



Polycopié de cours

Module : Notions des phénomènes de transfert

Niveau : 2^{ème} année licence génie des procédés



Présenté par :

Dr. BELLACHE Dihia

PREAMBULE

Les phénomènes de transfert font référence à la manière dont la matière, l'énergie ou la quantité de mouvement sont transférés d'un endroit à un autre. Ils sont couramment étudiés dans les domaines de la physique et de l'ingénierie, en particulier dans les domaines de la thermodynamique, de la mécanique des fluides.

Cette unité d'enseignement s'adresse aux étudiants deuxième année génie des procédés, elle consiste en une introduction aux phénomènes de transfert. Son principal but est d'offrir les moyens de comprendre d'un point de vue physique les phénomènes de transfert et l'implication du transfert de matière dans le fonctionnement de nombreux procédés ou processus physico-chimiques et biologiques.

A la fin de cette unité d'enseignement, l'étudiant sera capable de :

✓ *Connaître d'un point de vue physique les phénomènes de transfert et leurs implications dans le fonctionnement de nombreux procédés ou processus physico-chimiques et biologiques ;*

✓ *Comprendre la similitude entre les disciplines du transfert : transfert thermique, transfert de la matière et le transfert de quantité de mouvement ;*

✓ *Appliquer les lois fondamentales : Les phénomènes de transfert sont régis par des lois fondamentales, telles que la loi de Fick pour le transfert de matière, la loi de Fourier pour le transfert de chaleur et la loi de Newton pour le transfert de quantité de mouvement ;*

✓ *Capable à résoudre les équations différentielles qui décrivent les phénomènes de transfert.*

Sommaire

Chapitre I. Introduction aux modes de transfert

I.1. Introduction.....	1
I.2. Définition d'un système.....	2
I.2.1. Les contraintes d'un système.....	2

Chapitre II. Transfert de chaleur

II.1. Définitions.....	5
II.1.1. Champ de température.....	5
II.1.2. Gradient de température.....	6
II.1.3. Flux de chaleur.....	6
II.1.4. Flux de chaleur lié à un débit massique.....	6
II.1.5. Stockage d'énergie.....	6
II.1.6. Génération d'énergie.....	7
II.2. Transfert de chaleur par conduction.....	7
II.2.1. Loi de Fourier.....	8
II.2.1.1. Flux thermique.....	8
II.2.1.2. La conductivité thermique.....	9
II.2.1.3. La diffusivité thermique.....	10
II.2.1.4. La chaleur spécifique.....	10
II.2.1.5. La résistance thermique.....	10
II.2.1.6. Le flux de chaleur d'un mur simple.....	11
II.2.1.7. Le flux de chaleur d'un mur multicouches (une seule dimension régime stationnaire)	12
II.2.1.7.1. En série.....	12
II.2.1.7.2. En parallèle.....	12
II.3. Transfert de chaleur par convection.....	13
II.3.1. Convection naturelle (libre).....	14

II.3.2. Convection forcée.....	14
II.3.1. Le flux de chaleur.....	15
II.3.1.1. Gamme de valeurs pour coefficient de transfert de chaleur.....	15
II.3.2. Échange par convection sur les deux faces du Mur.....	16
II.3.3. Mur composite.....	17
II.4. Transfert de chaleur par rayonnement.....	18
II.4.1. Introduction au rayonnement thermique.....	19
II.4.2. Loi fondamentale du rayonnement (loi de Stefan-Boltzmann).....	19

Chapitre III. Transfert de matière

III.1. Définitions.....	21
III.1.1. Le transfert de matière.....	21
III.1.1.1. Phase immobile.....	22
III.1.1.2. Phase mobile.....	22
III.1.2. Grandeurs massiques et molaires.....	23
III.1.3. Relation entre les grandeurs massique et les grandeurs molaires.....	23
III.2. Transfert de matière par diffusion moléculaire.....	24
III.2.1. La loi de Fick.....	24
III.2.2. Définition de la diffusion moléculaire.....	25
III.2.3. Notions de densité de flux de matière.....	27
III.2.4. Définition des vitesses moyennes molaire et massique.....	27
III.2.4.1. La vitesse massique moyenne.....	27
III.2.4.2. La vitesse molaire moyenne.....	27
III.2.4.3. Les flux.....	28
III.3. Transfert de matière par convection.....	29
III.4. Transfert combiné : diffusion + convection.....	29

Chapitre IV. Transfert de quantité de mouvement

VI.1. Définition d'un fluide.....	31
-----------------------------------	----

VI.1.1	Fluide parfait	32
VI.1.2.	Fluide réel	32
VI.1.3.	Fluide incompressible	33
VI.1.4.	Fluide compressible	33
VI.2.	Caractéristiques Physiques.....	33
VI.2.1	Masse volumique	33
VI.2.2.	Poids volumique.....	33
VI.2.3.	Densité	33
VI.2.4.	Viscosité.....	33
IV.3.	Statiques des fluides.....	35
IV.3.1.	Notion de pression en un point d'un fluide.....	35
IV.4.	Dynamique des fluides incompressibles parfaits	39
IV.4.1.	Ecoulement permanent.....	39
IV.4.2.	Equation de continuité	39
IV.5.	Notion de débit.....	40
IV.5.1.	Débit massique	40
IV.5.2.	Débit volumique.....	41
IV.5.3.	Relation entre débit massique et débit volumique	41
IV.6.	Théorème de Bernoulli.....	42

Liste des figures

Chapitre I. Introduction aux modes de transfert

Figure I.1. Un système défini par sa frontière..... 2

Chapitre II. Transfert de chaleur

Figure II.1. Isotherme et gradient thermique. 5

Figure II.2. Illustration de la conduction thermique. 7

Figure II.3. La chaleur transmise à travers les murs ou le plancher d'une maison se fait par conduction thermique. 8

Figure II.4. Illustration d'un transfert thermique à travers une barre rectangulaire. 9

Figure II.5. Schéma de principe de la conductivité thermique. 9

Figure II.6. Conductivité thermique de certains matériaux. 10

Figure II.7. Circuit électrique équivalent 11

Figure II.8. Mur simple 11

Figure II.9. Mur composé de plusieurs résistances thermiques en série et schéma équivalent.
..... 12

Figure II.10. Mur composé de plusieurs résistances thermiques en parallèle et schéma
équivalent. 13

Figure II.11. Illustration de transfert de chaleur par convection..... 14

Figure II.12. Illustration de la convection naturelle (libre)..... 14

Figure II.13. Illustration de convection forcée..... 14

Figure II.14. Schéma du transfert de chaleur convectif. 15

Figure II.15. Mur échange de la chaleur par convection sur ses deux faces..... 17

Figure II.16. Circuit électrique équivalent. 17

Figure II.17. Mur composite.	18
Figure II.18. Circuit électrique équivalent.	18
Figure II.19. Illustration d'un rayonnement thermique.	19
Figure II.20. Le flux dans le rayonnement thermique.	19
Figure II.21. Schéma du transfert de chaleur radiatif.	21

Chapitre III. Transfert de matière

Figure III.1. Exemple de transfert de matière.	21
Figure III.2. Exemple de diffusion moléculaire.	22
Figure III.3. Exemple de transfert par convection.	23
Figure III.4. Diffusion du milieu le plus concentré vers le milieu le moins concentré.	24
Figure III.5. Exemple de diffusion.	24
Figure III.6. Diffusion d'une vapeur dans un gaz.	25
Figure III.7. Progression de la diffusion de l'hélium (A) à travers le verre (B) et profil de concentration.	26
Figure III.8. Schéma descriptif du flux de diffusion à travers un plan.	27

Chapitre IV. Transfert de quantité de mouvement

Figure IV.1. Représentation idéalisée des trois états de la matière.	31
Figure IV.2. Représentation de la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire. ..	32
Figure IV.3. Variation du profil de vitesses dans le film fluide.	34

Liste des tableaux

Chapitre I. Introduction aux modes de transfert

Tableau I.1. Analogies entre les différentes grandeurs transférées.....	2
--	---

Chapitre II. Transfert de chaleur

Tableau II.1. Analogie électrique/ thermique.....	11
--	----

Tableau II. 2. La gamme de valeurs de h ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$).....	16
--	----

Chapitre III. Transfert de matière

Tableau III.1. Grandeurs massiques et molaires.	23
---	----

Tableau III.2. Notations pour les vitesses dans un système multicomposant.	28
--	----

Tableau III.3. Expressions des différents flux massiques et molaires.....	28
--	----

Tableau III.4. Formes équivalentes de la première loi de Fick (cas d'une diffusion binaire).30	
---	--

Chapitre IV. Transfert de quantité de mouvement

Tableau IV.1 : Viscosité dynamique de certains fluides.	35
---	----

CHAPITRE I. INTRODUCTION AUX MODES DE TRANSFERT

I.1. Introduction

Le génie des procédés implique souvent le transfert de matière, de chaleur et de quantité de mouvement, qui sont les trois phénomènes fondamentaux de transfert. Voici une brève description de ces phénomènes de transfert :

Transfert de matière : ce phénomène se produit lorsque des espèces chimiques se déplacent d'une zone de haute concentration vers une zone de basse concentration. Le transfert de matière est important pour des processus tels que la distillation, l'absorption, la chromatographie et l'extraction.

Transfert de chaleur : ce phénomène se produit lorsque de la chaleur se déplace d'une zone de haute température vers une zone de basse température. Le transfert de chaleur est important pour des processus tels que la combustion, la vaporisation, la condensation et la convection.

Transfert de quantité de mouvement : ce phénomène se produit lorsque de l'énergie cinétique est transférée d'une zone de haute vitesse à une zone de basse vitesse. Le transfert de quantité de mouvement est important pour des processus tels que l'agitation, la circulation, la filtration et la séparation.

Il est important de comprendre ces phénomènes de transfert dans le génie des procédés pour concevoir, développer et optimiser des procédés efficaces et économiques.

Tableau I.1. Analogies entre les différentes grandeurs transférées

	Mécanique des fluides	Transfert thermique	Transfert de masse
Grandeurs physiques transférées	Quantité de mouvement	Quantité de chaleur	Quantité de matière
Mécanisme de transfert	Loi de Newton (cas des fluides visqueux)	Loi de Fourier (cas de conduction)	Loi de Fick (cas de diffusion)
Gradueur caractéristique de transfert	Viscosité	Conductivité thermique	Diffusivité
Equation bilan sur	Mouvement	énergie	Matière
Profils de grandeur à déterminer	Vitesse	Température	Concentration

I.2. Définition d'un système

En phénomènes de transfert, un système (figure I.1) est un objet, une substance ou une région de l'espace qui est délimitée et considérée comme une entité distincte pour l'analyse des transferts de masse, de chaleur ou de quantité de mouvement qui s'y produisent. Un système peut être ouvert, fermé ou isolé, en fonction de la quantité de matière ou d'énergie qui peut entrer ou sortir du système.

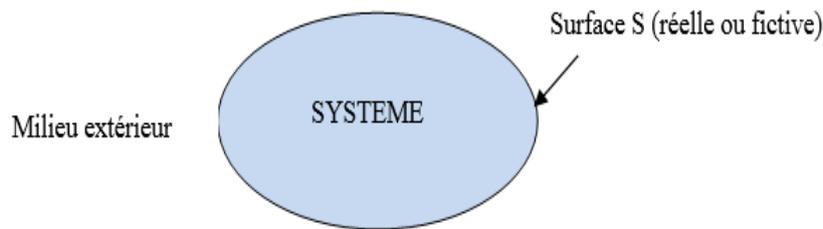


Figure I.1. Un système défini par sa frontière.

Un système ouvert est un système dans lequel la matière et l'énergie peuvent entrer ou sortir librement. **Par exemple**, une casserole sur une cuisinière est un système ouvert, car de la chaleur et de la vapeur peuvent s'échapper de la casserole dans l'environnement.

Un système fermé est un système dans lequel la matière ne peut pas entrer ou sortir, mais l'énergie peut le faire. **Par exemple**, un réfrigérateur est un système fermé, car la matière ne peut pas entrer ou sortir, mais l'énergie peut être ajoutée ou retirée du système pour maintenir la température intérieure.

Un système isolé est un système dans lequel ni la matière ni l'énergie ne peuvent entrer ou sortir. **Par exemple**, une bouteille thermos est un système isolé, car il n'y a pas d'échange de matière ou d'énergie entre l'intérieur et l'extérieur du thermos.

Un système est caractérisé par deux catégories de paramètres : **des grandeurs extensives**, qui sont fonctions du système choisi : masse, nombre de moles et **des grandeurs intensives**, indépendantes du choix du système : densité, concentration.

En phénomènes de transfert, les systèmes peuvent être analysés à travers des équations qui décrivent les lois fondamentales de la thermodynamique et des phénomènes de transfert de masse, de chaleur ou de quantité de mouvement. Ces équations permettent de prédire les comportements des systèmes et de concevoir des systèmes plus efficaces pour une variété d'applications.

I.2.1. Les contraintes d'un système

Le régime de fonctionnement d'un appareil physico-chimique quelconque résulte de la combinaison d'un très grand nombre de facteurs caractérisant soit la transformation chimique

elle-même, soit les processus de transport de matière, de chaleur et de quantité de mouvement, etc. On appelle contraintes du système toutes les relations mathématiques entre ces différents facteurs.

Quand on décrit mathématiquement le fonctionnement d'un tel système, il parait difficile d'être certain d'avoir tenu compte de toutes les contraintes, et inversement, il est difficile de s'assurer que les nombreuses relations mathématiques que l'on est tenté d'écrire sont réellement indépendantes les unes des autres. En dénombrant toutes ces relations, on admet généralement qu'elles appartiennent aux sept groupes suivants :

a. Principes de conservation de grandeurs extensives.

- Conservation de la matière ;
- Conservation de l'énergie ;
- Conservation de la quantité de mouvement ;
- Conservation de la charge électrique.

b. Les lois d'équilibre statique, exprimant un équilibre mécanique, physique ou chimique

Ces lois constituent des applications sous diverses formes du premier principe de la thermodynamique. $dU = dQ + dW$

c. Les lois cinétiques exprimant le sens et la vitesse d'évolution d'un système

En fait, le sens de l'évolution d'un système isolé quelconque est fixé par une loi unique : le second principe de la thermodynamique, qui énonce que l'entropie de ce système ne peut qu'augmenter.

L'expression de la vitesse de création d'entropie dans le système constituerait un moyen unique et très général de mesure de la vitesse d'évolution du système, mais cette méthode est trop abstraite pour être utilisée pratiquement, surtout à l'échelle industrielle. En outre, cette loi cinétique générale ne nous renseignerait que sur l'évolution du contenu énergétique global du système, alors que nous sommes au contraire intéressés par l'évolution et la conversion, les unes dans les autres, des divers constituants et des diverses formes d'énergie d'un système.

