

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de L'Enseignement Supérieur de la Recherche Scientifique



Université AMO de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Laboratoire de Recherche limpaf de Bouira
Département du Mathématiques
Mémoire pour L'obtention du Diplôme de Master Mathématiques
Spécialité : Recherche Opérationnelle

THÈME

Sur quelques méthodes de résolution du problème de
contrôle optimal
sous forme d'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Présenté par :

❖ SAADI AMINA

❖ SALI ZOHERA

Devant le jury composé de :

Président	Mr DEMMOUCHE NACER	MCB	U. A/M/O Bouira
Examinateur	Mr AKKOUCHE ABDERRAHMANE	MCB	U. A/M/O Bouira
Examinatrice	Mme MESSAOUDENE KARIMA	MAA	U. A/M/O Bouira
Encadreur	Mme OUIDJA Daya	MAA	U. A/M/O Bouira

Année universitaire : 2023/2024

Résumé

Dans ce travail, nous présentons les résultats obtenus à travers notre étude visant à résoudre un problème de contrôle optimal en utilisant l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Nous commençons par exposer les conditions nécessaires d'optimalité, puis introduisons le principe de la programmation dynamique à travers l'équation HJB. Ensuite, nous discutons de quelques méthodes numériques et itératives, notamment l'ADM (Adomian Decomposition Method) et le VIM (Variational Iteration Method), qui approchent la solution exacte. Enfin, nous appliquons les méthodes ADM et VIM pour résoudre un problème de contrôle optimal spécifique.

Mots clés : Commande optimale, Equation HJB, ADM méthode, VIM méthode ...

Abstract

In this work, we present the results obtained through our study aiming to solve an optimal control problem using the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation. We begin by outlining the necessary optimality conditions, then introduce the principle of dynamic programming via the HJB equation. Next, we discuss several numerical and iterative methods, including the Adomian Decomposition Method (ADM) and the Variational Iteration Method (VIM), which approximate the exact solution. Finally, we apply the ADM and VIM methods to solve a specific optimal control problem.

Key words : Optimal control, HJB equation, method ADM, method VIM ...

Remerciements

En premier lieu, nous exprimons notre gratitude envers **Allah**, le Tout-Puissant, de nous avoir accordé la force de mener à bien ce travail ainsi que la capacité de surmonter toutes les difficultés.

Un grand merci à nos parents pour leur contribution, leur soutien et leur patience.

Nous tenons aussi à remercier notre encadreur Mme Ouidja Daya, pour ses conseils durant toute la période du travail.

Nous exprimons également notre gratitude envers les membres du jury, Monsieur Dem-mouche Nacer en tant que président ainsi que Monsieur Akkouche Abderahmane et Madame Messaoudene karima tant qu'examineurs, d'avoir accepté de juger notre travail.

Nous adressons un grand merci à toutes nos familles en particulier nos parents et nos frères qui ont toujours été présents lorsque nous en avons eu besoin, ainsi qu'à nos amies et à nos professeurs, depuis le primaire jusqu'à l'université.

Nous tenons à remercier toute personne ayant participé de près ou de loin à la réalisation de ce travail.

Dédicace

Mon parcours universitaire s'est terminé après beaucoup de fatigue et de souffrance, et aujourd'hui je termine mes recherches de fin d'année avec enthousiasme, énergie et vitalité.

Je dédie ce modeste travail :

À **moi-même**, je dédie ce travail en reconnaissance de mon engagement et de ma persévérance. Je suis fière de mon succès et de ma capacité à surmonter les difficultés.

À mes **très chers parents**, qui sont la lumière de ma vie et ma source d'amour et de courage, et qui n'ont cessé de m'encourager et de me soutenir, et qui a contribué à faire de moi la personne que je suis aujourd'hui et aussi pour tous leurs sacrifices, leur tendresse, leur soutien . . .

À mes adorables frères **Ali** et **Marzak**.

À mes adorables sœurs, **Hakima** et **Naima**.

