamma \times h_C \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.33})$$

Une variation de pression extérieure appliquée à la surface libre d'un liquide dans un récipient fermé se transmet identiquement en tous les points de l'espace occupé par le liquide. C'est le principe de Pascal.

## II.1.9 Statique relatif des liquides (équilibre d'un liquide dans un récipient en mouvement)

On dit que le liquide est au repos relatif lorsqu'il est au repos par rapport à la paroi du récipient qui se déplace avec le liquide. En état de repos relatif, le liquide peut être considéré dans des réservoirs mobiles, Par exemple le carburant dans les réservoirs de voitures ou d'avions, des conteneurs rotatifs, ascendants ou descendants, etc.

Pour un fluide au repos absolu, seule la gravité qui est la force de masse agissante. Au repos relatif, une autre force de masse s'ajoute, la force d'inertie.

Lors d'un mouvement de rotation, par exemple lors d'une centrifugation, la principale force de masse agissante est la force d'inertie. Dans ce cas, la gravité joue parfois un rôle secondaire.

L'équation de l'hydrostatique pour un fluide au repos absolu

$dP = \rho \times (X \times dx + Y \times dy + Z \times dz)$  est applicable à un fluide relativement au repos, mais dans ce cas, les projections des forces de masse unitaires X, Y, Z doivent être comprises comme les projections des forces de gravité et d'inertie unitaires.

Pour les projections de niveau, avec la même interprétation des grandeurs X, Y, Z, l'équation précédente pour le cas d'un liquide au repos absolu est applicable .  
 $(X \times dx + Y \times dy + Z \times dz) = 0$

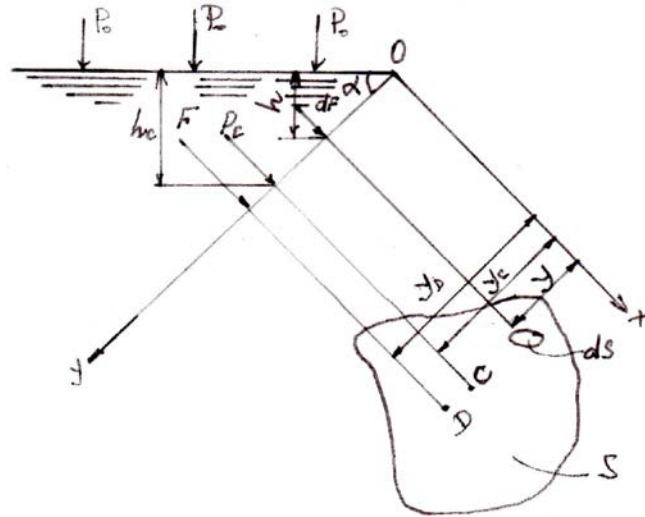
Les principaux problèmes à résoudre lors de l'examen de divers cas de repos relatif d'un liquide, est de trouver la loi de répartition de la pression à l'intérieur du liquide et d'établir les surfaces d'égale pression

### **II.1.10. La force de pression hydrostatique sur une surface plane**

Déterminons la force hydrostatique agissant sur une surface plane (figure II.10) inclinée par rapport à l'horizontale d'un angle  $\alpha$ .

Examinons une surface de forme arbitraire d'aire S. En tous points de cette section, il existe une pression hydrostatique P dirigée le long de la normale au plan de surface et conformément à l'équation fondamentale de l'hydrostatique  $P = P_0 + \rho gh$ , plus la valeur est grande, plus le point considéré est plus profond sous la surface libre du liquide. La résultante de la force de pression hydrostatique du fluide sur la zone S peut être trouvée par : La somme de toutes les forces de pression élémentaires parallèles les unes aux autres.

A l'intérieur de la zone S, on sélectionne un élément infiniment petit de surface dS avec une profondeur d'immersion de son centre par la valeur h.



**Figure II.8.** Forces de pression hydrostatique sur une surface plane inclinée

Force élémentaire  $dF$  agissant sur la surface  $dS$  est déterminée par la relation suivante :

$$dF = P_M \times dS \quad (\text{II.35})$$

Où  $P_M$  est la pression hydrostatique moyenne dans la zone  $dS$ .

Puisque les dimensions de la surface  $dS$  étant infiniment petites, il est possible de prendre la pression moyenne  $P_M$  égale à la pression  $P$  au centre de cette surface.

Compte tenu de cela, la force élémentaire  $dF$  s'écrira :

$$dF = \rho \times dS = (P_0 + \gamma \times h) \times dS \quad (\text{II.36})$$

On peut voir sur la figure II.10 que :  $h = y \times \sin \alpha$

Et alors l'équation (II.36) peut s'écrire comme suit :

$$dF = P \times dS = P_0 \times dS + \gamma \times y \times \sin \alpha \times dS \quad (\text{II.37})$$

En intégrant cette expression sur toute la surface  $S$  on obtient

$$F = \int_S P_0 \times dS + \int_S \gamma \times y \times \sin \alpha \times dS = P_0 \int_S dS + \gamma \times \sin \alpha \times \int_S y \times dS \quad (\text{II.38})$$

La première intégrale du côté droit est égale à l'aire  $S$ , et la seconde représente l'expression bien connue du moment statique  $M_{SX}$  de l'aire  $S$  autour de l'axe  $X$ .

$$M_{SX} = y_c \times S \quad (\text{II.39})$$

Ou  $y_c$  - la coordonnée du centre de gravité de la surface immergée  $S$ , alors :

$$F = P_0 \times S + \gamma \times y_c \times \sin \alpha \times S \quad (\text{II.40})$$

Ou :  $y_c \times \sin \alpha = h_c$

En remplaçant la valeur de  $h_c$  dans la relation (II.40), on aura :

$$F = P_0 \times S + \gamma \times h_c \times S = (P_0 + \gamma \times h_c) \times S \quad (\text{II.41})$$

Lorsque  $P_0 = P_{atm}$ , la force de pression hydrostatique effective devient :

$$F = \gamma \times h_c \times S = \rho \times g \times h_c \times S \quad (\text{II.42})$$

Par conséquent, la résultante de la force de pression hydrostatique effective sur une surface plane est égale au produit de la surface plane et la pression hydrostatique à son centre de gravité.

### II.1.11. Centre de poussée et détermination de sa position

La position du point où agit la force hydrostatique totale est d'un grand intérêt pratique, ce point est appelé centre de pression (poussée). C'est le point de croisement de la résultante des forces de pressions hydrostatique du fluide avec la surface subissant la pression du liquide.

Lorsque  $P_0 = P_{atm}$ , la position du centre de poussée ne dépend que de l'intensité de la force hydrostatique effective, de sorte que la position (ordonnée) du centre de poussée sera déterminée en tenant compte uniquement de cette force. Pour ce faire, on utilise le principe de la mécanique théorique sur l'égalité du moment de la résultante à la somme des moments des composantes par rapport au même axe en prenant la ligne du bord de l'eau  $OX'$  en axe des moments (Figure II.10).

Composons l'équation d'équilibre pour le moment de la force résultante  $F$  et les moments des forces composantes  $dF$  :

$$M_R = F \times y_D; dM_C = dF \times y \quad (\text{II.43})$$

$$M_R = F \times y_D = \gamma \times h_c \times S \times y_D = \gamma \times y_C \times \sin \alpha \times S \times y_D \quad (\text{II.44})$$

$$M_C = \int_S dM_C = \int_S dF \times y = \int_S \gamma \times h \times dS \times y = \gamma \times \sin \alpha \int_S y^2 \times dS \quad (\text{II.45})$$

Où :  $\int_S y \times dS = I_x$  est le moment d'inertie de la surface immergée par rapport à l'axe  $OX'$ .

Alors le moment des forces composantes :

$$M_C = \gamma \times \sin \alpha \times I_x \quad (\text{II.46})$$

En équivalant les valeurs des moments de forces  $M_R$  et  $M_C$ , on obtient :

$$\gamma \times y \times \sin \alpha \times S \times y_D = \lambda \times \sin \alpha \times I_x \quad (\text{II.47})$$

D'où :

$$y_D = \frac{I_x}{S \times y_C}$$

Le moment d'inertie  $I_x$  est déterminé par la formule

$$I_x = I_0 + S \times y_c^2 \tag{II.48}$$

On obtient en final

$$y_D = y_C + \frac{I_0}{S \times y} \tag{II.49}$$

Où :

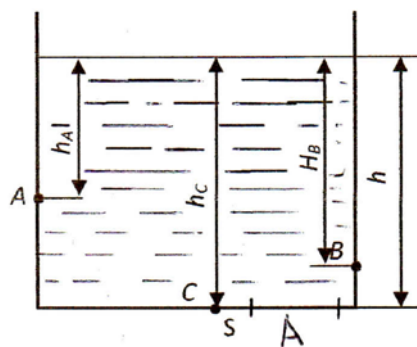
- $I_0$  = Le moment d'inertie de la surface immergée calculé par rapport à l'axe passant par le centre de gravité.
- Le centre de poussée de la pression hydrostatique effective se trouve sous le centre de gravité d'une distance :

$$\frac{I_0}{S \times y_C} \tag{II.50}$$

Pour expliquer comment on utilise les relations obtenues, on donne l'exemple suivant :

### II.1.12. La pression d'un liquide exercée sur une surface plane horizontale

Soit un récipient (Figure II.11) de profondeur d'eau dans le récipient  $h$ . La pression du liquide en tout point du récipient dépend de la profondeur d'immersion de ce point. Si nous prenons les points A, B et C, alors les pressions, seront respectivement, égales :



**Figure II.9.** Forces de pression hydrostatique sur une surface plane horizontale

$$p_A = \gamma \times h_A; p_B = \gamma \times h_B; p_C = \gamma \times h_C \tag{II.51}$$

La résultante de la force de pression exercée sur une surface plane A horizontale :  $F = \gamma \cdot h_c \cdot A$

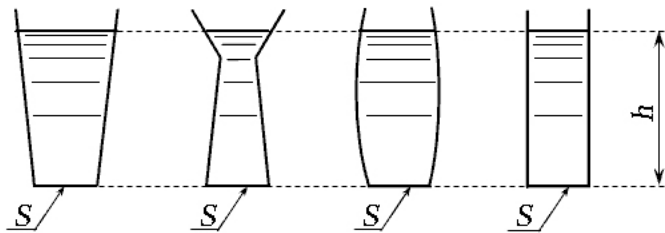
La résultante de la force de pression sur toute la surface du récipient

$$F = \gamma \times h_c \times S \quad (\text{II.52})$$

En conséquence, la force résultante de pression hydrostatique exercée sur une surface horizontale est égale à au poids de la colonne de liquide située au-dessus de la surface considérée.

La figure II.12 montre quatre récipients de formes différentes. La surface du fond de tous les récipients est la même  $S$ . Tous les récipients sont remplis d'un liquide homogène jusqu'à une profondeur de  $h$ . La force pression hydrostatique au fond de tous les récipients sera la même et égale à :  $F = \gamma \times h \times S$

L'hydraulique stipule que la pression du fluide ne dépend pas de la forme du récipient, mais de la profondeur d'immersion de la surface et ses dimensions. C'est le paradoxe hydrostatique



**Figure II.10.** Paradoxe hydrostatique

### II.1.13. Force de pression sur une surface courbe

Lors de la détermination les forces agissantes sur une surface plane, nous avons affaire à des forces élémentaires agissantes le long de la normale à celle-ci et parallèlement entre elles. Par contre Lors de la détermination des forces de pression hydrostatiques d'un fluide agissant sur une surface courbe, ces forces sont normales entre elles, et de directions différentes.

La force hydrostatique résultante  $F$  est déterminée comme :

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (\text{II.53})$$

La force élémentaire de pression est dirigée le long de la normale à la surface :

$$dF = \rho \times g \times h \times dS \quad (\text{II.54})$$

Les composantes élémentaires sur les axes  $OZ$ ,  $OY$  :

$$\begin{aligned} dF_z &= dF \times \cos \alpha = \rho \times g \times h \times \cos \alpha \times dS \\ dF_x &= dF \times \sin \alpha = \rho \times g \times h \times \sin \alpha \times dS \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

Les expressions  $dS \times \cos \alpha$ ;  $dS \times \sin \alpha$  sont les aires de projection d'une aire infiniment petite  $dS$  sur un plan vertical horizontal, c'est-à-dire  $XOZ$  et  $YOZ$ .



$$\begin{aligned} dF_z &= \rho \times g \times h \times dS_x \\ dF_x &= \rho \times g \times h \times dS_z \end{aligned} \quad (\text{II.55})$$

Imaginons que toute la surface de la figure, égale à  $S$ , soit constituée de zones infiniment petites  $dS$ , dont chacune est exercée par les composantes des forces élémentaires de pression hydrostatique  $dF_z$  et  $dF_x$  :

$$\begin{aligned} F_z &= \int_S dF_z = \rho \times g \times \int_S h \times dS_x \\ F_x &= \int_S dF_x = \rho \times g \times \int_S h \times dS_z \end{aligned} \quad (\text{II.56})$$

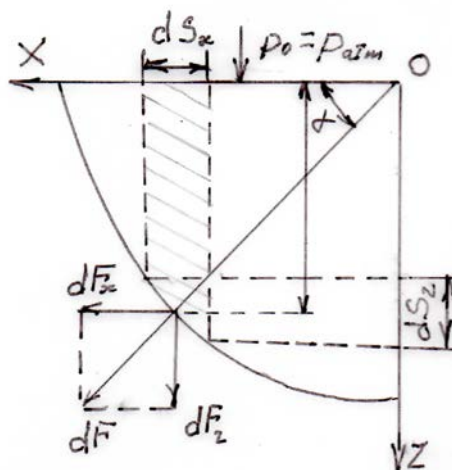
L'intégrale  $\int_S h \times dS_x$  est le volume d'un corps liquide imaginaire délimité en bas par une surface courbe  $S$  et en haut par sa projection  $S_x$  sur le plan de la surface libre du liquide. Un corps liquide imaginaire ainsi obtenu est appelé corps de pression.

Par conséquent, la composante verticale de la force  $F_z$  est numériquement égale au poids du fluide dans le volume du corps de pression :

$$F_z = \rho \times g \times \int_S h \times dS_x = \rho \times g \times W \quad (\text{II.57})$$

$$W = \int_S h \times dS_x = \text{volume du corps de pression,}$$

Le corps limité par une surface courbe ( $S$ ), sa projection sur la surface libre et les plans de projections verticaux est appelé corps de pression et son volume ( $W$ ) volume du corps de pression.



**Figure II.11.** Force de pression hydrostatique sur une surface courbe

Pour la composante horizontale, l'intégrale  $\int_S h \times dS_z$  est le moment statique de la projection  $S$  de l'aire de la courbe sur le plan vertical  $YOZ$ .

Il ressort du cours de la mécanique théorique que le moment statique est égal au produit de la projection d'une surface courbe et de la profondeur d'immersion du centre de gravité de la projection de cette surface courbe.

Alors la composante verticale de la force de pression

$$F_z = \rho \times g \times \int_S h \times dS_z = \rho \times g \times S_z \times h_c \quad (\text{II.58})$$

Où :

- $S_z$  est la projection de la courbe sur le plan  $OZ$ .
- $h_c$  = La profondeur d'immersion du centre de gravité sur l'axe  $oz$

La composante horizontale de la force  $F_x$  est le produit de la projection de l'aire d'une courbe sur un plan vertical et de la pression hydrostatique au centre de gravité de cette aire. La force de pression totale  $F$  se trouve comme la résultante des composantes horizontale et verticale

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} \quad (\text{II.59})$$

La direction de la force de pression hydrostatique résultante  $F$  est déterminée par l'angle de son inclinaison par rapport à l'horizon,

$$\alpha = \arctg\left(\frac{F_z}{F_x}\right) \quad (\text{II.60})$$

On note que le centre de poussée, c'est-à-dire le point d'application de la force de pression hydrostatique du liquide peut être trouvé graphiquement comme le point d'intersection de la direction de la force  $F$  avec la surface courbe.

**Tableau II.2.** Surfaces, Coordonnées du centre de gravité et centre de pression de quelques cas de figure.

Schéma	Surface de la paroi S	Coordonnée du Centre de gravité, $h_c$	Coordonnée du centre de pression, $h_D$
	$b \times h$	$\frac{h}{2}$	$\frac{2}{3} \times h$
	$(a+b) \times \frac{h}{2}$	$\frac{h}{3} \times \frac{a+2b}{a+b}$	$\frac{h}{2} \times \frac{a+3b}{a+2b}$
	$\pi \frac{d^2}{4}$	$\frac{d}{2}$	$\frac{5}{8} \times d$

#### II.1.14. Principe d'Archimède. Flottement des corps

Le Principe d'Archimède est interprété comme suit : Un corps immergé dans un liquide est soumis à une force de poussée égale au poids du liquide déplacé par l'eau. Le corps immergé dans le liquide est soumis à la force de gravité de ce corps et aux forces de pression superficielle. Les composantes horizontales de la force de pression  $F_H$  du fluide sont mutuellement équilibrées.

Une force de pression dirigée verticalement vers le bas agit sur la surface supérieure.

$$F_{z1} = \rho \times g \times W_1 \quad (\text{II.61})$$

Verticalement vers le haut s'exerce la force de pression sur la surface inférieure immergée du corps.

$$F_{z2} = \rho \times g \times W_2 \quad (\text{II.62})$$

La résultante de ces forces est dirigée dans le sens d'action de la plus grande force.

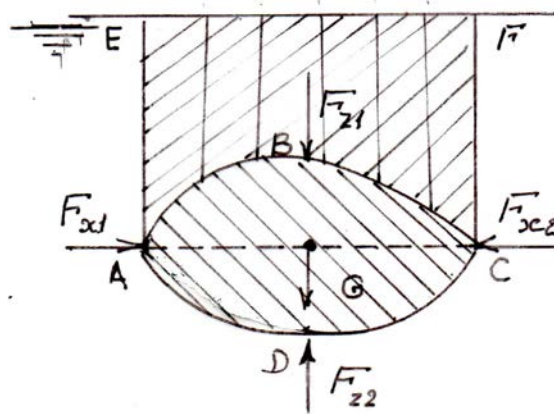
$$F_z = \rho \times g \times (W_2 - W_1) \quad (\text{II.63})$$

Le corps immergé dans un liquide est soumis à l'action de la poussée verticale égale en valeur et opposée en direction au poids du liquide déplacé par le corps.

$$F = \rho \times g \times W \quad (\text{II.64})$$

W= Volume du corps immergé

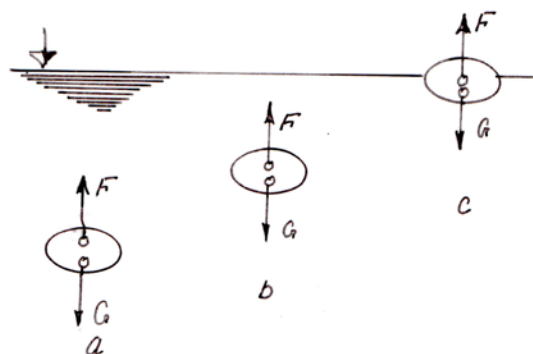
La force  $F$  est appelée force de poussée qui s'exerce sur le centre de gravité du volume immergé.



**Figure II.12.** Principe d'Archimède

Le poids réel d'un corps immergé dans un liquide est égal à  $G$  qui s'applique au centre de gravité du corps, mais en raison de l'hétérogénéité habituelle du corps, il ne coïncide généralement pas avec le centre de déplacement.

Puisqu'un corps immergé dans un liquide est en équilibre (flottant), les forces verticales  $G$  et  $F$  se situent sur la même ligne verticale, appelée axe de flottement.



**Figure II.13.** Conditions de flottement des corps

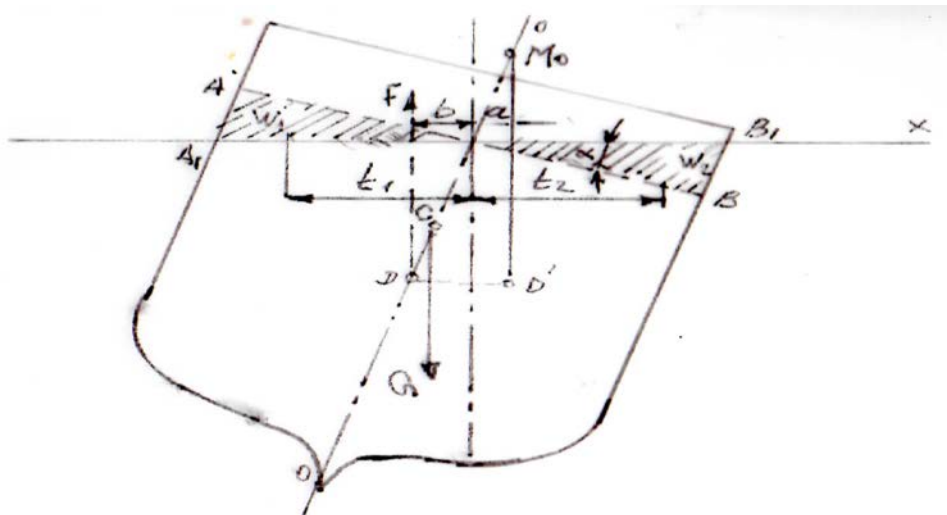
Du point de vue de la flottabilité, trois cas d'équilibre d'un corps flottant sont possibles (Figure 16) :

- Si  $G > F$  – le corps coule (Figure II.16, a) ;
- Si  $G = F$  – le corps est dans un état d'équilibre lorsqu'il est complètement immergé dans un liquide (plongée sous-marine) (Figure II.16, b) ;
- Si  $G < F$ , alors la force résultante  $F - G$  pousse le corps vers le haut depuis le liquide et il flotte, en restant partiellement immergé dans le liquide (Figure II.16, c) ;  $F$  - force d'Archimède ;  $G$  – poids du corps solide.

Faire flotter un corps partiellement immergé dans un liquide est le plus souvent rencontré dans la pratique (par exemple, navires à usages divers).

### II.1.14.1. Equilibre d'un corps flottant partiellement immergé dans un liquide

Examinons un corps flottant en équilibre d'axe de symétrie vertical  $OO$  qui passe par le centre de gravité de la surface. La ligne  $AB$  le long de laquelle la surface libre du liquide croise la surface d'un corps flottant est appelée ligne de flottaison. La section verticale du corps est appelée le plan de flottement. Le centre de carène est situé au point  $D$ . Lorsque l'équilibre du corps est déstabilisé par des forces extérieures d'un angle  $\alpha$  par rapport au plan de flottaison  $XX$ , le volume de la partie immergée  $W$  reste constant en valeur et modifie sa forme initiale. La ligne  $ABO$  devient  $A_1B_1O$ . À mesure que la forme du volume immergé change, son centre de gravité doit se déplacer. Soit la nouvelle position du centre de gravité du volume immergé  $A_1B_1O$ , le point  $D'$  sera le nouveau centre de carène, une force de poussée  $F$  agissant verticalement vers le haut sera appliquée à  $D'$ .