C'est ce qui justifie l'importance pratique des nombreuses lois qui régissent les vitesses des divers processus élémentaires : vitesses des réactions chimiques, vitesses des transports de matière (loi de Fick), de chaleur (loi de Fourier), de quantité de mouvement (loi de Newton), d'électricité (loi d'Ohm), etc.

d. Les relations capacitatives.

Ce sont celles qui expriment la quantité, par unité de volume, de chacune des grandeurs extensives (matière, chaleur, électricité et quantité de mouvement).

e. Les relations de texture géométrique

Ces relations sont toutes celles qui donnent la forme et les dimensions d'un appareil ou d'un domaine de phase : par exemple la distribution des diamètres de pores dans un catalyseur solide, la distribution des diamètres de gouttes dans une émulsion, ...etc. Ce sont également les relations qui donnent la distribution des temps de séjour d'un fluide s'écoulant à travers le système.

CHAPITRE II. TRANSFERT DE CHALEUR

On définit le transfert de chaleur comme de l'énergie thermique en transit à cause d'une différence de température. On peut observer les phénomènes de transfert de chaleur aussi bien dans des situations industrielles (fours, réacteurs, échangeurs de chaleur, colonnes à distiller, chambres froides, presses à injection, coulée des métaux...) que dans notre vie quotidienne (le chauffage et l'isolation de la maison, la cuisson des aliments, les vêtements d'hiver et le facteur de refroidissement éolien, le coup de soleil sur la plage !...). Les trois modes de transfert de chaleur sont : la conduction, la convection, le rayonnement.

II.1. Définitions

II.1.1. Champ de température

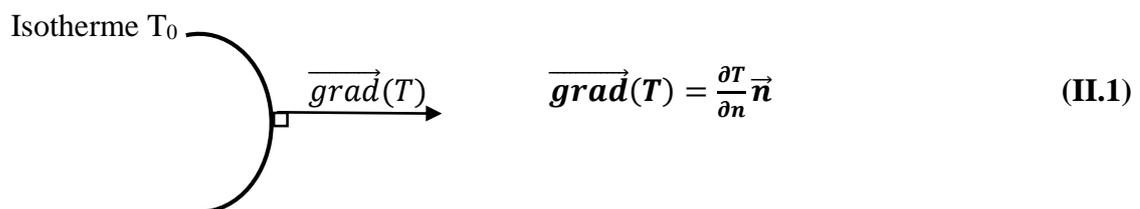
Température : $T = f(x, y, z, t)$, la valeur instantanée de la température en tout point de l'espace est un scalaire appelé **champ de température**. Nous distinguerons deux cas :

- Champ de température indépendant du temps : le régime est dit **permanent** ou stationnaire.

- Evolution du champ de température avec le temps : le régime est dit **variable** ou transitoire.

II.1.2. Gradient de température

Si l'on réunit tous les points de l'espace qui ont la même température, on obtient une surface dite surface isotherme. La variation de température par unité de longueur est maximale le long de la normale à la surface isotherme. Cette variation est caractérisée par le gradient de température :



$$\vec{\text{grad}}(T) = \frac{\partial T}{\partial n} \vec{n} \quad (\text{II.1})$$

Figure II.1. Isotherme et gradient thermique.

Avec :

\vec{n} : Vecteur unitaire de la normale ;

$\frac{\partial T}{\partial n}$: Dérivée de la température le long de la normale.

II.1.3. Flux de chaleur

La chaleur s'écoule sous l'influence d'un gradient de température des hautes vers les basses températures. La quantité de chaleur transmise par unité de temps et par unité d'aire de la surface isotherme est appelée densité de flux de chaleur :

$$\phi = \frac{1}{S} \frac{dQ}{dt} \quad (\text{II.2})$$

Où S est l'aire de la surface (m^2).

On appelle flux de chaleur la quantité de chaleur transmise par unité de temps :

$$\varphi = \frac{dQ}{dt} \quad (\text{II.3})$$

II.1.4. Flux de chaleur lié à un débit massique

Lorsqu'un débit massique \dot{m} de matière entre dans le système à la température T_1 et en ressort à la température T_2 , on doit considérer dans le bilan (1.5) un flux de chaleur entrant correspondant :

$$\varphi_e = \dot{m}(T_1 - T_2) \quad (\text{II.4})$$

Avec :

φ_e : Flux de chaleur entrant dans le système (W) ;

\dot{m} : Débit massique ($kg \cdot s^{-1}$) ;

C_p : Chaleur spécifique ($J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$) ;

T_1, T_2 : Températures d'entrée et de sortie (K).

II.1.5. Stockage d'énergie

Le stockage d'énergie dans un corps correspond à une augmentation de son énergie interne au cours du temps d'où (à pression constante et en l'absence de changement d'état) :

$$\varphi_{st} = \rho V C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (\text{II.5})$$

Avec :

φ_{st} : Flux de chaleur stocké (W) ;

ρ : Masse volumique ($kg \cdot m^{-3}$) ;

V : Volume (m^3) ;

C_p : Chaleur spécifique ($J \cdot kg^{-1} \cdot ^\circ C^{-1}$) ;

T : Température ($^\circ C$) ;

t : Temps (s).

Le produit $\rho V C_p$ est appelé la capacitance thermique du corps.

II.1.6. Génération d'énergie

Elle intervient lorsqu'une autre forme d'énergie (chimique, électrique, mécanique, nucléaire) est convertie en énergie thermique. On peut l'écrire sous la forme :

$$\varphi_g = \dot{q}V \quad (\text{II.6})$$

Avec :

φ_g : Flux d'énergie thermique générée (W) ;

\dot{q} : Densité volumique d'énergie générée ($W m^{-3}$) ;

V : Volume (m^3).

II.2. Transfert de chaleur par conduction

Le processus de transfert de chaleur par conduction s'appuie sur un milieu matériel sans mouvement de matière et est dû à des phénomènes physiques microscopiques (agitation des atomes ou des molécules, flux d'électrons libres...).

Il peut être vu comme un transfert d'énergie des particules les plus énergétiques (**les particules chaudes qui ont une énergie de vibration élevée**) vers les particules les moins énergétiques (**les particules froides d'énergie de vibration moins élevée**), dû aux collisions entre particules.

Dans les solides, le transfert d'énergie peut également se produire sous l'effet du déplacement d'électrons libres dans le réseau cristallin (par exemple pour les métaux). Ainsi les bons conducteurs d'électricité sont en général également de bons conducteurs de la chaleur. La figure II.2 représente une illustration de conduction thermique entre deux corps.

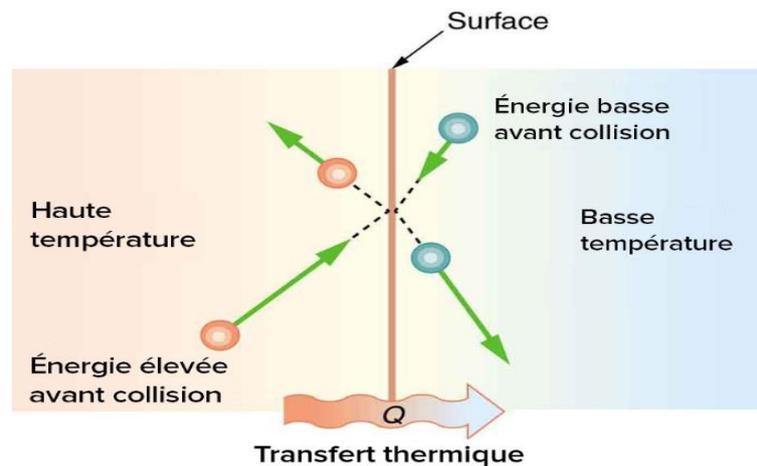


Figure II.2. Illustration de la conduction thermique.

Les molécules de deux corps de températures différentes ont des énergies cinétiques moyennes différentes. Les collisions ayant lieu à la surface de contact des deux objets

transfèrent de l'énergie depuis les régions de plus haute température vers celles de plus basse température.

Exemples II.1 :

Un barreau métallique dont l'une des extrémités est exposée à une flamme, s'échauffe progressivement. La chaleur se propage de proche en proche à l'intérieur du métal. Le barreau métallique a conduit de la chaleur : cette propriété s'appelle la conduction thermique.

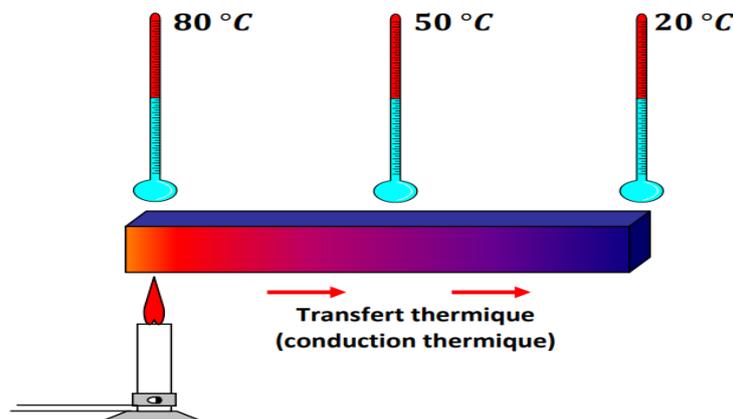


Figure II.3. La chaleur transmise à travers les murs ou le plancher d'une maison se fait par conduction thermique.

II.2.1. Loi de Fourier

La théorie de la conduction repose sur l'hypothèse de Fourier la densité de flux est proportionnelle au gradient de température :

$$\vec{\varphi} = -\lambda S \overrightarrow{\text{grad}}(T) \quad (\text{II.7})$$

$$\varphi = -\lambda S \frac{\partial T}{\partial x} \quad (\text{II.8})$$

Avec :

- φ Densité Flux de chaleur transmis par conduction (W) ;
- λ Conductivité thermique du milieu ($\text{W m}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$) ;
- x Variable d'espace dans la direction du flux (m) ;
- S Aire de la section de passage du flux de chaleur (m^2).

II.2.1.1. Flux thermique

Le flux thermique ϕ caractérise la vitesse du transfert thermique Q pendant une durée donnée t . L'expérience a montré que, dans le cas d'une paroi plane et d'épaisseur e , il dépend de quatre facteurs ($\lambda, e, \Delta T$) selon la formule suivante :

$$\phi = \frac{Q}{t} = \frac{\lambda}{e} \Delta T \quad (\text{II.9})$$

Q est la quantité de chaleur transmise (ou le transfert thermique) pendant la durée t , λ est la conductivité thermique du matériau, ΔT est la différence de température entre ses deux extrémités, et e est son épaisseur. Ces grandeurs sont illustrées par la figure ci-dessous :

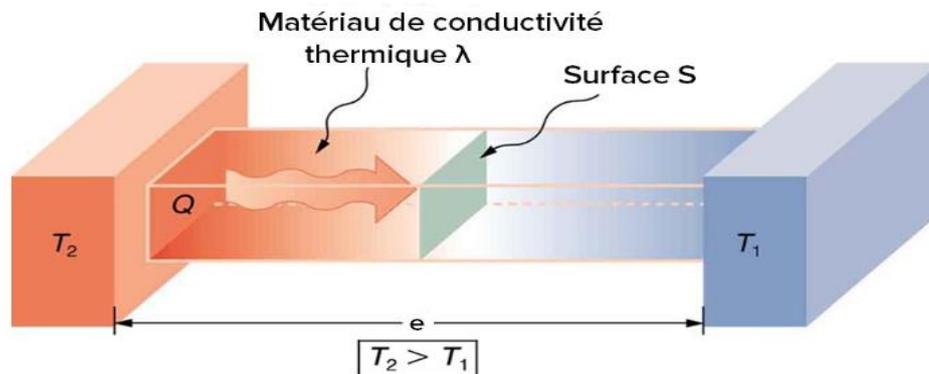


Figure II.4. Illustration d'un transfert thermique à travers une barre rectangulaire.

II.2.1.2. La conductivité thermique

La conductivité thermique λ ($\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{C}^{-1}$) est une caractéristique propre à chaque matériau elle indique le flux de chaleur qui travers sa paroi en : 1 (S), à travers une surface de 1 m^2 d'un matériau d'épaisseur d'un 1, avec une différence de température entre les deux faces de 1 K (1°C).

Plus la conductivité thermique d'un matériau est élevée, plus il est efficace pour conduire la chaleur

Ainsi, un matériau présentant une faible conductivité thermique aura un caractère isolant important.

Ce coefficient n'est valable que pour les matériaux homogènes. Il n'a pas de sens pour les matériaux hétérogènes au travers desquels la chaleur se propage en même temps par conduction, convection et rayonnement.

On trouvera dans la figure II.6 les valeurs de la conductivité thermique λ de certains matériaux parmi les plus courants.

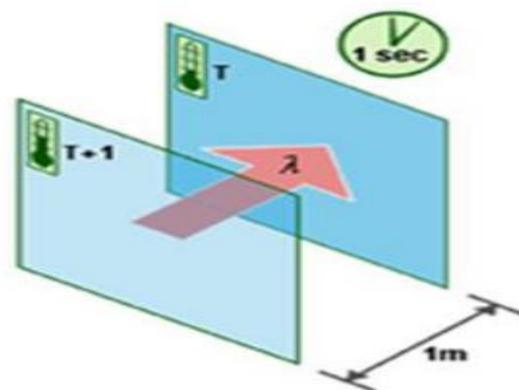


Figure II.5. Schéma de principe de la conductivité thermique.

	sec	hum.	
Matériaux isolants	0,028		polyuréthane
	0,040		laine minérale, liège
	0,058		vermiculite
	0,065		perlite
Bois et dérivés	0,17	0,19	feuillus durs
	0,12	0,13	résineux
Maçonneries	0,27	0,41	briques 700-1000 kg/m ³
	0,54	0,75	briques 1000-1600 kg/m ³
	0,90	1,1	briques 1600-2100 kg/m ³
Verre	1,0	1,0	
Béton armé	1,7	2,2	
Pierres naturelles	1,40	1,69	tuft, pierre tendre
	2,91	3,49	granit, marbres
Métaux		45	acier
		203	aluminium
		384	cuivre

Figure II.6. Conductivité thermique de certains matériaux.

II.2.1.3. La diffusivité thermique

La diffusivité thermique est défini par rapport à la conductivité par :

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p} \quad (\text{II.10})$$

ρ : Masse volumique du milieu considéré ;

C_p : Chaleur spécifique du milieu.

