

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur de la Recherche Scientifique



Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Mathématiques
Mémoire de fin d'étude pour l'obtention du diplôme
Master : Mathématiques
Option : Recherche Opérationnelle

THÈME

Introduction à la théorie de Nevanlinna et application
en équations différentielles complexes

Présenté par :

- ❖ ADJOUDJ Saadia
- ❖ BEN BELAID Nesrine

Devant le jury composé de

SAHRAOUI Ahmed	MAA	U. Bouira	Président
BERKANI Amirouche	MCA	U. Bouira	Examineur
BANOUEH Hicham	MCB	U. Bouira	Examineur
KARA Mohamed Abdelhak	MCB	ESI (ex. INI)	Encadrant

Année universitaire : 2023/2024

Remerciements

Tout d'abord nous remercions ALLAH pour nous avoir guidé vers le chemin du savoir et de la lumière. Pour nous avoir donné courage et volonté pour pouvoir réaliser ce modeste travail .

Nous remercions M. KARA Mohamed Abdelhak pour sa patience et ses conseils pour la réalisation de ce mémoire. Que nos profondes reconnaissances vont vers lui .

Nous adressons nos sincères remerciements aux membres du jury, le président M. SAHRAOUI Ahmed et les examinateurs M. BERKANI Amirouche et M. BANOUEH Hicham qui ont accepté d'évaluer notre travail .

Nous remercions également toute l'équipe pédagogique de l'université de Bouira, en particulier les enseignants du département de mathématiques. Par ailleurs, nous remercions aussi tous nos collègues de la promotion 2019.

Dédicaces de Nesrine

Avec l'expression de ma reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux qui quels que soient les termes embrassés , je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

À la femme qui a souffert sans me laisser souffrir, qui a jamais dit non à mes exigences . et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : ma mère .

À la mémoire de mon cher père décédé ton départ me déchire le coeur. que Dieu te fasse miséricorde et t'accepte dans son vaste paradis. Je t'aime beaucoup .

À mes amies qui m'ont toujours aidée et encouragée, qui étaient toujours à mes côtés, et qui m'ont accompagnée durant mon chemin d'études .

À toi mon amie Saadia J'ai beaucoup apprécié ton implication. Nous avons formé une bonne équipe. Je suis impatiente de travailler à nouveau avec toi.

À mes chers Houda et Amina pour tout leurs soutien ,encouragement et leurs gentillesse .

À toute personne qui mérite l'appréciation et le respect de ma part.

Dédicaces de Saadia

Avec l'expression de ma reconnaissance , Je dédie ce modeste travail à ceux qui , quels que soient les termes embrassés , je n'arriverais jamais à leur exprimer mon amour sincère.

À mon père et ma mère pour leur amour inestimable, leurs sacrifices, leur confiance, leur soutien et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

À mon partenaire de vie , pour l'amour et la confiance qu'il m'a donné et qu'il n'a pas cessé de me conseiller , encourager et soutenir tout au long de mes études, avec ses vœux de réussite : mon mari Djemaa Farid.

À ma joie de tous les instants et le bonheur de toute la famille : mes petit enfants Abdelmoumen, Dhiaa Elrahman, Mouhamed Anis .

À mes chers frères et mes soeurs pour leurs encouragement tout au long de mes années d'études .

À toute ma famille et les amies que j'ai connu jusqu'à maintenant, Merci pour votre amour et votre encouragement.

Tous mes remerciements et ma gratitude à mon binôme Nesrine .

À mes chers Houda, Amina et Naziha pour leurs encouragement et gentillesse .

Table des matières

Notation	2
Introduction générale	3
1 Préliminaires	4
1.1 Limite supérieure et inférieure	4
1.2 Notation de Landau	6
1.3 Fonctions holomorphes et entières	6
1.4 Séries de Taylor et de Laurent	7
1.5 Classification des singularités	8
1.6 Fonctions méromorphes	9
1.7 Principe du maximum	9
2 Introduction à la théorie de Nevanlinna	11
2.1 Formule de Poisson-Jensen	11
2.2 Fonction caractéristique de Nevanlinna	13
2.3 Premier théorème fondamental de Nevanlinna	18
2.4 Relation entre $T(r, f)$ et $M(r, f)$	23
2.5 Ordre et hyper-ordre de croissance des fonctions	23
2.5.1 Propriétés de l'ordre	25
2.6 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.	27
2.7 Terme maximum et indice central	28
3 Étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires	29
3.1 Lemmes	30
3.2 Preuve du théorème 3.1	32
3.3 Preuve du théorème 3.2	33
Conclusion	35
Bibliographie	36

Notation

$\mathbb{N}$	Ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, \dots\}$.
$\mathbb{Z}$	Ensemble des nombres relatifs.
$\mathbb{R}$	Ensemble des nombres réels.
$\overline{\mathbb{R}}$	Droite réelle achevée $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{C}$	Ensemble des nombres complexes.
$C(z_0, R), z - z_0 = R$	Cercle centré en z_0 et de rayon R d'équation $ z - z_0 = R$.
$D(z_0, R), z - z_0 < R$	Disque ouvert centré en z_0 et de rayon R , $\{z \in \mathbb{C} : z - z_0 < R\}$.
$\overline{D}(z_0, R), z - z_0 \leq R$	Disque fermé centré en z_0 et de rayon R , $\{z \in \mathbb{C} : z - z_0 \leq R\}$.
$o(\cdot), O(\cdot)$	Petit o, grand O (notation de Landou) .
$M(r, f)$	Maximum de module de f sur $\overline{D}(z_0, R)$.
$n(r, a, f), n(r, \frac{1}{f-a})$	Nombre des zéros de $f - a$ dans le disque $ z \leq r$.
$n(r, +\infty, f), n(r, f)$	Nombre des pôles de f dans le disque $ z \leq r$.
$m(r, f)$	Fonction de proximité de f .
$N(r, f)$	Fonction de comptage.
$T(r, f)$	Fonction caractéristique de Nevanlinna.
$\tilde{\rho}(f), \tilde{\rho}_2(f)$	Ordre et hyper-ordre de croissance d'une fonction entière f .
$\rho(f), \rho_2(f)$	Ordre et hyper-ordre de croissance d'une fonction méromorphe f .
$\text{mes}(E_0)$	Mesure linéaire d'un ensemble $E_0 \subset [0, +\infty[$.
$\text{mes}_l(E)$	Mesure logarithmique d'un ensemble $E \subset]1, +\infty[$.
$\mu(r)$	Terme maximal d'une fonction entière f .
$\nu_f(r)$	Indice central d'une fonction entière f .
$[a]$	Partie entière d'un réel a .

Introduction générale

Pour une fonction entière ou méromorphe f et un nombre complexe a , il est important d'examiner le nombre $n(r, a, f)$ de racines de l'équation $f(z) = a$ dans un disque centré à l'origine et de rayon r et voir la distribution de ces racines dans ce disque. Le cas d'une fonction polynomiale $P_m(z)$ du degré m est un exemple fondamental de la théorie de la distribution des valeurs. En effet, $P_m(z)$ possède exactement m racines complexes dans le plan complexe $\mathbb{C}$ tout en comptant leur multiplicité. Cependant, Picard a démontré qu'une fonction entière transcendante prend toutes les valeurs complexes une infinité de fois sauf peut-être au maximum une seule valeur. Borel a montré que la distribution des valeurs des fonctions entière est contrôlée par son ordre qui mesure la croissance des fonctions entières par rapport à la croissance de la fonction exponentielle. Plus tard, Nevanlinna a introduit la fonction caractéristique $T(r, f)$ pour étudier la distributions des valeurs des fonctions méromorphes. comprendre la croissance et l'oscillation des solutions des équations différentielles linéaires complexes. L'objectif de ce travail est d'introduire les premières notions fondamentales de la théorie de Nevanlinna et les mettre en application aux équations différentielles linéaires complexes. Pour ce faire, on a décomposé ce mémoire trois chapitres :

le premier chapitre : donne quelques définitions qui sont la base d'analyse réelle et complexe et on cite les résultats essentiels dont on aura besoin par la suite.

le deuxième chapitre : présente tout à bord la formule de Poisson-Jensen, puis on donne les définitions des fonctions $m(r, f)$, $N(r, f)$ et $T(r, f)$ et leurs propriétés afin d'énoncer le premier théorème de Nevanlinna. En suite, on définit l'ordre et l'hyper-ordre de la croissance des fonctions entières et méromorphes dans le plan complexe $\mathbb{C}$ en donnant effectivement quelques exemples de calcul.

le troisième chapitre : discute une application des résultats du deuxième chapitre dans l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles homogènes d'ordre supérieure de la forme

$$f^{(k)} + A_{k-1}(z)f^{(k-1)} + \dots + A_0(z)f = 0$$

où les coefficients sont des fonctions entières. On démontra que l'hyper-ordre de la solution de l'équation différentielle est exactement l'ordre du coefficient strictement dominant.

Préliminaires

1.1 Limite supérieure et inférieure

Définition 1.1. On appelle valeur d'adhérence $l \in \mathbb{R}$ d'une suite numérique (u_n) s'il existe une suite extraite de (u_n) qui converge vers l .

La limite supérieure de la suite (u_n) est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (u_n) et elle notée par $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou parfois par $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

La limite inférieure de la suite (u_n) est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (u_n) et elle notée par $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n$ ou parfois par $\underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Proposition 1.1. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite numérique.

- i. $\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup\{u_k, k \geq n\} = \inf_{n \geq 0} \sup_{k \geq n} u_k$.
- ii. $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \inf\{u_k, k \geq n\} = \sup_{n \geq 0} \inf_{k \geq n} u_k$.
- iii. $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
- iv. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l \Leftrightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$.
- v. $\liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\limsup_{n \rightarrow +\infty} (-u_n)$.