À ma chère sœur, **Nassima**, qui m'a toujours soutenu et encouragé tout au long de ces années d'études, je dédie ce travail avec une profonde gratitude.

Un grand merci **aux enfants de ma sœur** pour leur soutien précieux. Je suis reconnaissante de les avoir dans ma vie.

À tous mes amis qui m'ont toujours encouragé.

À mon binôme, **Zohira**, qui a partagé avec moi les moments difficiles de ce travail, je dédie une reconnaissance spéciale.

Enfin, je dédie ce travail à toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide, que ce soit de près ou de loin.

Saadi Amina

Dédicace

Enfin, mon parcours universitaire a pris fin et mes études supérieures sont terminées.

Je dédie mon modeste travail et les gains de ma plume pendant des années à moi même la passionnante la rêveuse et la combatante.

À mon maître, mon chère, mon soutien qui à était une grande raison pour mes études supérieures et qui je lui ai réalisé le rêve d'hier après une longue nuit mon père que Dieu prolonge sa vie.

À la première dame de ma vie, celle qui m'a mis sur le chemin de la vie et qui son amour et ses prières toujours contenues pour moi, à mon amour ma chère, celle qui je préfère plus que moi à ma mère que Dieu la protège.

Je dédie mon travail à la personne qui m'a toujours encouragé à réaliser mon rêve. Ma puce Sabrina que je remercie infiniment. À mon amie et mon binôme sur le chemin pour accomplir ce travail.

À mes chères Hadjer et Fadila et Narimane.

SALI ZOHERA

Table des figures

1.1	Problème de contrôlabilité	18
1.2	Ensemble accessible	19
2.1	Trajectoire optimale (Principe de Bellman).	37
3.1	Solutions données par ADM, VIM et Exactes.	62
3.2	Erreur Absolue de l'ADM et du VIM par rapport à l'Exact	62

Liste des tableaux

1.1	Caractéristique des méthodes directes et indirectes.	28
3.1	Comparaison des erreurs absolue entre les deux méthodes.	62
3.2	Comparaison de la solution exacte avec la solution obtenue par méthode VIM. .	63
3.3	Comparaison de la solution exacte avec la solution obtenue par méthode VIM . .	63

Table des matières

Introduction	10
1 Généralités sur la commande optimale	12
1.1 Présentation de problème de contrôle optimal	12
1.2 Définition de commande	14
1.3 Différents types de contrôle optimal	15
1.3.1 Problème de Lagrange	16
1.3.2 Problème de Mayer	16
1.3.3 Problème de Bolza	16
1.4 L'existence des trajectoires de contrôle optimal	16
1.5 Contrôlabilité	17
1.5.1 Accessibilité	18
1.6 Contrôlabilité des systèmes linéaires	19
1.7 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	24
1.7.1 Définitions et préliminaires	24
1.8 Principe du maximum de Pontryagin	24
1.9 Méthode de détermination commande optimale	27
1.9.1 Méthode indirecte	27
1.9.2 Méthode directe	27
1.9.3 Condition de transversalité	28
2 Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman et quelques méthodes de sa résolution	32
2.1 Position de problème de commande optimale	33
2.2 Fonction valeur de Bellman	34
2.3 Principe d'optimalité de Bellman	36
2.4 Équation d'Hamiltonien-Jacobi-Bellman	38
2.4.1 Unicité de solution régulier	40
2.4.2 Synthèse d'un feedback optimal	40
2.5 Les méthodes d'approximation d'une résoudre de l'équation HJB	41
2.5.1 Principes de la méthode décomposition Adomian	41

2.5.2	Présentation de problème de la méthode décompositionnelle	42
2.5.3	La méthode Adomian pour l'équation HJB	43
2.5.4	Méthode d'itérations variationnelles(VIM)	47
3	Approches ADM et VIM pour la résolution d'un problème de contrôle optimal	52
3.1	Application numérique	52
3.2	Résolution analytique (programmation dynamique)	53
3.3	Résolution par la méthode de décomposition Adomian (ADM)	56
3.4	Résolution par la méthode d'itérations variationnelles (VIM)	59
3.5	Conclusion	64
	Conclusion	66
	Bibliographie	66

Notation

$\forall$: Pour tout.