II.2.1.4. La chaleur spécifique

La chaleur spécifique C_p (J/Kg) d'un corps (ou capacité thermique massique) anciennement capacité calorifique) représente la quantité de chaleur que peut emmagasiner un matériau par rapport à son volume. Elle est définie par la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 °C la température de 1 m³.

II.2.1.5. La résistance thermique

La résistance thermique R_{th} d'une paroi traduit sa capacité à s'opposer au transfert thermique. Elle est définie comme le rapport de la différence de températures entre les faces de la paroi sur le flux thermique. On a alors :

$$R_{th} = \frac{\Delta T}{\phi} \quad (\text{II.11})$$

Avec

R_{th} : Résistance thermique en K. W⁻¹ ;

T_1 : Température absolue de la face froide en K ou en °C ;

T_2 : Température absolue de la face chaude en K ou en °C ;

ϕ : Flux thermique en W.

Par analogie électrique/ thermique on peut établir les analogies illustrées dans le tableau suivant :

Tableau II.1. Analogie électrique/ thermique.

Electrique	Thermique
Différence de potentiel (U)	Gradient de température ΔT
Intensité du courant (I)	Flux de chaleur ϕ
Résistance électrique	Résistance thermique

II.2.1.6. Le flux de chaleur d'un mur simple

Le flux de chaleur qui traverse un mur d'épaisseur e est donné par la relation suivante :

$$\phi = \frac{Q}{t} = \frac{\lambda}{e} \Delta T$$

En écrivant :

$$\phi = \frac{\lambda}{e} (T_1 - T_2) = \frac{\Delta T}{R}$$

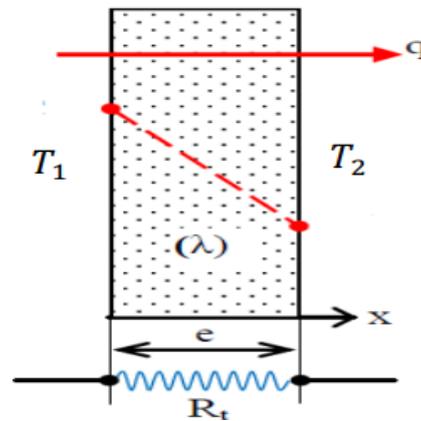


Figure II.8. Mur simple

➤ Analogie électrique

On remarque que cette relation est analogue à la loi d'Ohm :

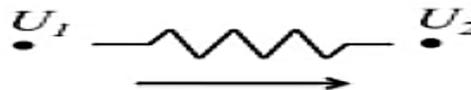


Figure II.7. Circuit électrique équivalent

$$I = \frac{\Delta U}{R} \quad (\text{II.12})$$

Dans ces expressions, le flux de chaleur ϕ joue le rôle de l'intensité électrique I de la loi d'Ohm, alors que la chute de température dans le mur ΔT , est analogue à la différence de tension électrique ΔU dans le circuit. L'unité de la résistance thermique est fournie par le rapport d'une température par un flux thermique. Elle s'exprime en conséquence en K/W .

Remarque II.1 :

L'usage de l'analogie formelle « électro-thermique » est très utile pour discuter le cas des deux configurations classiques, celle où les murs sont montés en série ou bien celle où les murs sont placés à côté les uns des autres, c'est-à-dire qu'ils sont montés en parallèle.

II.2.1.7. Le flux de chaleur d'un mur multicouches (une seule dimension régime stationnaire)

II.2.1.7.1. En série

Ce cas d'étude fait référence à des applications pratiques telles que les revêtements des corps par plus d'une couche (figure II.8). Nous pouvons citer l'exemple du revêtement d'un mur de maçonnerie à l'aide d'un crépissage plus l'enduit d'un côté et d'un simple crépissage de l'autre côté.

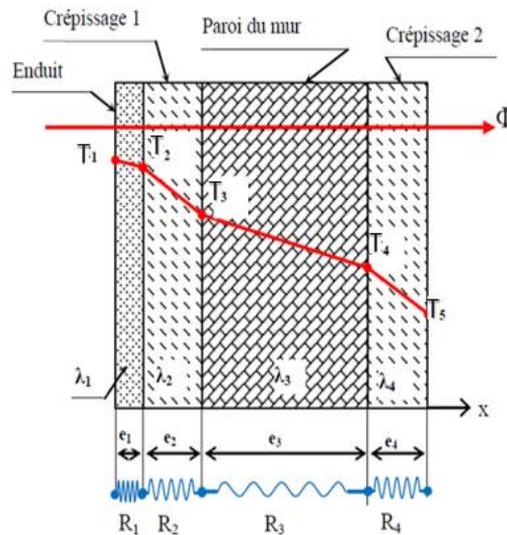


Figure II.9. Mur composé de plusieurs résistances thermiques en série et schéma équivalent.

En régime permanent, la densité de flux de chaleur se conserve lors de la traversée du mur et s'écrit :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{e_1 / \lambda_1 \cdot S} = \frac{T_2 - T_3}{e_2 / \lambda_2 \cdot S} = \frac{T_3 - T_4}{e_3 / \lambda_3 \cdot S} = \frac{T_4 - T_5}{e_4 / \lambda_4 \cdot S} \quad (\text{II.13})$$

$$\varphi = \frac{T_1 - T_5}{R_{th1} + R_{th2} + R_{th3} + R_{th4}} = \frac{T_1 - T_5}{R_{eq}} \quad (\text{II.14})$$

Avec :

$$R_{th1} = \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot S}; R_{th2} = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot S}; R_{th3} = \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot S}; R_{th4} = \frac{e_4}{\lambda_4 \cdot S} \quad (\text{II.15})$$

Pour le cas d'un mur à n-couches, nous en déduisons l'expression de densité de flux de chaleur qui est le suivant :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_n}{\sum_i^n \frac{e_i}{\lambda_i \cdot S}} = \frac{T_1 - T_n}{R_{eq}} \quad (\text{II.16})$$

II.2.1.7.2. En parallèle

Pour le cas de murs montés en parallèle (c'est-à-dire placés à côté les uns des autres au lieu d'être empilés), il faut écrire des relations analogues. Ici la surface de chaque mur peut être

différente, mais par contre les températures pour tous les murs seront identiques sur chaque surface, T_1 d'un côté et T_2 de l'autre pour l'ensemble des murs.

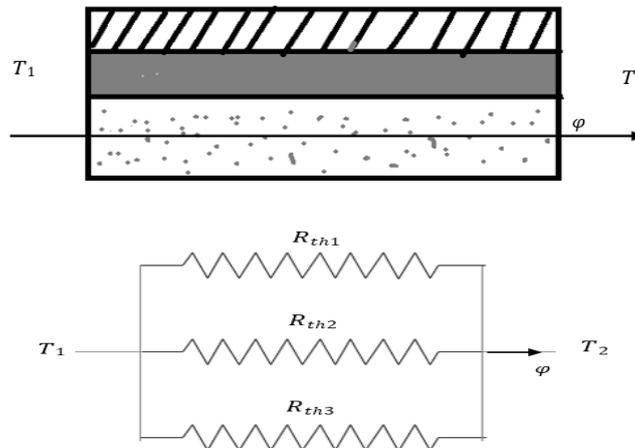


Figure II.10. Mur composé de plusieurs résistances thermiques en parallèle et schéma équivalent.

Par ailleurs, il n'y a pas de conservation de densité de flux thermique dans chaque couche, et à la place il faut écrire que la densité de flux totale est la somme des différentes contributions transitant dans les différentes couches. Soit pour le cas d'un mur triple :

- La résistance thermique de chaque couche égale :

$$R_{th1} = \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot S}; R_{th2} = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot S}; R_{th3} = \frac{e_3}{\lambda_3 \cdot S} \quad (\text{II.17})$$

- La densité de flux thermique de chaque couche :

$$\varphi_1 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}}; \varphi_2 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}}; \varphi_3 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th3}} \quad (\text{II.18})$$

Le fait d'écrire une loi de comportement thermique global sous la forme :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{eq}} = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = \frac{T_1 - T_2}{R_{th1}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th2}} + \frac{T_1 - T_2}{R_{th3}} \quad (\text{II.19})$$

Par identification :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{th1}} + \frac{1}{R_{th2}} + \frac{1}{R_{th3}} \quad (\text{II.20})$$

Ce sont bien les inverses des résistances thermiques qui s'ajoutent pour un mur en parallèle, comme c'est le cas aussi en électrocinétique pour un circuit électrique avec des résistances électriques en parallèle.

II.3. Transfert de chaleur par convection

La convection est un phénomène d'échange de chaleur dans lequel la chaleur est transférée d'une surface solide vers un fluide (ou un gaz) en mouvement. La convection se compose de deux éléments :

- Transfert d'énergie causé par un mouvement moléculaire aléatoire (diffusion).
- Transfert d'énergie par un mouvement volumique ou macroscopique du fluide (advection).

Le mécanisme de la convection peut être expliqué de la manière suivante : au fur et à mesure que la couche de fluide adjacente à la surface chaude s'échauffe, sa densité diminue (à une pression constante, la densité est inversement proportionnelle à la température), et la couche devient flottante.

Un fluide plus froid (plus lourd) près de la surface remplace le fluide plus chaud et il en résulte un certain mode de circulation.

II.3.1. Convection naturelle (libre)

Le mouvement du fluide le long de la surface solide est dû aux poussées induites par les changements dans la densité du fluide résultant de la différence de température entre le solide et le fluide.

Lorsqu'une plaque chaude est immergée dans un fluide froid, les particules de fluide en contact avec la plaque se réchauffent et leur densité diminue, ce qui provoque leur mouvement vers le haut.

II.3.2. Convection forcée

Un moyen extérieur, comme un ventilateur ou une pompe, est employé pour accélérer le mouvement du fluide au niveau de la surface du solide.

Le mouvement rapide des particules du fluide sur la face du solide permet d'atteindre une valeur maximum du gradient de température, ce qui augmente le taux d'échange thermique.

Dans l'illustration suivante, l'air est forcé au-dessus d'une plaque chaude.

On parlera de **convection mixte** lorsque les deux types de convection coexistent dans un système.

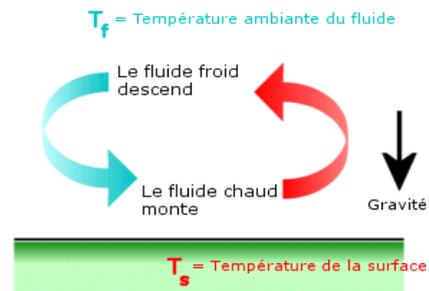


Figure II.11. Illustration de transfert de chaleur par convection

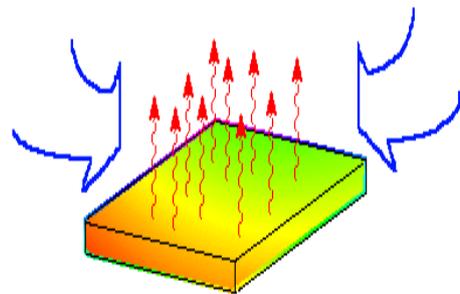


Figure II.12. Illustration de la convection naturelle (libre)

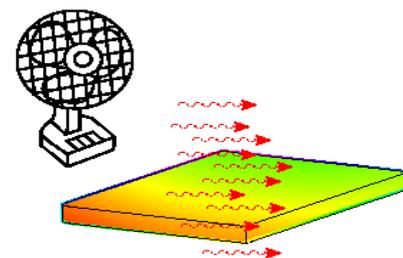


Figure II.13. Illustration de convection forcée

II.3.1. Le flux de chaleur

Il faut ensuite établir les expressions des différents flux d'énergie. En reportant ces expressions dans le bilan d'énergie, on obtient l'équation différentielle dont la résolution permet de connaître l'évolution de la température en chaque point du système. newton

C'est le transfert de chaleur entre un solide et un fluide, l'énergie étant transmise par déplacement du fluide.

Ce mécanisme de transfert est régi par la loi de Newton :

$$\varphi = hS(T_p - T_\infty) \quad (\text{II.21})$$

Avec :

- ϕ Flux de chaleur transmis par convection (W) ;
- h Coefficient de transfert de chaleur par convection ($\text{W m}^{-2} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$) ;
- T_p Température de surface du solide ($^\circ\text{C}$) ;
- T_∞ Température du fluide loin de la surface du solide ($^\circ\text{C}$) ;
- S Aire de la surface de contact solide/fluide (m^2).

Remarque II.2 :

La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

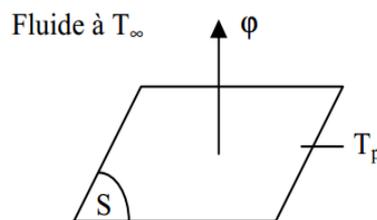


Figure II.14. Schéma du transfert de chaleur convectif.

On peut définir une résistance thermique de convection qui peut être combinée avec la résistance thermique de conduction :

$$\varphi = \frac{1}{R_{th}}(T_p - T_\infty) \quad (\text{II.22})$$

Avec :

$$R_{th} = hS \quad (\text{II.23})$$

II.3.1.1. Gamme de valeurs pour coefficient de transfert de chaleur

Le tableau suivant représente la gamme de coefficient de transfert de chaleur (h) par convection.

Tableau II. 2. La gamme de valeurs de h ($\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$).

Matériau	Convection libre	Convection forcée
Air	5 – 30	30-500
eau	30-300	300-20000
huile	5-100	30-3000
Métal liquide	50-500	500-2000

Cas extrêmes :

- $h = 0$: absence de flux. La paroi se comporte comme si elle était adiabatique.
- $h = +\infty$: aucune résistance thermique de convection. $T_p = T_\infty$

Exemple II.1 :

Soit un fil traversé par un courant électrique d'une intensité $I=1,5$ A. Lorsque ses dimensions sont respectivement $D=3$ mm et $L=2$ m, la différence de potentiel entre les bornes est de 60 Volts. Si la température du milieu extérieur est de 15°C , calculer le coefficient h pour que le fil préserve une température $T_p \leq 150^\circ\text{C}$?

Solution :

La puissance consommée dans le fil électrique est :

$$P = U \times I = 60 \times 1.5 = 90 \text{ W}$$

La surface d'échange est la surface latérale du fil électrique :

$$S = \pi \times D \times L = 3.14 \times 2 \times 3 \times 10^{-3} = 18.85 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

Conformément au principe de la conservation de l'énergie, on a :

$$P = hS(T_p - T_\infty)$$

$$h = \frac{P}{S(T_p - T_\infty)} = \frac{90}{18.85 \times 10^{-3} \times (150 - 15)} = 35.367 \text{ (W/m}^2 \cdot \text{K)}$$

Remarque II.3 :

La valeur du coefficient de transfert de chaleur par convection h est fonction de la nature du fluide, de sa température, de sa vitesse et des caractéristiques géométriques de la surface de contact solide/fluide.