Exemple 1.1. Soient $u_n = (-1)^n$ et $v_n = \sin n$. Il est clair que les suites (u_n) et (v_n) sont divergente car leur limites n'existent pas. Cependant,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} u_n = \limsup_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{n \rightarrow +\infty} u_n = \liminf_{n \rightarrow +\infty} v_n = -1.$$

Définition 1.2. Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D sauf peut être en x_0 . Les limites supérieure et inférieure de la fonction f quand x tend vers x_0 sont définies respectivement par

$$\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = \sup \left\{ l, \exists (x_n)_n \subset D, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \right\}$$

et

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = \inf \left\{ l, \exists (x_n)_n \subset D, x_n \neq x_0, x_n \rightarrow x_0, \lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) = l \right\}.$$

Proposition 1.2. *Soit f une fonction réelle définie dans un voisinage d'un point x_0 sauf peut être en x_0 . Alors on a*

$$\begin{aligned}\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \sup \{f(x) : 0 < |x - x_0| < \delta\} \\ &= \inf_{\delta > 0} \sup \{f(x) : 0 < |x - x_0| < \delta\}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \inf \{f(x) : 0 < |x - x_0| < \delta\} \\ &= \sup_{\delta > 0} \inf \{f(x) : 0 < |x - x_0| < \delta\}.\end{aligned}$$

Exemple 1.2. *Soient f et g deux fonctions définies par $f(x) = \sin \frac{1}{x-2}$ et*

$$g(x) = \begin{cases} -e^{-x} & \text{si } x < 0 \\ e^x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}.$$

On a

$$\liminf_{x \rightarrow 2} f(x) = \liminf_{x \rightarrow 0} g(x) = -1$$

et

$$\limsup_{x \rightarrow 2} f(x) = \limsup_{x \rightarrow 0} g(x) = 1.$$

Théorème 1.1. *Soit $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur D sauf peut être en x_0 . Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\limsup_{x \rightarrow x_0} f(x) = l &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in D, 0 < |x - x_\delta| < \delta \Rightarrow f(x_\delta) > l - \varepsilon \end{cases} \\ \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) = l &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon \\ \forall \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x_\delta \in D, 0 < |x - x_\delta| < \delta \Rightarrow f(x_\delta) < l + \varepsilon \end{cases}.\end{aligned}$$

Théorème 1.2. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$. Soit $l \in \mathbb{R}$. Alors on a*

$$\begin{aligned}\limsup_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) < l + \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists (x_n)_n, x_n \rightarrow +\infty, f(x_n) > l - \varepsilon \end{cases} \\ \liminf_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists (x_n)_n, x_n \rightarrow +\infty, f(x_n) < l + \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists A > 0, x > A \Rightarrow f(x) > l - \varepsilon \end{cases}.\end{aligned}$$

1.2 Notation de Landau

Définition 1.3. Soient f et g deux fonctions réelles définies dans un voisinage d'un point x_0 $V(x_0)$ sauf peut être en x_0 telles que $\forall x \in V(x_0) \setminus \{x_0\}, f(x) \neq 0, g(x) \neq 0$.

i. On dit que f est dominée par g au voisinage du x_0 si

$$\exists M > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M.$$

On note $f(x) \underset{(x_0)}{=} O(g(x))$.

ii. On dit que $f(x)$ est négligeable devant $g(x)$ au voisinage du x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.$$

On note $f(x) \underset{(x_0)}{=} o(g(x))$.

iii. On dit que $f(x)$ est équivalente à $g(x)$ au voisinage du x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq 1 + \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

On note $f(x) \underset{(x_0)}{\sim} g(x)$.

Exemple 1.3.

$$\cos \frac{1}{x} \sin x \underset{(0)}{=} O(x), \quad e^{-n} \underset{(+\infty)}{=} o(n^3), \quad \cos x \underset{(0)}{\sim} 1 - \frac{x^2}{2}.$$

1.3 Fonctions holomorphes et entières

Définition 1.4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est holomorphe (analytique) sur Ω si f est différentiable sur Ω , c'est à dire elle est différentiable en tout point z_0 de Ω .

Si f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, alors f est dite entière.

Théorème 1.3 (formule d'intégrale de Cauchy). Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ et soit $z_0 \in \Omega$ tel que le disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ est inclus dans Ω . Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2i\pi} \oint_{C(z_0, r)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

avec $f^{(0)}(z_0) = f(z_0)$.

Théorème 1.4 (Inégalité de Cauchy). Soit f est une fonction analytique sur Ω de $\mathbb{C}$ contenant un disque fermé $\overline{D}(z_0, r)$ tel que $\forall z \in \overline{D}(z_0, r), |f(z)| \leq M$. Alors,

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{r^n}. \quad (1.1)$$

1.4 Séries de Taylor et de Laurent

Théorème 1.5 (théorème de Taylor). *Soit f une fonction holomorphe dans un disque ouvert $D(z_0, R)$. Alors, pour tout $z \in D(z_0, R)$ on a*

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots = \sum_{n \geq 0} a_n(z - z_0)^n$$

où

$$a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

L'expression de $f(z)$ est appelée la *série de Laurent* de f au voisinage du point z_0 .

Exemple 1.4. *La série de Laurent de la fonction $f(z) = e^z$ au voisinage de $z_0 = 0$ est*

$$e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \dots, \quad |z| < \infty.$$

Théorème 1.6 (théorème de Laurent). *Soient C_1 et C_2 des cercles centrés en z_0 et de rayons respectifs R_1 et R_2 . On suppose que f est holomorphe dans la couronne (ou région annulaire) D limitée par C_1 et C_2 . Les courbes C_1 et C_2 étant décrites dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.*

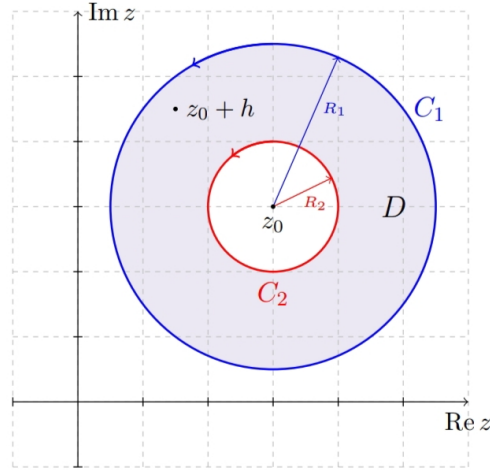


FIGURE 1.1

Alors, pour tout $z \in D$, on a

$$f(z) = \dots + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots \quad (1.2)$$

où

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{m+1}} dz, \quad m \in \mathbb{Z}$$

avec C un contour fermé inclut dans la couronne D .

L'expression (1.2) est appelée un *développement de Laurent* de la fonction f dans la couronne D tandis que la partie gauche de (1.2) est dite la *série de Laurent* de f qui est composée d'une *partie analytique (régulière)*

$$a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots$$

et une *partie principale*

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \dots$$

Exemple 1.5. Développons en série de Laurent la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+3)}$ dans la couronne $D = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z+1| < 1\}$. Notons que pour tout $0 < |z+1| < 1$ on peut écrire

$$\frac{1}{z+3} = \frac{1}{z+1+2} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \frac{z+1}{2}} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^n.$$

D'où

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z+1)^2(z+3)} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z+1)^{n-2} \\ &= \frac{1}{2(z+1)^2} - \frac{1}{4(z+1)} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}(z+1) + \dots \end{aligned}$$

1.5 Classification des singularités

Définition 1.5. Un point $z_0 \in \mathbb{C}$ est dit un *singulier isolé* d'une fonction complexe $f(z)$, s'il existe $R > 0$ telle que f est holomorphe sur l'ensemble $D(z_0, R) \setminus \{z_0\}$.

Définition 1.6. Le point singulier isolé z_0 de f est dit

apparente : si le développement en série de Laurent de la fonction f ne possède pas une partie principale.

pôle d'ordre n : si la partie principale du développement en série de Laurent de f ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \frac{a_{-3}}{(z - z_0)^3} + \dots + \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n},$$

où $a_{-n} \neq 0$. De plus, si $n = 1$ (respectivement, $n = 2$) alors z_0 est dit *pôle simple* (respectivement, *pôle double*) de f .

essentiel : si la partie principale du développement de Laurent de f possède une infinité de termes.

Exemple 1.6. *i.* La fonction $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ a une singularité apparente au point $z_0 = 0$ car son développement en série de Laurent est

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

- ii. De l'Exemple 1.5, il est clair que le point $z_0 = -1$ est un pôle double de la fonction $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+3)}$. De plus, on peut vérifier tout simplement que le point $z_1 = -3$ est un pôle simple de f .
- iii. Le point $z_0 = 0$ est une singularité essentielle de la fonction $z \mapsto e^{\frac{1}{z}}$ car son développement en série de Laurent contient une infinité de termes

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + \dots$$

Proposition 1.3. Soit z_0 un point singulier isolé de f .

- i. Si $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ existe et finie, alors $z = z_0$ est un point apparente.
- ii. S'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tel que $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^n f(z) \neq 0, \infty$, alors z_0 est un pôle d'ordre n .

1.6 Fonctions méromorphes

Définition 1.7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que f est une fonction méromorphe sur Ω si

- i. f est holomorphe sur $\Omega \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$
- ii. les points singuliers $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des pôles de la fonction f .

Exemple 1.7. i. La fonction $f(z) = \frac{\cos z}{z(z+1)^5}$ est une fonction méromorphe sur le plan complexe $\mathbb{C}$.

- ii. Les fonctions entières et les fonctions rationnelles sont des fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$.
- iii. La fonction $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ n'est pas une fonction méromorphe car $z_0 = 0$ n'est pas un pôle.

Définition 1.8. i. Une fonction entière est dite transcendante si elle n'est pas polynomiale.

- ii. Une fonction méromorphe est dite transcendante si elle n'est pas rationnelle.