$\exists$: Il existe.

$\mathbb{R}^m = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (m) fois.

$\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ (n) fois.

$\mathbb{R}$: Ensemble des nombres réels.

$\mathbb{R}^+$: Ensemble des nombres positifs ou nuls.

$\mathbb{N}$: Ensemble des nombres naturels.

H : Fonction Hamiltonienne.

g : Fonction de Lagrange.

h : Partie terminale.

$y(t) \in \mathbb{R}^n$: Vecteur d'état.

$u(t) \in \mathbb{R}^m$: Vecteur de commande.

$y^*(t)$: Trajectoire optimale.

$u^*(t)$: Commande optimale.

U : Domaine admissible.

y_0 : État initial.

y_{t_f} : État final.

$J(u)$: Critère de performance.

$/$: Tel que.

$| \quad |$: Valeur absolue.

$Acc(y_0, t_f)$: Ensemble accessible depuis y_0 , en temps t_f .

$\perp$: Perpendiculaire.

∇h : Gradient de la fonction h .

E_{t_f} : Application entrée sortie au temps t_f .

$\dot{y}(t) = \frac{dy}{dt}$: Dérivée de y par rapport à t .

$\max$: Maximum.

$\min$: Minimum.

$\lim$: Limite.

$\inf$: Inférieur.

V : Fonction de valeur.

C^1 : Classe 1.

i.e : C'est-à-dire.

Cte : Constante.

p.p : Presque partout.

$\| \quad \|$: La norme.

L^∞ : Ensemble des applications mesurables bornés de U dans $\mathbb{R}$.

det : déterminant.

$< \quad >$: Le produit scalaire.

Introduction Générale

La théorie du contrôle est un domaine interdisciplinaire qui fusionne les domaines de l'ingénierie et des mathématiques. Elle se concentre sur l'étude des caractéristiques des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques susceptibles d'être modifiés par un contrôle [18]. L'objectif consiste à identifier un contrôle permettant de faire passer le système d'un état initial à un état final. Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire d'optimiser une fonction de coût particulière, désignée sous le nom de critère, tout en respectant un ensemble de contraintes. On désigne cela comme un problème de commande optimale.

La théorie mathématique du contrôle optimal a émergé dans les années cinquante, avec l'introduction du principe du maximum de Pontryagin, une généralisation des équations d'Euler-Lagrange utilisées dans le calcul des variations. Les diverses méthodes présentées dans la littérature pour résoudre un problème de contrôle optimal peuvent être divisées en deux catégories [16].

La première approche, appelée approche directe, implique la conversion du problème de contrôle optimal en un problème d'optimisation statique en effectuant une discrétisation complète [17]. Cette approche peut ensuite être résolue à l'aide de méthodes d'optimisation déterministes ou stochastiques. [8].

La seconde approche, connue sous le nom d'approche indirecte, implique d'abord la dérivation des conditions d'optimalité en utilisant la programmation dynamique le principe du minimum de Pontryagin. Les conditions d'optimalité d'un problème de contrôle optimal sont obtenues par la programmation dynamique. La programmation dynamique, fondée sur le principe de Bellman [5], conduit à l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman. Cette équation, exprimée sous forme d'équation aux dérivées partielles, représente une condition suffisante d'optimalité.

Ce projet vise à présenter une méthode pour analyser une loi de commande optimale pour un système dynamique spécifique en utilisant la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et l'itération variationnelle (VIM). Cette approche permet de résoudre itérativement l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman afin d'obtenir une solution approximative.