II.3.2. Échange par convection sur les deux faces du Mur

Lorsque la paroi sépare deux fluides à températures différentes, le mur d'une maison par exemple, les températures des surfaces externes ne sont pas connues. Supposons les fluides, suffisamment loin de la paroi, aux températures uniformes T_i et T_e avec $T_1 > T_2$.

Aux voisinages des surfaces, les températures des fluides varient rapidement pour atteindre les valeurs T_1 et T_2 . Soient h_i et h_e les coefficients de transfert de chaleur par convection sur chacune des faces.

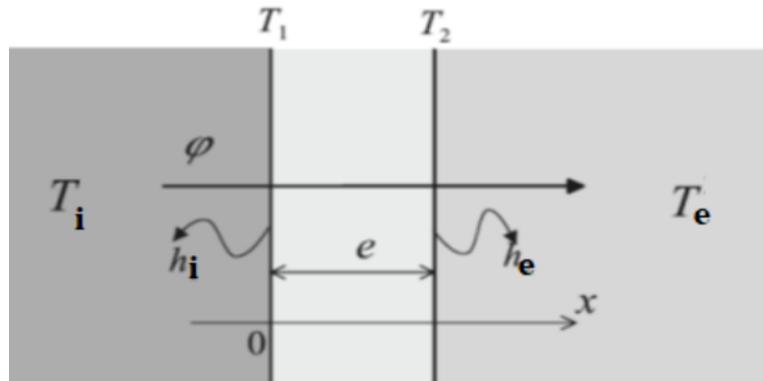


Figure II.15. Mur échange de la chaleur par convection sur ses deux faces.

On a :

$$\varphi = h_i \cdot S(T_i - T_1) = \frac{(T_i - T_1)}{\frac{1}{h_i \cdot S}} \quad (\text{II.24})$$

De même sur la face de la paroi de côté du fluide à T_e :

$$\varphi = h_e \cdot S(T_2 - T_e) = \frac{(T_2 - T_e)}{\frac{1}{h_e \cdot S}} \quad (\text{II.25})$$

Le flux étant constant en régime stationnaire, on a par ailleurs :

$$\varphi = \frac{T_1 - T_2}{R_{th}} \quad (\text{II.26})$$

On obtient donc

$$\varphi = \frac{T_i - T_e}{\frac{1}{h_i \cdot S} + R_{th} + \frac{1}{h_e \cdot S}} \quad (\text{II.27})$$

La résistance thermique de l'ensemble ; ou résistance thermique globale, est :

$$R_{tot} = \frac{1}{h_i \cdot S} + R_{th} + \frac{1}{h_e \cdot S} \quad (\text{II.28})$$

En utilisant les outils de l'analogie électrique le transfert de chaleur dans la configuration étudiée peut être schématisé de la façon suivante :

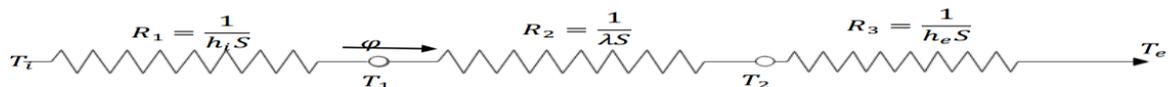


Figure II.16. Circuit électrique équivalent.

II.3.3. Mur composite

C'est le cas le plus couramment rencontré dans la réalité où les parois ne sont pas homogènes.

Considérons à titre d'exemple un mur de largeur L constitué d'agglomérés creux. En supposant le transfert unidirectionnel et en tenant compte des axes de symétrie, on peut se ramener au calcul du flux à travers l'élément isolé sur la droite de la figure et calculer la résistance thermique R équivalente d'une portion de mur de largeur L et de hauteur $\ell = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3$ en utilisant les lois d'association des résistances en série et en parallèle par la relation :

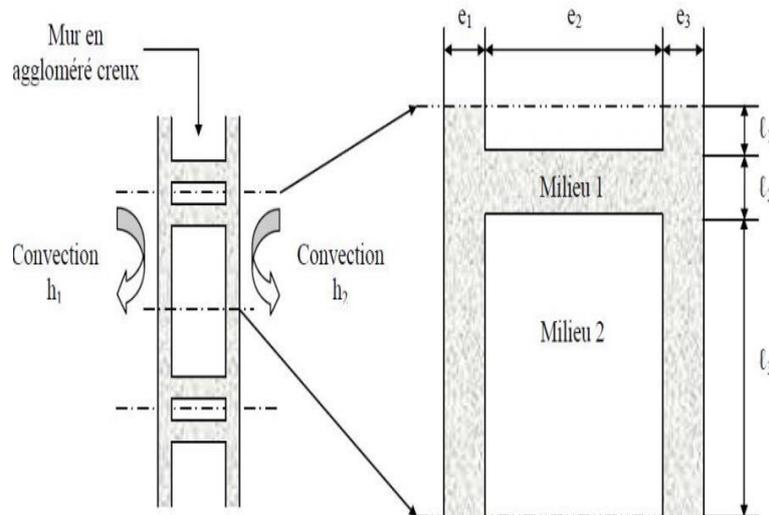


Figure II.17. Mur composite.

$$R_{tot} = R_1 + R_2 + \frac{1}{\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}} + R_6 + R_7$$

Avec :

$$R_1 = \frac{e_1}{\lambda_1 \cdot L \cdot L}, R_2 = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot l_1 \cdot L}, R_4 = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot l_1 \cdot L}, R_5 = \frac{e_2}{\lambda_2 \cdot l_3 \cdot L}, R_6 = \frac{e_3}{\lambda_2 \cdot L \cdot L}, R_7 = \frac{1}{h_2 \cdot L \cdot L}$$

Ce qui peut être schématisé par le schéma électrique équivalent représenté sur la figure suivante :

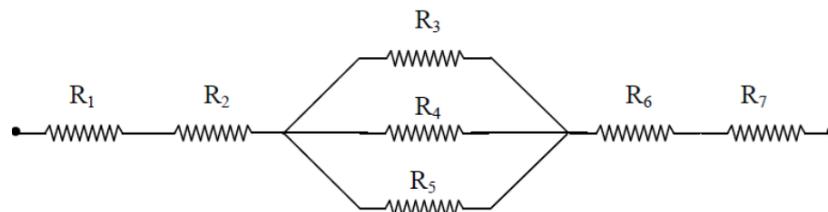


Figure II.18. Circuit électrique équivalent.

II.4. Transfert de chaleur par rayonnement

Le rayonnement est un transfert d'énergie sous forme d'ondes ou de particules. Se propage dans le vide. Plus la température du corps est élevée, plus l'agitation thermique responsable de l'émission est élevée.

Exemple II.2 : Les rayons du soleil qui nous réchauffent.

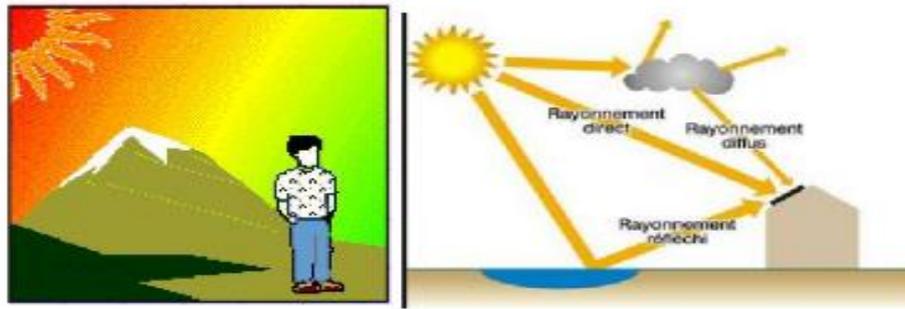


Figure II.19. Illustration d'un rayonnement thermique.

II.4.1. Introduction au rayonnement thermique

Considérons un matériau recevant un flux d'énergie électromagnétique Φ_i . Ce flux peut être réfléchi en partie Φ_r , transmis en partie Φ_t ou absorbé en partie Φ_a .

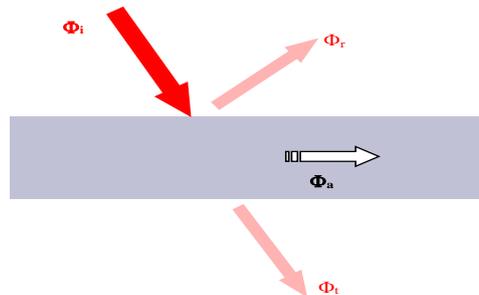


Figure II.20. Le flux dans le rayonnement thermique.

La conservation de l'énergie impose que :

$$\Phi_i = \Phi_r + \Phi_t + \Phi_a \quad (\text{II.29})$$

Cette relation peut encore s'écrire :

$$\mathbf{1} = \frac{\Phi_r}{\Phi_i} + \frac{\Phi_t}{\Phi_i} + \frac{\Phi_a}{\Phi_i} = \mathbf{r} + \mathbf{t} + \mathbf{\alpha} \quad (\text{II.30})$$

Avec :

- r : coefficient de réflexion ;
- t : coefficient de transmission ;
- α : coefficient d'absorption

Si $\alpha=1$ le matériau absorbe tout le rayonnement qu'il reçoit, on parle alors de **corps noir**.

II.4.2. Loi fondamentale du rayonnement (loi de Stefan-Boltzmann)

Le corps noir sert de référence à l'étude du rayonnement thermique des corps. Le corps noir correspond à un corps susceptible d'absorber tout le rayonnement qu'il reçoit, mais aussi capable de le réémettre intégralement.

Si l'on définit le coefficient d'émission ε d'une surface réelle comme étant le rapport du flux émis par cette surface à celui émis par la même surface si elle était noire, on a évidemment pour le corps noir :

$$\alpha = \varepsilon = 1 \quad (\text{II.31})$$

La loi de Stephan-Boltzmann (1879) énonce que le rayonnement thermique d'une surface S noire à la température T_p , s'exprime par

$$\varphi = \sigma \varepsilon S T_p^4 \quad (\text{II.32})$$

Elle exprime que le flux d'énergie radiante émis par une surface idéale appelée « noire » est proportionnel à l'aire de cette surface et à la puissance quatrième de la température absolue T_s de la surface.

- φ : Flux de chaleur transmis par rayonnement (W) ;
- σ : Constante de Stefan ($5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$) ;
- ε : Facteur d'émission de la surface ;
- T_p : Température de la surface (K) ;
- T_∞ : Température du milieu environnant la surface (K) ;
- S : Aire de la surface (m^2).

Le flux d'énergie rayonné émis par une surface réelle quelconque (appelée corps gris _ voir partie du cours sur le rayonnement) devient alors

$$\varphi = \sigma \varepsilon S T_p^4 = \sigma \alpha S T_p^4 \quad (\text{II.33})$$

Où α est le facteur d'absorption de la surface grise et ε le facteur d'émission de la surface considérée. Dans le cas de la surface grise on a : $\alpha = \varepsilon$ ($0 \leq \alpha = \varepsilon < 1$).

Lorsqu'il y a échange entre la surface rayonnante et le milieu extérieur (température), l'équation d'échange s'écrit :

$$\varphi = \sigma \alpha S (T_p^4 - T_\infty^4) \quad (\text{II.34})$$

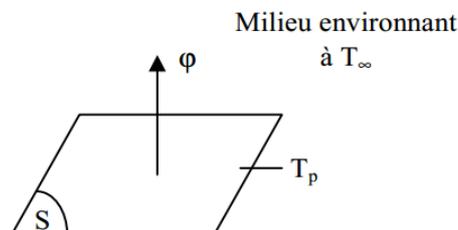


Figure II.21. Schéma du transfert de chaleur radiatif.

Exemple II.3 :

Corps gris à la température T_s enfermé dans une enceinte à T_∞ .

CHAPITRE III. TRANSFERT DE MATIERE

Le transfert de matière en génie des procédés est le mouvement de substances (liquides, gaz, solides) à travers des interfaces de phase (comme la surface d'un liquide ou d'un solide) en réponse à des gradients de concentration, de pression ou de température. Ce transfert de matière peut être unidirectionnel ou bidirectionnel, et peut être influencé par divers facteurs tels que les propriétés physiques et chimiques des matériaux impliqués, la conception du procédé, les conditions environnementales, ...etc.

Le transfert de matière est un aspect crucial dans la conception et l'optimisation des processus industriels, tels que la production de produits chimiques, les opérations de séparation et de purification, et la fabrication de produits pharmaceutiques. La compréhension des mécanismes de transfert de matière permet aux ingénieurs des procédés de concevoir des équipements et des systèmes efficaces et économiques pour la production industrielle de grande échelle.

III.1. Définitions

III.1.1. Le transfert de matière

Le transfert de matière consiste en la migration de composés à l'intérieur d'une phase ou entre des phases. Cette migration résulte d'un changement dans l'équilibre d'un système causé par une/des différences de potentiel(s) : différence de concentration d'une espèce d'un point à un autre, différence de température et/ou différence de pression.

Toute différence de potentiel entraîne une évolution spontanée vers l'uniformité : une différence de concentration d'un composé entre deux points d'un système entraîne donc un transfert de matière jusqu'à atteindre l'uniformité de concentration.



Figure III.1. Exemple de transfert de matière.

Lorsqu'on s'intéresse au transfert de matière, on doit distinguer deux cas, selon que le transfert se fait au sein d'une phase ou entre deux phases partiellement ou totalement immiscibles. En outre, chacune des phases peut être mobile ou immobile.

Il existe deux modes principaux de transfert de matière, dans une phase (mobile ou non) ou entre phases (mobiles ou non).

III.1.1.1. Phase immobile

Une phase immobile ne signifie pas qu'il n'y a pas de mouvement d'ensemble des molécules, mais au niveau de la phase, le transport se fait uniquement par **diffusion moléculaire**, et il n'existe pas dans la phase de tourbillons provoquant avec une dégradation d'énergie mécanique et de quantité de mouvement le brassage d'agrégats de fluide ayant des compositions différentes.

➤ La diffusion

La diffusion est **un processus lent** : les molécules migrent dans un solide ou dans un fluide considéré comme immobile (écoulement laminaire).