1.7 Principe du maximum

Définition 1.9. Soit f une fonction entière non constante. Le maximum du module de f sur le disque fermé $\overline{D}(0, r)$ est défini par

$$M(r, f) = \max\{|f(z)|, |z| \leq r\}$$

Théorème 1.7 (principe du maximum). Soit f une fonction entière. Pour tout $r > 0$, il existe $z_r \in C(0, r)$, (i.e., $|z_r| = r$) vérifiant $M(r, f) = |f(z_r)|$. Autrement dit, le maximum du module $M(r, f)$ de la fonction f est atteint sur le cercle centré à l'origine et de rayon r . Donc

$$M(r, f) = \max\{|f(z)|, |z| = r\}.$$

Exemple 1.8. *i. Soit $f(z) = e^z$. Alors $M(r, e^z) = \max\{|e^z|, |z| = r\}$. On a*

$$\max_{|z|=r} |e^z| = \max_{|z|=r} \left| \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} \right| \leq \max_{|z|=r} \sum_{n \geq 0} \left| \frac{z^n}{n!} \right| = \sum_{n \geq 0} \frac{r^n}{n!} = e^r.$$

Mais pour $z_0 = r \in C(0, r)$, on a $|e^{z_0}| = e^r \leq M(r, e^z)$. D'où $M(r, e^z) = e^r$.

ii. Soit $g(z) = \exp(e^z)$. Alors

$$\max_{|z|=r} |e^{e^z}| = \max_{|z|=r} |e^{e^{x+iy}}| = \max_{|z|=r} |e^{e^x \cos y}| \leq \max_{|z|=r} e^{e^x} \leq e^{e^r}.$$

Mais pour $z_0 = r \in C(0, r)$, on a $|e^{e^{z_0}}| = e^{e^r} \leq M(r, \exp(e^z))$. D'où $M(r, g) = e^{e^r}$.

iii. Soit $P_n(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ et $a_n \neq 0$. Alors

$$M(r, P_n(z)) \underset{(+\infty)}{\sim} |a_n| r^n.$$

Introduction à la théorie de Nevanlinna

2.1 Formule de Poisson-Jensen

Théorème 2.1 (formule de Poisson-Jensen). *Soit $f(z)$ une fonction méromorphe sur le disque fermé $\overline{D}(0, R)$ ($0 < R < \infty$), et soient a_j ($j = 1, 2, \dots, m$) et b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) les zéros et les pôles de $f(z)$ dans le disque ouvert $D(0, R)$ respectivement, chacun étant compté avec son ordre de multiplicité. Si $z = re^{i\theta}$ est un point dans $D(0, R)$ et $f(z) \neq 0, \infty$, alors on a*

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| - \sum_{k=1}^n \log \left| \frac{R(z - b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right|. \quad (2.1)$$

Démonstration. Cas 1 : Supposons que $f(z)$ n'a aucun zéro ou pôle sur le disque fermé $|z| \leq R$. Prenons $z = r e^{i\theta}$ un point dans $|z| < R$ et un point $z^* = \frac{R^2}{\bar{z}} = \frac{R^2}{r} e^{i\theta}$ dans $|z| > R$. Comme $f(z) \neq 0, \infty$, alors $\log f(z)$ est holomorphe sur $|z| \leq R$. En utilisant l'intégrale de Cauchy, on obtient

$$\begin{aligned} \log f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\log f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{Re^{i\varphi} \log f(Re^{i\varphi})}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} d\varphi, \\ 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=R} \frac{\log f(\xi)}{\xi - z^*} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{re^{i\varphi} \log f(Re^{i\varphi})}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} d\varphi. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned} \log f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi} - re^{i\theta}} - \frac{re^{i\varphi}}{re^{i\varphi} - Re^{i\theta}} \right) \log f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{Re^{i(\varphi-\theta)}}{Re^{i(\varphi-\theta)} - r} + \frac{r}{Re^{-i(\varphi-\theta)} - r} \right) \log f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} \log f(Re^{i\varphi}) d\varphi. \end{aligned}$$

Finalement, on prend la partie réelle et en utilisant l'identité $\operatorname{Re}(\log f(z)) = \log |f(z)|$, on obtient la formule

$$\log |f(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \quad (2.2)$$

Cas 2 : Supposons maintenant que f a des zéros $a_j (j = 1, \dots, m)$ et des pôles $b_k (k = 1, \dots, n)$ dans le disque ouvert $|z| < R$. Posons

$$F(z) = f(z) \frac{\prod_{k=1}^n \left| \frac{R(z-b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right|}{\prod_{j=1}^m \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right|}. \quad (2.3)$$

Alors $F(z)$ n'a ni zéro ni pôle dans $|z| < R$ et donc elle est holomorphe sur $|z| < R$. En appliquant la formule (2.2) pour la fonction $F(z)$, on obtient

$$\log |F(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |F(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \quad (2.4)$$

Mais, pour $z = Re^{i\varphi}$, $|a_j| < R$, $|b_k| < R$, on a

$$\left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| = \left| \frac{R(z-b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right| = 1 \Leftrightarrow \log \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| = \log \left| \frac{R(z-b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right| = 0. \quad (2.5)$$

En effet,

$$\begin{aligned} \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| &= \left| \frac{R(Re^{i\varphi} - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j R e^{i\varphi}} \right| = \left| \frac{e^{i\varphi}(R - a_j e^{-i\varphi})}{R - \bar{a}_j e^{i\varphi}} \right| \\ &= \frac{|R - a_j e^{-i\varphi}|}{|R - \bar{a}_j e^{i\varphi}|} = \frac{|R - a_j e^{-i\varphi}|}{|R - \bar{a}_j \overline{e^{-i\varphi}}|} \\ &= \frac{|R - a_j e^{-i\varphi}|}{|R - \overline{a_j e^{i\varphi}}|} = \frac{|R - a_j e^{-i\varphi}|}{|\overline{R - a_j e^{i\varphi}}|} \\ &= \frac{|R - a_j e^{-i\varphi}|}{|R - a_j e^{-i\varphi}|} = 1. \end{aligned}$$

Il vient de (2.3) et (2.5) que $\log |F(Re^{i\varphi})| = \log |f(Re^{i\varphi})|$ et par conséquent l'équation (2.4) devient

$$\log |F(z)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi. \quad (2.6)$$

De (2.3), on a

$$\log |F(z)| = \log |f(z)| - \sum_{j=1}^m \log \left| \frac{R(z-a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| + \sum_{k=1}^n \log \left| \frac{R(z-b_k)}{R^2 - \bar{b}_k z} \right|. \quad (2.7)$$

Finalement, l'équation (2.1) découle directement de (2.6) et (2.7).

□

Remarque 2.1. *i. L'équation (2.2) est appelée formule de Poisson.*

ii. Si $z = re^{i\theta} = 0$, alors l'équation (2.1) devient

$$\log |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| d\varphi - \sum_{j=1}^m \log \frac{R}{|a_j|} + \sum_{k=1}^n \log \frac{R}{|b_k|}. \quad (2.8)$$

qui est appelée formule de Jensen.

2.2 Fonction caractéristique de Nevanlinna

Définition 2.1. *Pour tout réel $x > 0$, on définit $\log^+ x$ par*

$$\log^+ x = \max \{0, \log x\} = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ \log x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}.$$

Proposition 2.1. *i. $\log x \leq \log^+ x$.*

ii. $\log^+ x \leq \log^+ y$ pour $x \leq y$.

iii. $\log x = \log^+ x - \log^+ \frac{1}{x}$.

iv. $|\log x| = \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x}$.

v. $\log^+ \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$.

vi. $\log^+ \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \leq \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k$.

Démonstration. (i), (ii) sont évidents.

(iii) Si $x < 1$, alors $\log^+ x = 0$ et $\log^+ \frac{1}{x} = -\log x$, donc

$$\log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} = \log x.$$

Si $x \geq 1$, alors $\log^+ x = \log x$ et $\log^+ \frac{1}{x} = 0$, donc

$$\log^+ x - \log^+ \frac{1}{x} = \log x.$$

(iv) On a

$$\begin{aligned} \log^+ x + \log^+ \frac{1}{x} &= \max\{\log x, 0\} + \max\{\log \frac{1}{x}, 0\} \\ &= \max\{\log x, 0\} + \max\{-\log x, 0\} \\ &= \max\{\log x, 0\} - \min\{\log x, 0\} \\ &= |\log x|. \end{aligned}$$

(v) Si $\prod_{k=1}^n x_k \leq 1$, alors l'affirmation est donc évidente. D'autre part, si $\prod_{k=1}^n x_k > 1$, alors

$$\log^+ \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) = \log \left(\prod_{k=1}^n x_k \right) = \sum_{k=1}^n \log x_k \leq \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

(vi) Il vient de (ii) et (v) que

$$\log^+ \left(\sum_{k=1}^n x_k \right) \leq \log^+ \left(n \max_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \leq \log n + \log^+ \left(\max_{1 \leq k \leq n} x_k \right) \leq \log n + \sum_{k=1}^n \log^+ x_k.$$

□

Définition 2.2. Soit f une fonction méromorphe non constante et a un nombre complexe ou $a = \infty$ (a est dit a -point). La fonction de proximité de la fonction f au point a est définie par

$$m(r, a, f) = m(r, \frac{1}{f-a}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})-a|} d\theta \quad \text{si } a \in \mathbb{C}, \quad (2.9)$$

et

$$m(r, \infty, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \quad \text{si } a = \infty. \quad (2.10)$$

Proposition 2.2. Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}). \quad (2.11)$$

Démonstration. En utilisant la troisième propriété du $\log^+$, on obtient

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \frac{1}{|f(re^{i\theta})|} d\theta.$$

Par (2.9), (2.10), nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(re^{i\theta})| d\theta = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}).$$

□

Définition 2.3. Soit f une fonction méromorphe non constante et a un a -point. On définit la fonction de comptage a -points de la fonction f dans le disque $|z| \leq r$ par

$$N(r, a, f) = N(r, \frac{1}{f-a}) = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt + n(0, a, f) \log r \quad \text{si } a \in \mathbb{C}, \quad (2.12)$$

$$N(r, \infty, f) = N(r, f) = \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r \quad \text{si } a = \infty, \quad (2.13)$$

où

$n(t, a, f) = n(t, \frac{1}{f-a})$ désigne le nombre des zéros de l'équation $f(z) = a$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque racine étant comptée avec son ordre de multiplicité.