**Figure II.14.** Stabilité d'un corps flottant partiellement immergé dans un liquide

Le point d'intersection de ligne d'action de la force de poussée  $F$  avec l'axe de flottement  $OO$  au point  $M_0$ , appelé le métacentre. La distance du métacentre  $M_0$  au centre de carène  $D$  est appelée rayon métacentrique et est désignée par  $r_m$ . La distance du point  $M_0$  au centre de gravité  $C$  est appelée hauteur métacentrique.

Déterminons l'expression du rayon métacentrique  $r_m$ , en supposant que le corps s'est incliné d'un certain petit angle  $\alpha$  ( $\alpha < 15^\circ$ ). L'équilibre du corps est déstabilisé, le volume  $W_1 = AOA_1$  sort de l'eau et le volume  $W_2 = BOB_1$  s'immerge. Le volume  $W_1$ , n'étant plus immergé dans le liquide, ne perçoit plus de force de

poussée, au même moment, volume  $W_2$  immergée dans le liquide, a commencé à subir l'action de la force de poussée.  $W$  - Le volume d'eau déplacé par le corps flottant ;  $W_0$  - le volume de la partie du corps flottant immergée dans le liquide

Alors :  $W = W_0 + W_1 = W_0 + W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$

Le moment statique du volume  $W_0$  par rapport à l'axe longitudinal de la surface en position une :

$$W_0 = W - W_1 \Rightarrow W(-b) - W_1(-t_1)$$

En position deux :  $W_0 = W - W_2 = W_a - W_2 t_2$

Donc  $W(-b) - W_1(-t_1) = W_a - W_2 t_2$  puisque  $W_1 = W_2$

$$W(a + b) = W_1(t_1 + t_2)$$

$a + b = r_m \sin \alpha$  et  $W r_m \sin \alpha = W_1(t_1 + t_2)$

Le moment statique du volume  $W_1$  est égal  $W_2 t_2 = \int_{S_2} x \cdot dx d S_2$

$$W_1(t_1 + t_2) = \alpha \int_s x^2 d s$$

Sachant par la mécanique que le moment de la force résultante par rapport à tout axe est égal à la somme des moments des forces composantes

$\int_s x^2 d s = I_{x0}$  - est le moment centrale d'inertie de la surface de la section par la ligne de flottaison par rapport à l'axe de balancement du corps , normal au plan de dessin et passant par le centre de gravité de la zone de flottaison.

Lorsque  $\alpha$  est très petit, le rayon métacentrique :  $r_m = \frac{I_{x0}}{W}$

La stabilité d'un corps flottant partiellement immergé ou sa capacité à revenir d'une position inclinée donnée à une position normale d'équilibre stable dépend de la position relative du centre de gravité d'un corps flottant et du métacentre. Il peut y avoir trois cas : Si le métacentre  $M_0$  , en comptant le long de l'axe de flottement, se situe au-dessus du centre de gravité C du corps, alors un couple de forces G, F tendent à ramener le corps à sa position précédente, et le corps sera dans une condition d'équilibre stable. Si le métacentre  $M_0$  sur l'axe de flottement est inférieur au centre de gravité C du corps, alors, les forces G et F créeront des conditions d'équilibre instable. Si le métacentre  $M_0$  et le centre de gravité C du corps coïncident, alors le corps sera dans un état d'équilibre.

## Exercices avec solutions-Partie hydrostatique

### Exercice N°1.

Déterminer la hauteur de la colonne d'eau dans le piézomètre au-dessus du niveau de liquide dans un récipient fermé si la pression absolue à la surface de l'eau dans le récipient est  $P_0 = 104 \text{ kPa}$ . Tracer l'épure de pression.

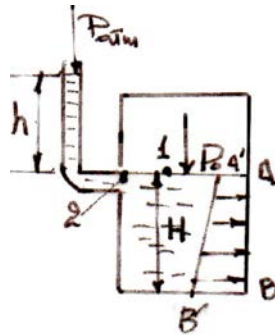


Figure 1. Schéma de l'exercice N°1

### Solution

On prend le plan qui passe par les points 1 et 2, comme une surface d'égalité de pression.

$$P_1 = P_2$$

Selon les conditions de l'exemple :  $P_1 = P_0$

Où  $P_0$  est la pression externe s'exerçant sur la surface du liquide.

La pression totale au point 2 est déterminée par l'équation de base de l'hydrostatique :

$$P_1 = P_{atm} + \rho gh \Rightarrow P_0 = P_{atm} + \rho gh \Rightarrow h = \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho g}$$

$$P_{atm} = 1 \times 10^5 \text{ Pa} \quad \text{et} \quad P_0 = 104000 \text{ Pa (donnée)}$$

Après substitution, on obtient :

$$h = \frac{P_0 - P_{atm}}{\rho g} = \frac{104000 - 100000}{1000 \times 9.81} = 0.4 \text{ m}$$

### Exercice N°2

Un réservoir fermé A, rempli d'eau, est équipé d'un manomètre à mercure liquide. Déterminez la profondeur H du point de connexion du manomètre à mercure au réservoir si la différence des niveaux de mercure dans celui-ci est  $h = 200 \text{ mm}$ , la valeur  $a = 0,1 \text{ m}$  et la pression  $P_0 = 107,9 \text{ kPa}$ . Prenons la masse volumique du mercure égale à  $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$ .

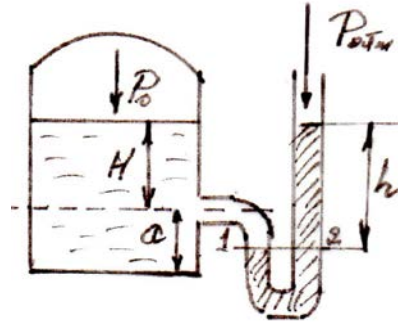


Figure 2. Schéma de l'exercice N°2

#### Solution :

On prend le plan d'égalité de pression passant par les points 1 et 2, d'où  $P_1 = P_2$ .

D'après l'équation fondamentale de l'hydrostatique :

$$\text{La pression totale en point 1 : } P_1 = P_0 + \rho_e g \times (H + a)$$

$$\text{La pression totale en point 2 : } P_2 = P_{atm} + \rho_{Hg} g h$$

L'équation de l'équilibre du liquide par rapport au plan d'égalité de pression :

$$P_0 + \rho_e g \times (H + a) = P_{atm} + \rho_{Hg} g h$$

$$P_0 + \rho_e g \times H + \rho_e g \times a = P_{atm} + \rho_{Hg} g h$$

La profondeur H requise est alors de la forme :

$$H = \frac{P_{atm} - P_0 + \rho_{Hg} g h - \rho_e g a}{\rho_e g}$$

Données :  $P_{at} = 1.10^5 \text{ Pa}$  ;  $P_0 = 1,079.10^5$  ;  $\rho_{Hg} = 13600 \text{ kg/m}^3$  ;  $a = 0,1 \text{ m}$  ;  $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$  ;  $h = 0,2 \text{ m}$

En remplaçant toutes ces valeurs dans la formule de H, on obtient :

$$H = \frac{10000 - 107900 + 13600 \times 9.81 \times 0.2 - 1000 \times 9.81 \times 0.1}{1000 \times 9.81} = 1.8 \text{ m}$$



### Exercice N°3.

Tracer l'épure de la pression hydrostatique absolue sur une surface plane AB (voir figure de l'exemple 5), si la profondeur de l'eau dans le récipient est  $H = 5$  m. La pression externe  $P_A$  est de 104 kPa.

#### Solution :

La pression hydrostatique en point A est une donnée  $P_A = 104$  kPa

La pression hydrostatique en point B est déterminée par l'équation fondamentale de l'hydrostatique

$$P_B = P_A + \rho_e g H = 104 + 1000 \times 9.81 \times 5 \times 10^3 = 153 \text{ Kpa}$$

Les normales passant par les points A et B coïncident respectivement avec la surface libre du liquide et du fond horizontal du récipient et se situent dans le plan du dessin. Sur ces normales côté liquide, sur l'échelle donnée, on trace les valeurs de la pression totale en A=104 kPa et en B = 153 kPa. Nous obtenons respectivement les points A' et B' que nous relierons par une droite A'B'. À égale distance les uns des autres, traçons la ligne AB à la ligne A'B' parallèlement aux bases AA' et BB' du trapèze rectangulaire AA'B'B. Nous fermons ces lignes flèches, indiquant ainsi la pression hydrostatique sur la surface AB exercée du côté liquide. Ainsi, le recherché épure de la pression hydrostatique totale est un trapèze AA'B'B.

### Exercice N°4.

Tracer l'épure de pression hydrostatique effective agissant sur une paroi plane inclinée d'un réservoir ouvert rempli d'eau (Fig. 1.4). La profondeur d'eau dans le réservoir est  $h = 4$  m ;  $\rho = 1000$  kg/m<sup>3</sup>.

#### Solution :

Puisque nous avons un réservoir ouvert, la pression absolue  $p$  à la profondeur  $h$  est déterminée par la formule :  $P = P_{atm} + \rho g h$

Où  $P_{at}$  – Pression atmosphérique exercée sur la surface libre ;  $\rho g h$  = pression effective à la profondeur  $h$ .

$$P_{eff} = P - P_{atm} = \rho g h$$

Au fur à mesure que la profondeur  $h$  augmente, la valeur de la pression hydrostatique augmente linéairement. Pour tracer une ligne droite, il faut connaître les emplacements d'au moins deux points, par exemple sur la surface libre et sur le fond du réservoir.

Au niveau de la surface libre, la pression effective est :  $P_{eff} = \rho g h = 1000 \times 9.81 \times 0 = 0$

Au fond du réservoir, la pression effective est :  $P_{eff} = \rho g h = 1000 \times 9.81 \times 4 = 39240 \text{ Pa}$



Figure 3. Schéma de l'exercice N°8

### Exercice N°5

Déterminer les pressions absolue et effective dans un récipient rempli d'eau, lorsque la colonne de mercure dans le tube  $h_2 = 0.3 \text{ m}$  et la ligne de séparation entre le mercure et l'eau se trouve à une distance de  $0,1 \text{ m}$  plus bas que l'axe du récipient.

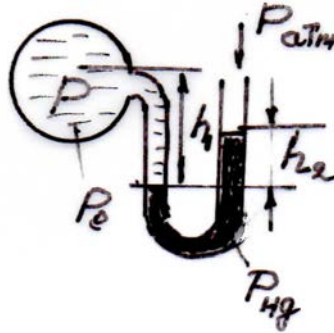


Figure 4. Schéma de l'exercice N°9

### Solution :

Etablissons l'équation de l'équilibre par rapport à la ligne de séparation :

$$P_{atm} + \rho_{Hg} g h_2 = P + \rho g h_1 \Rightarrow P = P_{atm} + g(\rho_{Hg} h_2 - \rho h_1)$$

La pression hydrostatique effective :

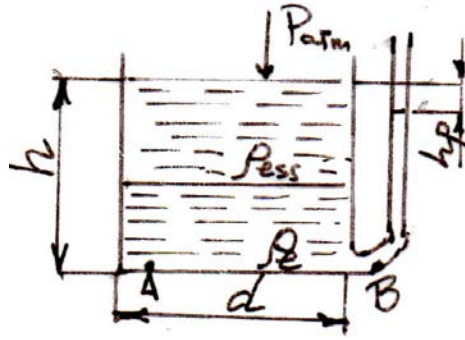
$$P_{eff} = P - P_{atm} = g(\rho_{Hg} h_2 - \rho h_1) = 9.81(13.6 \times 0.3 - 1 \times 0.1) = 39.04 \text{ KPa}$$

La pression hydrostatique absolue :

$$P = P_{atm} + P_{eff} = 98.1 + 39.04 = 137.04 \text{ Kpa}$$

### Exercice N°6.

Un réservoir cylindrique de diamètre  $d = 2 \text{ mm}$  est rempli d'eau et d'essence jusqu'à une hauteur  $h = 1,5 \text{ m}$ . Le niveau d'eau dans le piézomètre ouvert sur l'atmosphère, est inférieur au niveau d'essence de  $h_p = 300 \text{ mm}$ . Si la masse volumique de l'essence est  $\rho_{ess} = 700 \text{ kg/m}^3$  la masse volumique de l'eau est  $\rho_e = 1000 \text{ kg/m}^3$ , trouvez le volume d'essence dans le réservoir.



**Figure 5.** Schéma de l'exercice N°10

**Solution :**

Sur la base du schéma, on peut affirmer que les pressions au fond du réservoir et au fond du piézomètre (points A et B de la figure 2.17) sont les mêmes :  $P_A = P_B$  . Établissons l'équation fondamentale de l'hydrostatique  $\rho_e g h_e + \rho_{ess} g h_{ess} = \rho_e g (h - h_p)$

Où :  $h_e$  et  $h_{ess}$  = hauteurs d'eau et d'essence dans le réservoir

Puisque dans cette équation deux inconnues  $h_e$  et  $h_{ess}$ ,

Sachant que :  $h_e = h - h_{ess}$   $\longrightarrow \rho_e g (h - h_{ess}) + \rho_{ess} g \times h_{ess} = \rho_e g (h - h_p)$

Après simplification,  $h_{ess} (\rho_e - \rho_{ess}) = \rho_e h_p$

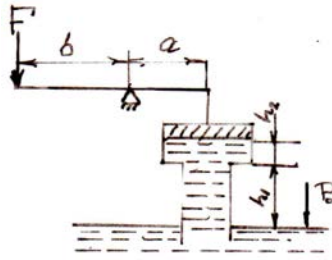
D'où la hauteur de essence :  $h_{ess} = \frac{\rho_e h_p}{(\rho_e - \rho_{ess})} = \frac{1000 \times 0.3}{1000 - 700} = 1m$

Le volume essence contenu dans le reservoir est comme suit:

$$V_{ess} = \frac{\pi d^2}{4} h_{ess} = \frac{3.14 \times 2^2}{4} \times 1 = 3.14 m^3$$

**Exercice N°7.**

Trouvez la force F nécessaire pour maintenir le piston en équilibre si le tube situé sous le piston est rempli d'eau de densité  $\rho = 1\ 000\ kg/m^3$ . Dimensions du tuyau  $d = 100\ mm$ ,  $h_1 = 4\ m$ ,  $h_2 = 0,5\ m$  Longueur du levier  $a = 0,2\ m$ ,  $b = 1\ m$ . le poids propre du piston est négligeable.



**Figure 6.** Schéma de l'exercice N°11

**Solution:**

Il est logique de supposer que la force  $F$  nécessaire pour maintenir le piston en équilibre doit correspondre à la pression effective de dessous, c'est-à-dire à la pression pondérale de la colonne de liquide.

$$P_{eff} = \rho g(h_1 + h_2) = 1000 * 9.81 * (4 + 0.5) = 44100 \text{ Pa}$$

Force  $F_t$  agissant sur la tige nécessaire pour la maintenir en équilibre :

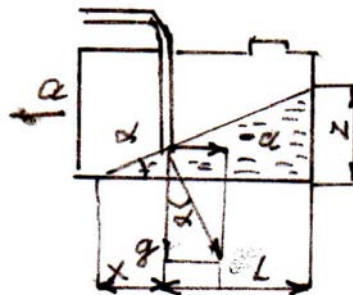
$$P_t = P_{eff} \frac{\pi d^2}{4} = 44100 \times \frac{3.14 \times 0.1^2}{4} = 364.2 \text{ N}$$

La force  $F$  dépendant de la longueur du bras de levier est :

$$F = F_t \frac{a}{b} = 364.2 \frac{0.2}{1} = 69.24 \text{ N}$$

**Exercice N°8.**

La voiture se déplace avec une accélération  $a = 3,27 \text{ m/s}^2$ . Déterminez la quantité minimale de carburant dans le réservoir pour garantir un approvisionnement fiable sans fuite d'air. En supposant que le tuyau de carburant soit posé à une distance  $L = 0,45 \text{ m}$  de la paroi arrière du réservoir, le diamètre du tuyau de carburant est petit par rapport à la longueur du réservoir et a une hauteur  $h = 10 \text{ cm}$ . Largeur du réservoir  $b = 0,5 \text{ m}$ , masse volumique de l'essence  $\rho = 750 \text{ kg/m}^3$ . Calculer la pression effective exercée sur la paroi arrière du réservoir



**Figure 7.** Schéma de l'exercice N°12

**Solution :**

Traçons l'emplacement de l'essence dans le réservoir de volume minimum. Soit les côtés d'un triangle rectangle étant  $(x + L)$  et  $z$ . après cela :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{g} = \frac{3.27}{9.81} = 0.33367 \Rightarrow \alpha = 18.45^\circ$$

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{0.1}{0.3367} = 0.3m$$

$$z = (x + l)\operatorname{tg} \alpha = (0.3 + 0.45)0.33367 = 0.25m$$

Le volume minimal d'essence dans le réservoir qui peut être distribuée de manière fiable sans aspiration est :

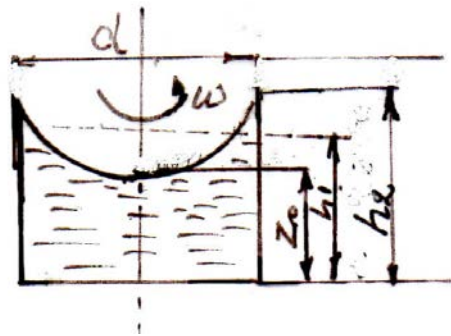
$$V = S_{ess} \times b = \frac{z(x+l)}{2} \times b = \frac{0.25(0.3+0.45)}{2} \times 0.5 = 0.047m^3 = 47l$$

La pression exercée sur la paroi arrière du réservoir est donnée par l'équation :

$$P = \rho ax + \rho gz = 750 \times 3.27 \times 0.3 + 750 \times 9.81 \times 0.25 = 2573.25Pa.$$

**Exercice N°9.**

Un récipient de diamètre  $d = 100$  mm et de hauteur  $h_2 = 0,3$  m est rempli de liquide jusqu'à une hauteur  $h_1 = 0,2$  m. Trouvez la vitesse angulaire  $\omega$  qui permet au récipient de tourner sans provoquer le giclement du liquide.



**Figure 8.** Schéma de l'exercice N°13

**Solution :**

Lorsque  $\omega = \omega_{max}$ , la surface libre du liquide est celle illustrée en figure 8. L'équation de la surface libre d'un liquide sous forme de paraboloïde est de la forme :

$$h_2 = z_0 + \frac{\omega^2 r^2}{2g}$$

Où  $z_0$  est la coordonnée verticale du sommet du paraboloïde. Le volume du paraboloïde de révolution  $V_p$  d'après l'équation est :

$$V_p = \frac{1}{2} \pi R^2 (h_2 - z_0)$$

Considérant le volume  $V_p$  du paraboloidé, exprimons le volume du liquide  $V_l$ , volume dans le récipient par  $V_c$  :

$$V_l = V_c - V_p = h_2 \frac{\pi d^2}{4} - \frac{1}{2} \pi R^2 (h_2 - z_0) = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} (h_2 + z_0)$$

Puisque nous pouvons calculer le volume  $V_l$  de liquide dans le récipient en état de repos,

$$V_l = h \frac{\pi d^2}{4} \Rightarrow h_1 \frac{\pi d^2}{4} = \frac{1}{2} \frac{\pi d^2}{4} (h_2 + z_0)$$

$$h_1 = \frac{1}{2} (h_2 + z_0), \quad \text{Ce qui implique que : } h = 2h_1 - h_2 = 2 \times 0.2 - 0.3 = 0.1 \text{ m}$$

La vitesse angulaire  $\omega$  peut être exprimée à partir de l'équation de la surface libre du liquide dans le récipient :

$$\omega = \sqrt{\frac{(h_2 - z_0) 2g}{R^2}} = \sqrt{\frac{(0.3 - 0.1) 2 \times 9.81}{0.05^2}} = 39.6 \text{ rad / s}$$

### Exercice N°10.

Déterminer la force de pression (effective) hydrostatique sur la paroi latérale d'un réservoir prismatique rectangulaire ouvert et rempli d'eau d'une profondeur de  $h = 2,4$  m, si la largeur de la paroi est  $b = 1,5$  m. Déterminer la position du centre de pression.

#### Solution :

L'intensité de la force de pression (effective) hydrostatique :

$$F = \rho g h_c S = \rho g \frac{h_c}{2} b h_c = \frac{1000 \times 9.81 \times 2.4}{2} 1.5 \times 2.4 = 42379.2 \text{ N} = 42.379 \text{ KN}$$

La profondeur d'immersion du centre de poussée :

$$y_D = y_c + \frac{l_0}{y_c S} = \frac{1}{2} h + \frac{\frac{b h^3}{12}}{\frac{1}{2} h \times b \times h} = \frac{2}{3} h = \frac{2}{3} 2.4 = 1.6 \text{ m}$$

### Exercice N°11.

Déterminez l'intensité et le point d'application de la force de pression exercée sur une paroi rectangulaire, de largeur  $b = 2$  m, incliné d'un angle  $\alpha = 60$  degrés par rapport à l'horizontal. La profondeur d'eau  $H = 4$  m.