Ce travail est divisé en trois chapitres :

Le premier chapitre, intitulé "Généralités sur la Contrôle Optimal", débute par une présentation du problème de contrôle optimal, incluant la formulation du problème ainsi que les conditions d'existence des trajectoires optimales selon notre perspective. Ensuite, nous examinons la notion de contrôlabilité des systèmes, qu'ils soient linéaires ou non linéaires. Nous concentrons notre étude sur les systèmes dynamiques linéaires, qu'ils soient autonomes ou non autonomes. L'analyse de la contrôlabilité des systèmes linéaires est basée sur les travaux de Kalman.

Nous examinons le Principe du Maximum de Pontryagin en commençant par une introduction du problème. En conclusion de ce chapitre, nous abordons les conditions de transversalité.

Le deuxième chapitre a pour but de présenter la programmation dynamique pour la résolution de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). La solution de l'équation HJB permet d'obtenir la fonction valeur du problème, qui représente la performance optimale en fonction de l'état du système. Nous proposons également deux méthodes pour construire la loi de contrôle optimale en résolvant l'équation HJB correspondante à l'aide de la méthode décomposition Adomian (ADM) et l'itération variationnelle (VIM).

Dans le troisième chapitre, nous exposons une application de la méthode de décomposition d'Adomian et de la méthode d'itération variationnelle pour résoudre des problèmes de contrôle optimal.

Une conclusion générale a été proposée, résumant tous les résultats significatifs obtenus.

Généralités sur la commande optimale

Introduction

Cette partie se concentre sur plusieurs aspects. Dans la première section, nous examinons la description d'un modèle général de problème de commande optimale. La deuxième section traite des différents types de commande optimale. La troisième section aborde la contrôlabilité des systèmes, qu'ils soient linéaires ou non linéaires. Enfin, dans la dernière section, nous explorons la notion d'existence des trajectoires optimales.

1.1 Présentation de problème de contrôle optimal

Les phases cruciales de la formulation d'un problème de contrôle optimal incluent la modélisation du système à contrôler, la définition du critère à optimiser ainsi que l'identification et la satisfaction des contraintes.

Notre discussion se limitera à l'étude des systèmes d'écrits par des équations différentielles ordinaires.

Ainsi, si

$$y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

sont les variables caractérisant l'état du système à l'instant t ,

et soit :

$$u_1(t), u_2(t) \dots, u_m(t) \quad m \in \mathbb{N}^*,$$

ce sont les variables de contrôle qui influent sur l'évolution du processus à l'instant t , alors le système à contrôler peut-être d'écrit par les n équations différentielles du premier ordre suivantes :

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = f_1(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \\ \dot{y}_2(t) = f_2(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t), \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) = f_n(y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t), u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t), t). \end{cases}$$

On définit alors :

$$y(t) = (y_1(t), y_2(t), \dots, y_n(t)) \in \mathbb{R}^n,$$

comme le vecteur d'état du système, et

$$u(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)) \in \mathbb{R}^m,$$

comme le vecteur de commande. Le système différentiel peut s'écrire alors :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), t \in [0, t_f], \quad (1.1)$$

où $f : \mathbb{R}^{n+m+1} \rightarrow \mathbb{R}^n$.

Critère à optimiser :

Pour évaluer quantitativement les performances du système, nous choisissons une mesure de performance. On peut définir une commande optimale qui optimise le critère de performance. Dans certains cas, l'énoncé du problème peut indiquer clairement quelle mesure de performance doit être sélectionnée, alors que pour d'autres problèmes, le choix est une question subjective.

- Par exemple, l'instruction "transférer le système du point A au point B aussi rapidement possible" indique clairement que le temps écoulé est la mesure de performance à minimiser.

D'autre part, l'affirmation "maintenir la position et la vitesse du système près du zéro avec une petite dépense d'énergie" ne pas suggérer une mesure de performance unique. Dans tel problème, le concepteur peut être amené à essayer plusieurs mesures de performance avant d'en choisir celle qu'il considère comme performance optimale.

Dans ce qui suit, on supposera que la performance d'un système est estimée à l'aide d'une mesure de performance sous la forme :

$$J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt. \quad (1.2)$$

Cette formule comporte deux parties

La première partie : $h(y(t_f), t_f)$ est représentée le coût terminal, correspondant à la fin de l'évolution du système au temps final t_f . En d'autres termes, elle exprime l'objectif à optimiser à cet instant final.