$n(0, a, f) = n(0, \frac{1}{f-a})$ est l'ordre de multiplicité des zéros de $f(z) - a$ à l'origine. Si $f(0) \neq a$, alors $n(0, a, f) = 0$.

$n(t, \infty, f) = n(t, f)$ désigne le nombre des pôles de la fonction $f(z)$ dans le disque $|z| \leq t$, chaque pôle étant compté avec son ordre de multiplicité.

$n(0, \infty, f) = n(0, f)$ désigne l'ordre de multiplicité des pôles de $f(z)$ à l'origine. Si $f(0) \neq \infty$, alors $n(0, f) = 0$.

Lemme 2.1. Soit f une fonction méromorphe sur $|z| \leq r < +\infty$ avec les a -points $a_j (j = 1, 2, \dots, n)$ dans le disque $|z| \leq r$ (i.e. $f(a_j) = a$) telle que $0 < |a_1| \leq |a_2| \leq \dots |a_n| \leq r$, chacune est évalué en fonction de sa multiplicité. Alors,

$$\sum_{j=1}^m \log \frac{r}{|a_j|} = \int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt = \int_0^r \frac{n(t, a, f) - n(0, a, f)}{t} dt. \quad (2.14)$$

Démonstration. En mettant $r_j = |a_j|, j = 1, 2, \dots, m$, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \log \frac{r}{|a_j|} &= \sum_{j=1}^m \log \frac{r}{r_j} = \log \frac{r^m}{r_1 r_2 \dots r_m} \\ &= m \log r - \sum_{j=1}^m \log r_j \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} j(\log r_{j+1} - \log r_j) + m(\log r - \log r_m) \\ &= \sum_{j=1}^{m-1} j \int_{r_j}^{r_{j+1}} \frac{dt}{t} + m \int_{r_m}^r \frac{dt}{t} \\ &= \int_0^r \frac{n(t, a, f)}{t} dt. \end{aligned}$$

Vu que $n(0, a, f) = 0$, on déduit (2.14). □

Théorème 2.2. Soit f une fonction méromorphe sur $|z| \leq R \leq +\infty$ représentée par sa série de Laurent suivante à l'origine

$$f(z) = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Alors, pour tout $0 < r < R$ on a

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\varphi})| d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}). \quad (2.15)$$

Démonstration. On définit la fonction méromorphe g par

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^m}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Il est clair que $g(0) = C_m \neq 0, +\infty$ et g et f ont les mêmes pôles et les mêmes zéros dans $0 < |z| \leq R$. De plus, $m = n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)$. En effet,

si $m < 0$ alors $n(0, 0, f) = 0$ et $n(0, \infty, f) = -m$,

si $m > 0$, alors $n(0, 0, f) = m$ et $n(0, \infty, f) = 0$,

si $m = 0$, alors $n(0, 0, f) = n(0, \infty, f) = 0$.

En appliquant la formule de Jensen (2.8) sur $g(z)$, on trouve

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\varphi})| d\varphi + \sum_{j=1}^m \log \frac{|a_j|}{r} - \sum_{k=1}^n \log \frac{|b_k|}{r} - m \log r. \quad (2.16)$$

En combinant entre (2.16) et (2.14), on trouve

$$\begin{aligned} \log |C_m| &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\varphi})| d\varphi - \int_0^r \frac{n(t, 0, f) - n(0, 0, f)}{t} dt \\ &\quad + \int_0^r \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt - (n(0, 0, f) - n(0, \infty, f)) \log r. \end{aligned}$$

D'après les définitions 2.2 et 2.3, on obtient

$$\log |C_m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\varphi})| d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}).$$

□

Définition 2.4. Soit f une fonction méromorphe non constante. la fonction caractéristique $T(r, f)$ de Nevanlinna est définie par

$$T(r, f) = m(r, f) + N(r, f). \quad (2.17)$$

Exemple 2.1. Soit $f(z) = e^z$. Nous avons $n(t, \infty, f) = 0$ car f n'admet pas de pôles, par conséquent $N(r, f) = 0$. De plus, on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r e^{i\theta}}| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |e^{r \cos \theta}| d\theta.$$

Si $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors

$$0 \leq \cos \theta \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq r \cos \theta \Leftrightarrow 1 \leq e^{r \cos \theta}.$$

Si $\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, alors

$$-1 \leq \cos \theta \leq 0 \Leftrightarrow -r \leq r \cos \theta \leq 0 \Leftrightarrow e^{r \cos \theta} \leq 1.$$

Si $\theta \in \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$, alors $e^{r \cos \theta} \geq 1$. Donc

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log^+ e^{r \cos \theta} d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \log^+ e^{r \cos \theta} d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} \log^+ e^{r \cos \theta} d\theta \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \theta) d\theta + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (r \cos \theta) d\theta \right) \\ &= \frac{r}{2\pi} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{r}{\pi}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{r}{\pi}. \quad (2.18)$$

Exemple 2.2. Soit $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme non constant de degré $n \geq 1$ telle que $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$ sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0$, et soit $f(z) = e^{P_n(z)}$. On veut calculer $T(r, e^{P_n(z)})$. D'abord, on calcule $T(r, f)$ lorsque $P_n(z) = a_n z^n$. Soient $a_n = |a_n| e^{i\varphi}$, $z = r e^{i\theta}$. Alors

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)} d\theta.$$

Par changement de variable, on a

$$m(r, f) = \frac{1}{2n\pi} \int_{\varphi}^{2n\pi + \varphi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau.$$

Puisque $2n\pi$ est une période de la fonction $x \mapsto \cos x$, alors

$$\begin{aligned} m(r, f) &= \frac{1}{2n\pi} \int_0^{2n\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(\tau)} d\tau \\ &= \frac{|a_n| r^n}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\tau) d\tau = \frac{|a_n| r^n}{\pi}. \end{aligned}$$

Comme f est entière, donc

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{|a_n| r^n}{\pi}. \quad (2.19)$$

Généralement, pour $f(z) = e^{P_n(z)}$ et $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ on a

$$|f(z)| = e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)(1+o(1))} \quad \text{pour } r \rightarrow +\infty.$$

Par conséquent

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ e^{|a_n| r^n \cos(n\theta + \varphi)(1+o(1))} d\theta = \frac{|a_n| r^n}{\pi} (1 + o(1)), \quad r \rightarrow +\infty.$$

D'où

$$T(r, f) = m(r, f) \underset{(+\infty)}{\sim} \frac{|a_n| r^n}{\pi}. \quad (2.20)$$

Exemple 2.3. Soit f une fonction rationnelle

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0},$$

telle que les $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$, $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$ sont des nombres complexes avec $a_n b_m \neq 0$ et $m \geq n$. Comme le degré du polynôme $Q_m(z)$ est m , alors il existe donc un nombre réel positif $r_0 \geq 0$ telle que $n(r, \infty, f) = m$ pour tout $r \geq r_0$. On obtient

$$N(r, f) = \int_0^{r_0} \frac{n(t, \infty, f) - n(0, \infty, f)}{t} dt + \int_{r_0}^r \frac{m - n(0, \infty, f)}{t} dt + n(0, \infty, f) \log r.$$

Alors

$$N(r, f) = O(1) + (m - n(0, \infty, f))(\log r - \log r_0) + n(0, \infty, f) \log r.$$

Par conséquent

$$N(r, f) = m \log r + O(1). \quad (2.21)$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $r_1 > 0$ tel que pour tout $|z| = r > r_1$, on a

$$|P_n(z)| = |a_n| r^n (1 + o(1)) \quad \text{et} \quad |Q_m(z)| = |b_m| r^m (1 + o(1)).$$

D'où

$$m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left| \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} \right| d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ \left(\frac{|a_n|}{|b_m|} r^{n-m} (1 + o(1)) \right) d\theta = O(1). \quad (2.22)$$

En combinant entre (2.21) et (2.22), on obtient

$$T(r, f) = m \log r + O(1) = O(\log r). \quad (2.23)$$

2.3 Premier théorème fondamental de Nevanlinna

Théorème 2.3 (premier théorème fondamental de Nevanlinna). Soit f une fonction méromorphe non constante sur $|z| \leq R \leq \infty$ et soit

$$f(z) - a = \sum_{k=m}^{+\infty} C_k z^k, \quad C_m \neq 0, \quad m \in \mathbb{Z},$$

la série de Laurent de $f - a$. Alors, pour tout nombre complexe a , on a pour tout $0 < r < R$

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) - \log |C_m| + \varphi(r, a), \quad (2.24)$$

tel que $|\varphi(r, a)| \leq \log 2 + \log^+ |a|$.

Démonstration. On démontre tout d'abord le cas de $a = 0$. En combinant les équations (2.11) et (2.15), on a

$$\log |C_m| = m(r, f) - m(r, \frac{1}{f}) + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f}). \quad (2.25)$$

Par (2.25) et la Définition 2.4, on obtient

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) - \log |C_m|,$$

c'est une affirmation avec $\varphi(r, 0) \equiv 0$.