#### Solution :

La surface mouillée :  $S = b \times l = b \times \frac{H}{\sin 60^\circ} = 2 \times \frac{4}{\sin 60^\circ} = 9.24m^2$

La profondeur d'immersion du centre de gravité de la paroi :

$$h_c = \frac{H}{2} = \frac{4}{2} = 2m$$

La force de la pression hydrostatique effective :

$$F = \rho g h_c S = 1000 \times 9.81 \times 2 \times 9.24 = 181240N$$

La hauteur de la paroi :

$$l = \frac{H}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin 60^\circ} = 4.62m$$

Les coordonnées du centre de pression (centre de poussée) :

$$y_D = y_c + \frac{l_0}{y_c S} = \frac{1}{2} + \frac{b \times l^3}{12 \times l \times b \times l} = \frac{l}{2} + \frac{l}{6} = \frac{2}{3} \times l = 3.1m$$

### Exercice N°12.

Calculer l'intensité de la force de pression hydrostatique exercée sur une porte de vidange, et son centre de poussée pour deux cas a) la porte est rectangulaire b) la porte est triangulaire à sommet en haut. Largeur de la porte  $b = 1m$ , profondeur d'immersion de son bord supérieur  $a = 0,8m$  et de son bord inférieur  $h = 2m$ . Angle d'inclinaison de la porte  $\alpha = 60^\circ$

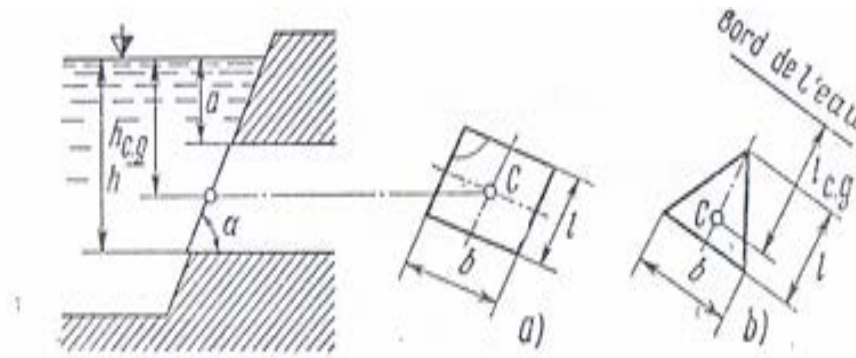


Figure 9. Schéma de l'exercice N°16

### Solution

#### ➤ Cas du rectangle

La hauteur de la porte :  $l = \frac{h-a}{\sin 60^\circ} = \frac{4}{\sin 60^\circ} = \frac{2-0.8}{\sin 60^\circ} = 1.39m$

La profondeur d'immersion du centre de gravité du rectangle :

$$h_c = a + \frac{l}{2} \sin \alpha = a + \frac{h-a}{2} = 0.8 + \frac{2-0.8}{2} = 1.4m$$

La section mouillée :  $S = b \times l = b \times l = 1 \times 1.39 = 1.39m^2$

L'intensité de la force de pression hydrostatique effective :

$$F = \rho g h_c S = 1000 \times 9.81 \times 1.4 \times 1.39 = 19.09 \text{ KN}$$

Le moment d'inertie de la surface immergée calculé par rapport à l'axe passant par le centre de gravité d'une forme rectangulaire :

$$I_0 = \frac{bl^3}{12} = \frac{bl^3}{12} = \frac{1 \times 1.39^3}{12} = 0.22 \text{ m}^4$$

Où,

$$y_c = \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{l}{2} = \frac{1}{0.866} + \frac{1.39}{2} = 1.86 \text{ m}$$

Les coordonnées du centre de pression (centre de poussée) :

$$y_D = y_c + \frac{I_0}{y_c S} = 1.86 + \frac{0.22}{1.86 \times 1.39} = 1.95 \text{ m}$$

### ➤ Cas du triangle

La hauteur de la porte :  $l = \frac{h-a}{\sin 60^\circ} = \frac{2-0.8}{\sin 60^\circ} = 1.39 \text{ m}$

La profondeur d'immersion du centre de gravité du triangle :

$$h_c = a + \frac{2l}{3} \sin \alpha = 0.8 + \frac{2 \times 1.39}{3} \times 0.866 = 1.6 \text{ m}$$

La section mouillée :  $S = \frac{1}{2} b \times l = \frac{1}{2} \times 1 \times 1.39 = 0.695 \text{ m}^2$

L'intensité de la force de pression hydrostatique effective :

$$F = \rho g h_c S = 1000 \times 9.81 \times 1.6 \times 0.695 = 10908 \text{ N} = 10.908 \text{ KN}$$

Les coordonnées du centre de pression (centre de poussée) :

$$y_D = y_c + \frac{I_0}{y_c S} = \left( \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{2l}{3} \right) + \frac{\frac{bl^3}{36}}{\left( \frac{a}{\sin \alpha} + \frac{2l}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \times b \times l \right)} =$$

$$\left( \frac{1}{0.866} + \frac{2 \times 1.39}{3} \right) + \frac{\frac{1 \times 1.39^3}{36}}{\left( \frac{1}{0.866} + \frac{2 \times 1.39}{3} \right) \left( \frac{1}{2} \times 1 \times 1.39 \right)} = 2.13 \text{ m}$$



### Exercice N°13.

Déterminer l'intensité et le point d'application de la force de pression (effective) hydrostatique de l'eau qui s'exerce sur la paroi la verticale rectangulaire de largeur  $b = 2$  m, si la profondeur de l'eau  $h = 3$  m. dessiner l'épure de pression.

**Solution :**

Lors de la résolution l'angle d'inclinaison de la paroi par rapport à l'horizon  $\alpha = 90^\circ$  ;  
Verticale :  $\sin 90^\circ = 1$ .

La force de pression hydrostatique :

$$F = \rho g h_c S = \rho g \frac{h}{2 \times \sin \alpha} \times bh = 1000 \times 9.81 \frac{3}{2 \times 1} 2.3 = 88290 \text{ N}$$

$$h_D = h_c + \frac{l_0}{h_c \times S} = \frac{h}{2} + \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2} bh} = \frac{2}{3} h = 2 \text{ m}$$

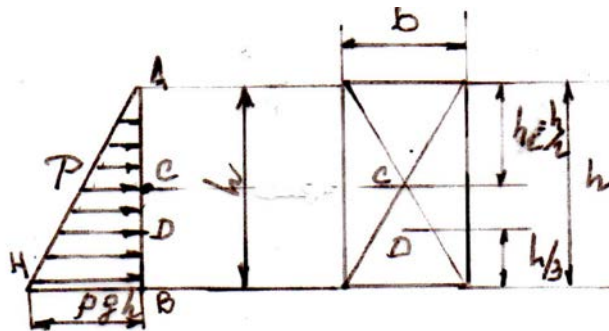
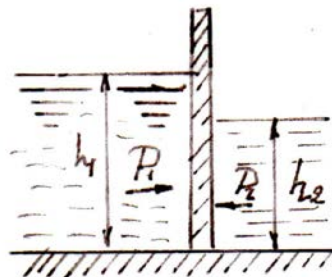


Figure 10. Schéma de l'exercice N°17

### Exercice N°14.

Caniveau d'eau rectangulaire de largeur  $B = 3,5$  m bloqué par une porte élevatrice (Fig. 6), placé en parallèle des côtés latéraux du canal. Déterminer la force résultante de pression hydrostatique sur la porte  $F$  et la force  $R$  pour soulever la porte, si le coefficient de frottement de la porte  $f = 0,35$  ; poids de la porte  $G = 250$  kgf ; le niveau d'eau en amont  $h_1 = 4,0$  m ; le niveau d'eau en aval à droite  $h_2 = 1,2$  m. Le coefficient de frottement de la porte est égal à 0,35.



**Figure 11.** Schéma de l'exercice N°18

**Solution :**

La résultante des forces de pression hydrostatique qui s'exercent sur la porte :  $F = F_1 - F_2$

$$F_1 = \rho g h_c S = \rho g \frac{h_1}{2} b h_1 = 1000 \times 9.81 \times \frac{4}{2} \times 3.5 \times 4 = 274.68 \text{ KN}$$

$$F_2 = \rho g h_{c_2} S = \rho g \frac{h_2}{2} b h_2 = 1000 \times 9.81 \times \frac{1.2}{2} \times 3.5 \times 1.2 = 24.72 \text{ KN}$$

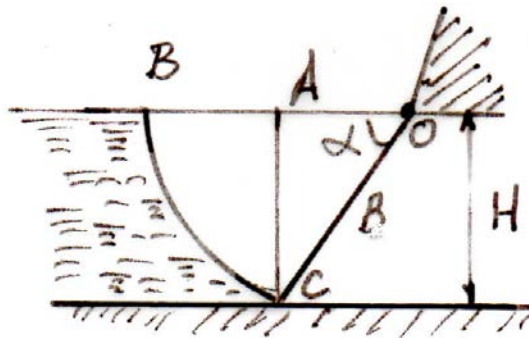
$$F = F_1 - F_2 = 274.68 - 24.72 = 249.96 \text{ KN}$$

La force R pour soulever la porte :

$$R = G + f \times F = 250.81 + 0.35 \times 249960 = 89938.50 \text{ N} \approx 90 \text{ KN}$$

**Exercice N°15.**

Calculer l'intensité et la direction de la force de pression hydrostatique par mètre de longueur sur l'axe de rotation O. La surface courbe est de rayon  $R = 2,5 \text{ m}$ , et d'angle  $\alpha = 60^\circ$



**Figure 12.** Schéma de l'exercice N°19

**Solution**

Nous avons une surface courbe, par conséquent on utilise la formule :  $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

La composante horizontale

$$F_x = \rho g \times h_c S_z = \rho g \times \left( \frac{H}{2} \right) \times b \times H = \rho g \times H^2 \frac{b}{2}$$

Pour déterminer la charge  $H$ , considérons le triangle rectangle  $OAC$  :  $OA = \frac{R}{2} = 1.25 \text{ m}$  puisque se trouve à l'opposé de l'angle  $ACO$  égal à  $30^\circ$ . Alors le côté  $AC = H$  du triangle  $OAC$  est déterminé par le théorème de Pythagore :

$$H = \sqrt{R^2 - OA^2} = \sqrt{2.5^2 - 1.25^2} = 2.16 \text{ m}$$

$$F_x = \rho g \times h_c \times S_z = \rho g \times H^2 \frac{b}{2} = 1000 \times 9.81 \times 2.16^2 \frac{1}{2} = 23.3 \text{ KN}$$

La composante verticale :

$$F_z = \rho g \times W = \rho g \times S_{ABC} \times b$$

Afin de déterminer la surface ABC, examinons le segment ABC. La surface ABC ( $S_{ABC}$ ) est égale à la différence  $S_{OBC}$  et la surface du triangle droit OAC.

$$S_{ABC} = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{\alpha}{360} - OA \times \frac{AC}{2} = \frac{\pi 4R^2}{4} \frac{\alpha}{360} - \frac{RH}{4} = 3.14 \times 2.5^2 \frac{60}{360} - 2.5 \times \frac{2.16}{4} = 1.89 \text{ m}^2$$

$$F_z = 1000 \times 9.81 \times 1.89 \times 1 = 18.9 \text{ KN}$$

Donc la valeur de la force hydrostatique s'exerçant sur la paroi courbe est donnée par la relation suivante

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_z^2}$$

Sur la base de la propriété de la pression hydrostatique, on peut affirmer que la force F est dirigée radialement vers le segment (vanne) normale au cercle. L'angle d'inclinaison  $\varphi$  de la force F par rapport à l'horizontale est déterminé à partir de la fonction trigonométrique selon la forme suivante :

$$\text{tg } \varphi = \frac{F_z}{F_x} = \frac{18.9}{23.3} = 0.811 \quad \text{Donc } \varphi = 39.19^\circ$$

## Chapitre III : Cinématique des fluides

### III.1. Définition

La cinématique est une description analytique d'un système en mouvement. C'est pourquoi dans ce chapitre, nous nous intéressons au mouvement des fluides en fonction du temps, indépendamment des causes qui les provoquent, c'est à dire sans prendre en compte les forces qui sont à leur source. On cherche à accéder à une description de l'écoulement en termes de trajectoires, vitesses, accélérations et évolutions spatio-temporelles. Il y a deux explications à ce processus.

1. Description lagrangienne (Louis-Joseph Lagrange, 1736-1813)
2. Description eulérienne (Léonard Euler, 1703 –1783)

#### III.1.1 Description de Lagrange

La description lagrangienne consiste à suivre la position de chaque particule dans l'espace en fonction du temps. On étudie le vecteur position, vitesse et accélération, et éventuellement la trajectoire ou le chemin suivi par chaque particule dans leurs mouvements en fonction du temps.

Compte tenu du nombre de particules fluides, cette description n'est pas souvent envisageable.

Le mouvement de chaque particule est connu si on a les vecteurs position, vitesse et accélération :

$$\left. \begin{aligned} x &= x(x_o, y_o, z_o, t) \\ y &= y(x_o, y_o, z_o, t) \\ z &= z(x_o, y_o, z_o, t) \end{aligned} \right\} \quad \text{(III.1)}$$

- La masse volumique du liquide  $\rho$  est déterminée de la même manière :

$$\rho = \rho(x_o, y_o, z_o, t) \quad \text{(III.2)}$$

Ou :  $x_o, y_o, z_o$ - les variantes de Lagrange

- Les vitesses de la particule fluide sont déterminées comme suit :

$$u_x = \frac{\partial x}{\partial t}; u_y = \frac{\partial y}{\partial t}; u_z = \frac{\partial z}{\partial t} \quad \text{(III.3)}$$

Ou :  $u_x; u_y; u_z$  = Projections des vitesses sur les axes X, Y, Z

- Les accélérations de la particule fluide sont déterminées comme suit :

$$\left. \begin{aligned} a_x &= \frac{\partial u_x}{\partial t} = \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \\ a_y &= \frac{\partial u_y}{\partial t} = \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \\ a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} = \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.4})$$

### III.1.2. Description d'Euler

La description d'Euler consiste à trouver l'ensemble des vitesses associées à chaque point de l'espace fluide à tout instant  $t$ . A chaque point  $M$  est associée une vitesse  $\vec{V}_M = (x, y, z, t)$  susceptible d'évoluer dans le temps. L'écoulement est alors décrit par un ensemble de vecteurs appelé « champ de vecteurs vitesse ». C'est donc une image instantanée de l'écoulement qui est utilisée à chaque instant.

On utilise alors la description d'Euler pour caractériser à chaque instant, et en chaque point de l'espace la vitesse et l'accélération des particules fluides.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= u_x(x, y, z, t) \\ u_y &= u_y(x, y, z, t) \\ u_z &= u_z(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.5})$$

Où :  $x, y, z$  sont les variables d'Euler.

Lors d'un écoulement stationnaire la trajectoire du courant et la ligne de courant se coïncide. L'équation de ligne de courant d'un écoulement stationnaire prend la forme :

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z)} \quad (\text{III.6})$$

On utilise alors la description d'Euler pour caractériser à chaque instant, et en chaque point de l'espace la vitesse et l'accélération des particules fluides.

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{Vitesses des particules fluides (III.7)}$$

$$\begin{aligned}
 a_x &= \frac{du_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\
 a_y &= \frac{du_y}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} \\
 a_z &= \frac{du_z}{dt} = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t}
 \end{aligned}
 \left. \vphantom{\begin{aligned} a_x \\ a_y \\ a_z \end{aligned}} \right\} \text{Accélérations des particules fluides (III.8)}$$

### III.1.3. Lignes de courant

On appelle ligne de courant, toute courbe dont la tangente en chacun de ses points est, à chaque instant et localement, colinéaire au vecteur vitesse du champ d'écoulement. C'est une courbe qui dérive de la description eulérienne.

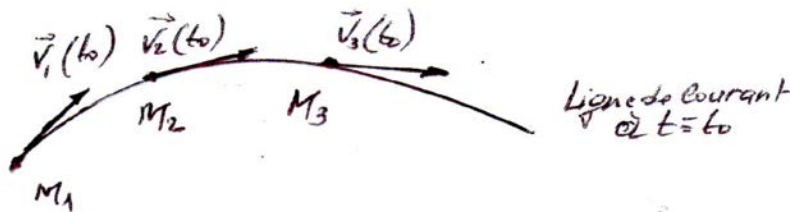


Figure III.1. Ligne de courant à  $t=t_0$

Les lignes de courant évoluent dans le temps au même titre que le champ des vecteurs vitesse. Pour tracer les lignes de courant, on prend une photo instantanée de l'écoulement, et on trace les tangentes aux vecteurs vitesse.

Donc l'équation d'une ligne de courant en un instant  $t$  fixé est donnée par la relation suivante :

$$\frac{dx}{u_x(x, y, z)} = \frac{dy}{u_y(x, y, z)} = \frac{dz}{u_z(x, y, z)} \quad \text{(III.9)}$$

### III.1.4. Tube de courant

On appelle tube de courant l'ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé.

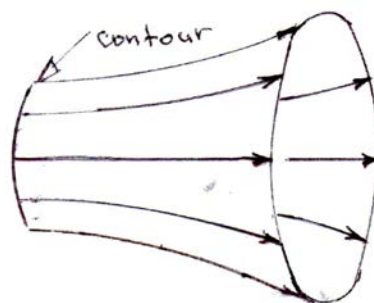


Figure III.2. Tube de courant.

### III.1.5. Trajectoire

On appelle trajectoire d'une particule de fluide la courbe décrite au cours du temps par la particule. C'est donc le lieu géométrique des positions successives occupées par une particule dans le temps. Les trajectoires découlent de la description lagrangienne.

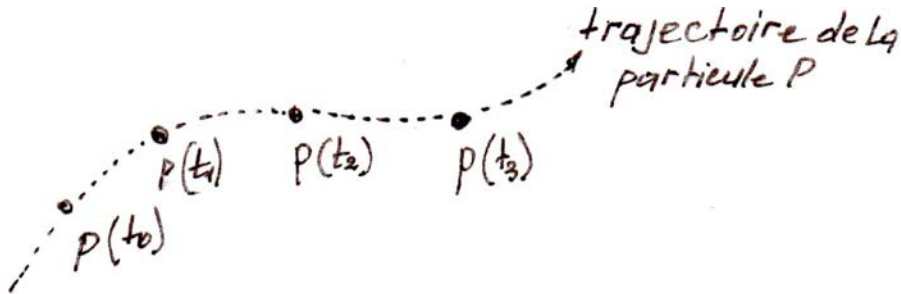


Figure III.3. Trajectoire de la particule

La trajectoire peut être visualisée par l'injection d'une goutte de colorant dont on suit le mouvement. Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont données par les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \frac{dx}{dt} \\ u_y &= \frac{dy}{dt} \\ u_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \right\} \longrightarrow \frac{du_x}{u_x} = \frac{du_y}{u_y} = \frac{du_z}{u_z} = dt \quad (\text{III.10})$$

Dans ces équations, le temps est une variable ! Il ne faut pas confondre ligne de courant et trajectoire. Ce sont deux notions fondamentalement différentes. Pour des écoulements permanents, les lignes de courant coïncident avec les trajectoires.

### III.1.6. Lignes d'émission

On appelle ligne d'émission est l'ensemble de toutes les particules ayant coïncidées en un instant antérieur avec un point fixé  $E$ .

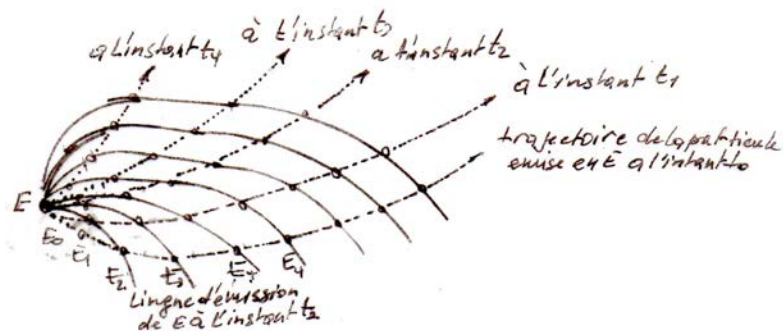


Figure III.4. Lignes d'émission des particules.

Pour visualiser les lignes d'émission, on peut injecter du colorant de manière continue au point

E. les courbes colorées (en vert) correspondent aux lignes d'émission.

### III.1.7. Ecoulement permanent

Un écoulement est dit permanent ou stationnaire lorsque le champ de vecteurs vitesse est statique (il ne varie pas dans le temps). Plus rien ne dépend explicitement du temps. Dans ce cas :

- Les lignes de courant sont fixes dans l'espace ;
- Les trajectoires coïncident avec les lignes de courant ;
- Les lignes d'émission coïncident également avec les lignes de courant.

## III.2. Equation de continuité

### a) cas général

L'équation de continuité traduit le principe de la conservation de la masse.

Soit un volume élémentaire de forme parallélépipédique de côtés  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  dans un fluide en mouvement.

Au début, calculons dans la direction de l'axe  $x$ . La masse du fluide qui traverse la façade  $ABKE$  pendant un temps  $dt$ , est égal :  $\rho \times u_x \times dy \times dz \times dt$

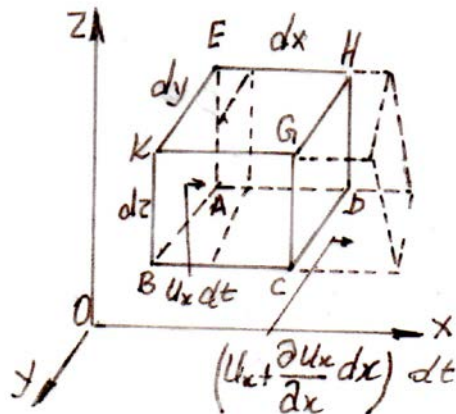


Figure III.5. Variation des masses fluide entrant et sortant d'un élément fluide

La masse de fluide qui sort de la face  $DCGH$  pendant le temps  $dt$

$$\rho \times u_x \times dy \times dz \times dt + \frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} dx \times dy \times dz \times dt \quad (\text{III.11})$$

La variation de la masse dans le volume élémentaire pendant le mouvement sur la projection de l'axe  $OX$  :

$$\rho \times u_x \times dy \times dz \times dt - \left[ \rho \times u_x + \frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} \right] \times dy \times dz \times dt = - \frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} \times dx \times dy \times dz \times dt$$

(III.12)



Par analogie suivant les deux autres axes Y et Z, on détermine les variations de la masse dans le volume élémentaire :

$$-\frac{\partial(\rho \times u_y)}{\partial y} \times dy \times dx \times dz \times dt \quad \text{Suivant l'axe y} \quad (\text{III.13})$$

$$-\frac{\partial(\rho \times u_z)}{\partial z} \times dz \times dy \times dx \times dt \quad \text{Suivant l'axe z} \quad (\text{III.14})$$

Au totale à travers les six faces du parallélépipède, et on aura la relation suivante :

$$-\left[ \frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \times u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \times u_z)}{\partial z} \right] \times dx \times dy \times dz \times dt \quad (\text{III.15})$$

La variation de la masse dans un volume constant est provoquée par la variation de la masse volumique :

$$d\rho = \frac{\partial \rho}{\partial t} dt \quad (\text{III.16})$$

La variation de la masse pendant le temps  $dt$  exprimée en fonction de la variation de la masse volumique :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} dt \times dx \times dy \times dz \quad (\text{III.17})$$

En égalisant les équations (III.15) et (III.17) on obtient :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \times u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \times u_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.18})$$

En considérant que :

$$\frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} = \frac{\rho \times \partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u_x \quad ; \quad \frac{\partial(\rho \times u_y)}{\partial y} = \frac{\rho \times \partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho}{\partial y} u_y \quad ;$$

$$\frac{\partial(\rho \times u_z)}{\partial z} = \frac{\rho \times \partial u_z}{\partial z} + \frac{\partial \rho}{\partial z} u_z$$

Et

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{dz}{dt} = \frac{d\rho}{dt}$$

Alors, on aura

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} u_x + \frac{\partial \rho}{\partial y} u_y + \frac{\partial \rho}{\partial z} u_z$$

Après transformation nous aurons en finalité, l'équation de continuité sous la forme suivante :

$$\frac{d\rho}{dt} = \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (\text{Équation de continuité}) \quad (\text{III.19})$$

Pour un fluide incompressible  $\rho = \text{const}$  et  $\frac{d\rho}{dt} = 0$  ; l'équation de continuité devient :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.20})$$

Où

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \text{div}u \quad (\text{III.21})$$

L'équation de continuité peut s'écrire sous forme :

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} + \text{div}u = 0 \quad (\text{III.22})$$

*divu* - Le divergent, valeur scalaire.