Exemple III.1 :

Diffusion des molécules de sucre, dispersion par agitation moléculaire suivant des trajectoires aléatoires entre les molécules d'eau. Un morceau de sucre dans une tasse de café. Celui-ci commence à fondre et se répand dans la tasse par diffusion. Les molécules de sucre plongées dans du café essaient de se frayer un chemin à travers les molécules de liquide.

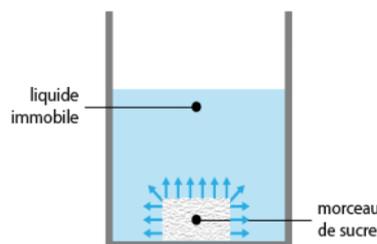


Figure III.2. Exemple de diffusion moléculaire.

La diffusion résulte d'une différence de concentration : quand le sucre fond, la concentration en sucre, qui était maximum au fond de la tasse et nulle à la surface, va changer plus ou moins rapidement, et tout le café sera finalement sucré.

III.1.1.2. Phase mobile

Par opposition, dans le cas d'une phase mobile, le transport par diffusion des constituants n'est pas dû uniquement à la diffusion moléculaire mais aussi à la diffusion turbulente (**Convection**).

Convection : La convection est **un processus rapide** : les molécules sont entraînées dans un courant de fluide naturel ou forcé (convection naturelle ou forcée).

Exemple III.2 :

L'agitation avec une cuillère est une convection forcée.

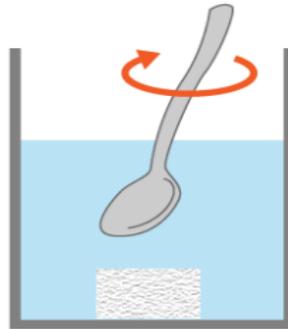


Figure III.3. Exemple de transfert par convection.

III.1.2. Grandeurs massiques et molaires

Nous considérerons ici un mélange de gaz ou une solution constituée d'un solvant et d'un constituant qu'on notera (A) ou de plusieurs constituants ou encore une suspension de particules. La concentration des divers constituants peut s'exprimer de différentes manières.

Tableau III.1. Grandeurs massiques et molaires.

Massique	Molaire
Concentration	
Masse du constituant A : m_A (kg)	Quantité de matière du constituant A : n_A (mol)
Concentration massique : ρ_A (kg/m ³)	Concentration molaire : c_A (mol/m ³)
$\rho_A = \frac{m_A}{V}$ (kg/m ³)	$c_A = \frac{n_A}{V}$ (mol/m ³)
Fraction	
Par convention, x et y désignent respectivement les fractions molaires des phases liquides et gazeuses.	
$\omega_A = \frac{\rho_A}{\rho} = \frac{m_A}{\sum_i m_i} = \frac{m_A}{m}$	$x_A = \frac{n_A}{n} = \frac{c_A}{c} ; \sum_i x_i = 1$
Taux de transfert de matière	
Correspond à la quantité de matière transférée par unité de temps.	
$q_A = \frac{m_A}{t}$ (kg/s)	$q_A^* = \frac{n_A}{t}$ (mol/s)

III.1.3. Relation entre les grandeurs massique et les grandeurs molaires

Pour un mélange binaire de A et B, la fraction massique ω_A est liée à la fraction molaire x_A (et inversement) par :

$$\omega_A = \frac{x_A M_A}{x_A M_A + x_B M_B}$$

III.1

$$X_A = \frac{\frac{\omega_A}{M_A}}{\left(\frac{\omega_A}{M_A} + \frac{\omega_B}{M_B}\right)}$$

III.2

III.2. Transfert de matière par diffusion moléculaire

S'il existe une différence de concentration dans l'espace, par exemple entre deux compartiments séparés par une membrane perméable (laissant passer le solvant et le soluté) ; il va y avoir, au cours du temps, un déplacement de la matière, du compartiment concentré vers le moins concentré, figure III.4. Ce transfert s'effectue, jusqu'à ce que l'équilibre en concentration soit atteint. Ce phénomène spontané est appelé **diffusion**.

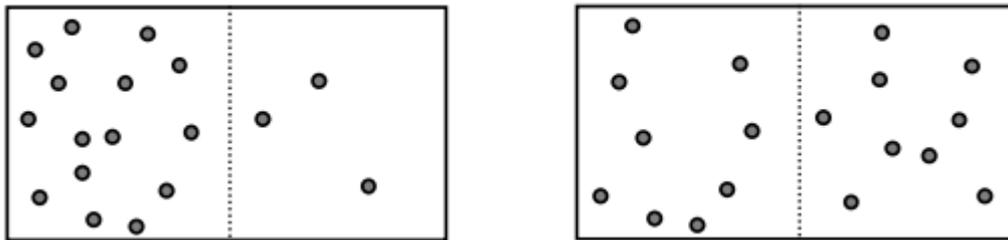


Figure III.4. Diffusion du milieu le plus concentré vers le milieu le moins concentré.

Sous l'influence de la différence de concentration (force motrice), le transfert de masse s'effectue jusqu'au moment où les concentrations (des espèces A, B et C) redeviennent homogènes, c'est-à-dire égales dans les deux régions. Le transfert cesse alors.

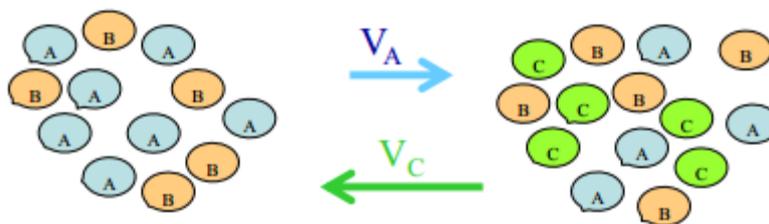


Figure III.5. Exemple de diffusion.

Le mouvement de l'élément chimique, de la région à haute concentration vers la région à faible concentration, peut être observé en mettant un morceau de KMnO_4 (permanganate de potassium) dans l'eau. Le KMnO_4 commence à se dissoudre dans l'eau et près du cristal on voit une couleur bleue foncée qui devient claire en s'éloignant du cristal.

III.2.1. La loi de Fick

Si on place une petite quantité d'un liquide volatil au fond d'un tube à essai et qu'on le laisse en contact avec un courant d'air sec, comme illustré dans la figure III.6, un profil de

concentration linéaire est établi dans le tube à essai à l'état stationnaire lorsque le temps tend vers l'infini et une évaporation continue du liquide prendra place. Ce phénomène, selon lequel, un transfert de matière est causé par une distribution non-uniforme de la concentration est appelé diffusion.

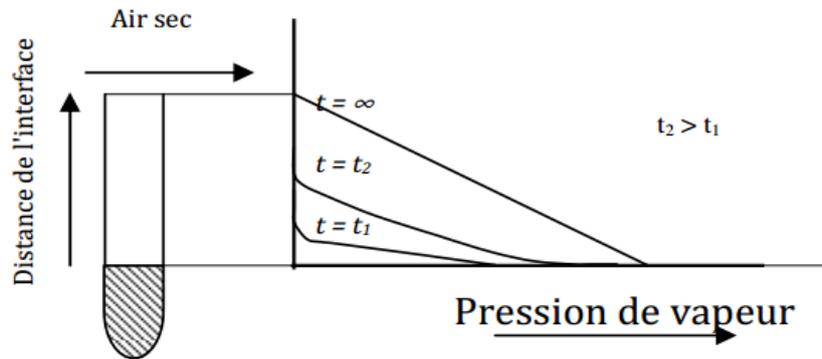


Figure III.6. Diffusion d'une vapeur dans un gaz.

La diffusion peut être décrite par la loi empirique qui suit :

$$J_{Ay} = -CD_{AB} \frac{dx_A}{dy} \quad J_{Ay} = -D_{AB} \frac{dC_A}{dy} \quad \text{III.3}$$

L'indice A désigne l'espèce chimique qui se diffuse alors que y indique la direction dans laquelle le transport prend place. Dans ce cas, J_{Ay} est défini comme le flux molaire de l'espèce A par rapport à la vitesse moyenne, D_{AB} ; le coefficient de diffusion, C; la concentration totale, x_A ; la fraction molaire de l'espèce A, C_A ; la concentration molaire de A.

Cette équation peut être exprimée soit en utilisant la fraction molaire ou la fraction massique comme suit :

$$j_{Ay} = -\rho D_{AB} \frac{d\omega_A}{dy} \quad j_{Ay} = -D_{AB} \frac{d\rho_A}{dy} \quad \text{III.4}$$

- j_{Ay} : le flux massique relatif à la vitesse moyenne,
- ρ : la concentration massique totale,
- ω_A et ρ_A : la fraction massique et la concentration massique de l'espèce A, respectivement.

C'est la première loi de Fick de diffusion (1855) à une seule dimension. Elle est valide pour n'importe quel mélange solide, liquide ou gazeux.

III.2.2. Définition de la diffusion moléculaire

La diffusion moléculaire est ainsi appelée car elle résulte de l'agitation thermique des molécules et se réalise à l'échelle moléculaire. La cinétique du phénomène est quantifiée par la diffusivité qu'on appelle également le coefficient de diffusion D.

Considérons une plaque de verre assez fine de superficie S et d'épaisseur Y . Supposons qu'initialement (pour $t < 0$), les deux faces horizontales de la plaque soient en contact avec l'air, qu'on suppose totalement insoluble dans le verre. Au temps ($t = 0$), l'air en dessous de la plaque est soudainement remplacé par de l'hélium pur, qui par contre est très soluble dans le verre. L'hélium pénètre doucement dans le verre en vertu de son mouvement moléculaire et en définitive apparait de l'autre côté au-dessus de la plaque de verre. Ce transport d'une molécule par rapport à une autre substance est la diffusion moléculaire. Etant donné que l'air du dessus est rapidement remplacé, il n'y aura pas d'accumulation de molécules d'hélium sur cette face, figure III.7.

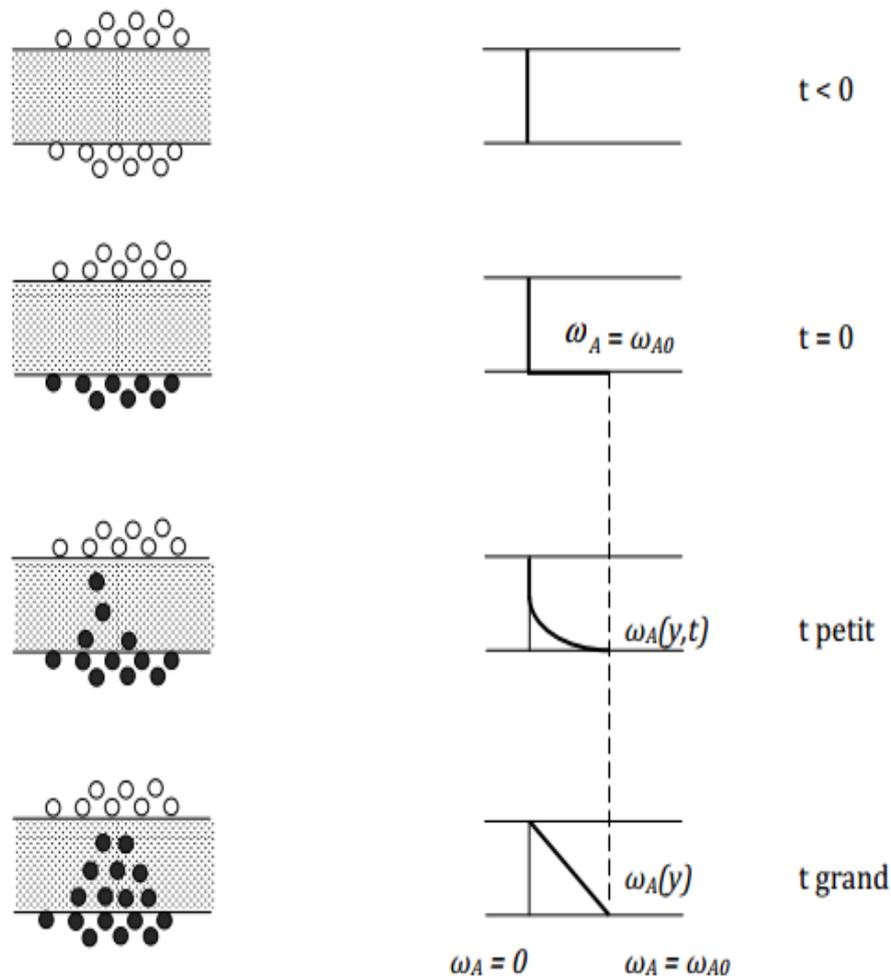


Figure III.7. Progression de la diffusion de l'hélium (A) à travers le verre (B) et profil de concentration.

Dans ce système, l'hélium sera appelé espèce A et le verre espèce B. Les concentrations seront données par les fractions massiques ω_A et ω_B . On dit qu'il existe un gradient de concentration de l'hélium dans la direction y .

Pour un temps $t < 0$, ω_A est partout égale à zéro.

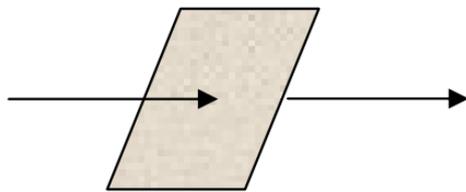
Pour un temps $t > 0$, au niveau de la face inférieure, $y = 0$, la fraction massique de l'hélium est égale à ω_{A0} .

A mesure que le temps avance, le profil de la fraction massique se développe avec ω_{A0} au niveau inférieur de la plaque et $\omega_A = 0$ au niveau supérieur de celle-ci.

Comme indiqué sur la figure III.7, le profil de concentration tend vers une ligne droite lorsque le temps devient grand.

III.2.3. Notions de densité de flux de matière

Le transport de matière est quantifié par un flux de matière (ou plus exactement une densité de flux de matière), J , qui représente la masse (ou le nombre de moles) qui passe à travers une unité de surface (perpendiculaire à la direction du transport) par unité de temps. Son unité est ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ou $\text{mol} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$), figure III.8.



J : densité de flux de matière (nombre de kg ou mol transféré à travers la surface par unité de temps et de surface)

Figure III.8. Schéma descriptif du flux de diffusion à travers un plan.

III.2.4. Définition des vitesses moyennes molaire et massique

III.2.4.1. La vitesse massique moyenne

Dans un mélange en diffusion les éléments sont en mouvement à des vitesses différentes. En supposant que v_i est la vitesse de l'élément i par rapport à un repère fixe. On définit la vitesse massique moyenne v pour un mélange de n constituants comme suit :

$$v = \frac{\sum_i (\rho_i v_i)}{\sum_i \rho_i} \quad \text{III.5}$$

$$v = \frac{1}{\rho} \sum_i (\rho_i v_i) \quad \text{III.6}$$

ρv est le débit de masse qui passe à travers une unité de surface placée perpendiculairement à la vitesse v .