La deuxième partie :

$$\int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt,$$

signifie les objectifs à optimiser sur l'horizon de commande, elle dépend de l'état et de contrôle, et aussi du temps.

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt, \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), t \in [0, t_f], \\ y(0) = y_0 \in M_0 \subset \mathbb{R}^n, \\ y(t_f) = y_{t_f} \in M_1 \subset \mathbb{R}^n, \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \end{array} \right.$$

1.2 Définition de commande

Le problème de commande optimale vise à identifier la commande optimale qui favorise simultanément :

- De contrôler les conditions aux extrémités (initiales et finales).
- De respecter diverses contraintes imposées.
- Maximiser ou minimiser un critère spécifiquement choisi.

Objet de la commande :

On suppose que l'état $y(t)$ comme une solution d'une équation différentielle : soit

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dt} = f(y(t), u(t), t), \\ y(0) = y_0. \end{array} \right. \quad (1.3)$$

Où $y(t) \in \mathbb{R}^n$ représente la position de l'objet à l'instant t , et $y(0) \in \mathbb{R}^n$ désigne la position initiale du système, et $u(t)$ la commande.

Condition initiale du système

La condition initiale $y(0) = y_0$ du système est un vecteur donné dans le plan de phase. $y(t)$ et $y(0)$ sont la vitesse physique, la température ... etc.

Classification des commandes réalisables

U est l'ensemble des commandes réalisable qui peuvent être borné, non borné ou de type Bang-Bang.

$$U = \{u(t), \quad t \in [0, t_f]\} \quad (1.4)$$

- **Commande bornée**

Dans plusieurs problèmes de commandes, les valeurs de $u_j(t)$ pour $j = 1, \dots, m$ peuvent être bornées par des constantes inférieures et supérieures. Par la suite, nous étudions ce type de problème avec

$$a_j \leq u_j \leq b_j.$$

Il est à noter que u_j peut être remplacé par v_j en posant :

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j - b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j) \times v_j$$

et v_j est aussi intégrable et l'on a

$$|v_j| = 1$$

Donc, puisque U est borné, il est courant de limiter les commandes entre -1 et 1 .

- **Commande Bang-Bang**

On suppose que : U est un polyèdre $[-1, 1]^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Un contrôle $u(t) \in U$ est appelé commande Bang-Bang si pour chaque instant t et chaque indice $j = 1, \dots, m$, on a $|u_j(t)| = 1$, alors une commande Bang-Bang est une commande qui comprend au moins un switch.

1.3 Différents types de contrôle optimal

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types spécifiques de problèmes de contrôle optimal [4].

1.3.1 Problème de Lagrange

On dit le problème de type Lagrange si :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt, \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Où les commandes $u(\cdot)$ sont des fonctions définies sur l'intervalle $[0, t_f]$ dans $U \subset \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, et $y(0) = y_0$ est un état initial donné.

1.3.2 Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère à optimiser est uniquement basé sur la valeur terminale de l'état. Soit la fonction $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, on définit le problème de Mayer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = h(y(t_f), t_f), \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.6)$$

1.3.3 Problème de Bolza

Le problème de Bolza réside dans le fait qu'il combine les deux formulations précédentes (1.5), (1.6). Soient $g : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ alors, le problème de Bolza est défini par :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt, \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.7)$$

1.4 L'existence des trajectoires de contrôle optimal

Théorème 1.4.1. [18] Prenons en considération le système de contrôle :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t),$$

où $f(\cdot)$ est C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$ dans $\mathbb{R}^n$, les contrôles u sont à valeurs dans un compact $U \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement on a des contraintes sur l'état

$$v_1(y) \leq 0, \dots, v_r(y) \leq 0,$$

où $v_1(y), \dots, v_r(y)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$. Soient M_0 et M_1 deux compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que M_1 est accessible depuis M_0 . Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans U joignant M_0 à M_1 . Soient g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$, et h une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. on considèrerait le coût

$$J(u) = h(y(t(u), t(u))) + \int_0^{t(u)} g(y(t), u(t), t) dt$$

où $t(u) \geq 0$ est comme $y(t(u)) \in M_1$. On suppose que

- $\exists b > 0$, $b \in \mathbb{R}$ tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ est uniformément borné par b sur $[0, t(u)]$, ainsi que le temps $t(u)$, i.e.