Pour un fluide incompressible :  $\rho = \text{const} : \text{div}u = 0$

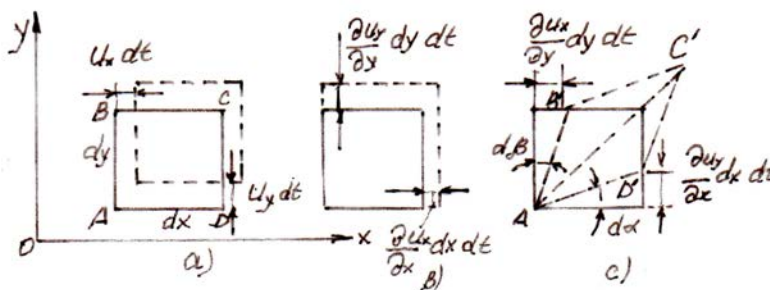
Cas de mouvement stationnaire de fluide compressible  $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$  , l'équation s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{\partial(\rho \times u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \times u_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \times u_z)}{\partial z} = 0 \quad (\text{III.23})$$

### b) Analyse d'un élément fluide en mouvement

Au sein de l'écoulement, chaque particule fluide subit de changement de position et déformation dans l'espace ce qui implique son changement de volume et de forme.

Les déformations subites par élément fluide de forme parallélépipédique sont : déformation de volume et déformation angulaire.



**Figure III.6.** Déformation de volume d'élément fluide de forme parallélépipédique

La déformation de volume d'élément fluide de forme parallélépipédique est caractérisée par élongation (ou contraction) d'arêtes.

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = dx \times dt ; \quad \frac{\partial u_y}{\partial y} = dy \times dt ; \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} = dz \times dt$$

La vitesse d'élongation de l'accroissement relatif de longueur est égale respectivement :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} ; \frac{\partial u_y}{\partial y} ; \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

La déformation angulaire est caractérisée par la variation des angles. Les angles droit composés d'arêtes du parallélépipède  $AB$  et  $AD$  dans le plan  $XOY$  subissent pendant l'écoulement une somme de déformation d'angles  $+d\beta$ .

La déformation de l'angle entre l'axe  $OX$  et l'arête  $AD'$  est trouvée comme suit :

$$d\alpha \approx \tan \alpha = \frac{\frac{\partial u_y}{\partial x} \times dx dt}{dx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dt$$

La déformation de l'angle de la particule fluide entre l'axe  $OY$  et l'arête  $AB'$  est trouvée comme suit :

$$d\beta \approx \tan d\beta = \frac{\frac{\partial u_x}{\partial y} \times dy dt}{dy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt \quad , \text{ où}$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \text{Le taux d'élongation sur l'axe } OY$$

La déformation totale s'écrit de la façon suivante :

$$d\alpha + d\beta = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt + \frac{\partial u_x}{\partial y} dt$$

Le taux de déformation angulaire dans le plan  $XOY$  est égal :

$$\frac{d\alpha + d\beta}{dt} = \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

Pour les taux de déformation angulaire dans le plan  $YOZ$  et  $XOZ$  sont égales :

$$\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} ; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

En générales les taux de déformation angulaire pour un mouvement de déformation tridimensionnel se présentent sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \theta_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right); \\ \theta_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right); \\ \theta_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.24})$$

L'index de taux de déformation angulaire indique, que la déformation angulaire se fait dans le plan normal à l'axe donnée des coordonnées.

Le taux de rotation du volume de liquide  $ABCD$  autour de l'axe  $OZ$  :

$$\omega_z = \frac{1}{2} \frac{(d\alpha - d\beta)}{dt} \quad \text{ou} \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Le taux de rotation volume de liquide  $ABCD$  en mouvement de rotation tridimensionnel :

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.25})$$

Le mouvement du volume de liquide représente la somme des mouvements de translation, de déformation et de rotation par rapport à certain axe instantané qui passe par le champ.

Afin de pouvoir utiliser ce principe pour toutes les particules, examinons les projections de vitesses dans deux points appartenant à la même particule fluide.

Soit le premier point  $M$ , Le second  $G$  situe à une distance  $\Delta l$  l'un de l'autre.

$$u_x = u_{xM} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u_x}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u_x}{\partial z} \Delta z$$

$u_{xM}$  : est la projection du champ de vitesse du point  $M$ .

$\frac{\partial u_x}{\partial z}$  et  $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ , peuvent être exprimées dans la formes suivantes :

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (\text{III.26})$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (\text{III.27})$$

Alors :

$$\begin{aligned}
u_{xG} = u_{xM} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \Delta y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \Delta z \\
- \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \Delta y + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \Delta z
\end{aligned} \tag{III.28}$$

En tenant compte de l'introduction antérieure de la notation :

$$u_{xG} = u_{xM} + \frac{\partial u_x}{\partial x} \Delta x + (\theta_z \Delta z + \theta_y \Delta y) + (\omega_y \Delta z - \omega_z \Delta y) \tag{III.29}$$

Les composantes de vitesse selon X et Y sont obtenues de la façon suivante :

$$u_{yG} = u_{yM} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \Delta y + (\theta_z \Delta x + \theta_x \Delta z) + (\omega_z \Delta x - \omega_x \Delta z) \tag{III.30}$$

$$u_{zG} = u_{zM} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \Delta z + (\theta_y \Delta x + \theta_x \Delta y) + (\omega_x \Delta y - \omega_y \Delta x) \tag{III.31}$$

Avec  $u_{xM}, u_{yM}, u_{zM}$  = projections de vitesse des particules passant par l'origine.

Le mouvement des particules fluides peuvent être représentées comme la somme des mouvements de translation, de déformation ( élongation et déformation angulaire) et rotation autour d'un axe instantané, passant par l'origine .

Le mouvement de translation est caractérisé par les composantes de vitesses  $u_x ; u_y ; u_z$  .

Le mouvement de déformation est caractérisé par les taux de déformation linéaire

$\frac{\partial u_x}{\partial x}; \frac{\partial u_y}{\partial y}; \frac{\partial u_z}{\partial z}$  , et les taux de déformation angulaire :

$$\left. \begin{aligned}
\theta_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \\
\theta_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\
\theta_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)
\end{aligned} \right\} \tag{III.32}$$

Les vitesses angulaires de rotation des particules fluides autour d'un axe instantané passant par l'origine. qui passe par le champ

$$\left. \begin{aligned}
\omega_x &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\
\omega_y &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\
\omega_z &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)
\end{aligned} \right\} \tag{III.33}$$

Le vecteur vitesse angulaire de rotation  $\omega$  est toujours normale au plan de rotation et donné par la relation suivante :

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (\text{III.34})$$

Le double des composants de vitesse angulaire de rotation  $\omega$  s'appelle composants de vecteur tourbillon  $\Omega$ .  $\Omega = 2\omega$

La ligne tourbillon est une ligne tangente en chacun de ses points au vecteur tourbillon.

**Definition :**

On appelle tube tourbillon l'ensemble des lignes tourbillons s'appuyant sur une courbe fermée.

L'équation de forme différentielle de La ligne tourbillon s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{dx}{\omega_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{\omega_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{\omega_z(x, y, z, t)} \quad (\text{III.35})$$

La ligne de courant, comme la ligne de tourbillon sont constantes en fonction du temps , si le mouvement est stationnaire. Si le mouvement est non stationnaire , la configuration de la ligne tourbillon peut changer en fonction du temps.

**Note :**

Le caractère du mouvement des particules fluide peut être tourbillonnaire ou potentiel( sans rotation)

- Cas de Mouvement potentiel ( sans rotation).

Puisque  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ , alors l'équation (III.33) devient sous la forme suivante (III.36) :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial y} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_y}{\partial x} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.36})$$

De(III.33) doit exister une fonction  $\phi$  qui satisfait les conditions :

$$u_x = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}; u_y = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}; u_z = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (\text{III.37})$$

L'équation (III.37) est la fonction de potentiel de vitesse .

la dérivé partielle du second ordre de la fonction de potentiel de vitesse s'écrit de la manière suivante :

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial u_x}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 \frac{\partial u_y}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \\
 \frac{\partial u_z}{\partial y} &= -\frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}
 \end{aligned} \right\} \quad (\text{III.38})$$

**Note** : Le signe moins indique que le mouvement se fait du point avec potentiel de vitesse supérieure vers le point de valeur potentiel de vitesse inférieure. En générale le potentiel de vitesse  $\phi = \phi(x, y, z, t)$  ne dépend pas seulement des coordonnées  $x, y, z$  mais aussi du temps  $t$ , ainsi qu'il peut être un mouvement stationnaire et non stationnaire.

## Exercices avec solutions-Partie cinématique des fluides

### Exercice N1

Le mouvement du fluide est spécifié par la méthode de Lagrange ( $x, y, z$  – Coordonnées cartésiennes,  $a, b, c$ - variables de Lagrange,  $t$  - temps).

$$x = a.\cos(\alpha t + b); \quad y = a.\sin(\alpha t + b); \quad z = c + \omega t$$

Description du mouvement dans les variables d'Euler

**Solution :**

$$V_x = \frac{dx}{dt} = -a.\alpha.\sin(\alpha t + b) = -\alpha.y$$

$$V_y = \frac{dy}{dt} = a.\alpha.\cos(\alpha t + b) = \alpha.x$$

$$V_z = \frac{dz}{dt} = \omega$$

### Exercice N2

Selon des projections de vitesse données :

$$u_x = \frac{x}{t+1}; \quad u_y = \frac{2y}{t+1}; \quad u_z = \frac{3z}{t+1}$$

Déterminer l'accélération de la particule fluide au point A de coordonnées  $x = 2; y = 9;$

$z = 3$ , au moment  $t = 2s$ .

**Solution :**

$$a_x = \frac{du_x}{dt} + u_x \frac{du_x}{dx} + u_y \frac{du_x}{dy} + u_z \frac{du_x}{dz}$$

Nous avons

$$a_x = -\frac{x}{(t+1)^2} - \frac{x}{(t+1)^2} + \frac{2x}{(t+1)} = 0$$

De façon analogue pour  $a_y$  et  $a_z$

$$a_y = -\frac{2y}{(t+1)^2} + \frac{4y}{(t+1)^2} = \frac{2y}{(t+1)^2};$$

$$a_z = -\frac{3z}{(t+1)^2} + \frac{9z}{(t+1)^2} = \frac{6z}{(t+1)^2};$$

La résultante de l'accélération de la particule :



$$a = \vec{a} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \frac{\sqrt{4y^2 + 36z^2}}{(1+t)^2}$$

Pour le point A nous avons :

$$a_A = \frac{\sqrt{4 \cdot 9^2 + 36 \cdot 3^2}}{(2+1)^2} = 2,85 \text{ m/s}^2$$

### Exercice N3

Le champ de vitesses est donné par les projections :

$u_x = \frac{x}{1+t}$ ;  $u_y = \frac{2y}{1+t}$ ;  $u_z = 0$ . Trouver l'équation de la ligne de courant, et la trajectoire de la particule, qui passe au moment  $t = 0$  par le point dans l'espace de coordonnées  $x = 0$  et  $y = 4$ .

#### Solution :

Le différentiel de l'équation de la trajectoire (III.10) du mouvement de la particule pour le champ donné :

$$\frac{dx}{x} = (1+t) = dt \text{ et } \frac{1}{2} \frac{dy}{y} (1+t) = dt ,$$

$$\text{d'où } \frac{dx}{x} = \frac{dt}{1+t} \text{ et } \frac{1}{2} \frac{dy}{y} = \frac{dt}{1+t} .$$

Après intégration :

$$\ln x = \ln(1+t) + \ln C_1$$

$$\frac{1}{2} \ln y = \ln(1+t) + \ln C_2$$

$$\text{Ou } x = C_1(1+t) ; \sqrt{y} = C_2(1+t)$$

$$\text{Pour } t=0, x=2, y=4 \Rightarrow C_1 = 2, C_2 = 2$$

$$\text{Donc : } x = 2(1+t), \sqrt{y} = 2(1+t)$$

En éliminant le temps  $t$ , l'équation de la trajectoire devient  $x - \sqrt{y} = 0$

Afin de déterminer la ligne de courant, on utilise l'équation (III.9)

$$\frac{dx}{x} = (1+t) = \frac{1}{2} \frac{dy}{y} (1+t) . \text{ Après intégration } x = C\sqrt{y} .$$

La ligne de courant qui passe par le point de coordonnées  $x = 2, y = 4$  de constante arbitraire

$C = 1$  et  $x - \sqrt{y} = 0$  donc la ligne de courant coïncide avec la trajectoire.

## Chapitre IV. La dynamique des fluides dans les conduites fermées sous pression

### IV.1. Dynamique des fluides incompressibles

L'hydrodynamique s'occupe des lois des mouvements mécaniques des fluides et des différentes méthodes d'application de ces lois à la résolution des problèmes relatifs à la pratique de l'aménagement des eaux. Dans l'hydrodynamique, on étudie le liquide qui remplit totalement un espace sans vide ni rupture.

En écoulement du liquide agissent :

- 1- Les forces surface (force de pression et de frottement intérieur) ;
- 2- Les forces de masse proportionnelles à la masse du liquide en mouvement, c'est-à-dire les forces de gravité, les forces d'inertie du mouvement d'entraînement et la force de Coriolis.

En général, les forces sont connues, alors que les grandeurs à déterminer sont inconnues : pression intérieure et vitesses de mouvement aux différents points du liquide.

On appelle pression hydrodynamique la pression intérieure dans un liquide en mouvement. L'objectif principal de l'hydrodynamique est de déterminer la vitesse, la pression hydrodynamique, leurs relations et les résistances en écoulement du liquide.

Parfois, on considère dans l'hydrodynamique que le liquide est privé de viscosité (parfait) et incompressible. Une telle supposition permet de simplifier le processus d'obtention des solutions recherchées qu'on doit corriger ultérieurement en fonction de la viscosité du liquide.

L'écoulement non permanent est caractérisé par le fait que dans chaque point donné de l'espace la vitesse du mouvement et la pression hydrodynamique varient dans le temps, on peut inscrire que  $V$  et  $P$  sont fonction non seulement du site du point, mais également du temps durant lequel on étudie l'écoulement :

$$V = f_1(x, y, z, t) ; P = f_2(x, y, z, t).$$

L'écoulement permanent est celui auquel la vitesse du mouvement et la pression hydrodynamique ne varient pas dans chaque point donné dans le temps, mais elles peuvent être différentes dans d'autres points,  $U$  et  $P$  ne dépendent que des coordonnées des points examiner.

$$V = \varphi_1(x, y, z) ; P = \varphi_2(x, y, z)$$

L'écoulement permanent se subdivise en écoulement uniforme et non uniforme (varié). L'écoulement uniforme est caractérisé par le fait que les vitesses, la forme et la surface de la section du courant ne varient pas le long du courant, par conséquent la pente de la surface libre est égale à la pente du fond.

L'écoulement non uniforme diffère de la variabilité des vitesses, des profondeurs et des aires de sections du courant en sa longueur.

L'écoulement en charge a lieu dans le cas où le courant est limité par tout par la surface solide, la pression hydrodynamique en chaque point étant différente de celle atmosphérique et peut être supérieure ou inférieure à celle-ci.

L'écoulement à surface libre diffère par le fait que le courant possède une surface libre soumise à la pression atmosphérique.

On s'intéresse dans ce chapitre aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides parfaits et réels incompressibles à savoir :

- L'équation de continuité (conservation de la masse) ;
- Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie).

#### IV.2. Caractéristiques hydraulique du courant. Débit et vitesse moyenne

On appelle section liquide la section transversale du courant normale à toutes les lignes de courant qui la traverse.  $S = \int_S dS$

Le périmètre mouillée est une ligne de contact du liquide avec la surface du conduit dans la section liquide donnée. La longueur de cette ligne est désignée par  $\chi$ .

On appelle le rayon hydraulique R une caractéristique très importante de la section liquide représentant le rapport de la section liquide S au périmètre mouillée  $\chi$  :

$$R = \frac{S}{\chi} \quad (\text{IV.1})$$

En cas d'un écoulement en charge dans une conduite circulaire, le rayon hydraulique est égal à :

$$R = \frac{S}{\chi} = \frac{\pi \times d^2}{4\pi \times d} = \frac{d}{4} \quad (\text{IV.2})$$

Ou :  $R = \frac{r}{2}$

Avec  $r, d$  - rayon et diamètre de la conduite en mètre.

Pour le courant à surface libre dans un canal de section transversale rectangulaire de largeur b, de profondeur h, le rayon hydraulique est égal :

$$R = \frac{S}{\chi} = \frac{b \times h}{b + 2h} = h \left( 1 + \frac{2h}{b} \right) \quad (\text{IV.3})$$

Le débit du liquide est le volume du liquide passant par unité de temps par la section d'écoulement donné du courant.

$$Q = \int_S dQ = \int_S u \times dS \quad (\text{IV.4})$$

Dans la section liquide du courant la répartition des vitesses est non uniforme (Voir figure IV.1).

Dans la plupart des cas il est difficile de caractériser la variation de la vitesse dans une section liquide, et impossible d'avoir une relation théorique. C'est pourquoi on introduit la notion de la vitesse moyenne du courant pour les calculs pratiques.

La vitesse moyenne du courant dans une section donnée est une vitesse imaginaire du courant égale pour tous les points dans la section d'écoulement donnée qui assure un débit par la section d'écoulement, égal à celui réel.

$$Q = \int_S u \times dS = V \times S \quad (IV.5)$$

Le débit du courant dans la section donnée est égal au produit de l'aire de la section liquide du courant  $S$  par vitesse moyenne  $V$  dans cette section.

$Q$  – Débit volumique (volume par unité de temps), Unité SI =  $m^3/s$ .

Il existe le débit volumique  $Q_V(Q)$ , le débit de poids  $Q_G$  et le débit massique  $Q_m$ .

$$Q_V = \frac{W}{t}, m^3 / s$$

$$Q_G = \frac{G}{t} = \frac{\rho g W}{t}, N / s$$

$$Q_m = \frac{m}{t} = \frac{\rho W}{t}, kg / s$$

Où  $W$  est le volume de liquide transitant à travers une section pendant le temps  $t$ .

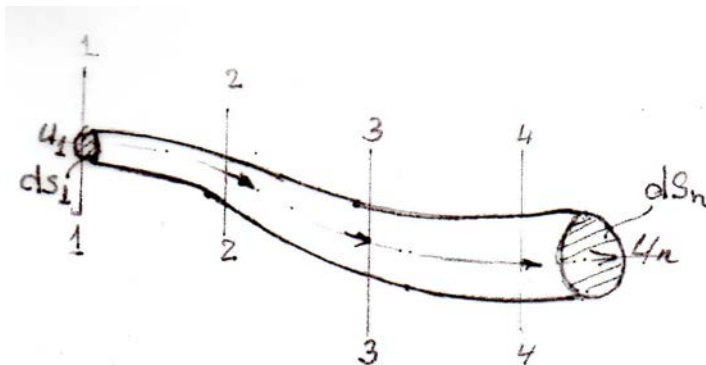
Lors de la réalisation de calculs hydrauliques, le débit volumétrique est le plus souvent utilisé.

### IV.3. Equation de continuité pour un filet liquide parfait incompressible

En hydraulique on examine en général les courants sans ruptures ni vides non remplis de liquides, autrement dit le liquide occupe tout l'espace.

Examinons une veine de fluide parfait incompressible en écoulement permanent. Découpons les sections 1-1 et 2-2 disposées à une distance  $dx$  l'une de l'autre. Pendant le temps  $dt$  à travers la section  $dS_1$  de la veine du liquide s'écoule un volume  $dS_1 u_1 dt$ . En même temps  $dt$  à travers la section  $dS_2$  sort un volume de liquide  $dS_2 u_2 dt$ . En tenant compte de ce que la forme du filet liquide ne change pas dans le temps (première propriété d'un filet liquide), l'arrivée et le départ transversaux sont impossibles (deuxième propriété d'un filet liquide), le liquide est incompressible.

Cela implique que le volume du liquide rentrant par la section 1-1 pendant  $dt$  est égale au volume sortant de la section 2-2,



**Figure (IV.1).** Schéma explicative de l'équation de continuité :

pour filet liquide

$$dS_1 \times u_1 \times dt = dS_2 \times u_2 dt \quad (\text{IV.6})$$

Ou,

$$dS_1 \times u_1 = dS_2 \times u_2 \quad (\text{IV.7})$$

Les rapports identiques peuvent être écrits pour les sections 3-3 et 4-4, donc :

$$dS_1 \times u_1 = dS_2 \times u_2 = dS_3 \times u_3 \dots = \text{const} \quad (\text{IV.8})$$

Ceci est l'équation de continuité pour un filet liquide d'un liquide incompressible en mouvement permanent.

A partir de l'équation de continuité pour un filet liquide on obtient l'équation de continuité pour un courant de liquide :

$$dS_1 \times u_1 = dS_2 \times u_2 \quad (\text{IV.9})$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{S_2}{S_1} \quad (\text{IV.10})$$

#### IV.4. Equation d'Euler du mouvement de fluide parfait

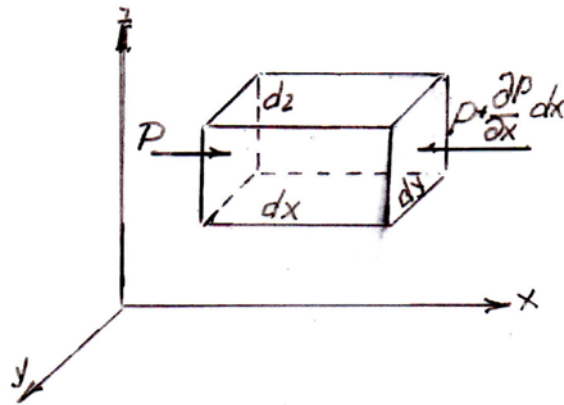
Comme a été cité déjà le problème principal de l'hydrodynamique est l'étude du mouvement du fluide caractérisé par les vitesses des particules et leurs pressions hydrodynamiques. Pour résoudre ce problème, est nécessaire de trouver l'équation reliant l'accélération et les forces s'exerçant sur la particule du fluide.

Examinons le mouvement d'un fluide parfait de masse volumique  $\rho$ . Pour formuler la loi de répartition des forces, examinons un volume élémentaire de liquide de forme parallélépipède avec arêtes  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , (voir figure IV.2).

L'équation du mouvement sur l'axe  $x$  : désignons par  $P$  la pression qui s'exerce sur le centre de gravité de la face ABCD. Alors la force de pression exercée sur cette face est de  $Pdydz$ .

La pression  $P = f(x, y, z, t)$

Sur la face EGFN, la force de pression est  $\left( p + \frac{\partial p}{\partial x} dx \right) \times dy \times dz$



**Figure (IV.2).** Variation de masse entrant et sortant d'un élément fluide

La force de masse qui s'exerce sur parallélépipède sur l'axe de  $x$  :  $\rho \times dx \times dy \times dz \times X$

Dans le cas d'un mouvement du liquide, la somme algébrique des projections des forces doit être égale aux projections des forces d'inerties, qui sont égales à la masse de la particule par la projection de l'accélération de son mouvement.

$$p \times dy \times dz - \left( p + \frac{\partial P}{\partial x} dx \right) dy dz + \rho dx dy dz \times X = \rho dx dy dz \times \frac{du_x}{dt}$$

(IV.11)

On simplifie et on divise par  $\rho dx dy dz$  on obtient :

$$-\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial x} + X = \frac{\partial u_x}{\partial t} \quad \text{(IV.12)}$$

En raisonnant de la même façon en directions de  $y$  et  $z$ , obtient :

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial x} + X &= \frac{du_x}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial y} + Y &= \frac{du_y}{dt} \\ -\frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial z} + Z &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad \text{(IV.13)}$$

L'équation (IV.13) est l'équation de forme différentielle du mouvement d'un fluide parfait (Equation d'Euler).