III.2.4.2. La vitesse molaire moyenne

De la même façon, on pourrait définir la vitesse molaire moyenne comme suit :

$$v^* = \frac{\sum_i (c_i v_i)}{\sum_i c_i} \quad \text{III.7}$$

$c v^*$ est le débit des moles qui passent à travers une unité de surface perpendiculairement à la vitesse v^* .

Pour un système multicomposant, les relations du tableau ci-dessous sont valables.

Tableau III.2. Notations pour les vitesses dans un système multicomposant.

\mathbf{v}_A	Vitesse de l'espèce A par rapport à un repère fixe
$\mathbf{v} = \sum_i(\omega_i \mathbf{v}_i)$	Vitesse massique moyenne
$\mathbf{v}^* = \sum_i(x_i \mathbf{v}_i)$	Vitesse molaire moyenne
$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}$	Vitesse de diffusion de l'espèce A par rapport à la vitesse massique moyenne
$\mathbf{v}_A - \mathbf{v}^*$	Vitesse de diffusion de l'espèce A par rapport à la vitesse molaire moyenne

III.2.4.3. Les flux

Le flux massique (molaire) de l'élément i représente la masse (nombre de moles) de l'élément i qui passe pendant une unité de temps à travers une surface perpendiculaire à la direction de diffusion).

Tableau III.3. Expressions des différents flux massiques et molaires.

Flux massique	Formule	Unité
Par rapport à un repère fixe	$n_i = \rho_i v_i$	[kg/(m ² s)]
Par rapport à la vitesse massique moyenne v	$j_i = \rho_i(v_i - v)$	
Par rapport à la vitesse molaire moyenne v*	$j_i^* = \rho_i(v_i - v^*)$	
Flux molaire	Formule	Unité
Par rapport à un repère fixe	$N_i = c_i v_i$	[mole/(m ² s)]
Par rapport à la vitesse massique moyenne v	$J_i = c_i(v_i - v)$	
Par rapport à la vitesse molaire moyenne v*	$J_i^* = c_i(v_i - v^*)$	

Le tableau III.2 regroupe les différentes expressions des flux. Le mouvement peut être représenté par rapport à un repère fixe ou par rapport à la vitesse massique moyenne v ou bien par rapport à la vitesse molaire moyenne v*.

Remarque III.1 :

Lorsqu'il s'agit de transport de matière, on définit trois types de débits :

Le débit volumétrique est le volume par unité de temps ; [L s⁻¹].

Le débit molaire est le nombre de moles par unité de temps ; [mol s⁻¹].

Le débit massique est le nombre de grammes par unité de temps ; [kg s⁻¹].

III.3. Transfert de matière par convection

En plus du transport par mouvement moléculaire, la matière peut également être transportée par le mouvement de masse du fluide.

Un exemple typique de la contribution de la convection dans le transfert de matière en génie des procédés est le cas de la distillation. Dans l'opération de distillation binaire, par exemple, la condensation des mélanges de vapeurs et l'évaporation des solutions volatiles s'accompagne toujours d'une vitesse interfaciale, due à la condensation des vapeurs ou à l'évaporation des liquides. Bien que le transfert de matière dans de tels cas soit considérablement affecté par le flux de masse convectif, cet effet a longtemps été négligé par les ingénieurs.

III.4. Transfert combiné : diffusion + convection

Soit un mélange binaire où les molécules se déplacent par diffusion moléculaire : il en résulte, pour chaque constituant, un flux de masse, soit N_A et N_B (mole/cm² s). Si c_A et c_B sont les concentrations molaires (mole/cm³) de A et B, respectivement, on peut définir pour chaque constituant une vitesse v tel que :

En plus du transport de la matière en vertu du mouvement des molécules, la matière peut être également transportée par le mouvement du fluide.

Soit un mélange binaire où les molécules se déplacent par diffusion moléculaire : il en résulte, pour chaque constituant, un flux de masse, soit N_A et N_B (mole/cm² s). Si c_A et c_B sont les concentrations molaires (mole/cm³) de A et B, respectivement, on peut définir pour chaque constituant une vitesse tel que :

$$N_A = c_A v_A \quad N_B = c_B v_B \quad \text{III.8}$$

La diffusion s'accompagne d'un mouvement du fluide même en l'absence de tout gradient de pression/concentration. La vitesse molaire moyenne peut être écrite pour un système binaire :

$$v^* = x_A v_A + x_B v_B = \frac{1}{C(N_A + N_B)} \quad \text{III.9}$$

x_A et x_B sont les fractions molaires de A et B. C est la concentration molaire totale.

$$C = c_A + c_B \quad \text{III.10}$$

On sait que si une solution dont la concentration de ses constituant est partout uniforme, aucun changement ne prend place, mais tant qu'il n'y pas d'uniformité, la solution est

spontanément ramenée à l'uniformité par la diffusion. Ainsi le débit de déplacement du soluté d'un point à un autre doit dépendre du gradient de concentration sur cette distance.

Puisque

$$J_A^* = c_A(v_A - v^*) \quad \text{III.11}$$

$$J_A^* = c_A v_A - c_A \left(\frac{c_A v_A - c_B v_B}{c} \right) \quad \text{III.12}$$

$$J_A^* = N_A - x_A(N_A - N_B) \quad \text{III.13}$$

Donc,

$$N_A = J_A^* + x_A(N_A - N_B) \quad \text{III.14}$$

$$J_A^* = -D_{AB} \nabla C_A - x_A(N_A - N_B) \quad \text{III.15}$$

Cette équation montre que le flux N_A , relatif à un repère fixe, est la résultante de deux vecteurs :

- ✓ $x_A(N_A - N_B)$ est le flux de convection de A dû au mouvement du fluide.
- ✓ $-D_{AB} \nabla C_A$ est le flux de A résultant d'une diffusion moléculaire.

Pour l'élément B on a :

$$J_B^* = -D_{BA} \nabla C_B - x_B(N_A - N_B) \quad \text{III.16}$$

La somme N_A et N_B donne :

$$-D_{AB} \nabla C_A - D_{BA} \nabla C_B = 0 \quad \text{III.17}$$

Et

$$J_A^* + J_B^* = 0 \quad \text{III.18}$$

Tableau III.4. Formes équivalentes de la première loi de Fick (cas d'une diffusion binaire).

Flux	Gradient	Première loi de fick
N_A	∇x_A	$N_A = -CD_{AB} \nabla x_A - x_A(N_A - N_B)$
n_A	$\nabla \omega_A$	$n_A = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A - \omega_A(N_A - N_B)$
J_A^*	∇x_A	$J_A^* = -CD_{AB} \nabla x_A$
j_A^*	$\nabla \omega_A$	$j_A^* = -\rho D_{AB} \nabla \omega_A$
$\rho(v_A - v_B)$	$\nabla \omega_A$	$\rho(v_A - v_B) = - \left[\frac{-\rho D_{AB}}{\omega_A \omega_B} \right] \nabla \omega_A$
$C(v_A - v_B)$	∇x_A	$C(v_A - v_B) = - \left[\frac{-CD_{AB}}{x_A x_B} \right] \nabla x_A$

CHAPITRE IV. TRANSFERT DE QUANTITE DE MOUVEMENT

En génie des procédés, le transfert de quantité de mouvement fait référence à l'échange de quantité de mouvement ou de masse entre différentes phases (liquide, gaz, solide) dans un système de procédés. Ce transfert de quantité de mouvement est essentiel pour de nombreuses opérations unitaires et processus industriels, tels que la distillation, l'absorption, l'extraction, la filtration, la séparation par membranes, etc.

Lorsque des fluides se déplacent dans un système de procédés, le transfert de quantité de mouvement se produit en raison des forces exercées sur le fluide. Les équations de conservation de la quantité de mouvement, telles que l'équation de Navier-Stokes, sont utilisées pour modéliser et prédire le comportement des fluides en mouvement, ce qui est essentiel pour concevoir et optimiser les systèmes de procédés.

Le transfert de quantité de mouvement en génie des procédés est souvent étudié et analysé à l'aide de principes de base de la mécanique des fluides, de la thermodynamique et de la chimie des réactions. Les ingénieurs des procédés utilisent ces concepts pour concevoir des systèmes et des opérations qui permettent un transfert efficace de masse et de quantité de mouvement, afin d'optimiser les performances des procédés industriels.

VI.1. Définition d'un fluide

Un fluide peut être considéré comme étant une substance formé d'un grand nombre de particules matérielles, très petites et libres de se déplacer les unes par rapport aux autres.

C'est donc un milieu matériel continu, déformable, sans rigidité et qui peut s'écouler. Les forces de cohésion entre particules élémentaires sont très faibles de sorte que le fluide est un corps sans forme propre qui prend la forme du récipient qui le contient, par exemple : les métaux en fusion sont des fluides qui permettent par moulage d'obtenir des pièces brutes de formes complexes.

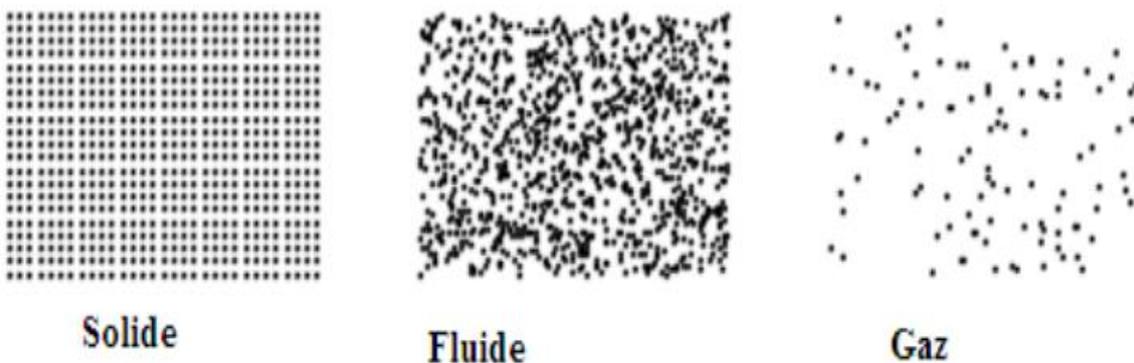


Figure IV.1. Représentation idéalisée des trois états de la matière.

Les fluides peuvent être classés en deux grande familles : La famille des fluides "newtoniens" (comme l'eau, l'air et la plupart des gaz) et celle des fluides "non newtoniens" (quasiment tout le reste... le sang, les gels, les boues, les pâtes, les suspensions, les émulsions...). Les fluides "newtoniens" ont une viscosité constante ou qui ne peut varier qu'en fonction de la température. La deuxième famille est constituée par les fluides "non newtoniens" qui ont la particularité d'avoir leur viscosité qui varie en fonction de la vitesse et des contraintes qu'ils subissent lorsque ceux-ci s'écoulent. Ce chapitre est limité uniquement à des fluides newtoniens qui seront classés comme suit.

VI.1.1 Fluide parfait

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée Σ fictive ou non.

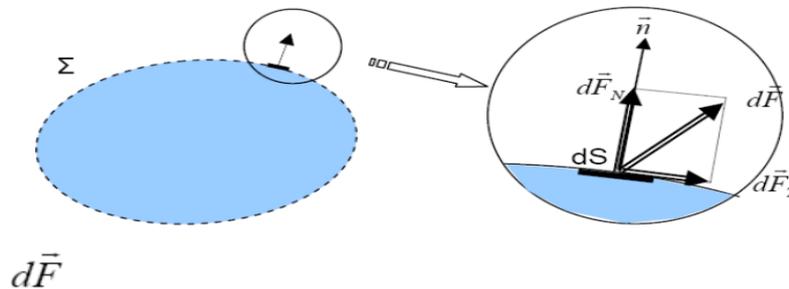


Figure IV.2. Représentation de la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire.

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale $d\vec{n}$ entre le fluide et le milieu extérieur. On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes :

- Une composante $d\vec{F}_T$ tangentielle à ds ;
- Une composante $d\vec{F}_N$ normale à ds .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{F}_T$ est normale à l'élément de surface dS .

VI.1.2. Fluide réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prises en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

Seulement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, en supposant que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent.

VI.1.3. Fluide incompressible

Un fluide est dit incompressible lorsque le volume occupé par une masse donnée ne varie pas en fonction de la pression extérieure. Les liquides peuvent être considérés comme des fluides incompressibles (eau, huile, etc.)

VI.1.4. Fluide compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles par exemple l'air, l'azote ...etc.

VI.2. Caractéristiques Physiques

VI.2.1 Masse volumique

$$\rho = \frac{m}{V} \quad \text{IV.1}$$

- ρ : Masse volumique en (kg/m^3) ;
- m : masse en (kg) ;
- V : volume en (m^3).

VI.2.2. Poids volumique

$$\varpi = \rho \cdot g = \frac{m}{V} \cdot g \quad \text{IV.2}$$

- ϖ : Poids volumique en (N/m^3).
- m : masse en (kg) ;
- g : accélération de la pesanteur en (m/s^2) ;
- V : volume en (m^3).

VI.2.3. Densité

$$d = \frac{\text{Masse volumique du fluide}}{\text{Masse volumique d'un fluide de référence}} = \frac{\rho}{\rho_{\text{ref}}} \quad \text{IV.3}$$

- ρ : Masse volumique d'un fluide de référence ;
- ρ_{ref} : Masse volumique du fluide.

Dans le cas des liquides on prendra l'eau comme fluide de référence. Dans le cas des gaz on prendra l'air comme fluide de référence.

VI.2.4. Viscosité

C'est une grandeur qui caractérise les frottements internes du fluide, autrement dit sa capacité à s'écouler. Elle caractérise la résistance d'un fluide à son écoulement lorsqu'il est soumis à l'application d'une force. C'est à dire, les fluides de grande viscosité résistent à

l'écoulement et les fluides de faible viscosité s'écoulent facilement. Elle peut être mesurée par un viscosimètre à chute de bille, dans lequel on mesure le temps écoulé pour la chute d'une bille dans le fluide. Elle peut également être mesurée par un récipient dont le fond comporte un orifice de taille standardisée. La vitesse à laquelle le fluide s'écoule par cet orifice permet de déterminer la viscosité du fluide. La viscosité est déterminée par la capacité d'entraînement qui possède une couche en mouvement sur les autres couches adjacentes. Par exemple, si on considère un fluide visqueux placé entre deux plaques P_1 et P_2 tel que la plaque P_1 est fixe et la plaque P_2 est animée d'une vitesse V_2 .