$$\exists b > 0 \quad \text{---} \quad \forall u \in U \quad \forall t \in [0, t(u)] \quad \|y_u(t)\| \leq b,$$

- $\forall (y, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f]$, l'ensemble

$$\Omega(y, t) = \left\{ \begin{pmatrix} f(y(t), u(t), t) \\ g(y(t), u(t), t) + \gamma \end{pmatrix} \quad \text{---} \quad u \in U, \gamma \geq 0 \right\}$$

est convexe.

Donc il existe un contrôle optimal u sur $[0, t(u)]$ tel que la trajectoire associée joint M_0 à M_1 en temps $t(u)$ et en coût minimal.

1.5 Contrôlabilité

Définition 1.5.1. Un système contrôlé

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est contrôlable lorsque pour tous les points $y_0 \in M_0$ et $y_{t_f} \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée relie y_0 à y_{t_f} en temps fini.

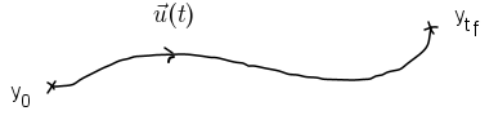


FIGURE 1.1 – Problème de contrôlabilité

1.5.1 Accessibilité

Prenons en considération le système de l'équation différentielle linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), & t \in [0, t_f], \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.8)$$

Définition 1.5.2. *L'ensemble des points accessibles à partir de y en un temps $t_f > 0$ est défini par :*

$$\mathcal{Acc}(y_0, t_f) = \{y(t_f), u \in U\}$$

où $y(\cdot)$ est la solution du système (1.8) associée au contrôle u . En d'autres termes, $\mathcal{Acc}(y_0, t_f)$ est l'ensemble des valeurs extrémales des solutions du système (1.8), en temps t_f , lorsque le commande u varie.

Définition 1.5.3. *Le système (1.8) est contrôlable en temps t tel que si :*

$$\mathcal{Acc}(y_0, t_f) = \mathbb{R}^n.$$

On dit qu'il est contrôlable en temps t quelconque depuis y_0 si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t_f \geq 0} \mathcal{Acc}(y_0, t_f).$$

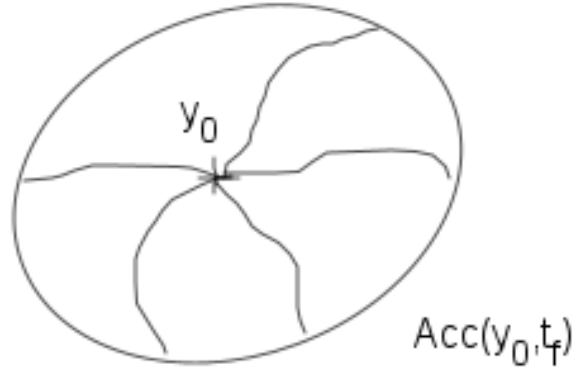


FIGURE 1.2 – Ensemble accessible

1.6 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Définition 1.6.1. *Il s'agit d'un problème de système défini par :*

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)u(t), \\ y(0) = y_0, \end{cases}$$

est non autonome, si les matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ dépendant t (n'est pas constante).

Cas non autonome

le problème de système définie par :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)u(t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.9)$$

La solution de système (1.9) en temps t

$$y(t) = \mathcal{M}(t)y_0 + \int_0^t \mathcal{M}(t)\mathcal{M}^{-1}(s)\mathcal{B}(s)u(s)ds, \quad t \in [0, t_f].$$

Soit $\mathcal{M}(\cdot) : I = [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la résolvante du système linéaire homogène définit par :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{M}}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{M}(t), \\ \mathcal{M}(0) = I_n, \end{cases}$$

où I_n est la matrice identique dans $\mathbb{R}^n$.