Dans l'équation (IV.13) quatre valeurs sont inconnues :  $\rho, u_x, u_y, u_z$  . Pour résoudre ce système il nous faut une autre équation. C'est l'équation de continuité.

#### **IV.5. L'équation de Bernoulli pour un filet liquide parfait**

Examinons un filet liquide parfait en écoulement permanent, en utilisant l'équation (IV.13)

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \times \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \right\} \quad (\text{IV.14})$$

A partir de ces équations, nous pouvons obtenir la relation entre  $u$  et  $P$ , ce qui est très important pour l'hydraulique pratique. Multiplions la première équation (IV.14) par  $dx$ , la deuxième équation par  $dy$  et la troisième équation par  $dz$  et additionnons-les ensemble, nous obtenons :

$$\frac{\partial u_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz = Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) \quad (\text{IV.15})$$

En remplaçant les valeurs de  $dx$ ,  $dy$  et  $dz$  dans l'équation (IV.15) ,  $dx = u_x dt; dy = u_y dt, dz = u_z dt$  , on aura en final ce qui suit :

$$\frac{\partial u_x}{dt} u_x dt + \frac{du_y}{dt} u_y dt + \frac{du_z}{dt} u_z dt = u_x du_x + u_y du_y + u_z du_z = \frac{1}{\rho} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) \quad (\text{IV.16})$$

La vitesse totale est :  $u^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \quad (\text{IV.17})$

Alors la partie droite de l'équation(IV.16) devient :

$$\frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} d(u^2) \quad (\text{IV.18})$$

L'expression  $Xdx + Ydy + Zdz$  de l'équation (IV.15) est le différentiel total d'une certaine force de potentiel de fonction  $V=f(x, y, z)$ ,

$$Xdx + Ydy + Zdz = dV$$

En plus à la droite de l'équation (IV.15), l'expression représente le différentiel total de la pression  $P$ , en cas d'un écoulement permanent la pression ne dépend pas du temps.

Alors,  $\left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = dp \quad (\text{IV.19})$

Compte tenu de ce qui précède et en substituant les valeurs données des expressions (IV.17) (IV.18) (IV.19) dans l'équation (IV.15), nous avons

$$\frac{1}{2} d(u^2) = dV - \frac{1}{\rho} dP \quad (\text{IV.20})$$

Où

$$\frac{1}{2}d(u^2) + \frac{1}{\rho}dP - dV = 0 \quad (\text{IV.21})$$

Après intégration, on aura :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} - V = \text{const} \quad (\text{IV.22})$$

En pratique, le cas le plus courant est que seule la gravité agit sur le fluide. Dans ce cas, la fonction de force potentielle est égale à :  $-g \times z$

L'équation (IV.22) prend la forme suivante :

$$\frac{u^2}{2} + \frac{P}{\rho} + g \times z = \text{const} \quad (\text{IV.23})$$

Puisque la partie gauche de l'équation (IV.23) est connue pour être constante le long du filet de fluide, nous pouvons écrire cette équation pour n'importe quelle section, (exemple les sections 1-1 et 2-2) :

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + g \times z_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + g \times z_2 \quad (\text{IV.24})$$

Divisons tous les membres de l'équation (IV.24) par l'accélération de la pesanteur  $g$  en tenant en compte  $\rho g = \gamma$ ,

$$\frac{u_1^2}{2} + \frac{P_1}{\gamma} + z_1 = \frac{u_2^2}{2} + \frac{P_2}{\gamma} + z_2 = H = \text{const} \quad (\text{IV.25})$$

$H$  - La charge du fluide (charge hydrodynamique).

L'équation (IV.25) est l'équation de Bernoulli pour un filet liquide parfait.

## IV.6. Formulation de l'équation de Bernoulli à partir de l'énergie cinétique pour un filet liquide parfait

### ➤ Cas sans échange d'énergie

#### Hypothèses :

Le fluide est parfait et incompressible

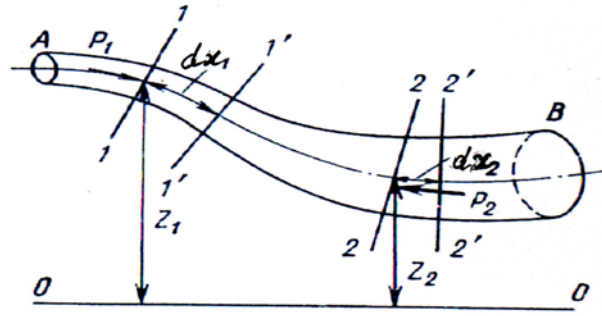
- L'écoulement est permanent ;
- L'écoulement est dans une conduite lisse.

#### IV.6.1. Application du théorème de l'énergie cinétique

La relation de Bernoulli est une équation de conservation de l'énergie mécanique du fluide au cours de son mouvement.

En cours de temps  $dt$ , les particules du liquide se déplacent de 1-1 à 1'-1' à la distance de  $dx_1 = u_1 dt$  et les particules de 2-2 à 2'-2' à la distance  $dx_2 = u_2 dt$ .





**Figure (IV.3) .** Filet liquide en écoulement permanent

Partons du théorème de l'énergie cinétique : la variation d'énergie cinétique d'un système entre deux instants est égale à la somme des travaux de toutes les forces (intérieures et extérieures à ce système).

Le travail est réalisé par les forces de gravité et de pression agissant dans les sections extrêmes du filet.

Dirigées suivant la normale aux parois latérales du filet (en direction du mouvement), les pressions de la masse environnante non visqueuse ne produisent pas de travail.

$$P_1 dS_1 u_1 dt - P_2 dS_2 u_2 dt = dQ dt \times (P_1 - P_2), \quad (IV.26)$$

$$dQ = dS_1 \times u_1 = dS_2 \times u_2$$

Le travail des forces de gravité est équivalent au travail réalisé par la force de gravité de la masse de liquide du tronçon 1-1' au déplacement à la différence de hauteurs ( $z_1 - z_2$ ), c'est-à-dire :

$$dG(z_2 - z_1) = \rho g \times dS dx_1 (z_2 - z_1) = \rho g \times dS \times u \times dt (z_2 - z_1) = \rho g \times dQ dt (z_1 - z_2) \quad (IV.27)$$

Appliquons le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2} dm_2 \times u_2^2 - \frac{1}{2} dm_1 \times u_1^2 = \rho dQ dt \frac{u_2^2}{2} - \rho dQ dt \frac{u_1^2}{2} \quad (IV.28)$$

Ensuite, on fait correspondre l'accroissement de l'énergie cinétique au travail des forces de gravité, on obtient :

$$\rho dQ dt \left( \frac{u_2^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} \right) = dQ dt (P_1 - P_2) + \rho g dQ dt (z_1 - z_2) \quad (IV.29)$$

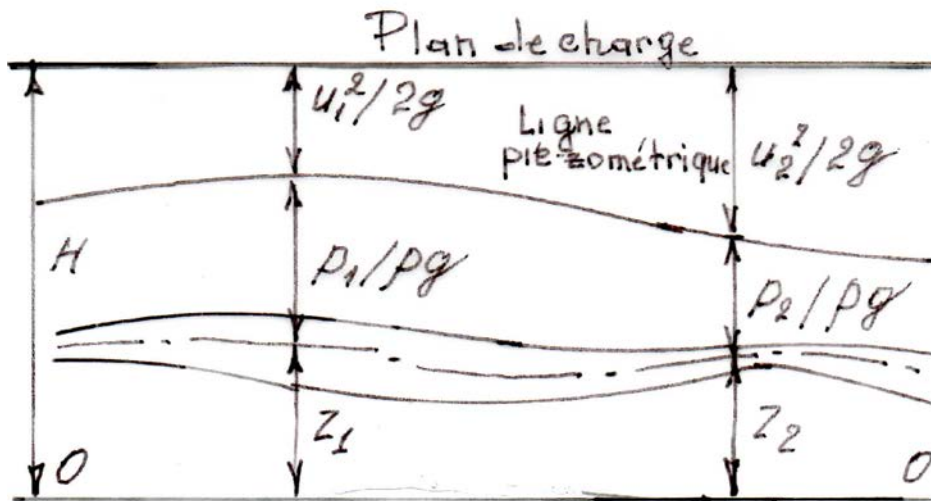
En divisant les deux membres par  $\rho dQ dt$  on trouve :

$$g \times z_1 + \frac{P_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = g \times z_2 + \frac{P_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} \quad (IV.30)$$

**Conclusion :** L'équation (IV.30) est l'équation de Bernoulli pour un filet d'un liquide non visqueux en mouvement permanent sous l'action des seules forces de gravité.

#### IV.7. Interprétation de l'équation de Bernoulli pour un écoulement permanent

L'équation de Bernoulli peut être interprétée de différents points de vue : géométrique, énergétique et mécanique.



**Figure (IV.4).** Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli en écoulement permanent pour un liquide parfait.

#### IV.7.1. Interprétation de l'équation de Bernoulli du point de vue énergétique

La position d'une particule de liquide examinée est définie par les coordonnées verticales  $Z$ . La valeur  $gz$  exprime l'énergie potentielle du liquide à masse  $M = 1$  soulevée au-dessus du plan  $00$  d'une hauteur  $z$ , c'est-à-dire  $gz$  est une énergie potentielle spécifique (rapportée à la masse) de la position. La valeur  $\frac{P}{\rho}$  exprime l'énergie potentielle spécifique (rapportée à la masse) de la pression. Le sens énergétique des deux premiers termes de l'équation de Bernoulli est le même que dans l'hydrostatique :

$gz + \frac{P}{\rho}$  – est l'énergie potentielle spécifique du liquide. Le troisième terme  $\frac{u^2}{2}$  est l'énergie cinétique du liquide à masse  $M = 1$  (énergie cinétique spécifique), parce que :

$M \frac{u^2}{2} : M = \frac{u^2}{2}$  Il découle de l'équation de Bernoulli pour un filet du liquide non visqueux que l'énergie spécifique total est constante en toute longueur du filet.

En divisant tous les termes de l'équation par l'accélération  $g$  on obtient en dimension linéaire :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (\text{IV.31})$$

Les vitesses locales sont déterminées à l'aide du tube de Pitot suivant la formule :

$$u = k\sqrt{2gh} \quad (\text{IV.32})$$

#### IV.7.2. Interprétation de l'équation de Bernoulli du point de vue mécanique

$z_1 - z_2 =$  travail des forces pesanteurs par unité de poids de liquide ;

$\left(\frac{P_1 - P_2}{\gamma}\right) =$  travail des forces des pressions par unité de poids de liquide ;

$$\left(\frac{u_1^2 - u_2^2}{2g}\right) = \text{Variation de l'énergie cinétique par unité de poids de liquide.}$$

### IV.7.3. Interprétation de l'équation de Bernoulli du point de vue géométrique

Les grandeurs suivantes sont appelées :

$$\left. \begin{array}{l} Z = \text{hauteur de position} \\ \frac{P}{\rho g} = \text{hauteur piézométrique} \\ \text{hydrodynamique} \\ \frac{u^2}{2g} = \text{hauteur due à la vitesse ou pression cinétique} \end{array} \right\} \text{Hauteur}$$

La somme des trois hauteurs est appelé hauteur hydrodynamique.

La pente piézométrique  $I_P$  est déterminée par la relation suivante :

$$I_P = \frac{\left(z_1 + \frac{P_1}{\rho g}\right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\rho g}\right)}{l} \quad (\text{IV.33})$$

Où :  $l$  = la distance entre deux sections.

### IV.8. Equation de Bernoulli pour un filet liquide réel

La réserve totale de l'énergie mécanique spécifique ne peut pas rester constante en mouvement d'un filet du liquide réel, comme c'était le cas d'un liquide parfait. En cas d'un mouvement du liquide réel par suite de sa viscosité, apparaissent les résistances à son mouvement qui est vaincues aux dépens d'une perte partielle de son énergie mécanique.

Pour un filet liquide réel, on a :

$$\Delta H = H_1 - H_2$$

- SECTION 1-1 :  $H_1 = z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}$

- Section 2-2 :  $H_2 = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}$

La perte de charge :  $\Delta H = H_1 - H_2 = \left(z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g}\right) - \left(z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g}\right)$

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta H \quad (\text{IV.34})$$

**N.B :** L'équation (IV.34) est la forme définitive de l'équation de Bernoulli pour un filet liquide réel.

Pour appliquer l'équation de Bernoulli, il faut réunir certaines conditions. L'équation de Bernoulli pour un courant liquide réel visqueux a été établie pour les conditions d'un écoulement permanent graduellement varié et elle ne peut pas être appliquée que pour les sections où existent tous les indices de cet écoulement.

Le fait que les pressions en cas d'un écoulement graduellement varié se répartissent suivant la loi hydrostatique, permet de choisir pour l'équation de Bernoulli les points permettant d'inscrire les hauteurs de position  $Z$  et les pressions  $P$  en tous endroits des sections désignées, c'est-à-dire au fond, à la surface libre, au centre de la section d'écoulement, sur l'axe du tube, etc. Les points choisis peuvent ne pas appartenir à la même ligne de courant. Si on introduit dans l'équation de Bernoulli deux inconnues, il faut également appliquer l'équation de continuité de courant.

#### IV.9. Equation de Bernoulli pour un courant liquide réel

Le passage du filet liquide au courant liquide réel peut être réalisé de la façon suivante  
L'énergie cinétique totale d'une particule de masse  $m$  pour tout le courant de section  $S$  :

$$E_{Cu} = \frac{\int_S \rho u dS \frac{u^2}{2}}{\rho g Q} = \frac{1}{2gQ} \int_S u^3 dS \quad (IV.35)$$

L'énergie pour une vitesse moyenne :

$$E_{CV} = \frac{\rho Q V^2 / 2}{\rho g Q} = \frac{V^2}{2g}$$

Désignons le rapport  $E_{Cu}$  et  $E_{CV}$  par  $\alpha$  ;

$$\alpha = \frac{E_{Cu}}{E_{CV}} = \frac{1}{S} \int_S \left( \frac{u}{V} \right)^3 dS \quad (IV.36)$$

$$E_{Cu} = \alpha E_{CV}$$

La vitesse locale est sous forme :  $u = V \pm \Delta u$  ;

Où :

$v$  -vitesse moyenne,

$\Delta u$  - peut être supérieure, inférieure ou égale à zéro

Alors l'énergie spécifique du courant du liquide

$$E = E_p + E_c = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha V^2}{2g} \quad (\text{IV.37})$$

Où ;

- $\alpha$  = Facteur correcteur de l'énergie cinétique, ou coefficient de Coriolis.

Pour les courants turbulents  $\alpha$  = entre 1,05 et 1,1 ; pour les courants laminaire  $\alpha = 2$ .

En conclusion, nous pouvons dire que l'équation(IV.37) sous la forme suivante représente l'équation de Bernoulli pour un courant du liquide en écoulement graduellement varié.

L'équation de Bernoulli pour courant liquide réel entre 2 sections 1-1 et 2-2 devient :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} + \Delta H \quad (\text{IV.38})$$

- La ligne de charge s'abaisse dans le sens du mouvement.
- La pente hydraulique est le rapport des pertes de charge à la longueur à laquelle ces pertes ont lieu et se détermine par la relation suivante :

$$I_p = \frac{\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right)}{l} \quad (\text{IV.39})$$

Si la perte de charge en longueur est non uniforme, on utilise la notion de la pente hydraulique en section examiné :

$$I = - \frac{\Delta H}{dl} = - \frac{d \left( z + \frac{P}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} \right)}{dl} \quad (\text{IV.40})$$

**Remarque** : La pente est une valeur positive, avec l'augmentation de  $l$  la hauteur diminue c'est pourquoi on met le signe « moins »

La pente piézométrique entre deux sections se détermine par la relation suivante :

$$I = \frac{\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right)}{l} \quad (\text{IV.41})$$

Pour un écoulement uniforme :

$$I = \frac{\left( z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha V_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha V_2^2}{2g} \right)}{l} = \frac{\left( z_1 + \frac{P_1}{\rho g} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right)}{l} = I_p \quad (\text{IV.42})$$

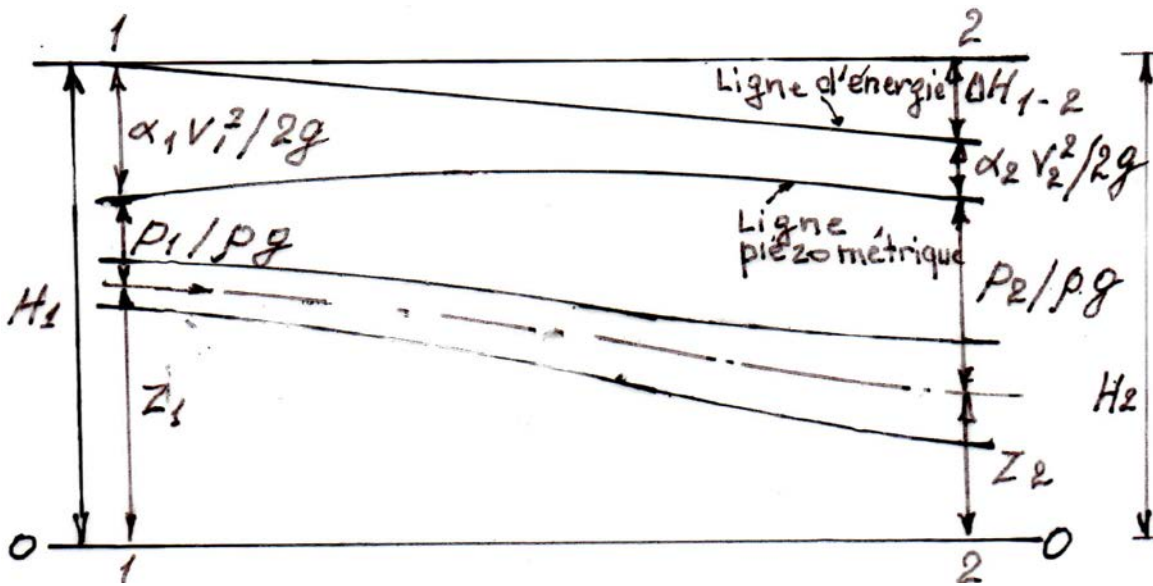


Figure (IV.5). Interprétation graphique de l'équation de Bernoulli en écoulement permanent pour un liquide réel

#### IV.10. Application de l'équation de Bernoulli en pratique

##### IV.10.1. Tube de venturi :

Le tube de Pitot est un appareil prenant la forme d'un tube comportant un rétrécissement, qu'on utilise pour mesurer le débit d'un fluide.

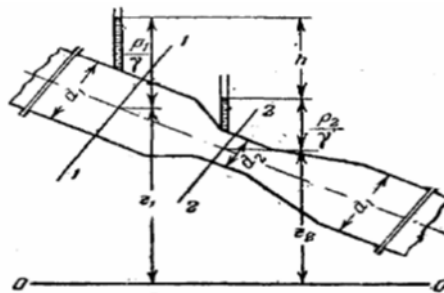


Figure (IV.6). Tube de Venturi

Entre les sections 1-1 et 2-2 se trouve le tube de venturi.

L'équation de Bernoulli pour les sections 1 et 2, en négligeant la perte de charge  $\Delta H$  :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (\text{IV.43})$$

La différence de mesure des piézomètres :

$$\Delta h = \left( z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} \right) - \left( z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \right) = \frac{V_2^2 - V_1^2}{2g} \quad (\text{IV.44})$$

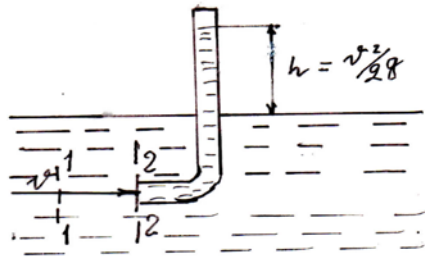
À partir de l'équation de continuité nous avons :  $V_1 \times S_1 = V_2 \times S_2$ , ou  $V_1 = \frac{V_2 \times S_2}{S_1}$

Dans l'équation (IV.44) on pose :  $V_1 = \frac{V_2 \times S_2}{S_1}$  et  $V_2 = \frac{\sqrt{2g \times \Delta h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$

Le débit qui s'écoule à travers le tube de venturi s'écrit de la façon suivante :

$$Q = V_2 \times S_2 = S_2 \times \frac{\sqrt{2g \times \Delta h}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} = \frac{S_2}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \times \sqrt{2g \times \Delta h} = c \times \sqrt{2g \times \Delta h} \quad (\text{IV.45})$$

#### IV.10.2. Appareil de mesure de vitesse, tube de Pitot



Figure(IV.7). Tube de Pitot.

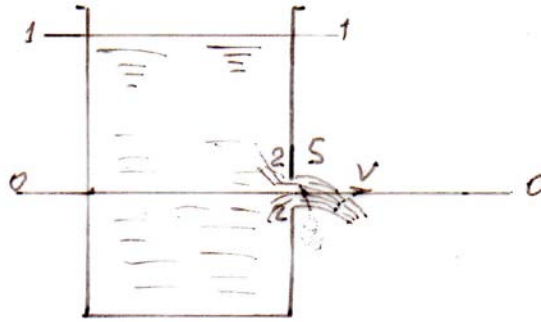
L'équation de Bernoulli pour les sections 1-2 s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

Négligeant la perte de charge  $\Delta H$ , on aura  $\frac{P_1 - P_2}{\rho g} = h$  ; Alors :

$$h = \frac{V_1^2}{2g} \Rightarrow V_1 = \sqrt{2g \times h} \quad (\text{IV.46})$$

#### IV.10.3. Cas d'un écoulement à travers un Orifice :



**Figure (IV.8).** Ecoulement en charge à travers un orifice

Application de l'équation de Bernoulli entre les sections 1-1 et 2-2 par rapport à l'axe de référence O-O' :

Section 1-1 :

$$Z_1 = H ; P_1 = P_{atm} ; V_1 = 0$$

Section 2-2 :

$$Z_2 = 0 ; P_2 = P_{atm} ; V_2 = V$$

On aura donc :

$$H + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V^2}{2g} + \Delta H \quad (IV.47)$$

En négligeant les pertes de charge :  $\Delta H = 0$ , l'équation (IV.53) devient :

$$H = \frac{V^2}{2g}, \quad \text{Donc}$$

$$V = \sqrt{2g \times H} \quad (\text{Formule de Torricelli}) \quad (IV.48)$$

Si nous passons au débit d'écoulement à travers l'orifice :

$$Q = S'V \text{ avec } S' = \text{Section contractée de l'écoulement} \rightarrow Q = S' \sqrt{2gH}$$

En posant  $S' = \varepsilon S$  et avec  $\varepsilon = S'/S = \text{Coefficient de contraction de l'écoulement}$

$$Q = S' \sqrt{2gH} = \varepsilon S \sqrt{2gH}$$

Avec :

$$1) \varepsilon \approx 0,597 \quad ; \quad 2) \varepsilon = 0,597 + \frac{4,5}{\sqrt{R_0}} \quad (\text{formule empirique})$$

#### IV.10.4. Résistances hydrauliques

Lorsqu'un liquide se déplace dans les conduites, on observe les dépenses énergétiques du courant pour vaincre la résistance au mouvement (perte de charge).

$$\Delta H = \left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} \right) - \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} \right) \quad (IV.49),$$

Les résistances en mouvement du liquide peuvent être divisées en deux types :

Les résistances le long du courant (linéaires) et les résistances singulières (locales) ;



- Les résistances linéaires sont engendrées par les forces des frottements sur toute la longueur du courant.