On traite maintenant le cas général $a \neq 0$. Soit $h(z) = f(z) - a$. Alors,

$$N(r, \frac{1}{h}) = N(r, \frac{1}{f-a}), \quad N(r, h) = N(r, f), \quad m(r, \frac{1}{h}) = m(r, \frac{1}{f-a}).$$

Comme

$$\log^+ |h| = \log^+ |f-a| \leq \log^+ |f| + \log^+ |a| + \log 2,$$

et

$$\log^+ |f| = \log^+ |f-a+a| \leq \log^+ |h| + \log^+ |a| + \log 2.$$

L'intégration sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ donne

$$m(r, h) \leq m(r, f) + \log^+ |a| + \log 2,$$

et

$$m(r, f) \leq m(r, h) + \log^+ |a| + \log 2.$$

Posons $\varphi(r, a) = m(r, h) - m(r, f)$. Alors

$$|\varphi(r, a)| \leq \log^+ |a| + \log 2.$$

Maintenant, appliquons la formule (2.25) à la fonction h , nous obtenons

$$\log |C_m| = m(r, h) - m(r, \frac{1}{h}) + N(r, h) - N(r, \frac{1}{h}).$$

D'où

$$m(r, \frac{1}{h}) + N(r, \frac{1}{h}) = m(r, h) + N(r, h) - \log |C_m|.$$

Donc

$$\begin{aligned} T(r, \frac{1}{h}) &= T(r, h) - \log |C_m| \\ &= m(r, f) + \varphi(r, a) + N(r, f) - \log |C_m|. \\ &= T(r, f) - \log |C_m| + \varphi(r, a). \end{aligned}$$

□

Remarque 2.2. *Le premier théorème de Nevanlinna peut être exprimé sous la forme*

$$T(r, \frac{1}{f-a}) = T(r, f) + O(1), \quad (2.26)$$

pour tout $a \in \mathbb{C}$. On note que le terme d'erreur $O(1)$ dépend de a .

Théorème 2.4. *[1, 6] Soit f une fonction méromorphe non constante. Alors*

f est rationnelle si et seulement si $T(r, f) \underset{(+\infty)}{=} O(\log r)$

et

f est transcendante si et seulement si $\log r \underset{(+\infty)}{=} o(T(r, f))$.

Proposition 2.3. *Soient $n \in \mathbb{N}$ et $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, tel que $ad - cd \neq 0$. Soient $f, f_1, \dots, f_n$ des fonctions méromorphes. Alors*

- i. $T(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k), \quad n \geq 1,$
- ii. $T(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k) + \log n, \quad n \geq 1,$
- iii. $T(r, f^n) = nT(r, f),$
- iv. $T(r, \frac{af+b}{cf+d}) = T(r, f) + O(1).$

Démonstration. (i), (ii) En utilisant les propriétés (v) et (vi) de la Proposition 2.1, on peut facilement déduire que si $f_k (k = 1, 2, \dots, n)$ sont des fonctions méromorphes, alors

$$m(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n m(r, f_k), \quad (2.27)$$

et

$$m(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n m(r, f_k) + \log n. \quad (2.28)$$

En outre, puisque l'ordre de multiplicité du pôle en z_0 de $\sum_{k=1}^n f_k$ ne dépasse pas la somme des ordres des pôles en z_0 des $f_k (k = 1, 2, \dots, n)$, alors

$$N(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n N(r, f_k). \quad (2.29)$$

De même, on a

$$N(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n N(r, f_k). \quad (2.30)$$

En combinant (2.29) (resp. (2.30) avec (2.28) (resp. (2.27), on trouve

$$T(r, \sum_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k) + \log n,$$

et

$$T(r, \prod_{k=1}^n f_k) \leq \sum_{k=1}^n T(r, f_k).$$

(iii) Il suffit d'observer que $|f^n| = |f|^n \leq 1$ si $|f| \leq 1$. Aussi, $N(r, f^n) = nN(r, f)$.

(iv) Posons $g(z) = \frac{af(z) + b}{cf(z) + d}$. Si $c = 0$, alors par (i) et (ii) il vient

$$\begin{aligned} T(r, g = \frac{a}{d}f + \frac{b}{d}) &\leq T(r, \frac{a}{d}) + T(r, f) + T(r, \frac{b}{d}) + \log 2 = \\ &\log^+ \frac{a}{d} + T(r, f) + \log^+ \frac{b}{d} + \log 2 = T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

Si $c \neq 0$, alors $g(z) = \frac{a(f(z) + \frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(f(z) + \frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + (b - \frac{ad}{c}) \frac{1}{cf(z) + d}$. Donc

$$\begin{aligned} T(r, g) &\leq T(r, \frac{a}{c}) + T(r, b - \frac{ad}{c}) + T(r, \frac{1}{cf + d}) + \log 2 = \\ &T(r, cf + d) + O(1) \leq T(r, f) + O(1). \end{aligned}$$

On déduit que

$$T(r, g) \leq T(r, f) + O(1). \quad (2.31)$$

Comme $f(z) = \frac{-dg(z) + b}{cg(z) - a}$, on peut montrer de la même manière que

$$T(r, f) \leq T(r, g) + O(1). \quad (2.32)$$

Finalement, on conclut de (2.31) et (2.32) que $T(r, g) = T(r, f) + O(1)$.

□

Théorème 2.5 (identité de Cartan). *Soit f une fonction méromorphe sur $|z| \leq R \leq +\infty$. Alors, pour tout $0 < r < R$, on a*

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \log^+ |f(0)|. \quad (2.33)$$

Démonstration. En appliquant la formule de Jensen (2.8) avec $R = 1$ à la fonction $g(z) = a - z$ et notons le fait que

si $|a| \geq 1$, alors $\sum_{j=1}^m \log \frac{1}{|a_j|} = 0$ et si $|a| < 1$, alors $\sum_{j=1}^m \log \frac{1}{|a_j|} = \frac{1}{a}$, nous trouvons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\varphi}| d\varphi = \begin{cases} \log |a|, & \text{si } |a| \geq 1, \\ 0, & \text{si } |a| < 1. \end{cases}$$

Donc, pour tout $a \in \mathbb{C}$ on a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |a - e^{i\varphi}| d\varphi = \log^+ |a|. \quad (2.34)$$

Soit $0 < r < R$. En appliquant la formule de Jensen à la fonction $f(z) - e^{i\theta}$, il vient par (2.14) que

$$\log |f(0) - e^{i\theta}| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\varphi}) - e^{i\theta}| d\varphi + N(r, f) - N(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}).$$

L'intégration par rapport à θ sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ donne

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\theta}| d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\varphi}) - e^{i\theta}| d\theta \right] d\varphi \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\varphi + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N(r, f) d\theta. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En utilisant (2.34) avec $a = f(r e^{i\varphi})$, nous constatons que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r e^{i\varphi}) - e^{i\varphi}| d\theta = \log^+ |f(r e^{i\varphi})|. \quad (2.36)$$

En utilisant (2.34) avec $a = f(0)$, nous obtenons

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(0) - e^{i\varphi}| d\theta = \log^+ |f(0)|. \quad (2.37)$$

La substitution de (2.36), (2.37) dans (2.35), donne

$$\log^+ |f(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r e^{i\varphi})| d\varphi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + N(r, f), \quad (2.38)$$

d'où

$$\log^+ |f(0)| = m(r, f) + N(r, f) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta,$$

donc

$$T(r, f) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right) d\theta + \log^+ |f(0)|.$$

□

Remarque 2.3. *i. L'identité de Cartan est une autre représentation de $T(r, f)$. Comme $N\left(r, \frac{1}{f - e^{i\theta}}\right)$ est une fonction croissante de r , alors à l'aide de cette identité, on peut dire que la fonction $T(r, f)$ est une fonction croissante de r .*

ii. Généralement $m(r, f)$ n'est pas monotone. Par exemple, pour la fonction f telle que

$$f(z) = \frac{z}{1 - z^2}.$$

On a $|f(z)| < 1$ pour $|z| < \frac{1}{2}$ ou $|z| > 2$. Cela implique que $m(r, f) = 0$ pour $r \leq \frac{1}{2}$ ou $r \geq 2$.

2.4 Relation entre $T(r, f)$ et $M(r, f)$

Proposition 2.4. *Soit f une fonction entière non constante. Alors, pour tout $0 < r < R < +\infty$ on a*

$$T(r, f) \leq \log^+ M(r, f) \leq \frac{R+r}{R-r} T(R, f)$$

Démonstration. Pour l'inégalité à gauche, comme f est une fonction entière, alors :

$$T(r, f) = m(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ M(r, f) d\theta = \log^+ M(r, f)$$

Pour l'inégalité à droite, il est clair qu'elle est satisfaite si $M(r, f) \leq 1$. Discutons maintenant le cas où $M(r, f) > 1$. On pose $z_0 = re^{i\theta} \in C(0, r)$ tel que $|f(z_0)| = M(r, f)$. Comme f n'admet pas des pôles dans le disque $|z| < R$, il vient de (2.5) et le principe de maximum que

$$\left| \frac{R(z - a_j)}{R^2 - \bar{a}_j z} \right| < 1 \quad \text{quand} \quad |z| < R.$$

Par la formule de Poisson-Jensen (2.1), on obtient

$$\begin{aligned} \log^+ M(r, f) = \log |f(z_0)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(Re^{i\varphi})| \frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2Rr \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ |f(Re^{i\varphi})| \underbrace{\frac{R^2 - r^2}{(R - r)^2 + 2Rr(1 - \cos(\theta - \varphi))}}_{\geq 0} d\varphi \\ &\leq \frac{R+r}{R-r} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log^+ f(Re^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{R+r}{R-r} T(R, f). \end{aligned}$$

□

2.5 Ordre et hyper-ordre de croissance des fonctions

Définition 2.5. *Soit f une fonction entière. L'ordre de croissance de la fonction f est définie par*

$$\tilde{\rho}(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 2.4. *De l'Exemple 1.8, il vient que*

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}(e^z) &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, e^z)}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log e^r}{\log r} = 1. \\ \tilde{\rho}(\exp(e^z)) &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, \exp(e^z))}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \exp(e^r)}{\log r} = +\infty. \\ \tilde{\rho}(P_n(z)) &= \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log M(r, P_n)}{\log r} = 0. \end{aligned}$$