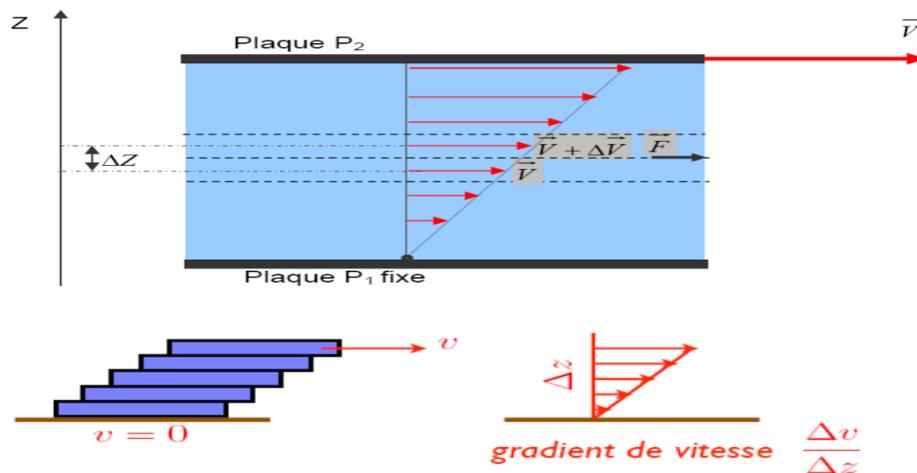


Figure IV.3. Variation du profil de vitesses dans le film fluide.

En représentant par un vecteur, la vitesse de chaque particule située dans une section droite perpendiculaire à l'écoulement, la courbe liant les extrémités de ces vecteurs représente le profil de vitesse. Le mouvement du fluide peut être considéré comme résultant du glissement des couches de fluide les unes sur les autres.

On remarque que la force \vec{F} est proportionnelle à la vitesse \vec{V} , à l'aire de la plaque A et inversement proportionnelle à la distance ΔZ séparant les deux plaques.

Mathématiquement, cette relation s'exprime par l'équation suivante :

$$F = \mu A \frac{\Delta v}{\Delta z} \quad \text{IV.4}$$

La constante de proportionnalité μ est dite la viscosité dynamique du fluide.

Où :

- F : force de glissement entre les couches en (N) ;
- μ : Viscosité dynamique en (kg/m.s) ;
- S : surface de contact entre deux couches en (m^2) ;
- ΔV : Écart de vitesse entre deux couches en (m/s) ;
- ΔZ : Distance entre deux couches en (m).

Remarque : Dans le système international (SI), l'unité de la viscosité dynamique est le Pascal seconde (Pa.s) ou Poiseuille (Pl) : $1 \text{ Pa.s} = 1 \text{ Pl} = 1 \text{ kg/m.s}$.

Cependant, dans le système CGS, l'unité $\frac{\text{g}}{\text{cm.s}}$ est connue comme le poise (P). Dans la littérature, il est utile d'exprimer la viscosité rapportée à sa masse volumique.

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad \text{IV.5}$$

ν est la viscosité cinématique. Dans le système CGS, elle a pour unité $\frac{\text{cm}}{\text{sec}^2}$ connue sous la dénomination de Stokes dont la dimension correspond au $\frac{L}{T^2}$. On note que la viscosité du gaz croît avec la température, alors que celle des liquides décroît suivant une loi de la forme :

$$\log(\mu) = A + \frac{B}{T} \quad \text{IV.6}$$

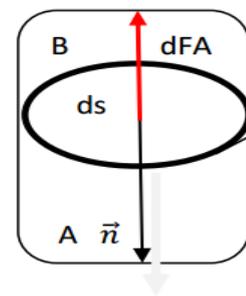
Tableau IV.1 : Viscosité dynamique de certains fluides.

Fluide	μ (Pa.s)
Eau (0 °C)	$1.788 \cdot 10^{-3}$
Eau (20 °C)	$1.002 \cdot 10^{-3}$
Eau (100 °C)	$2.2818 \cdot 10^{-3}$
Huile d'olive (20 °C)	$100 \cdot 10^{-3}$
Glycérol (20 °C)	$1000 \cdot 10^{-3}$
Hydrogène (20 °C)	$0.86 \cdot 10^{-5}$
Oxygène (20 °C)	$1.95 \cdot 10^{-5}$

IV.3. Statiques des fluides

L'hydrostatique est la science qui étudie l'équilibre des liquides. Elle étudie en particulier la transmission des pressions. En hydrostatique, le fluide étant au repos, les lois établies pour un fluide parfait s'appliqueront à un fluide réel.

Un fluide réel diffère du fluide idéal par sa viscosité. Or celle-ci ne manifeste ses effets que s'il y a un déplacement.



IV.3.1. Notion de pression en un point d'un fluide

Dans un milieu quelconque, entre autre le milieu fluide, la force que le volume élémentaire (A) exerce sur le volume élémentaire (B) à travers un élément de surface (\overline{ds}) est dFA et soit \vec{n} la normale à (ds) passant par un point M. La pression est une grandeur scalaire. C'est l'intensité de la composante normale de la force qu'exerce le fluide sur l'unité de surface. Elle est définie en un point A d'un fluide par l'expression suivante :

$$P_A = \frac{\|d\vec{F}_N\|}{dS} \quad \text{IV.7}$$

où :

- dS : Surface élémentaire de la facette de centre A (en mètre carré),
- n : Vecteur unitaire en A de la normale extérieure à la surface,
- $d\vec{F}_N$: Composante normale de la force élémentaire de pression qui s'exerce sur

la surface (en Newton),

- P_A : pression en A (en Pascal),
- Sur la surface de centre A, d'aire dS , orientée par sa normale extérieure n , la

force de pression élémentaire dF s'exprime par :

$$d\vec{F}_N = -P_A \cdot dS \cdot \vec{n} \quad \text{IV.8}$$

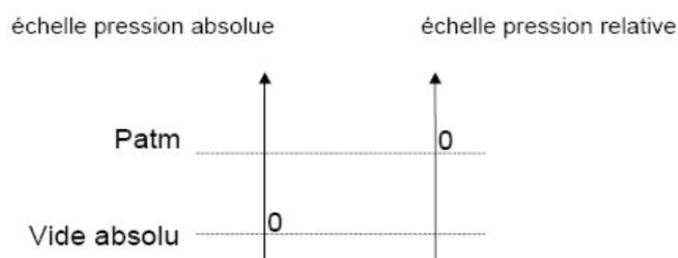
On considère un liquide immobile à l'intérieur d'un récipient ; la pression en tous les points du liquide situés sur un même plan horizontal est identique. Les points A et B étant sur une verticale, le principe s'écrit :

$$P_B - P_A = \rho \cdot g \cdot h \quad \text{IV.9}$$

- P_B, P_A : pressions en B et A en $\text{kg}/(\text{m} \cdot \text{s}^2)$ ou Pa;
- ρ : masse volumique du liquide en kg/m^3 ;
- g : accélération de la pesanteur en m/s^2 ;
- h : distance verticale entre A et B en m.

La différence de pression (en Pa) entre A et B est numériquement égale au poids d'une colonne de liquide de section unité 1 m^2 et de hauteur h en m: on pourra dire que $P_B - P_A$ exprimée en pascals est donc égale à une pression de h m de colonne de liquide de masse volumique ρ (kg/m^3). On peut toujours exprimer une pression avec une unité de hauteur après avoir précisé le liquide choisi.

La différence de pression (en Pa) entre A et B est numériquement égale au poids d'une colonne de liquide de section unité 1 m^2 et de hauteur h en (m). On pourra dire que $P_B - P_A$ exprimée en pascals est donc égale à une pression de h en (m) d'une colonne d'un liquide de masse volumique ρ (kg/m^3). On peut toujours exprimer une pression avec une unité de hauteur après avoir précisé le liquide choisi.

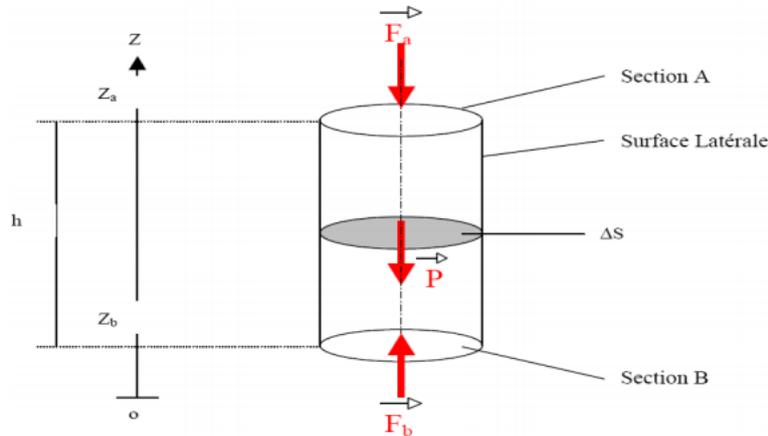


$$P_{\text{absolue}} = P_{\text{Relative}} + P_{\text{atmosphérique}}$$

IV.10

Démonstration de la formule d'hydrostatique

Etudiant l'équilibre d'une partie de fluide en forme de cylindre vertical de section droite très petite ΔS et d'une hauteur h .



Le cylindre est soumis à l'action de son poids et à l'action des forces de pression du milieu liquide extérieur.

➤ **Le poids :**

$$P = m \cdot g \quad \text{IV.11}$$

Or ;

$$m = \rho \cdot V \quad \text{IV.12}$$

Donc;

$$P = \rho \cdot V \cdot g \quad \text{IV.13}$$

Avec ;

$$V = h \Delta S \quad \text{IV.14}$$

➤ **Forces de pression :**

Section A :

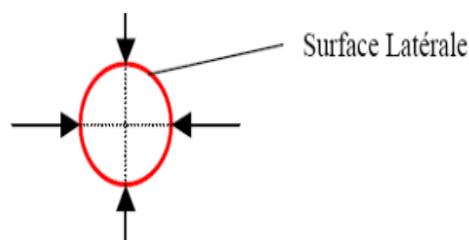
$$F_a = P_a \cdot \Delta S \quad \text{IV.15}$$

Section B :

$$F_b = P_b \cdot \Delta S \quad \text{IV.16}$$

➤ **Surface latérale :**

$F_L = 0$ (les forces de pression sont perpendiculaire à l'axe du cylindres s'opposent et s'annulent).



A l'équilibre :

$$\vec{P} + \vec{F}_a + \vec{F}_b = \vec{0}$$

On projette l'équation sur l'axe OZ :

$$-P - F_a + F_b = 0$$

$$-\rho \cdot h \cdot \Delta S \cdot g - P_a \cdot \Delta S + P_b \cdot \Delta S = 0$$

$$-\rho \cdot h \cdot g - P_a + P_b = 0$$

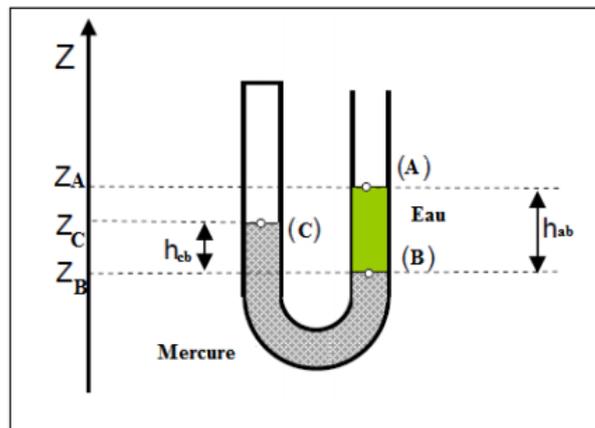
$$\text{Or } h = Z_a - Z_b$$

$$P_a + \rho \cdot g \cdot Z_a = P_b + \rho \cdot g \cdot Z_b$$

IV.17

Exemple IV.1 :

Soit un tube en U fermé à une extrémité qui contient deux liquides non miscibles.



Entre les surfaces :

- (A) et (B) il s'agit de l'essence de masse volumique $\rho_{\text{eau}}=100 \text{ kg/m}^3$;
- (B) et (C), il s'agit du mercure de masse volumique $\rho_{\text{mercure}}=13600 \text{ kg/m}^3$;
- La pression au-dessus de la surface libre (A) est $P_A=1 \text{ atm}$;
- L'accélération de la pesanteur est $g=9,81 \text{ m/s}^2$.

La branche fermée emprisonne un gaz à une pression P_C qu'on cherche à calculer :

1. En se basant sur la Relation Fondamentale de l'Hydrostatique, calculer la pression P_B (en mbar) au niveau de la surface de séparation en point (B) sachant que :

$$h_{ab} = (Z_A - Z_B) = 800 \text{ mm.}$$

2. De même, pour le mercure, calculer la pression au point (C) P_C (en mba) au niveau de la surface (C) sachant que $h_{ac} = (Z_C - Z_B) = 60 \text{ mm}$.

Solution :

1. L'application de la relation Fondamentale de l'Hydrostatique entre les points (A) et (B) permet d'écrire :

$$P_A - P_B = \rho_{\text{eau}} \cdot g (Z_A - Z_B) \Rightarrow P_B = P_A + \rho_{\text{eau}} \cdot g (h_{ab})$$

$$\text{AN : } P_B = 1.013 \cdot 10^5 + 1000 \times 9.82 \times 0.8 = 1.0915610^5 \text{ Pa} = 1091.56 \text{ mbar.}$$

2. Pour le mercure :

$$P_B - P_C = \rho_{\text{mercure}} \cdot g(Z_B - Z_C) \Rightarrow P_C = P_B - \rho_{\text{mercure}} \cdot g(h_{cb})$$

$$\text{AN : } P_C = 1.019156 \cdot 10^5 + 13600 \times 0.06 \times 9.82 = 5.322 \text{ Pa} = 53.22 \text{ mbar.}$$

IV.4. Dynamique des fluides incompressibles parfaits

L'écoulement des fluides est un phénomène complexe. On s'intéresse aux équations fondamentales qui régissent la dynamique des fluides incompressibles parfaits, en particulier :

- L'équation de continuité (conservation de la masse),
- Le théorème de Bernoulli (conservation de l'énergie),
- Le théorème d'Euler (conservation de la quantité de mouvement) à partir duquel

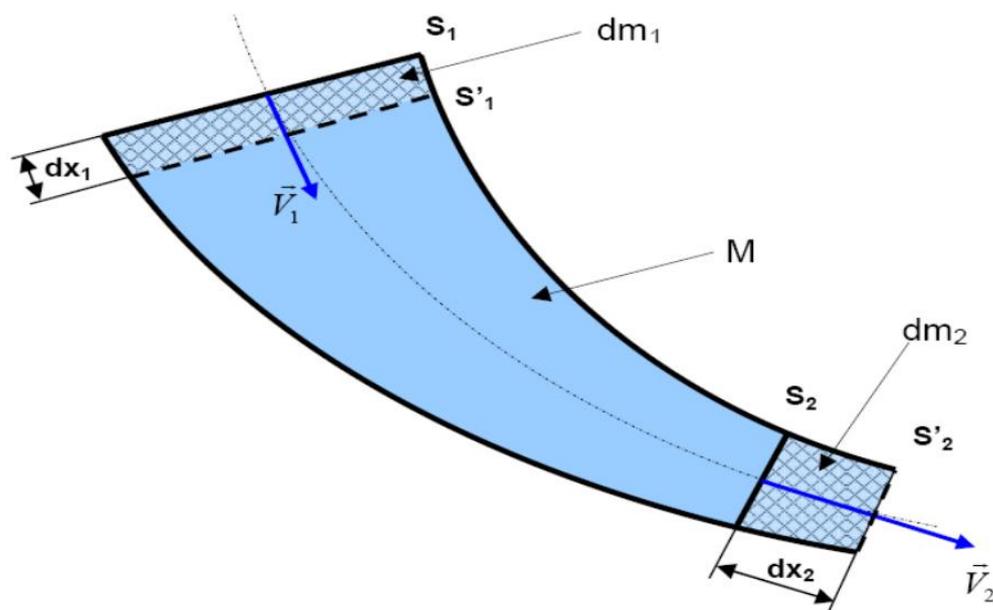
on établit les équations donnant la force dynamique exercée par les fluides en mouvement (exemple les jets d'eau).