Les résistances locales sont dues aux différents éléments de constructions et obstacles locaux dans le courant.

$$\Delta H = h_l + h_s \quad (\text{IV.50}),$$

#### IV.10.4.1. Formules générale des pertes de charge

Toutes les pertes de charge sont exprimées sous la forme générale par la formule de **Weisbach** :

$$\Delta H = \xi \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.51}),$$

Le coefficient de pertes  $\xi$  indique la part de pression cinétique dépensée pour vaincre la résistance donnée. La perte de charge singulière (locale) est déterminée par la formule :

$$h_s = \xi_s \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.52}),$$

Où :  $\xi_s$  – est le coefficient de résistance pour une résistance locale donnée.

En écoulement uniforme du liquide, les pertes de charge en longueur peuvent être exprimées par la formule :

$$h_l = \xi_l \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.53}),$$

Où :  $\xi_l$  est le coefficient de résistance en longueur ; V- la vitesse moyenne du courant.

Le coefficient de résistance en longueur est exprimé sous la forme suivante :

$$\xi_l = \lambda \frac{l}{d} \quad (\text{IV.54})$$

La formule définitive pour la perte de charge en longueur pour les conduites circulaires :

$$h_l = \lambda \frac{l}{d} \times \frac{v^2}{2g} \quad (\text{IV.55})$$

L'équation (250) est la formule de Darcy –Weisbach.

En introduisant la notion du rayon hydraulique (R), on aura :

$$\xi_l = \lambda \frac{l}{4R_h} \quad (\text{IV.56})$$

Où :

$\lambda$  = le coefficient de pertes par frottement en longueur (coefficient de Darcy) ;

$l$  = la longueur du tronçon examiné,

$R_h$  = le rayon hydraulique.

On appelle le rayon hydraulique  $R$  une caractéristique très importante de la section liquide représentant le rapport de la section liquide  $A$  au périmètre mouillée  $\chi$  :

$$R_h = \frac{S}{\chi} = \frac{\frac{\pi d^2}{4}}{\pi d} = \frac{d}{4} \quad (\text{IV.57})$$

Où :

$\chi$  = le périmètre mouillé ;

$S_m$  = section du liquide.

Pour les conduites circulaires :  $d = 4R_h$

#### IV.10.4.2. Formules pour déterminer la vitesse moyenne et le débit en écoulement uniforme du liquide

La formule utilisée pour déterminer la vitesse moyenne est comme suit :

$$V = \sqrt{\frac{8g \times R_h \times h_l}{\lambda \times l}} \quad (\text{IV.58})$$

Si l'on désigne les valeurs  $C$  et  $I$  par les relations :  $C = \sqrt{\frac{8g}{\lambda}}$  et  $I = \frac{h_l}{l}$ , la relation (IV.58)

prend la forme :

$$V = C \times \sqrt{RI} \quad (\text{IV.59})$$

La formule obtenue (IV.59) est appelée formule de Chézy,

La grandeur  $C$  c'est le coefficient de Chézy qui a une unité de mesure  $m^{0,5}/s$

Compte tenu du fait que  $Q = S V$ , alors on obtient la formule pour le débit en écoulement uniforme :

$$Q = S \times C \times \sqrt{RI} \quad (\text{IV.60})$$

Parmi les formules proposées pour le calcul de  $C$  est celle de Manning :

$$C = \frac{1}{n} \times R^{\frac{1}{6}} \quad (\text{IV.61})$$

Ce qui donne :

$$Q = S \times R^{\frac{1}{6}} \times R^{\frac{1}{2}} \times l^{\frac{1}{2}} = S \times R^{\frac{2}{3}} \times l^{\frac{1}{2}}$$

Et comme  $S = \frac{\pi d^2}{4}$  et  $R = \frac{d}{4}$ , alors on aura en final :

$$Q = \frac{\pi d^2}{4} \times \frac{1}{n} \times \left(\frac{d}{4}\right)^{\frac{2}{3}} \times l^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4^{\frac{5}{3}}} \times \frac{1}{n} \times d^{\frac{8}{3}} \times \frac{h_l^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{IV.62})$$

En posant  $K = \frac{\pi}{4^{\frac{5}{3}}} \times \frac{1}{n} \times d^{\frac{8}{3}}$  (K caractéristique de débit (l/s)), on aura en final la formule

suivante :

$$Q = K \times \sqrt{\frac{h_l^{\frac{1}{2}}}{l^{\frac{1}{2}}}} \Rightarrow h_l = \frac{Q^2}{K^2} \times l \quad (\text{IV.63})$$

En présence d'une pompe et d'une turbine entre les deux sections d'écoulement l'équation de Bernoulli s'écrira :

$$z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} + h_p = z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + h_t + \Delta H \quad (\text{IV.64})$$

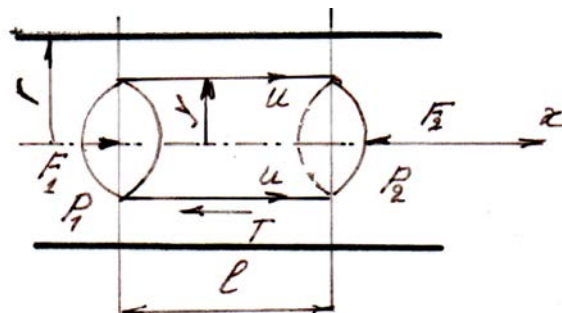
Où :

- $h_p$  = charge délivrée par une pompe
- $h_t$  = charge délivrée à la turbine
- $W_p$  = puissance délivrée par la pompe au flux :  $W_p = \gamma \times Q h_p$  (Nm/s) = Watts
- $W_t$  = La puissance délivrée par le flux à la turbine  $W_t = \gamma \times Q h_t$  (Nm/s) = Watts

#### IV.10.4.3. Les régimes d'écoulement et le nombre de Reynolds

##### IV.10.4.3.1. Répartition des vitesses en écoulement laminaire

Considérons un mouvement permanent laminaire d'un liquide dans un tube cylindrique horizontal de diamètre intérieur  $r$  (Fig. (IV.9)). Dans celui-ci, mettons en évidence une partie du courant de longueur  $l$  entre la section 1 et la section 2. Sélectionnons un volume cylindrique de fluide de rayon  $y$ . Introduisons les notations :  $u$  est la vitesse de couche superficielle du volume élémentaire.  $T$  est la force de frottement interne sur les côtés du volume de base.  $P_1$  et  $P_2$  sont les pressions agissantes sur les sections du volume sélectionné.  $F_1$ ,  $F_2$  - force de pression.



**Figure(IV.9).** Schéma de définition de la répartition des vitesses

La force de frottement peut être trouvée par la formule suivante :

$$T = -\mu \times S \frac{du}{dy} \quad (\text{IV.65})$$

Où :

- $\mu$  – la viscosité dynamique,  $\mu = \rho\nu$  ;
- S- L'aire de la section du côté du volume,  $S = 2\pi \times y \times l$  ;
- $T = -2\pi l \times \nu \times \rho \times \frac{du}{dy}$  ;

**Note** : Le signe moins dans l'équation (IV.65) indique que  $\frac{du}{dy} < 0$ , c'est-à-dire que la vitesse u diminue lorsque y augmente.

Dans ce cas, la force motrice est la force de pression F est comme suit :

$$F = F_1 - F_2 = (P_1 - P_2)\pi \times y^2 \quad (\text{IV.66})$$

Écrivons les équations de Bernoulli pour la section 1 et la section 2. La conduite est horizontale et l'axe de son centre utilisé comme plan de référence,  $z_1 = z_2 = 0$ . Le diamètre de la conduite étant constant, la vitesse u le long de l'écoulement et le coefficient  $\alpha$  sont constants. Alors l'équation de Bernoulli devient :

$$\frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} + \Delta H \Rightarrow P_1 - P_2 = \rho g \times \Delta H \quad (\text{IV.67})$$

La pente hydraulique :  $i = \frac{\Delta H}{l} \Rightarrow \Delta H = i \times l$  ; Alors la force motrice F est déterminée comme suit :

$$F = \rho g \times i \times l \times \pi \times y^2 \quad (\text{IV.68})$$

Lors d'un écoulement uniforme, la force motrice est égale à la force de frottement  $F = T$  : ce qui nous ramènent à écrire :

$$\begin{aligned} \rho g \times i \times l \times \pi y^2 &= 2\pi \times l \times \nu \times \rho \frac{du}{dy} \Rightarrow \frac{du}{dy} = -\frac{\rho g \times i \times l \times \pi y^2}{2\pi \times y \times \nu \times \rho} = -\frac{i \times g}{2\nu} \times y \\ \Rightarrow du &= \frac{-i \times g \times y dy}{2\nu} \end{aligned} \quad (\text{IV.69})$$

En intégrant l'équation (IV.69), on obtient :

$$u = \frac{-i \times g \times y^2}{4\nu} + C \quad (\text{IV.70})$$

La constante C est égal à zéro, lorsque  $y = r$  et  $u = 0$ , alors  $0 = \frac{-i \times g \times y^2}{4\nu} + C$

A la fin nous obtenons l'expression :

$$u = \frac{-i \times g}{4\nu} (r^2 - y^2) \quad (\text{IV.71})$$

Pour un écoulement laminaire l'épure de la distribution de vitesse à la forme d'une parabole.

La contrainte de frottement d'un fluide dans une conduite circulaire se détermine par la loi de Newton :

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (\text{IV.72})$$

Où :  $u$  = la vitesse locale.

De l'autre côté, la couche de fluide de distance  $r$  des parois de conduites, la contrainte de cisaillement peut être déterminé à partir de l'équation de l'écoulement uniforme :

$$\frac{\tau}{\gamma} = I \times \frac{r}{2} \Rightarrow \tau = \gamma \times I \frac{r}{2} \quad (\text{IV.73})$$

En égalent les équations (IV.70) et (IV.71) :

$$du = \frac{-\rho g \times I \times r dr}{2\mu}$$

Où :  $i$  = la pente hydraulique.

En intégrant l'équation (IV.73), on aura :

$$u = \int -\frac{\rho g \times I}{2\mu} r dr = -\frac{\rho g \times I}{2\mu} \int r dr = \frac{\rho g \times I \times r^2}{4\mu} + C$$

Où :

$$u = -\frac{\rho g \times I \times r^2}{4\mu} + C \quad (\text{IV.73})$$

En intégrant C, et des conditions limites,  $r_0=r$  la vitesse  $u=0$ , on trouve enfin :

$$C = \frac{\rho g \times I \times r_o^2}{4\mu}$$

En remplaçant la valeur de C dans l'équation (IV.73) on trouve :

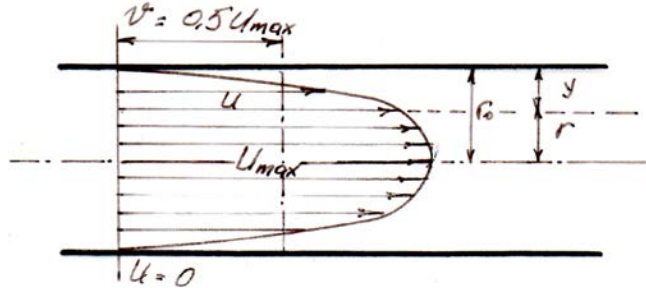
$$u = -\frac{\rho g \times I \times r^2}{4\mu} + \frac{\rho g \times I \times r_o^2}{4\mu} = \frac{I \times \rho g}{4\mu} (r_o^2 - r^2)$$

Où

$$u = \frac{I \times \rho g}{4\mu} (r_o^2 - r^2) \quad (\text{IV.74})$$

La formule(IV.74) est la loi de Stokes.

Les vitesses de l'écoulement laminaire se répartissent en parabole.



**Figure (IV.10).** Répartition de vitesses en écoulement laminaire

A partir de la formule(IV.74), la valeur maximale de la vitesse est observée à l'axe de la conduite ou,  $r = 0$  :

$$u_{\max} = \frac{I \times \rho g \times r_o^2}{4\mu} \quad \text{et} \quad \frac{d}{2} = 0, \quad \text{donc on aura dans ce cas :}$$

$$u_{\max} = \frac{I \times \rho g}{4\mu} \times \frac{d^2}{4} = \frac{I \times \rho g \times d^2}{16\mu} \quad (\text{IV.75})$$

**Note importante** : En cas d'un régime d'écoulement laminaire, la vitesse moyenne dans une conduite circulaire est égale à la moitié de la vitesse maximale comme suit :

$$V = 0.5 \times u_{\max} = 0.5 \times \frac{I \times \rho g}{4\mu} \times \frac{d^2}{4} = 0.5 \times \frac{I \times \rho g \times r_o^2}{4\mu} = \frac{I \times \rho g \times r_o^2}{8\mu} \quad (\text{IV.76})$$

#### IV .10.4.3.2. Le débit et la vitesse moyenne d'écoulement dans une conduite circulaire.

Examinons un élément circulaire d'épaisseur  $dr$  de la conduite, afin de déterminer le débit qui s'écoule à travers cette partie et sa vitesse moyenne.

$$Q = u \times dS = \frac{I \times \gamma}{4\mu} (r_o^2 - r^2) \times 2\pi \times r dr \quad (\text{IV.77})$$

Alors le débit à travers toute la section de la conduite :

$$Q = \int_r^{r_o} \frac{I \times \gamma}{4\mu} (r_o^2 - r^2) \times 2\pi \times r dr = \frac{2\pi \times I \times \gamma}{4\mu} \int_r^{r_o} (r_o^2 - r^2) \times r dr =$$

$$\frac{\pi \times I \times \gamma}{2\mu} \times \left( \int_r^{r_o} r_o^2 \times r dr - \int_r^{r_o} r^3 dr \right) = \frac{\pi \times I \times \gamma}{4\mu} \left( \frac{r_o^4}{2} - \frac{r_o^4}{4} \right) = \frac{\pi \times I \times \gamma}{8\mu} \times r_o^4 \quad (\text{IV.78})$$

Finalement le débit du fluide à travers la conduite ce calcul par la formule :

$$Q = \frac{I \times \gamma \times \pi}{8\mu} \times r_o^4 \quad (\text{IV.79})$$

La vitesse moyenne du courant dans la conduite :

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = \frac{I \times \gamma}{2\mu d^2} \times r_o^4 = \frac{I \times \gamma \times d^2}{32\mu} \quad (\text{IV.80})$$

Ou,

$$V = \frac{I \times \gamma \times d^2}{32\mu} \quad (\text{IV.81})$$

En comparant les formules(IV.75) et (IV.81), on remarque que la vitesse moyenne d'un courant en écoulement laminaire dans une conduite circulaire est deux fois moins que la maximale :

$$V = \frac{u_{\max}}{2} = 0.5 \times u_{\max} \quad (\text{IV.82})$$

#### IV.10.4.3.3. La perte de charge en régime d'écoulement laminaire

Pour calculer la perte de charge on utilise la formule(IV.81) :  $V = \frac{I \times \gamma \times d^2}{32\mu}$  .

Connaissant la pente hydraulique :  $I = \frac{\Delta H}{l} \Rightarrow \Delta H = I \times l$  , et en la remplaçant dans la formule

$u_{\max} = \frac{I \times \rho g \times r_o^2}{4\mu}$ , on obtient la formule suivante tout en sachant que :  $\mu = \nu \times \rho = \nu \times \frac{\gamma}{g}$

$$\Delta H = \frac{32 \times \rho g \times r_o^2}{4\mu} \quad (\text{IV.83})$$

En multipliant le numérateur et dénominateur par  $2V$ , nous aurons :

$$\Delta H = \frac{64 \cdot \nu}{V \times d} \times \frac{l}{d} \times \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.84})$$

En prenant en compte que  $R_e = \frac{V \times d}{\nu} = \frac{\rho \times V \times d}{\mu}$  et  $\lambda = \frac{64}{R_e}$

La formule finale pour le calcul de la perte de charge en régime d'écoulement laminaire du liquide s'écrit sous la forme suivante :

$$\Delta H = \lambda \times \frac{l}{d} \times \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.85})$$

**Note** : la formule (IV.85) est la formule de Darcy -Weisbach, où : $\lambda$ - Coefficient de résistance linéaire.

A partir de la formule (IV.85), on remarque que la perte de charge en écoulement laminaire est proportionnelle à la vitesse.

#### IV.10.4.3.4. Régime turbulent

Les vitesses en chaque point donné à l'écoulement turbulent sont soumises aux variations plus au moins rapides dans le temps, c'est-à-dire Pulsation  $s$ .

$$U = f(t)$$

Prenons une longue période de temps  $t$  :

$$\int_0^t U \times dt = \int_0^t f(t)dt \quad (IV.86)$$

L'intégration de(IV.86) est égale à la surface de  $ABCD$  et les droites :  $DE$ ,  $EO$ ,  $OA$  figure (IV.15)

Si l'on représente schématiquement la courbe de la variation de la vitesse au point donné du courant turbulent sous la forme d'une courbe  $ABCD$ , alors l'équation de cette courbe étant  $u = f(t)$ .

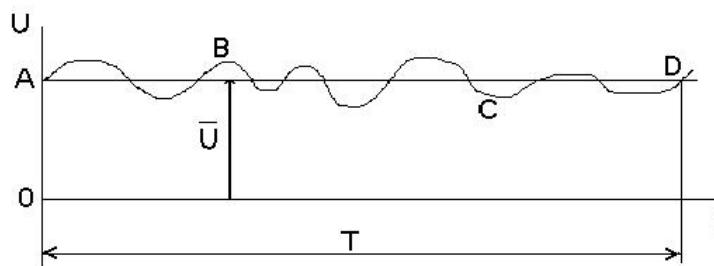


Figure (IV.11). Courbe de variation de vitesse d'un courant turbulent.

La vitesse moyenne est égale à :

$$\bar{u} = \frac{1}{t} \int_0^t f(t)dt \quad (IV.87)$$

La différence entre la vitesse instantanée et sa vitesse moyennée

$$u' = u - \bar{u}$$

La vitesse en chaque moment du temps donné est appelé vitesse instantanée. La différence entre les vitesses instantanée et moyennée s'appelle vitesse de pulsation  $u'$  .

Il faut distinguer la vitesse moyennée  $\bar{u}$  dans un point et la vitesse moyenne  $V = \frac{Q}{S}$ , où :

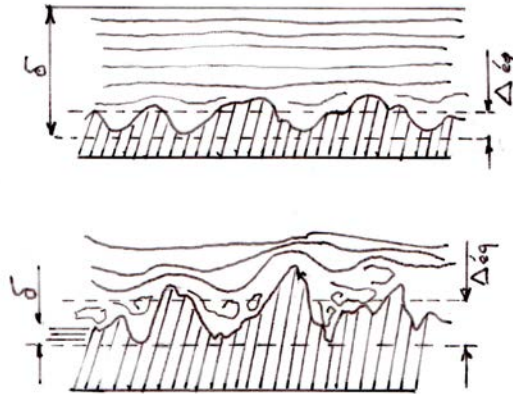
- $Q$  = le débit du liquide par toute la section d'écoulement du courant,
- $S$  = l'aire de la section d'écoulement

#### IV.10.4.3.5. Notions sur les conduites hydrauliquement lisses et rugueuses.



Les parois des conduites sont recouvertes totalement par des monticules uniformes à hauteurs moyenne absolue des aspérités désignées par  $\Delta$ . (voir figure IV.8),  $\delta$ -est l'épaisseur du film laminaire

Les pertes de l'énergie spécifique en mouvement dépendent du régime d'écoulement du courant : s'il est laminaire ou turbulent. L'existence d'un tel ou tel régime d'écoulement est due au comportement des particules du liquide.



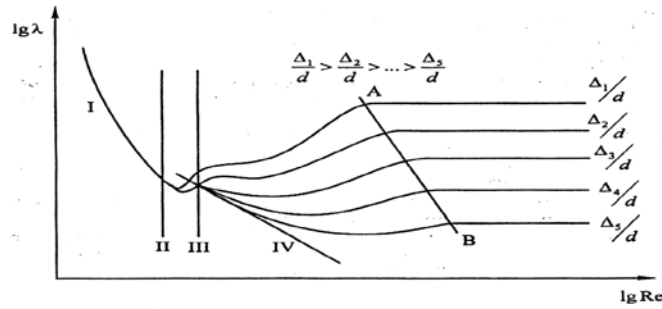
**Figure (IV.12).** Rugosité de la surface lors d'un mouvement turbulent

a) Hydrauliquement lisse b) hydrauliquement rugueux

En fonction du rapport entre les dimensions des aspérités et l'épaisseur du film laminaire, toutes les conduites peuvent être subdivisées en trois types aux régimes d'écoulement turbulent.

- Si  $\Delta < \delta$ , dans ce cas la rugosité des parois n'influe pas sur le caractère de l'écoulement, et respectivement les pertes de charge ne dépendent pas de la rugosité. Ces parois sont appelées hydrauliquement lisse.
- Si  $\Delta < \delta$ , dans ce cas les pertes de charge dépendent de la rugosité, ces conduites s'appellent hydrauliquement rugueuses.
- Si  $\Delta \approx \delta$  dans ce cas c'est la zone de la résistance de transition (de hydrauliquement lisse vers hydrauliquement rugueuses.) la perte de charge linéaire dépend de hauteur des aspérités

L'étude expérimentale du coefficient de résistance linéaire (Coefficient de Darcy)  $\lambda$  en fonction des facteurs différents présente un intérêt pratique. Les recherches sont réalisées par Nikuradze dans les conduites rugueuses.