Définition 2.6. On définit l'ordre de croissance d'une fonction méromorphe f par

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 2.5. Soit f une fonction rationnelle non constante

$$f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)} = \frac{a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0}{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + \dots + b_0},$$

telle que les $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$, $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$ sont des nombres complexes où $a_n b_m \neq 0$ et n, m sont des entiers positifs. De (2.23), on a $T(r, f) = O(\log r)$. D'où

$$\rho(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log O(\log r)}{\log r} = 0.$$

Exemple 2.6. soit $f(z) = e^{z^2}$. De (2.19), on a $T(r, f) = \frac{r^2}{\pi}$. D'où

$$\rho(e^{z^2}) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{r^2}{\pi}}{\log r} = 2.$$

Exemple 2.7. Soit $P_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ un polynôme non constant de degré n (n entier positif), tel que $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$ sont des nombres complexes avec $a_n \neq 0$, et soit $f(z) = e^{P_n(z)}$. De (2.20), on a

$$T(r, f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{|a_n| r^n}{\pi}.$$

D'où

$$\rho(e^{P_n(z)}) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \frac{|a_n| r^n}{\pi}}{\log r} = n = \deg(P_n(z)).$$

On peut constater que

$$\rho(e^{z^3}) = 3 \quad \text{et} \quad \rho(e^{z^5 + 3z^2 - 2}) = 5.$$

Exemple 2.8. Soit $f(z) = \exp(e^z)$. On a

$$T(r, f) \underset{+\infty}{\sim} \frac{e^r}{(2\pi^3 r)^{\frac{1}{3}}} \tag{2.39}$$

(voir [6]). Alors

$$\rho(\exp(e^z)) = +\infty.$$

Définition 2.7. L'hyper-ordre d'une fonction méromorphe f est définie par

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, f)}{\log r}.$$

Si f est une fonction entière alors l'hyper-ordre est définie par

$$\tilde{\rho}_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r}.$$

Exemple 2.9. Soit $f(z) = \exp(e^z)$. Il vient de l'Exemple 1.8 que

$$\tilde{\rho}_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log \exp(e^r)}{\log r} = 1.$$

En utilisant la fonction caractéristique $T(r, f)$, on déduit de (2.39) que

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log T(r, \exp(e^z))}{\log r} = 1.$$

2.5.1 Propriétés de l'ordre

Proposition 2.5. Soit f une fonction entière. On a

$$\tilde{\rho}(f) = \rho(f) = \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}_2(f) = \rho_2(f).$$

Démonstration. Par la Proposition 2.4, pour $R = 2r$ suffisamment large on a

$$\log T(r, f) \leq \log \log M(r, f) \leq \log 3 + \log T(2r, f).$$

On obtient

$$\frac{\log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log \log M(r, f)}{\log r} \quad \text{et} \quad \frac{\log \log M(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log 3}{\log r} + \frac{\log T(2r, f)}{\log(2r)} \frac{\log(2r)}{\log r}$$

Par passage à la limite supérieure, on obtient

$$\rho(f) \leq \tilde{\rho}(f) \quad \text{et} \quad \tilde{\rho}(f) \leq \rho(f).$$

D'où l'égalité $\rho(f) = \tilde{\rho}(f)$. La démonstration de la relation $\tilde{\rho}_2(f) = \rho_2(f)$ est similaire. $\square$

Proposition 2.6. Toute fonction méromorphe f d'ordre fini est d'hyper-ordre nul, $\rho_2(f) = 0$.

Démonstration. Par la définition de l'ordre de f , on a : $\forall \varepsilon > 0, \exists r_0 > 0, \forall r > r_0,$

$$0 \leq \log T(r, f) \leq (\rho(f) + \varepsilon) \log r \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\log \log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log(\rho(f) + \varepsilon)}{\log r} + \frac{\log \log r}{\log r}.$$

Il est clair par passage à la limite que $\rho_2(f) = 0$. $\square$

Proposition 2.7. Soient f et g deux fonctions méromorphes. Alors, on a

- i. $\rho(\frac{1}{f}) = \rho(f),$
- ii. $\rho(f + g) \leq \max \{\rho(f), \rho(g)\},$
- iii. $\rho(fg) \leq \max \{\rho(f), \rho(g)\},$
- iv. $\rho(\frac{f}{g}) \leq \max \{\rho(f), \rho(g)\},$
- v. si $\rho(f) \neq \rho(g)$, alors

$$\rho(f + g) = \rho(fg) = \rho(\frac{f}{g}) = \max \{\rho(f), \rho(g)\}.$$

Démonstration. i. Par le premier fondamental théorème de Nevanlinna, on a

$$T(r, \frac{1}{f}) = T(r, f) + O(1).$$

Donc

$$\rho(\frac{1}{f}) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, \frac{1}{f})}{\log r} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \rho(f).$$

ii. On sait que

$$T(r, f + g) \leq T(r, f) + T(r, g) + \log 2. \quad (2.40)$$

Par la définition de $\rho(f)$ et $\rho(g)$, on a pour tout r suffisamment large

$$\log T(r, f) \leq (\rho(f) + \varepsilon) \log r = \log r^{\rho(f) + \varepsilon} \Leftrightarrow T(r, f) \leq r^{\rho(f) + \varepsilon}$$

et $T(r, g) \leq r^{\rho(g) + \varepsilon}$. On remplace dans l'équation (2.40), on obtient

$$\begin{aligned} T(r, f + g) &\leq 2r^{\max\{\rho(f), \rho(g)\} + \varepsilon} + \log 2. \\ \log T(r, f + g) &\leq \log 2 + (\max\{\rho(f), \rho(g)\} + \varepsilon) \log r + \log 2. \\ \frac{\log T(r, f + g)}{\log r} &\leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} + \varepsilon + \frac{O(1)}{\log r}. \end{aligned}$$

En passant à la limite supérieure et comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on déduit que

$$\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

iii. De manière analogue, partant de l'inégalité

$$T(r, fg) \leq T(r, f) + T(r, g), \quad (2.41)$$

on peut aisément vérifier que

$$\rho(fg) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

iv. Par (2.41) et le premier théorème fondamental de Nevanlinna, on a

$$T(r, \frac{f}{g}) = T(r, f \frac{1}{g}) \leq T(r, f) + T(r, \frac{1}{g}) = T(r, f) + T(r, g) + O(1)$$

ce qui garantie que

$$\rho(\frac{f}{g}) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\}.$$

v. On peut suppose $\rho(f) < \rho(g)$. Alors,

$$\rho(g) = \rho(f + g - f) \leq \max\{\rho(f + g), \rho(f)\} = \rho(f + g).$$

Mais

$$\rho(f + g) \leq \max\{\rho(f), \rho(g)\} = \rho(g),$$

Donc

$$\rho(f + g) = \rho(g) = \max \{ \rho(f), \rho(g) \}.$$

De façon analogue,

$$\rho(g) = \rho\left(g f \frac{1}{f}\right) \leq \max \left\{ \rho(fg), \rho\left(\frac{1}{f}\right) \right\} = \max \{ \rho(fg), \rho(f) \} = \rho(fg).$$

Mais

$$\rho(fg) \leq \max \{ \rho(f), \rho(g) \} = \rho(g).$$

Donc

$$\rho(fg) = \rho(g) = \max \{ \rho(f), \rho(g) \}.$$

Encore une fois pour le quotient

$$\rho\left(\frac{f}{g}\right) = \rho\left(f \frac{1}{g}\right) \leq \max \left\{ \rho(f), \rho\left(\frac{1}{g}\right) \right\} = \rho(g).$$

Il reste à démontrer $\rho\left(\frac{f}{g}\right) \geq \rho(g)$. En effet, supposons que $\rho\left(\frac{f}{g}\right) < \rho(g)$. Alors,

$$\rho(g) = \rho\left(f \frac{1}{\frac{f}{g}}\right) \leq \max \left\{ \rho(f), \rho\left(\frac{f}{g}\right) \right\} = \rho(f).$$

qui est une contradiction. Donc $\rho\left(\frac{f}{g}\right) \geq \rho(g)$ et par conséquent

$$\rho\left(\frac{f}{g}\right) = \rho(g) = \max \{ \rho(f), \rho(g) \}.$$

□

Exemple 2.10.

$$\rho(z^{2024}e^{z^3} + e^z) = \max \{ \rho(z^{2024}), \rho(e^z), e^{z^3} \} = \max \{ 0, 1, 3 \} = 3.$$

2.6 La mesure linéaire et la mesure logarithmique.

Définition 2.8. *i. On définit la mesure linéaire d'un ensemble $E_0 \subset [0, +\infty[$ par*

$$mes(E_0) = \int_0^{+\infty} \chi_{E_0}(t) dt,$$

où $\chi_{E_0}(t)$ est la fonction indicatrice de l'ensemble E_0 .

ii. On définit la mesure logarithmique d'un ensemble $E \subset]1, +\infty[$ par

$$mes_l(E) = \int_1^{+\infty} \frac{\chi_E(t)}{t} dt.$$

Exemple 2.11. *i. La mesure linéaire de l'ensemble $E_0 = [0, 1] \cup [2, 5] \subset [0, +\infty)$ est*

$$\text{mes}(E_0) = \int_0^{+\infty} \chi_{E_0}(t) dt = \int_0^1 dt + \int_2^5 dt = 4.$$

ii. La mesure logarithmique de l'ensemble $E = [e, e^2] \subset]1, +\infty[$ est

$$\text{mes}_l(E) = \int_1^{+\infty} \chi_E(t) \frac{dt}{t} = \int_e^{e^2} \frac{dt}{t} = 1.$$

2.7 Terme maximum et indice central

Définition 2.9. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ une fonction entière, le terme maximal de f est défini par

$$\mu(r) = \max \{|a_n| r^n, n = 0, 1, 2, \dots\},$$

et l'indice central de f est défini par

$$\nu_f(r) = \max \{m, \mu(r) = |a_m| r^m\}.$$

Exemple 2.12. Soit $f(z) = e^z = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} z^n$. On a

$$\mu(r) = \max_{n \geq 0} |a_n| r^n = \max_{n \geq 0} \frac{1}{n!} r^n.$$

Considérons la suite $(u_n)_n$ telle que $u_n = \frac{1}{n!} r^n$ et étudions sa monotonie. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{r}{n+1},$$

alors

$$\begin{cases} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 & \text{si } n < r - 1 \\ \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1 & \text{si } n > r - 1 \end{cases}.$$

D'où

$$u_0 < u_1 < \dots < u_{[r]-2} < u_{[r]-1} \leq u_{[r]} > u_{[r]+1} > u_{[r]+2} > \dots$$

où $[r]$ désigne la partie entière de r . Donc, pour $r > 0$ on a

$$\mu(r) = u_{[r]} = \frac{1}{[r]!} r^{[r]} \quad \text{et} \quad \nu_f(r) = [r].$$

Étude de la croissance des solutions des équations différentielles linéaires

Considérons l'équation différentielle suivante

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + A_1(z)f'(z) + A_0(z)f(z) = 0. \quad (3.1)$$

où $k \geq 2$, $A_0(z) \not\equiv 0$.