Le théorème suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante de contrôlabilité dans ce cas

Théorème 1.6.1. [11] *Le système $\dot{y}(t) = \mathcal{A}(t)y(t) + \mathcal{B}(t)u(t)$ est contrôlable en temps t_f si et seulement si la matrice*

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} \mathcal{M}^{-1}(t) \mathcal{B}(t) \mathcal{B}'(t) (\mathcal{M}^{-1}(t))' dt$$

est dite inversible.

$C(t)$ *est dite la matrice de la contrôlabilité .*

Exemple 1.6.1. *On considère le système linéaire non autonome suivant :*

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = -y_2(t) + u(t) \cos(t) \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) + u(t) \sin(t). \end{cases} \quad (1.10)$$

Où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$$

la résolution de système :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{M}}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{M}(t) \\ \mathcal{M}(0) = I_n. \end{cases}$$

Est :

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_3(t) & \dot{m}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) \\ m_3(t) & m_4(t) \end{pmatrix}$$

avec $\mathcal{M}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ce qui conduit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \dot{m}_1(t) = -m_3(t), \\ \dot{m}_2(t) = -m_4(t), \\ \dot{m}_3(t) = m_1(t), \\ \dot{m}_4(t) = m_2(t). \end{cases}$$

La solution se présente sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \ddot{m}_1(t) = -\dot{m}_3(t) = -m_1(t), \\ \ddot{m}_2(t) = -\dot{m}_4(t) = -m_2(t). \end{cases}$$

La solution s'exprime sous la forme suivante :

$$\begin{cases} m_1(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t), \\ m_2(t) = \alpha_3 \cos(t) + \alpha_4 \sin(t). \end{cases}$$

Avec $m_1(0) = 1$ et $m_2(0) = 0$.

En conséquence :

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix}$$

La matrice de contrôlabilité est définie par :

$$C = \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ \sin(t) & -\cos(t) \end{pmatrix} dt$$

Alors :

$$C = \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} t_f & t_f \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $\det(C) = 0$, donc la matrice C n'est pas inversible. Par conséquent, le système (1.10) n'est pas contrôlable.

Cas autonome

Définition 1.6.2. Le problème de système définie par :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + \mathcal{B}u(t), \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

est autonome, si les matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont constantes (ne dépendent pas de t).

• Cas sans contraintes sur le contrôle

Critère de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire, élaborée par Kalman.

Théorème 1.6.2. [11] *Un système linéaire autonome dans $\mathbb{R}^n$ tel que*

$$\dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + \mathcal{B}u(t),$$

est contrôlable sur une période de temps t_f si et seulement si le rang de la matrice $(n \times m)$:

$$C = [\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}, \dots, \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B}],$$

est égal à n .

Remarque 1.6.1. *La matrice C est désignée comme la matrice de Kalman et la condition où le rang de C est égal à n est appelée condition de Kalman. Cette condition ne dépend ni de la condition initiale y_0 , ni de temps final t_f . En conséquence, si un système linéaire autonome est contrôlable à partir de y_0 pendant t_f , alors il reste contrôlable à tout moment et depuis n'importe quel point. Ce théorème énonce les conditions nécessaires et suffisantes pour la contrôlabilité, dans le cas où les matrices $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont indépendantes de la variable t .*

Exemple 1.6.2. *Considérons le système linéaire autonome dans la forme suivante :*

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

Où

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour déterminer la contrôlabilité, il est nécessaire de calculer la matrice de Kalman. La matrice de Kalman est définie par :

$$C = [\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

on a $\det(C) = -1 \neq 0$, donc le rang(C) = 2, donc le système est contrôlable.