**Figure (IV.13).** Expériences de Nikuradzé dans les conduites rugueuses

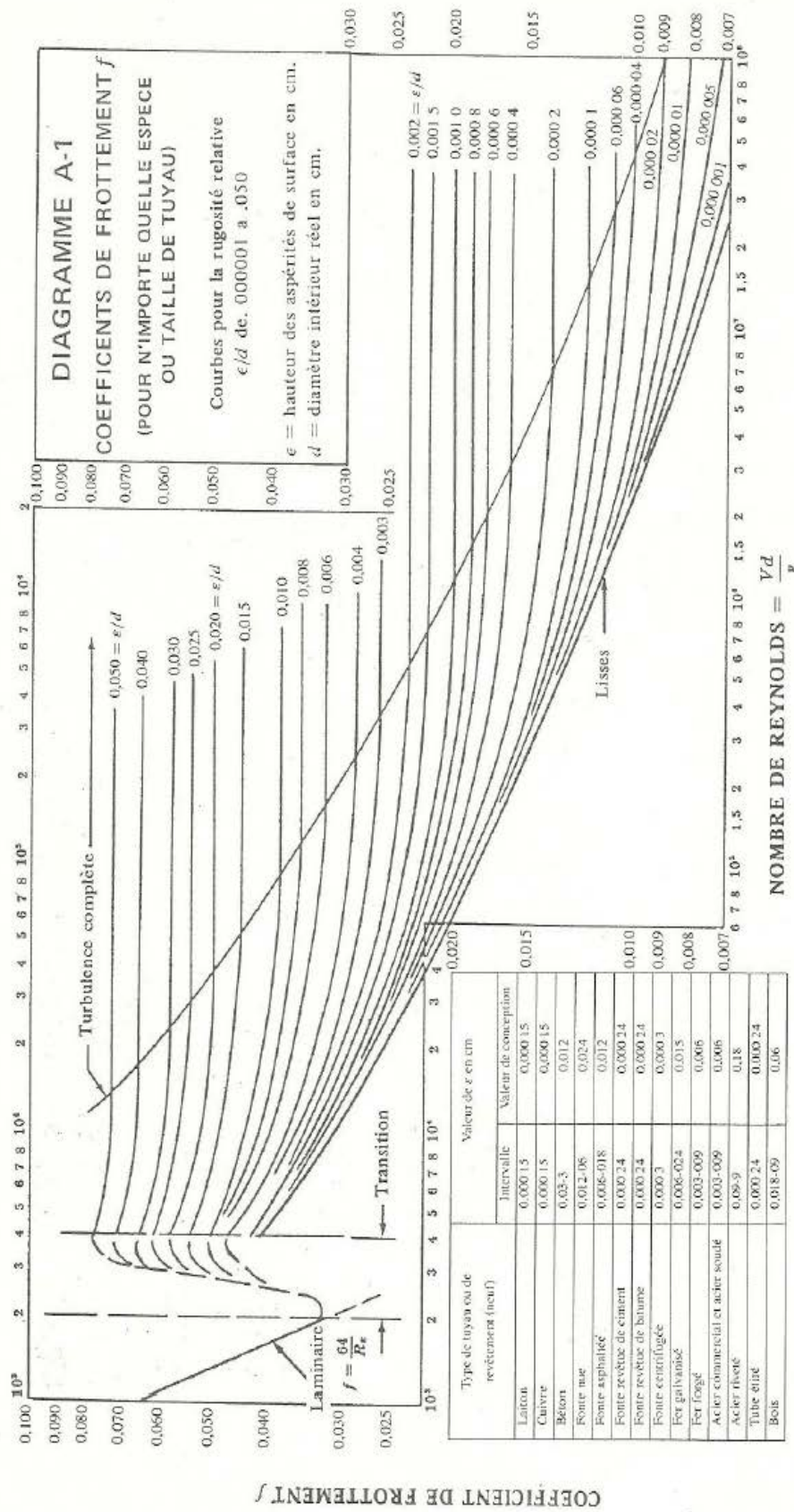
- ✚ Zone 1 : régime d'écoulement laminaire  $\lambda = f(R_e)$  ;  $R_e < 2300$
- ✚ Zone 2 : régime d'écoulement transitoire  $2300 < R_e < 4000$
- ✚ Zone 3 : régime d'écoulement turbulent, zone des conduites hydrauliquement lisse.  $\lambda = f(R_e)$
- ✚ Zone 4 : régime d'écoulement turbulent, zone de transition  $\lambda = f(R_e, \frac{\Delta}{d})$
- ✚ Zone 5 : régime d'écoulement turbulent, zone des conduites hydrauliquement rugueuses  $\lambda = f(\frac{\Delta}{d})$

Ou-  $\frac{\Delta}{d}$  La rugosité relative ;  $\Delta$  –rugosité équivalente ; d- diamètre du tuyau.

**Tableau IV.1 :** Récapitulatif des relations pour le calcul du coefficient de frottement  $\lambda$

Relation	Zonée résistance hydraulique	Limite du nombre de Reynolds $R_e$	Auteur
$\lambda = 64R_e^{-1}$	Régime laminaire (zone 1)	$R_e < 2300$	Poiseuille
$\lambda = 2,7R_e^{-0,53}$	Zone de transition (zone 2)	$2300 < R_e < 4000$	Frankel
$\lambda = 0,3164R_e^{-0,25}$	Tuyaux lisses (zone3, turbulent)	$4000 < R_e < 10 \cdot \frac{d}{\Delta}$	Blasius
$\lambda = 0,11 \left( \frac{\Delta}{d} + \frac{68}{R_e} \right)^{0,25}$	Tuyaux rugueux (zone4, turbulent)	$10 \cdot \frac{d}{\Delta} < R_e < 560 \cdot \frac{d}{\Delta}$	Altschoul
$\lambda = 0,0032 + \frac{0,221}{R_e^{0,237}}$	Tuyaux rugueux (zone5, turbulent rugueux)	$R_e > 560 \cdot \frac{d}{\Delta}$	Nikuradze

**Remarque :** Parfois, on lit la valeur de  $\lambda$  sur un abaque établi par Moody.



Note : Pour des raisons typographiques, on a conservé la notation décimale de l'édition anglaise.

Figure (IV.14). Diagramme de coefficient de frottement  $\lambda$ .

Des études plus avancées ont montré qu'il existe encore une subdivision entre :  
 les écoulements turbulents lisses  $\lambda = f(R_e)$ , ( si  $Re < 100000$  ), on utilise la formule de Blasius :

$$\lambda = \frac{0.3164}{R_e^{0.25}} \quad (IV.88)$$

Les écoulements turbulents rugueux. (si  $Re > 100000$ ),  $\lambda = f\left(\frac{\Delta}{d}\right)$ , on utilise la formule de Blench :

$$\lambda = 0.79 \sqrt{\frac{\Delta}{d}} \quad (IV.89)$$

Si l'écoulement est transitoire le coefficient  $\lambda$  dépend :  $\lambda = f\left(R_e, \frac{\Delta}{d}\right)$

Parmi les formules qui tiennent compte de l'influence de  $\lambda$  et  $R_e$ , de la rugosité relative  $\frac{\Delta}{d}$  :  
 Formule de Colebrook –White :

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda}} = -2 \log \left[ \left( \frac{\Delta}{3.71d} \right) + \left( \frac{2.51}{R_e \sqrt{\lambda}} \right) \right] \quad (IV.90)$$

Une autre formule proposée par A. Altchoule s'écrit de la façon suivante :

$$\lambda = 0.11 \left( \frac{\Delta}{d} + \frac{68}{R_e} \right) \quad (IV.91)$$

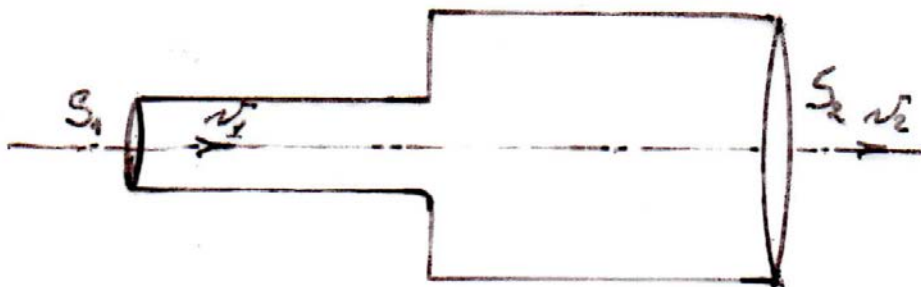
#### IV.10.4.3.6.1. Expression Générale d'une Perte de Charge Singulière

En plus de pertes de charge linéaires, la perte de charge singulière se produit localement au niveau d'une modification brusque de la nature physique de la section d'écoulement. Elle se calcule par la formule générale suivante :

$$h_s = \xi_s \times \frac{V^2}{2g} \quad (IV.92)$$

Avec  $\xi_s$  = Coefficient qui dépend de la nature de la déformation

#### ✚ Cas d'un élargissement brusque de la section d'écoulement



Figure(IV.15). Elargissement brusque de la section d'écoulement.

Dans ce cas :

$$\xi_{eb} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right)^2 \Rightarrow h_{eb} = \left(1 - \frac{S_1}{S_2}\right) \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.93})$$

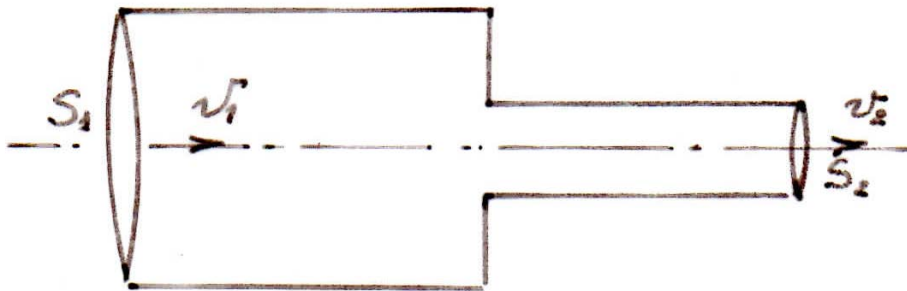
$$h_{eb} = \frac{(V_1 - V_2)^2}{2g} \quad (\text{IV.94})$$

**Remarque :** Cas particulier d'une sortie vers un réservoir :

Dans ce cas, le terme  $\frac{S_1}{S_2}$  tend vers zéro du fait que la section du réservoir est très grande devant celle de la conduite, et la formule précédente devient :

$$\xi_{sortie} = 1 \Rightarrow h_{sortie} = \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.95})$$

✚ **Cas d'un rétrécissement brusque de la section d'écoulement :**



**Figure (IV.16).** Rétrécissement brusque de la section d'écoulement.

La formule de calcul s'écrit :

$$h_{srb} = \xi_{rb} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.96})$$

Avec :  $\xi_{rb}$  = Coefficient due au rétrécissement brusque donné par le tableau suivant :

$A_1/A_2$	0,1	0,5	0,7
$\xi_{rb}$	0,41	0,24	0,14

**Remarque :** Cas particulier d'une sortie à partir d'un réservoir :

✚ Formule de calcul :

$$h_{sen} = \xi_{en} \frac{V^2}{2g} \quad (\text{IV.97})$$

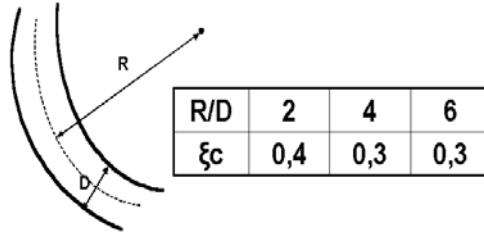
Avec :  $\xi_{en} = 0,5$  .

### ✚ Autres pertes de charge singulières :

D'autres types de pertes de charge peuvent avoir lieu dans les conduites :

Coudes, Vannes, Crépine, Elargissement graduel, rétrécissement graduel, diaphragme etc...

**Exemple** : Cas d'un coude arrondi :



### IV.11.Coefficient de résistance du système

Aux calculs hydrauliques, les pertes de charge locales (singulières) et celle en longueur sont additionner et la perte de charge totale est déterminer à l'aide de la formule :

$$\Delta H = \sum h_l + \sum h_s$$

Si la tuyauterie longue de  $l$  a sur toute sa longueur le même diamètre, et le fluide se déplaçant dans cette tuyauterie rencontre  $K$  résistances locales, la perte de charge totale est déterminer avec :

$$\Delta H = h_l + \sum_{i=1}^{i=n} h_s = \xi_l \frac{V^2}{2g} + \sum_{i=1}^{i=n} h_{si} \frac{V^2}{2g} = \left( \xi_l + \sum_{i=1}^{i=n} \xi_s \right) \frac{V^2}{2g} \quad (IV.98)$$

L'expression mise entre parenthèses est appelée coefficient de résistance du système  $\xi_{sys}$ .

Alors :

$$\Delta H = \xi_{sys} \frac{V^2}{2g} \quad (IV.99)$$

Si la tuyauterie comporte plusieurs tronçons (par exemple, trois) longs de  $l_1, l_2, l_3$  aux diamètres différents  $d_1, d_2, d_3$  et chaque tronçons possède les résistances locales, alors :

$$\Delta H = \sum_{i=1}^{i=3} h_{li} + \sum_{i=1}^{i=k} h_{si} \quad , \text{ où}$$

- $K$  – est le nombre total des résistances locales.

Le nombre  $\sum_{i=1}^{i=3} h_{li}$  est déterminé par la relation suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=3} h_{li} = \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \frac{V_2^2}{2g} \quad (IV.100)$$

Supposant que chaque tronçon possède deux résistances locales, donc  $K = 6$  et la somme des pertes de charge prennent la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{i=k} h_{si} = (\xi_{s1} + \xi_{s2}) \frac{V_1^2}{2g} + (\xi_{s3} + \xi_{s3}) \frac{V_2^2}{2g} + (\xi_{s5} + \xi_{s6}) \frac{V_3^2}{2g} \quad (\text{IV.101})$$

Conformément à l'équation de continuité :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 = S_3 V_3$$

On obtient :

$$V_1 = V_3 \frac{S_3}{S_1}; V_2 = V_3 \frac{S_3}{S_2} \quad (\text{IV.102})$$

En substituant les valeurs de  $V_1$  et de  $V_2$  obtenues par (IV.101), dans (IV.102) on aura la relation suivante :

$$\Delta H = \sum_{i=1}^{i=3} h_i + \sum_{i=1}^{i=6} h_{si} = \left[ \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \left( \frac{S_3}{S_1} \right)^2 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \left( \frac{S_3}{S_2} \right)^2 + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} + (\xi_{s1} + \xi_{s2}) \left( \frac{S_s}{S_1} \right)^2 + (\xi_{s3} + \xi_{s4}) \left( \frac{S_s}{S_1} \right)^2 + \left( \frac{S_s}{S_1} \right)^2 + \frac{V_s^2}{2g} \right] + (\xi_{s5} + \xi_{s6})$$

(IV.103)

Où :

$$\Delta H = \xi_{sys} \frac{V_s^2}{2g} \quad (\text{IV.104})$$

L'expression :  $\left[ \lambda_1 \frac{l_1}{d_1} \left( \frac{S_3}{S_1} \right)^2 + \lambda_2 \frac{l_2}{d_2} \left( \frac{S_3}{S_2} \right)^2 + \lambda_3 \frac{l_3}{d_3} + (\xi_{s1} + \xi_{s2}) \left( \frac{S_s}{S_1} \right)^2 + (\xi_{s3} + \xi_{s4}) \left( \frac{S_s}{S_1} \right)^2 + \left( \frac{S_s}{S_1} \right)^2 + \frac{V_s^2}{2g} \right] + (\xi_{s5} + \xi_{s6})$  est désignée par

$\xi_{sys}$

## Exercices avec solutions-Partie hydrodynamique

### Exercice 1.

Déterminer le débit de l'eau  $Q$  à l'aide du tube de venturi à partir des données suivantes  $d_1 = 20\text{cm}$ ;  $d_2 = 10\text{cm}$  La dénivellation des piezometres  $h = 25\text{cm}$ . La perte de charge dans la partie de la gorge est négligeable .

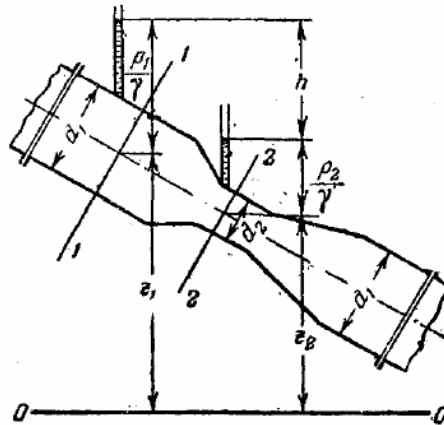


Figure 1. Schéma de l'exercice N1

### Solution :

Appliquant l'équation de Bernoulli pour les sections 1-1 et 2-2 par rapport au plan 0-0 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta H$$

D'après les conditions du problème  $\Delta H = 0$ . On suppose que  $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$  ;

$$\left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} \right) - \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right) = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g}$$

$$\left( Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} \right) - \left( Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} \right) = h$$

$$\frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_1^2}{2g} = h$$

Dans cette équation deux inconnues  $V_1$  et  $V_2$ . On exclue une inconnue en appliquant

l'équation de continuité :  $V_1 \times S_1 = V_2 \times S_2 \Rightarrow V_1 = \frac{V_2 \times S_2}{S_1}$  ; Alors



$$h = \frac{V_2^2}{2g} - \frac{V_2^2 \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}{2g} = \frac{V_2^2}{2g} \left[ 1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2 \right]$$

$$V_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}}$$

Puisque :

$$Q = V_2 \times S_2 = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{1 - \left(\frac{S_2}{S_1}\right)^2}} \times S_2 \quad (1)$$

$$S_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} = 0.785 \times 0.2^2 = 0.0314 m^2 ; \quad S_2 = \frac{\pi d_2^2}{4} = 0.785 \times 0.1^2 = 0.00785 m^2$$

On substituants les valeurs dans l'équation (1), on obtient :

$$Q = \frac{\sqrt{2 \times 9.81 \times 0.25}}{\sqrt{1 - \left(\frac{0.00785}{0.0314}\right)^2}} \times 0.00785 = 0.0185 m^3 / s = 18.5 l / s$$

### Exemple 2.

On considère un siphon alimenté par un réservoir à l'air libre rempli d'eau (voir schéma). Déterminer le débit et la pression de l'eau à la section x-x du siphon, la perte de charge est négligeable. La section intérieure de la conduite est négligeable devant la surface libre du réservoir, le régime est permanent.

Données :  $H = 1 m$ ;  $h = 3 m$ ;  $d = 20 mm$ ;  $P_{atm} = 101 KPa$

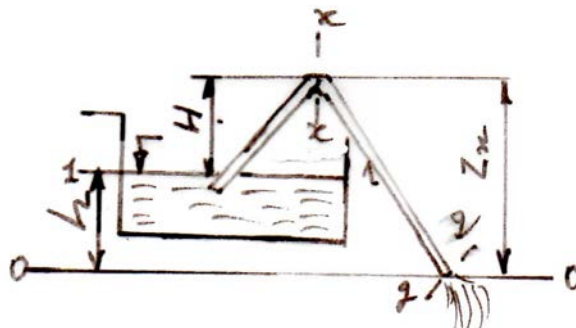


Figure 2. Schéma de l'exercice N°2

**Solution :**

Appliquant l'équation de Bernoulli pour les sections 1-1 et 2-2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g}$$

$$Z_1 = h; Z_2 = 0; P_1 = P_2 = P_{atm}; V_1 \approx 0$$

On obtient : 
$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + 0 = 0 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} \Rightarrow h = \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{2gh}$$

Après substitutions des valeurs, on aura : 
$$V_2 = \sqrt{2 \times 9.81 \times 1.3} = 7.67 \text{ m/s}$$

Le débit : 
$$Q = V_2 \times S = V_2 \frac{\pi d^2}{4} = 7.67 \times 0.785 \times 0.02^2 = 2.4 \times 10^{-3} \text{ m}^3 / \text{s} = 2.4 \text{ l/s}$$

Pour calculer la pression absolue au point supérieur de la conduite, appliquant l'équation de Bernoulli pour les sections 1-1 et x-x :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_x + \frac{P_x}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_x^2}{2g}$$

$$Z_1 = h; Z_2 = H + h; P_1 = P_{atm}; V_1 \approx 0; V_2 = V_x$$

L'équation de Bernoulli devient :

$$h + \frac{P_{atm}}{\rho g} + 0 = H + h + \frac{P_x}{\rho g} + \frac{V_x^2}{2g} \Rightarrow P_x = \left( \frac{P_{atm}}{\rho g} - H - \frac{V_2^2}{2g} \right) \rho g$$

Après substitutions des valeurs, on obtient :

$$P_x = \left( \frac{P_{atm}}{\rho g} - H - \frac{V_2^2}{2g} \right) \rho g = \left( \frac{101 \times 10^3}{1000 \times 9.81} - 1 - \frac{7.67^2}{19.62} \right) = 61760 \text{ Pa} = 61.76 \text{ KPa}$$

**Exercice 3.**

Calculer la perte de charge dans un tuyau de 2,5cm de diamètre et de 610 m de longueur véhiculant de l'eau à une température de 10°C avec :

1. Un débit de 76 l/h.
2. Un débit de 378 l/h.

**Solution :**

1. 
$$Q = 76 \text{ l/h}$$

La vitesse moyenne de l'eau : 
$$v = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = 4 \text{ cm/s}$$

La viscosité de l'eau à une température de 10° : 
$$\nu = 0.0131 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

Le nombre de Reynolds :  $R_e = \frac{V \times d}{\nu} = \frac{4 \times 2.5}{0.0131} = 820$  (Régime laminaire) ;

Le coefficient de la perte de charge linéaire :  $\lambda = \frac{64}{R_e} = 0.08$  ;

La perte de charge linéaire :  $\Delta h_L = \lambda \frac{LV^2}{2gd} = 18cm$  ;

2.  $Q = 378l/h$

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{4Q}{\pi d^2} = 21.4cm/s$$

$$R_e = \frac{V \times d}{\nu} = \frac{21.4 \times 2.5}{0.0131} = 4084 \text{ (Régime turbulent lisse)}$$

$$\lambda = 0.3164R_e^{-0.25} = 0.04$$

La perte de charge linéaire :  $\Delta h_L = \lambda \frac{LV^2}{2gd} = 221cm$

**Note importante** : Plus le débit est élevé plus la perte de charge est importante.

#### Exercice 4.

A travers une conduite en acier, de diamètre  $D=120$  mm et de longueur  $L= 500$  m passe un liquide dont le coefficient de viscosité cinématique est  $\nu=0,027$  cm<sup>2</sup>/vérifier la turbulence du régime et que  $4000 < R_e < 10D/\varepsilon$ , déterminer les pertes de charges répartie en utilisant la relation de Blasius .Le débit  $Q=6$  l/s et la rugosité  $\varepsilon=0,04$  mm

#### Solution

La vitesse moyenne du liquide :  $V = \frac{4Q}{\pi d^2} = 0.53m/s$

Le nombre de Reynolds :  $R_e = \frac{V \times d}{\nu} = \frac{53 \times 12}{0.027} = 2.36 \times 10^4$

$2300 < R_e < 10^5$ , Le régime est turbulent lisse

Le coefficient de la perte de charge linéaire :  $\lambda = 0.3164R_e^{-0.25} = 0.025$

La perte de charge linéaire :  $\Delta h_L = \lambda \frac{LV^2}{2gd} = 1.5m$

#### Exercice 5.

Une conduite horizontale de diamètre  $d =100$  mm et de longueur  $l =50$  m est alimentée grâce à un réservoir de charge constante  $H = 5$  m (voir schéma).Déterminer la vitesse et le débit de l'eau déversée à l'atmosphère.Données : les coefficients de résistances locales :  $\xi_{en} = 0,5$  ;  $\xi_{van} = 5$  ; le coefficient de perte par frottement en longueur (coefficient de Darcy)  $\lambda = 0,02$ .