Il est bien connu que si les coefficients $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ sont des fonctions entières, alors toutes les solutions de (3.1) sont entières. De plus, les coefficients $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ sont des polynômes si et seulement si toutes les solutions de (3.1) sont entières d'ordre fini (voir [8]). Cela signifie que si certains des coefficients $A_j(z)$ ($j = 0, \dots, k-1$) sont transcendants, l'équation (3.1) a au moins une solution d'ordre infini.

Plus tard, Z. X. Chen et S. A. Gao [2] ont prouvé le résultat suivant lorsque l'ordre du coefficient $A_0(z)$ domine strictement l'ordre des autres coefficients $A_j(z)$, $j = 1, \dots, k-1$.

Théorème 3.1. [2] Soient $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières telles que

$$\max \{ \rho(A_j), j = 1, \dots, k-1 \} < \rho(A_0) < \infty$$

Alors, toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (3.1) satisfait $\rho(f) = \infty$.

En [3], Z. X. Chen et C. C. Yang ont donné l'estimation précise de l'hyper-ordre de la solution f sous la même hypothèse du théorème 3.1.

Théorème 3.2. [3] Soient $A_0(z), A_1(z), \dots, A_{k-1}(z)$ des fonctions entières vérifiant $\rho(A_j) < \rho(A_0) < \infty$ ($j = 1, \dots, k-1$). Alors, toute solution $f(z) \not\equiv 0$ de (3.1) satisfait $\rho_2(f) = \rho(A_0)$.

Exemple 3.1. Considérons l'équation différentielle linéaire suivante du second ordre

$$f''(z) - f'(z) - e^{2z}f(z) = 0.$$

Les coefficients $A_1(z) = 1$ et $A_0(z) = -e^{2z}$ sont entières et vérifiant $\rho(A_1) = 0 < \rho(A_0) = 1$. On voit facilement que la fonction $f(z) = \exp\{e^z\} = \exp_2(z)$ résout l'équation ci-dessus telle que $\rho(f) = +\infty$ et $\rho_2(f) = 1$. Il est clair que les hypothèses et les résultats des théorèmes 3.1 et 3.2 sont bien remplies.

Notre objectif principal est de détailler les preuves de ces deux théorèmes. Pour ce faire, nous avons besoin des lemmes suivants.

3.1 Lemmes

Lemme 3.1 (lemme de la dérivée logarithmique). [8] Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $f(z)$ une fonction méromorphe non constante. Si $\rho(f) < +\infty$, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r) \quad \text{as } r \longrightarrow +\infty.$$

Si $\rho(f) = +\infty$, alors

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r + \log T(r, f)) \quad \text{quand } r \longrightarrow +\infty, r \notin E_0$$

où $E_0 \subset [0, +\infty[$ est un ensemble de mesure linéaire finie.

Lemme 3.2 ([4]). Soit $f(z)$ une fonction méromorphe transcendante, et soit $\alpha > 1$ une constante donnée. Alors, il existe un ensemble $E_1 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique finie et une constante $B_\alpha > 0$ qui ne dépend que de α et des entiers positifs m, n avec $0 < m < n$, telle que pour tout z satisfait $|z| = r \notin [0, 1] \cup E_1$, on a

$$\left| \frac{f^{(n)}(z)}{f^{(m)}(z)} \right| \leq B_\alpha \left[\frac{T(\alpha r, f)}{r} (\log^\alpha r) \log T(\alpha r, f) \right]^{n-m}.$$

Lemme 3.3 ([5]). Soient $g(r)$ et $h(r)$ deux fonctions croissantes sur $[0, +\infty[$ tel que $g(r) \leq h(r)$ pour tous $r \notin [0, 1] \cup E_1$, où $E_1 \in]1, +\infty[$ est un ensemble de mesure logarithmique finie. Alors, pour toute constante $\alpha > 1$, il existe $r_0 = r_0(\alpha) > 0$ tel que $g(r) \leq h(\alpha r)$ pour tout $r \geq r_0$.

Lemme 3.4 (Théorème de Wiman-Valiron). [7, 8] Soit $f(z)$ une fonction entière transcendante, et soit z un point tel que $|z| = r$ auquel $|f(z)| = M(r, f)$. Alors pour tout $|z|$ à l'extérieur d'un ensemble $E_1 \cup [0, 1]$ de r de mesure logarithmique finie, nous avons

$$\frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} = \left(\frac{\nu_f(r)}{z} \right)^k (1 + o(1)), \quad (k \in \mathbb{N}^*).$$

où $\nu_f(r)$ est l'indice central de f .

Lemme 3.5. [10] Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une fonction entière. Soient $\mu(r)$ et $\nu_f(r)$ respectivement le maximum terme et l'indice central de f . Alors,

(i) pour $|a_0| \neq 0$,

$$\log \mu(r) = \log |a_0| + \int_0^r \frac{\nu_f(t)}{t} dt, \quad (3.2)$$

(ii) pour $r < R$,

$$M(r, f) < \mu(r) \left\{ \nu_f(R) + \frac{R}{R-r} \right\}. \quad (3.3)$$

Lemme 3.6. Soit $f(z)$ une fonction entière avec hyper-ordre $\rho_2(f)$, et soit $\nu_f(r)$ son indice central. Alors

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r} = \rho_2(f).$$

Démonstration. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Supposons que $|a_0| \neq 0$. De (3.2), on a

$$\log \mu(2r) \geq \log |a_0| + \int_r^{2r} \frac{\nu_f(t)}{t} dt \geq \log |a_0| + \nu_f(r) \log 2. \quad (3.4)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy (1.1), il est facile de voir que $\mu(2r) \leq M(2r, f)$. Ainsi

$$\nu_f(r) \leq \frac{\log M(2r, f)}{\log 2} - \frac{\log |a_0|}{\log 2} \leq C_1 \log M(2r, f), \quad C_1 > 1.$$

Donc

$$\log \log \nu_f(r) \leq \log \log \log M(2r, f) + C_2, \quad C_2 > 0.$$

ce qui mène à

$$\frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r} \leq \frac{\log \log \log M(2r, f)}{\log(2r)} \frac{\log(2r)}{\log r} + \frac{C_2}{\log r}. \quad (3.5)$$

Il vient de la définition de l'hyper-ordre de f et (3.5) que

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log \log \log M(2r, f)}{\log(2r)} = \rho_2(f). \quad (3.6)$$

D'autre part, de (3.3), on a pour $R = 2r$

$$M(r, f) < \mu(r) \{ \nu_f(2r) + 2 \} = |a_{\nu_f(r)}| r^{\nu_f(r)} \{ \nu_f(2r) + 2 \},$$

Puisque la suite $(|a_n|)_n$ est bornée, on obtient

$$\log M(r, f) \leq \nu_f(r) \log r + \log \nu_f(2r) + O(1).$$

Alors

$$\begin{aligned} \log \log M(r, f) &\leq \log \nu_f(r) + \log \log \nu_f(2r) + \log \log r + O(1) \\ &\leq \log \nu_f(2r) \left(1 + \frac{\log \log \nu_f(2r)}{\log \nu_f(2r)} \right) + \log \log r + O(1). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\log \log \log M(r, f) \leq \log \log \nu_f(2r) + \log \left(1 + \frac{\log \log \nu_f(2r)}{\log \nu_f(2r)} \right) + \log \log \log r + O(1).$$

Ainsi

$$\rho_2(f) = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \log M(r, f)}{\log r} \leq \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_f(2r)}{\log(2r)} = \limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r}. \quad (3.7)$$

De (3.6) et (3.7), on obtient le résultat souhaité. $\square$

Lemme 3.7. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe d'ordre fini $\rho(f) < \infty$. Alors il existe un ensemble $E_2 \subset]1, \infty[$ ayant une mesure logarithmique infinie telle que pour tout $r \in E_2$, on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \rho(f).$$

Démonstration. D'après la définition de l'ordre de f $\rho(f)$, il existe une suite $(r_n)_{n \geq 1}$ tend à $+\infty$, satisfait

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) r_n < r_{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \rho(f).$$

Il existe $n_1 \in \mathbb{N}^*$, tel que pour tout $n \geq n_1$, et pour tout $r \in [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$, on a

$$\frac{\log T(r_n, f)}{\log \left((1 + \frac{1}{n})r_n\right)} \leq \frac{\log T(r, f)}{\log r} \leq \frac{\log T((1 + \frac{1}{n})r_n, f)}{\log r_n}.$$

Construisons l'ensemble $E_2 = \bigcup_{n=n_1}^{\infty} [r_n, (1 + \frac{1}{n})r_n]$. Alors pour tout $r \in E_2$, on a