IV.4.1. Ecoulement permanent

L'écoulement d'un fluide est dit permanent si le champ des vectrices vitesses des particules fluides est constant dans le temps.

IV.4.2. Equation de continuité

Considérons une veine d'un fluide incompressible de masse volumique ρ animée d'un écoulement permanent.



On désigne par :

- S_1 et S_2 respectivement la section d'entrée et la section de sortie du fluide à l'instant

t ;

- S'_1 et S'_2 respectivement les sections d'entrée et de sortie du fluide à l'instant $t'=(t+dt)$;
- V_1 et V_2 les vecteurs des vitesses d'écoulement respectivement à travers les sections S_1 et S_2 de la veine ;
- dx_1 et dx_2 respectivement les déplacements des sections S_1 et S_2 pendant l'intervalle de temps dt ;
- dm_1 : masse élémentaire entrante comprise entre les sections S_1 et S'_1 ;
- dm_2 : masse élémentaire sortante comprise entre les sections S_2 et S'_2 ;
- M : masse comprise entre S_1 et S_2 ;
- dV_1 : volume élémentaire entrant compris entre les sections S_1 et S'_1 ;
- dV_2 : volume élémentaire sortant compris entre les sections S_2 et S'_2 ;
- A l'instant t : le fluide compris entre S_1 et S_2 a une masse égale à $(dm_1+ M)$
- A l'instant $t+dt$: le fluide compris entre S'_1 et S'_2 a une masse égale à $(M+ dm_2)$.

Par conservation de la masse : $dm_1 + M = M + dm_2$ en simplifiant par m on aura

$$dm_1 = dm_2 \text{ Donc } \rho_1 \times dV_1 = \rho_2 \times dV_2 \text{ ou encore } \rho_1 \times S_1 dx_1 = \rho_2 \times S_2 dx_2$$

En divisant par dt on aura :

$$\rho_1 \times S_1 \frac{dx_1}{dt} = \rho_2 \times S_2 \frac{dx_2}{dt} \Leftrightarrow \rho_1 \times S_1 \times V_1 = \rho_2 \times S_2 \times V_2$$

Puisque le fluide est incompressible : $\rho_1 = \rho_2 = \rho$ On peut simplifier et avoir :

$$S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad \text{IV.18}$$

IV.5. Notion de débit

IV.5.1. Débit massique

Le débit massique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dm}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$q_m = \frac{dm}{dt} \quad \text{IV.19}$$

où :

- q_m est la masse de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.

- d_m : masse élémentaire en (kg) qui traverse la section pendant un intervalle de temps dt

- dt : intervalle de temps en (s) en tenant compte des équations précédentes on obtient :

$$q_m = \frac{dm}{dt} = \rho_1 S_1 \frac{dx_1}{dt} \quad \text{IV.20}$$

avec $\frac{dx_1}{dt} = V_1$ et $\frac{dx_2}{dt} = V_2$

avec :

- V_1 : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_1 ;
- V_2 : Vitesse moyenne d'écoulement de la veine fluide à travers S_2 .

D'où :

$$q_m = S_1 V_1 = S_2 V_2 \quad \text{IV.21}$$

Soit dans une section droite quelconque S de la veine fluide à travers laquelle le fluide s'écoule à la vitesse moyenne V :

$$q_m = \rho \cdot S \cdot V \quad \text{IV.22}$$

où :

- q_m : Débit massique en (kg/s) ;
- ρ : Masse volumique en (kg/m³)
- S : Section de la veine fluide en (m²)
- V : Vitesse moyenne du fluide à travers (S) en (m/s)

IV.5.2. Débit volumique

Le débit volumique d'une veine fluide est la limite du rapport $\frac{dV}{dt}$ quand dt tend vers 0.

$$Q_V = \frac{dV}{dt} \quad \text{IV.23}$$

- Q_V : Volume de fluide par unité de temps qui traverse une section droite quelconque de la conduite.
- dV : Volume élémentaire, en (m³), ayant traversé une surface S pendant un intervalle de temps dt ,
- dt : Intervalle de temps en secondes (s),

D'après la relation précédente, et en notant que : $dV = \frac{dm}{\rho}$

On peut écrire également que : $dV = \frac{qm}{\rho}$; finalement on aura :

$$Q_V = S \cdot V \quad \text{IV.24}$$

IV.5.3. Relation entre débit massique et débit volumique

A partir des relations précédentes on peut déduire facilement la relation entre le débit massique et le débit volumique :

$$q_m = \rho \cdot Q_V \quad \text{IV.25}$$

Exemple IV.2 :

Un fluide parfait incompressible (eau) s'écoule d'un orifice circulaire situé sur le côté d'un réservoir avec un débit volumique $Q_V = 24 \text{ L/min}$. Le diamètre de l'orifice est $d = 15 \text{ mm}$.

1. Calculer le débit massique d'eau à travers l'orifice en Kg/s .
2. Déterminer la vitesse d'écoulement au niveau de l'orifice.

Solution

1. On a : $q_m = \rho \times q_V$ et $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ g/L}$ alors on aura :

$$q_m = 1000 \times \frac{24}{60} = 400 \text{ g/s} = 0.4 \text{ Kg/s} .$$

2. En appliquant l'équation de continuité de mouvement, on peut écrire :

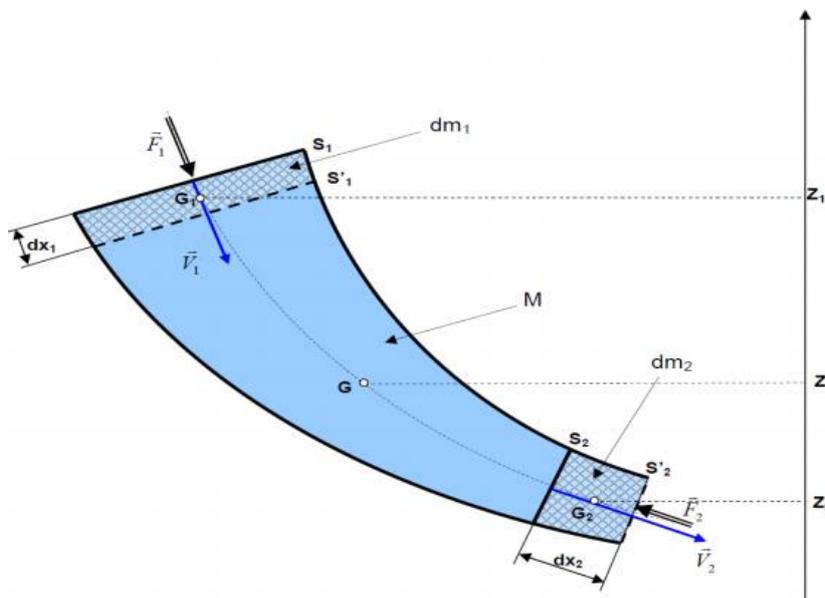
$$Q_V = V.S \Rightarrow V = \frac{q_V}{s} = \frac{4Q_V}{\pi d^2} = \frac{4 \times 0.4}{3.014 \times 0.015^2} = 2.26 \text{ m/s} .$$

IV.6. Théorème de Bernoulli**Cas d'un écoulement sans échange de travail**

Reprenons le schéma de la veine fluide du paragraphe IV.4.2 avec les mêmes notations et en introduisant hypothèses suivantes :

- Le fluide est parfait et incompressible.
- L'écoulement est permanent.
- L'écoulement est dans une conduite parfaitement lisse.

On considère un axe Z vertical dirigé vers le haut, on note Z_1, Z_2 et Z respectivement les altitudes des centres de gravité des masses dm_1, dm_2 et M . On désigne par F_1 et F_2 respectivement les normes des forces de pression du fluide agissant au niveau des sections S_1 et S_2 .



A l'instant t le fluide de masse $(dm_1 + M)$ est compris entre S_1 et S_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = (dm \times g \times Z_1 + M \times g \times Z) + \frac{1}{2}(dmV_1^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{V^2}{2})$$

A l'instant $t'=(t+dt)$ le fluide de masse $(M+dm_2)$ est compris entre S'_1 et S'_2 . Son énergie mécanique est :

$$E_{mec}^1 = E_{pot}^1 + E_{cin}^1 = (M \times g \times Z + dm_2 \times g \times Z_2) + \frac{1}{2}(dm_2V_2^2 + \int_{S_1}^{S_2} \frac{dm \times V^2}{2})$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à ce fluide entre les instants t et $t + \Delta t$ (la variation d'énergie cinétique est égale à la somme des travaux des forces extérieures : poids et forces pressantes), on obtient :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{2} + Z = H = Cte \quad \text{IV.26}$$

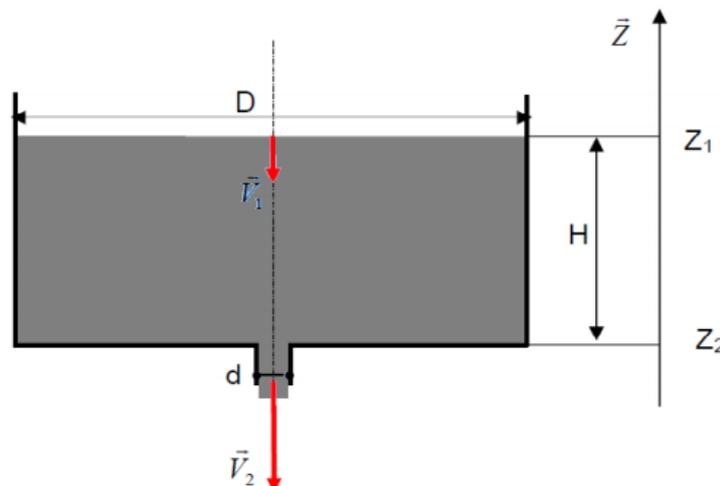
P est la pression statique, ρgZ est la pression de pesanteur, $\frac{\rho V^2}{2g}$ est la pression cinétique

Tous les termes sont exprimés en mètres de colonne de fluide. A partir de la relation précédente nous pouvons écrire :

$$\frac{v_2^2}{2} + \frac{P_2}{2} + gZ_2 = \frac{v_1^2}{2} + \frac{P_1}{2} + gZ_1 \quad \text{IV.27}$$

Exemple IV.3 :

On considère un réservoir cylindrique de diamètre intérieur $D = 4$ m rempli d'eau jusqu'à une hauteur $H = 6$ m. Le fond du réservoir est muni d'un orifice de diamètre $d = 20$ mm permettant de faire évacuer l'eau.



On ouvre l'orifice du fond et on laisse passer un temps très petit dt , le niveau d'eau H du réservoir descend d'une quantité dH . On note $V_1 = \frac{dH}{dt}$ la vitesse de descente du niveau d'eau, et V_2 la vitesse d'écoulement dans l'orifice. On donne l'accélération de la pesanteur $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.

1. Déduire l'expression de V_1 en fonction de V_2 , D et d .
2. Ecrire l'équation de Bernoulli. On suppose que le fluide est parfait et incompressible.
3. A partir des réponses aux questions 1) et 2) établir l'expression de la vitesse d'écoulement V_2 en fonction de g , H , D et d .
4. Calculer la vitesse V_2 . On suppose que le diamètre d est négligeable devant D . C'est-à-dire $d \ll D$.
5. En déduire le débit volumique Q_V .

Solution

1. En appliquant l'équation de continuité on obtiendra

$$Q_V = S_1 V_1 = S_2 V_2$$

$$\frac{\pi D^2}{4} \times V_1 = \frac{\pi d^2}{4} \times V_2 \quad \text{donc } V_1 = V_2 \frac{d^2}{D^2} \quad \dots\dots\dots(\text{Eq.1})$$

2. Le fluide est supposé parfait et incompressible, donc il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement et la variation de sa masse volumique avec la pression extérieur.

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{P_2}{\rho} + gZ_2 = \frac{V_1^2}{2} + \frac{P_1}{\rho} + gZ_1 \quad \text{Or } P_1 = P_2 \text{ et } Z_1 - Z_2 = H \text{ on obtient :}$$

$$\frac{V_2^2 - V_1^2}{2} - g \times H = 0 \quad \dots\dots\dots(\text{Eq.2})$$

3. En substituant l'équation (1) dans (2) on obtient :

$$\frac{V_2^2 - \frac{d^4}{D^4} V_2^2}{2} = H \times g$$

$$\text{Donc la vitesse : } V_2 = \sqrt{\frac{2 \times g \times H}{1 - \frac{d^4}{D^4}}}$$

4. En considérant $d \ll D$ alors l'expression de la vitesse d'écoulement s'écrit :

$$V_2 = \sqrt{2 \times g \times H} = \sqrt{2 \times 9.81 \times 6} = 10.94 \text{ m/s}$$

$$5. Q_V = V_2 \times S_2 = \frac{\pi d^2}{4} \times V_2 = \frac{\pi \times 0.02^2}{4} \times 10.94 = 3.29 \cdot 10^{-3} (\text{m}^3/\text{s})$$