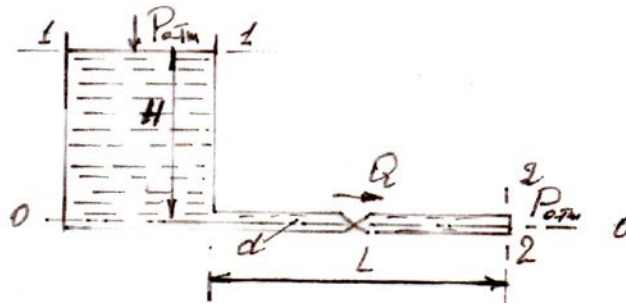


Figure 5. Schéma de l'exercice N°5

L'équation de Bernoulli pour les sections du courant fluide 1-1 et 2-2 :

$$Z_1 + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 V_1^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta H$$

$$Z_1 = H; \frac{P_1}{\rho g} = \frac{P_2}{\rho g} = \frac{P_{atm}}{\rho g}, V_1 = 0 \quad \text{et puisque } H = \text{const, donc} \quad H = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

$$\text{Ou,} \quad \Delta H = h_l + \sum h_s = \lambda \frac{l}{d} \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_{en} \frac{V_2^2}{2g} + \zeta_{van} \frac{V_2^2}{2g};$$

$$\text{Donc } H = \frac{V_2^2}{2g} \left( 1 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{en} + \zeta_{van} \right)$$

$$\text{La vitesse dans la conduite : } V_2 = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \lambda \frac{l}{d} + \zeta_{en} + \zeta_{van}}} = 2.44 \text{ m/s}$$

$$\text{Enfin le débit est comme suit : } Q = V_2 \times S = V_2 \frac{\pi d^2}{4} = 2.44 \times \frac{3.14 \times 0.1^2}{4} = 0.19 \text{ m}^3/\text{s}$$

### Exercice 6.

Déterminer le débit pour le système de conduite (voir figure ci-dessous) on donne :  $d_1=100$  mm,  $l_1=100$  m,  $d_2=200$  mm,  $l_2=160$  m,  $\lambda_1=0,025$ ,  $\lambda_2=0,0215$ ,  $\zeta_e=0,5$ ,  $\zeta_{ar}=1$ . On considère les positions des surfaces libres dans les réservoirs 1 et 2 sont constantes.

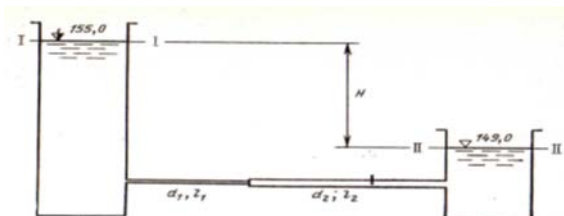


Figure 6. Schéma de l'exercice N°6

### Solution :

Equation de Bernoulli pour les sections I et II. L'axe de référence est choisi comme l'axe de la conduite passant par le centre.

$$H + \frac{P_1}{\rho g} + \frac{V_1^2}{2g} = 0 + \frac{P_{atm}}{\rho g} + \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

$$V_1 = V_2 = 0 ; \quad H = \Delta H ; \quad \Delta H = \sum h_l + \sum h_s$$

Perte de charge linéaire :

$$\sum h_l = h_{l1} + h_{l2} = \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{V_1^2}{2g} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{V_2^2}{2g} = 0.025 \frac{100 \times V_1^2}{0.1 \times 2g} + 0.0215 \frac{160 V_2^2}{0.2 \times 2g} = 25 \frac{V_1^2}{2g} + 17.2 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{Donc : } h_{l1} = 25 \frac{V_1^2}{2g} \quad \text{et} \quad h_{l2} = 17.2 \frac{V_2^2}{2g}$$

Perte de charge singulière :

1. A l'entrée de la conduite :  $h_{s.ent} = \xi_{ent} \frac{V_1^2}{2g} = 0.5 \frac{V_1^2}{2g}$  avec  $\xi_{ent} = 0.5$ .

2. A l'élargissement brusque de la conduite :

$$h_{s.elarbr} = \left( \frac{S_2}{S_1} - 1 \right)^2 \times \frac{V_1^2}{2g} = \left( \frac{200^2}{100^2} - 1 \right)^2 \times \frac{V_2^2}{2g} = 9 \times \frac{V_2^2}{2g}$$

3. A la sortie de la conduite dans le réservoir :

$$h_{s.sortie} = \xi_{sortie} \frac{V_2^2}{2g} = 1 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{Donc } \Delta H = \sum h_l + \sum h_s = 25 \frac{V_1^2}{2g} + 17.2 \frac{V_2^2}{2g} + 0.5 \frac{V_1^2}{2g} + 9 \frac{V_2^2}{2g} + 1 \frac{V_2^2}{2g}$$

Grace à l'équation de continuité, on peut écrire que :

$$V_1 = V_2 \frac{S_2}{S_1} = 4 \times V_2 ; \quad \frac{V_1^2}{2g} = 16 \frac{V_2^2}{2g}$$

$$\text{La charge : } H = \Delta H = 25 \times 16 \frac{V_2^2}{2g} + 17.2 \frac{V_2^2}{2g} + 0.5 \times 16 \frac{V_2^2}{2g} + 9 \frac{V_2^2}{2g} + 1 \frac{V_2^2}{2g} = 155 - 149 = 6m$$

Determinons maintenant les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  :

$$H = \frac{V_2^2}{2g} (25 \times 16 + 17.2 + 0.5 \times 16 + 1) = 426.2 \frac{V_2^2}{2g} \Rightarrow V_2 = \sqrt{\frac{2 \times 9.81 \times 6}{426.2}} = 0.53m .$$

Le débit est déterminé comme suit :

$$Q = V_2 \times A_2 = V_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 0.53 \times \frac{3.14 \times 0.2^2}{4} = 16.6l / s$$

**Exercice 7.**

L'eau coule d'un réservoir à surface libre à travers une conduite inclinée de diamètre variable par laquelle sort à l'air libre. La conduite est reliée au réservoir remplie à une hauteur  $H = 3 \text{ m}$  maintenue constante (voir schéma). Déterminer le débit qui transite par la conduite en considérant que la perte de charge singulière est négligeable.

**Données :**  $d_1=40 \text{ mm}$  ;  $d_2= 25 \text{ mm}$  ;  $l_1= 50 \text{ m}$  ;  $l_2=75\text{m}$  ;  $Z =1,5 \text{ m}$  ; le coefficient de résistance linéaire  $\lambda_1=\lambda_2=0,035$  ; Les coefficients de correction de l'énergie cinétique  $\alpha_x=\alpha_2=1$

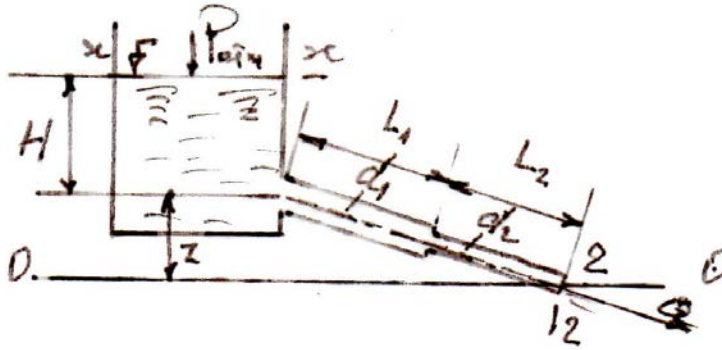


Figure 7. Schéma de l'exercice N°7

**Solution :**

Appliquant l'équation de Bernoulli pour les sections x-x et 2-2 par rapport au plan 0-0 :

$$Z_x + \frac{P_x}{\rho g} + \frac{\alpha_x V_x^2}{2g} = Z_2 + \frac{P_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 V_2^2}{2g} + \Delta H$$

Donc :  $Z_x = H + z$ ;  $Z_2 = 0$ ;  $P_x = P_2 = P_{atm}$ ;  $\alpha_x = \alpha_2 = 1$ ;  $V_x \approx 0$

On obtient : 
$$H + z = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H$$

La perte de charge linéaire est déterminée comme suit :

$$h_l = \Delta H = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{d_1 2g} + \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{d_2 2g};$$

D'où  $V_1, V_2$  vitesse moyenne de l'écoulement dans les tronçons 1 et 2 :

$$Q = V_1 \times S_1 = V_2 \times S_2 \Rightarrow V_1 = \frac{Q}{S_1}; V_2 = \frac{Q}{S_2}$$

En substituant les termes de vitesse dans l'équation de Bernoulli, on aura :

$$H + z = \frac{V_2^2}{2g} + \Delta H = \frac{V_2^2}{2g} + \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{d_1 2g} + \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{d_2 2g}$$

Où,

$$H + z = \frac{Q^2}{2g \times S_2^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{Q^2}{2g \times S_1^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{Q^2}{2g \times S_2^2}$$

(1)

L'équation (1) peut s'écrire de la façon suivante :

$$(H + z)2g = \left( \frac{1}{S_2^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{1}{S_1^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{1}{S_2^2} \right) \times Q^2 \quad (2)$$

Enfin, on peut définitivement déterminer la valeur du débit en transformant (2) comme suit :

$$Q = \sqrt{\frac{(H + z)2g}{\left( \frac{1}{S_2^2} + \lambda_1 \frac{L_1}{d_1} \frac{1}{S_1^2} + \lambda_2 \frac{L_2}{d_2} \frac{1}{S_2^2} \right)}} = \sqrt{\frac{(3 + 1.5)19.62}{\frac{16}{\pi^2} \left( \frac{1}{0.025^4} + \frac{0.035 \times 50}{0.04^5} + \frac{0.035 \times 75}{0.025^5} \right)}} = 4.36 \times 10^{-4} \text{ m}^3 / \text{s}$$

**Exercice 8 :** On utilise une pompe pour transférer de l'eau du bassin A vers le bassin B de niveau constant  $H=12 \text{ m}$  (hauteur géométrique de refoulement), tel que montré sur la figure ci-dessous.  $l_1 = 8 \text{ m}$ ;  $l_2 = 16 \text{ m}$ ;  $d_1 = 100 \text{ mm}$ ;  $d_2 = 75 \text{ mm}$

- 1- Quelle est la profondeur  $h$  (hauteur géométrique d'aspiration) ou devrait se trouver le niveau d'eau dans le bassin A si le débit d'arrivée  $Q = 8 \text{ l/s}$  et la vitesse de rotation de la roue de la pompe  $n = 1450 \text{ t/min}$ .
- 2- Calculer la puissance de la pompe en prenant en compte la perte de charge dans les conduites d'aspiration et de refoulement. Les coefficients de résistance linéaires  $\lambda_1=0,03$  ;  $\lambda_2= 0,035$ . Les coefficients de résistance locales  $\zeta_1=6$  ;  $\zeta_2= 10$ .

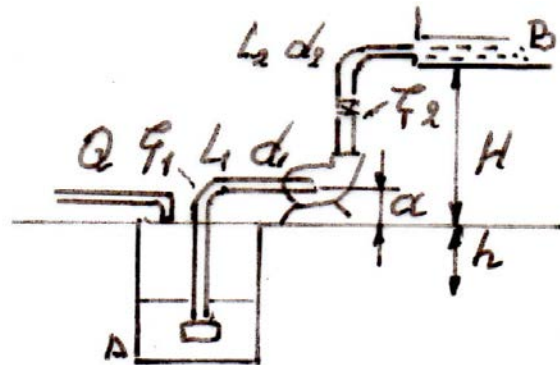


Figure 8. Schéma de l'exercice N°8

Les caractéristiques de la pompe lorsque  $n=1450 \text{ min}^{-1}$

$Q_P, l/s$	0	2	4	6	8	10	12	14	16
$H_{P0}, m$	22,0	22,4	22,6	22,4	21,5	20,0	18,0	15,0	11,0
$\eta, \%$	0	37	58	71	75	74	68	56	37

**Solution :**

Dans le cas d'un écoulement permanent :

$$Q = Q_p = 8l/s; H_p = H_{p0} = 21.5m$$

$H_p$ -hauteur manométrique développée par de la pompe

A partir du schéma nous nous avons :  $H_p = h + H + \sum \Delta H$

$\sum \Delta H$ - La somme des pertes de charge dans les conduites d'aspiration et de refoulement.

$h$ -hauteur géométrique d'aspiration,

$H$ - hauteur géométrique de refoulement,

$H_g = h + H$ - hauteur géométrique totale d'élévation,

$$\sum \Delta H = \sum \Delta H_L + \sum \Delta H_s = R \times Q^2 ;$$

Ou : 
$$R = \left( \sum 0.0827 \times \lambda L / d^5 + 0.0827 \frac{1}{d^4} \sum \xi \right)$$

$$R = \frac{0.0827 \lambda_1 l_1}{d_1^5} + \frac{0.0827 \lambda_2 l_2}{d_2^5} + \xi_1 \frac{0.0827}{d_1^4} + \xi_2 \frac{0.0827}{d_2^4} \quad (1)$$

En substituant les données dans l'équation (1) on trouve  $R$  égale :

$$R = \frac{16}{\pi^2 19.62} \left( 0.03 \frac{8}{0.1^5} + 0.035 \frac{16}{0.075^5} + 6 \frac{1}{0.1^4} + 10 \frac{1}{0.075^4} \right) = 52660.4 s^2 / m^5$$

$$\sum \Delta H = R \times Q^2 = 52660.4 \times 0.008^2 = 3.4m$$

$$h = H_p - H - \sum \Delta H = 21.5 - 12 - 3.4 = 6.1m$$

Pour trouver le point de fonctionnement, il est nécessaire de calculer les valeurs de la courbe caractéristique de la conduite (voir tableau ci-dessous).



$Q_p, l/s$	0	2	4	6	8	10	12	14
$\sum \Delta H = R Q^2, m$	0	0,2	0,8	1,9	3,4	5,3	7,6	10,3
$H_p$ $= h + H$ $+ \sum \Delta H, m$	18,1	18,3	18,9	20,0	21,5	23,4	25,7	28,4
$H_p$ $= H_g + \sum \Delta H, m$								

A la fin on construit sur le meme graphe la C.C.P :

$$H_{p0} = f(Q_{p0}) \quad \text{et} \quad \text{la courbe caracteristique de la conduite } H_p = f(Q)$$

L'intersection des deux courbes, est le point(A) de fonctionnement de la pompe.

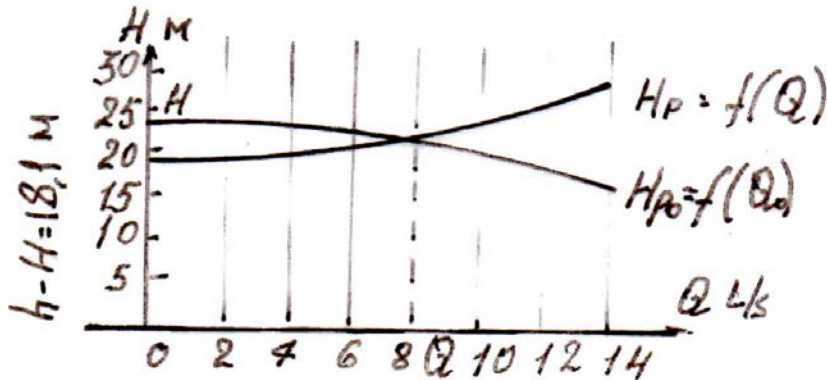


Figure 9. Graphe de détermination du point de fonctionnement A

La puissance délivrée par la pompe :

$$P_p = \rho g Q_A H_A = 1000 \times 9.81 \times 8.1 \times 10^{-3} \times 21.5 = 1708.41 w$$

La puissance qu'il faut fournir à la pompe :

$$P'_p = \frac{P_p}{\eta} = \frac{1708.41}{0.75} = 2277.88 w \approx 2.3 Kw$$

La puissance d'électromoteur :  $P_M = k \times P'_p = 1.25 \times 2.3 = 2.85 Kw$

Ou :  $\eta$  - rendement de la pompe ;  $k$  - Coefficient de sécurité.

### Exercice 9.

Pour le système de tuyaux en parallèle de la figure ci-dessous, le débit d'un écoulement en charge  $Q_V = 0,140 \frac{m^3}{s}$  se divise sur les trois branches.  $L_1 = 3600m$ ,  $d_1 = 30 \text{ cm}$ ,  $\lambda_1 = 10^{-2}$ ;  $L_2 = 1200m$ ,  $d_2 = 20cm$ ,  $\lambda_2 = 10^{-2}$ ;  $L_3 = 2400m$ ,  $d_3 = 25cm$ ,  $\lambda_3 = 10^{-2}$ .

Calculer le débit de chaque tronçon

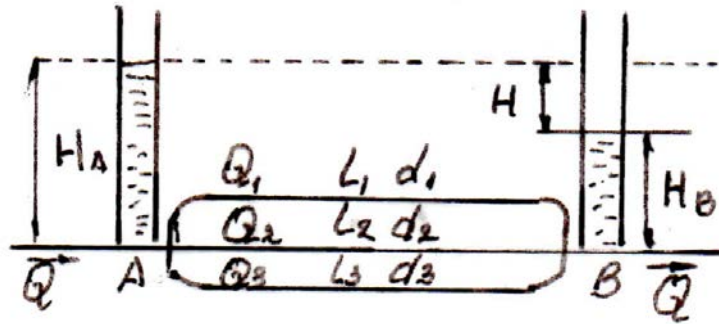


Figure 10. Schéma de l'exercice N°9

### Solution :

On a :

$$\Delta H_1 = \Delta H_2 = \Delta H_3 = \lambda_1 \frac{L_1 V_1^2}{d_1 2g} + \lambda_2 \frac{L_2 V_2^2}{d_2 2g} + \lambda_3 \frac{L_3 V_3^2}{d_3 2g}$$

Après substitutions des valeurs numériques on obtient :

$$12000 \times V_1^2 = 6000 \times V_2^2 = 9600 \times V_3^2 \Rightarrow V_2 = \sqrt{2} \times V_1 = 1.414 \times V_1; V_3 = \sqrt{1.25} \times V_1 = 1.118 V_1$$

Pour un écoulement permanent, l'équation de continuité s'écrit :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 = V_1 \frac{\pi d_1^2}{4} + V_2 \frac{\pi d_2^2}{4} + V_3 \frac{\pi d_3^2}{4} \Rightarrow$$

Après substitutions des valeurs numériques on obtient :

$$0.140 = 0.071 \times V_1 + 0.044 \times V_1 + 0.055 \times V_1 \Rightarrow V_1 = 0.82 m/s$$

$$V_2 = \sqrt{2} \times V_1 = 1.414 \times V_1 = 1.414 \times 0.82 = 1.16 m/s$$

$$V_3 = \sqrt{1.25} \times V_1 = 1.118 \times V_1 = 1.118 \times 0.82 = 0.92 m/s$$

Donc :

$$Q_1 = V_1 S_1 = V_1 \frac{\pi d_1^2}{4} = 0.82 \times 0.785 \times 0.3^2 = 0.0580 m^3 / s$$

$$Q_2 = V_2 S_2 = V_2 \frac{\pi d_2^2}{4} = 1.16 \times 0.785 \times 0.2^2 = 0.0364 m^3 / s$$

$$Q_3 = V_3 S_3 = V_3 \frac{\pi d_3^2}{4} = 0.92 \times 0.785 \times 0.25^2 = 0.0451 m^3 / s$$

## **Références Bibliographiques**

- 1-Audoeye P. Mécanique des fluides , Ed.Masson 1992.**
- 2-Berkoune A. Aide mémoire de la mécanique des fluides , Ed.OPU 2004.**
- 3-Candel M.(1995) , mécanique des fluides , Dupod, Paris.**
- 4-Carlier M.(1980) hydraulique générale et appliquée, Eyrolles, paris**
- 5-Chugaev R.R. Hydraulique (ingénierie mécanique des fluides) , Ed. Energie. Leningrad 1975.**
- 6-Chtérénlisht D.B. Hydraulique , tome 1. Ed. Energoatomi. Moscou, 1991.**
- 7-Fermigier M.A. et Laborde J.P. exercices de la mécanique des fluides Ed. Dunod, 1999**
- 8-Gheraout R. Mécanique des fluides et hydraulique , Ed. OPU, 2010.**
- 9-Hladik,J.Unités de mesure, étalons, et grandeursphysiques,Masson,Paris,1992.**
- 10-Kachanov I.V., Ledyan Yu.P., Shcherbakova M.K, « Mécanique des fluides et des gaz », Manuel sur les méthodes de résolution de problèmes, Ed. Minsk 2015**
- 11-Kanygin V.A., Tsvetkova E.V. Hydraulique , Ed. Volga, 2014.**
- 12-Korpachev V.P.Sizov B.G., Ivanov V.G., Gubin I.V. Notions de l'hydraulique krosnayarsk, 2011.**
- 13-Koshman, I.P. Mashkareva , Hydraulique Collection de problèmes avec exemples de solutions , Perm State Agricultural Academy 2013.**
- 14-Kréminetski N. Hydraulique , Ed. Mir, Moscou 1980.**
- 15-Lencastre A (1999) , Hydraulique générale , Eyrolles, Paris**
- 16-Lencastre A. Manuel d'Hydraulique générale , Eyrolles, Paris 1966.**
- 17-Maslova A.V, Bosov M.A pratique de l'hydraulique, Ed. Chita 2013**
- 18-Pazouchkina O.V. Hydraulique, exercices en hydrostatique et hydrodynamique », Oulianov 2021.**
- 19-Ranald v. Giles, Jack B. Evett, Cheng Liu . Mécanique des fluides et hydraulique, Schaum Mc Graw-Hillinc, Paris, 1995.**
- 20-Troyan T.P. Hydraulique problèmes et exemples des calculs en statique et dynamique des fluides, Ed. Omsk 2006.**

**21-Vorozhtsov O.V. Hydraulique avec problèmes corrigés, édition Pskov 2014**

**22-Vikharev A.N., Dolgova I.I. Hydraulique, régimes de mouvement, équation de Bernoulli, perte de charge, canaux , Arkhangelsk 2001.**

**23- Zella L. hydraulique générale, OPU 2015.**

.

## Annexe

Tableau N°1

Valeurs du coefficient de dilatation thermique de l'eau en fonction de la température.

t°	$\beta_t \cdot 10^6, ^\circ C^{-1}$ cas de pression P, Pa .10 <sup>5</sup>			
	1,0	2,0	5,0	9,0
1...10	14	72	149	229
10...20	165	183	236	289
40...50	422	426	429	437
60...70	548	439	523	514
90...100	704	691	661	621

Tableau N°2

Valeurs du coefficient de compression volumique de l'eau en fonction de la température

t°	$\beta_c \cdot 10^{10}, Pa^{-1}$ cas de pression P, Pa .10 <sup>5</sup>			
	0,5	1,0	2,0	3,0
0	5,40	5,37	5,31	5,23
5	5,29	5,23	5,18	5,08
10	5,23	5,18	5,08	4,98
15	5,18	5,10	5,03	4,88
20	5,15	5,05	4,95	4,81