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\log T(r_n, f)}{\log r_n} = \rho(f),$$

où

$$\text{mes}_l(E_2) = \sum_{n=n_1}^{\infty} \int_{r_n}^{(1+\frac{1}{n})r_n} \frac{dt}{t} = \sum_{n=n_1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) = +\infty.$$

□

3.2 Preuve du théorème 3.1

Il vient de l'équation différentielle (3.1) que

$$-A_0(z) = \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} + A_{k-1}(z) \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} + \cdots + A_1(z) \frac{f'(z)}{f(z)}. \quad (3.8)$$

D'où

$$T(r, A_0) = m(r, A_0) \leq \sum_{j=1}^{k-1} m(r, A_j) + \sum_{j=1}^k m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) + O(1). \quad (3.9)$$

Supposons que l'équation (3.1) possède au moins une solution $f(z)$ d'ordre fini, $\rho(f) < +\infty$. Alors, d'après la Lemme 3.1 on a :

$$m\left(r, \frac{f^{(j)}}{f}\right) = O(\log r). \quad (3.10)$$

Par la définition de l'ordre et la condition

$$\max \{\rho(A_j), j = 1, \dots, k-1\} = \rho < \rho(A_0) = \rho_0.$$

on obtient, pour tout $0 < 2\varepsilon < \rho_0 - \rho$, et pour r suffisamment grand

$$T(r, A_j) = m(r, A_j) \leq r^{\rho+\varepsilon}, \quad (j = 1, \dots, k-1). \quad (3.11)$$

De (3.9), (3.10) et (3.11), il vient

$$T(r, A_0) \leq (k-1)r^{\rho+\varepsilon} + O(\log r)$$

D'où

$$\log T(r, A_0) \leq (\rho + \varepsilon) \log r + O(\log \log r)$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire ($0 < 2\varepsilon < \rho_0 - \rho$), alors $\rho_0 = \rho(A_0) \leq \rho$, ce qui est une contradiction. On déduit que toute solution $f(z)$ de l'équation (3.1) est d'ordre infinie $\rho(f) = +\infty$.

3.3 Preuve du théorème 3.2

De l'équation différentielle (3.1), on a

$$\left| \frac{f^{(k)}(z)}{f(z)} \right| \leq |A_{k-1}(z)| \left| \frac{f^{(k-1)}(z)}{f(z)} \right| + \dots + |A_1(z)| \left| \frac{f'(z)}{f(z)} \right| + |A_0(z)| \quad (3.12)$$

Notons $\rho_j = \tilde{\rho}(A_j) = \rho(A_j)$, ($j = 0, 1, \dots, k-1$). Il vient de la définition de l'hyper-ordre ρ_j et sous la condition $\rho(A_j) < \rho(A_0) = \rho_0 < \infty$ ($j = 1, \dots, k-1$) que, pour tout $\varepsilon > 0$, et pour tout r suffisamment large, on a

$$|A_j(z)| \leq M(r, A_j) \leq \exp(r^{\rho_j+\varepsilon}) \leq \exp(r^{\rho_0+\varepsilon}), \quad j = 0, 1, \dots, k-1. \quad (3.13)$$

Par le lemme 3.4, il existe un ensemble $E_1 \subset]1, +\infty[$ de mesure logarithmique fini $mes_l(E_1) < +\infty$ tel que pour tout z vérifiant $|z| = r \notin E_1 \cup [0, 1]$ et $|f(z)| = M(r, f)$ on a

$$\left| \frac{f^{(j)}(z)}{f(z)} \right| = \left(\frac{\nu_f(r)}{r} \right)^j |1 + o(1)|, \quad (j = 1, \dots, k). \quad (3.14)$$

De (3.12), (3.13) et (3.14), on obtient

$$\left(\frac{\nu_f(r)}{r} \right)^k |1 + o(1)| \leq \exp(r^{\rho_0+\varepsilon}) \left(\left(\frac{\nu_f(r)}{r} \right)^{k-1} |1 + o(1)| + \dots + \frac{\nu_f(r)}{r} |1 + o(1)| + 1 \right)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \nu_f^k(r) |1 + o(1)| &\leq \exp(r^{\rho_0+\varepsilon}) \left(r \nu_f^{k-1}(r) |1 + o(1)| + \dots + r^{k-1} \nu_f(r) |1 + o(1)| + r^k \right) \\ &\leq k r^k \exp(r^{\rho_0+\varepsilon}) \nu_f^{k-1}(r) |1 + o(1)|. \end{aligned}$$

Alors, pour tout $|z| = r \notin E_1 \cup [0, 1]$ et $|f(z)| = M(r, f)$, on a

$$\begin{aligned} \nu_f(r) |1 + o(1)| &\leq k r^k \exp(r^{\rho_0+\varepsilon}) \\ \log \nu_f(r) &\leq 2 \log k + k \log r + r^{\rho_0+\varepsilon} \\ \log \log \nu_f(r) &\leq \log \log r + (\rho_0 + \varepsilon) \log r + O(1) \end{aligned}$$

Il vient de cette dernière inégalité et le Lemme 3.1 que

$$\limsup_{r \rightarrow +\infty} \frac{\log \log \nu_f(r)}{\log r} \leq \rho_0 + \varepsilon.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, alors on déduit du Lemme 3.6 que

$$\rho_2(f) \leq \rho_0 = \rho(A_0). \quad (3.15)$$

Maintenant, on démontre que $\rho_2(f) \geq \rho_0 = \rho(A_0)$. Par le Théorème 3.1, on a $\rho(f) = +\infty$ et par conséquent $\log r = o(T(r, f))$ quand $r \rightarrow +\infty$. Donc, le Lemme 3.1 garantit

$$m\left(r, \frac{f^{(k)}}{f}\right) = O(\log r + \log T(r, f)) = o(\log T(r, f)), \quad r \notin E_0, \quad r \rightarrow +\infty \quad (3.16)$$

où $E_0 \subset [0, +\infty[$ est un ensemble ayant une mesure linéaire finie. Il vient du Lemme 3.7 que

$$T(r, A_0) = m(r, A_0) \geq r^{\rho_0 - \varepsilon}, \quad r \in E_2 \quad (3.17)$$

où $E_2 \subset]1, +\infty[$ un ensemble ayant une mesure logarithmique infinie. En combinant les inégalités (3.11) et (3.17), on obtient pour tout $r \in E_2$ suffisamment large et pour tout $\varepsilon (0 < \varepsilon < \rho_0 - \rho)$

$$\max \left\{ \frac{m(r, A_j)}{m(r, A_0)}, (j = 1, \dots, k-1) \right\} \leq \frac{r^{\rho + \varepsilon}}{r^{\rho_0 - \varepsilon}} \xrightarrow{r \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.18)$$

On déduit de (3.9), (3.16) et (3.18) que

$$(1 - o(1))m(r, A_0) \leq o(\log T(r, f)), \quad r \in E_2 \setminus E_0, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (3.19)$$

On conclut par le Lemme 3.3 et (3.19) que

$$\rho(A_0) \geq \rho_2(f) \quad (3.20)$$

On conclut de (3.15) et (3.20) que $\rho(A_0) \geq \rho_2(f)$, ce qui fini la démonstration.

Conclusion

Dans ce mémoire, on a présenté une courte introduction à théorie de Nevanlinna et on a donné une application de cette théorie pour étudier la croissance des solutions des équations différentielles linéaires homogène de la forme

$$f^{(k)}(z) + A_{k-1}(z)f^{(k-1)}(z) + \cdots + A_1(z)f'(z) + A_0(z)f(z) = 0$$

où les coefficients $A_0(z), \dots, A_{k-1}(z)$ sont des fonctions entières et l'ordre du coefficient $A_0(z)$ domine strictement l'ordre des autres coefficients.

Cependant, de nombreuses questions subsistent et continuent de stimuler la curiosité des chercheurs à savoir

Question 1 : Comment étudier la croissance de la solution des équations différentielles linéaires si l'ordre du coefficient $A_0(z)$ n'est pas le seul dominant ?

Question 2 : Peut-on obtenir des résultats similaires si on remplace les coefficients de l'équation différentielles par des fonctions méromorphes ?

Question 3 : Que peut-on dire sur la croissance de la solution des équations différentielles non homogènes ?

Bibliographie

- [1] Belaïdi B., *Fonctions Entières et Théorie de Nevanlinna*, Editions Al-Djazair, 2017.
- [2] Chen Z. X., Gao S. A., The complex oscillation theory of certain non-homogeneous linear differential equations with transcendental entire coefficients, *J; Math. Anal. Appl.*, 1993. Vol. 179, P. 403–416.
- [3] Chen Z. X., Yang C. C., Quantitative estimations on the zeros and growths of entire solutions of linear differential equations, *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020. Vol 42, 119–133.
- [4] Gundersen G., *Estimates for the logarithmic derivative of a meromorphic function, plus similar estimates*, J. London Math. Soc. (2) 37 (1988), no. 1, 88–104.
- [5] Gundersen G., *Finite order solutions of second order linear differential equations*, Trans. Amer. Math. Soc. 305 (1988), no. 1, 415–429.
- [6] Hayman W. K., *Meromorphic Functions*, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [7] Hayman W. K., The local growth of power series : a survey of the Wiman-Valiron method. *Can. Math. Bull.*, 1974. Vol. 17, P. 317–358.
- [8] Laine I., *Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations*. De Gruyter Studies in Mathematics, Vol. 15. Berlin : Walter de Gruyter & Co., 1993.
- [9] Rudin W., *Principles of mathematical analysis*, Third edition, Mc GawHill, 1976.
- [10] Jank G., Volkmann L. *Einführung in die Theorie der ganzen und Meromorphen Funktionen mit Anwendungen auf Differentialgleichungen*. Birkhäuser, Basel, 1985.