- **Cas avec contraintes**

La propriétés de la Contrôlabilité global sont reliées aux propriétés de stabilité de matrice $\mathcal{A}$ si :

- La condition de kalman est remplie.
- $0 \in \text{int } U$, (int = interieur).
- Toutes les valeurs propres de la matrice $\mathcal{A}$ ont une partie réelle strictement négative, ce qui signifie que la matrice $\mathcal{A}$ est stable.

Ainsi, tout point de $\mathbb{R}^n$ conduite à l'origine en un temps fini, éventuellement grand. Dans le cas mono-entrée ($m = 1$) ou un résultat plus précis.

Théorème 1.6.3. [11] Soit $b \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ un intervalle contenant 0. En considérant le système

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \mathcal{A}y(t) + \mathcal{B}u(t), \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Alors, tout point dans $\mathbb{R}^n$ peut être ramené à l'origine en un temps fini si :

- i. La paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ vérifie la condition de Kalman.
- ii. La partie réelle de chaque vecteur propre de $\mathcal{A}$ est inférieurement ou égale à zéro.

Exemple 1.6.3. Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{y}_1(t) = y_2(t), \\ \dot{y}_2(t) = y_1(t) + u(t), \\ y(0) = y_0, \\ |u(t)| \leq 1. \end{cases}$$

Étudier la contrôlabilité du système (i.e est ce qu'on ramener le système de y_0 à l'origine en temps fini).

D'après la condition de Kalman :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$C = [\mathcal{B}, \mathcal{A}\mathcal{B}] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det$ de $C = -1 \neq 0$,

rang de $C = n = 2$.

La condition de kalman est remplir.

On a : $u = [-1, 1] \Rightarrow 0 \in \text{int } U$.

Les valeurs propre de $\mathcal{A}$:

$$\det [\mathcal{A} - \lambda I_2] = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -1$$

sont de partie réel nulle.

Donc, d'après le théorème (1.6.3), le système considéré est contrôlé à zéro. i.e il existe un contrôle U / $|u(t)| \leq 1$ tel que les trajectoires associées relient y_0 à l'origine $(0, 0)$.

1.7 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Jusqu'à présent, déterminer cette propriété demeure une tâche ardue. Pour analyser la commandabilité des systèmes non linéaires, il est courant d'opter pour la linéarisation du système, car la commandabilité du système linéarisé sous-entend généralement celle du système non linéaire de manière locale. L'absence de commandabilité du système linéarisé ne signifie pas nécessairement que le système non linéaire est également non commandable [14]. Examinons le système de contrôle non linéaire suivant

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (1.11)$$

1.7.1 Définitions et préliminaires

Définition 1.7.1. Prenons en considération le problème de commande suivant pour le système (1.11) étant donné un point initial $y_0 \in \mathbb{R}^n$, trouver un temps t_f et une commande $u(t)$ sur l'intervalle $[0, t_f]$ tels que la trajectoire y_u associée à u , solution de l'équation (1.11), satisfasse

$$y_u(0) = y_0, \quad y_u(t_f) = y_1. \quad (1.12)$$

Cela aboutit à la définition suivante :

Définition 1.7.2. Soit $t_f > 0$ l'application entrée-sortie en temps t_f du système contrôlé (1.11) initialisé à y_0 est l'application

$$\begin{aligned} E_{t_f} : U &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\mapsto y_u(t_f) \end{aligned}$$

où U est l'ensemble des commandes admissibles, c'est-à-dire l'ensemble des commandes u telles que la trajectoire associée est bien définie sur $[0, t_f]$.

En d'autres termes, l'application entrée-sortie en temps t_f associe à un contrôle u est le point final de la trajectoire associée à u .

1.8 Principe du maximum de Pontryagin

Considérons le problème dynamique ci-dessous :

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \quad (1.13)$$

et la fonctionnelle à optimiser est :

$$\min_{u(t)} J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt \quad (1.14)$$

$$y(t) \in \mathbb{R}^n, u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, t \in [0, t_f].$$

Où

- $U \subset \mathbb{R}^m$ est l'ensemble des commandes admissibles bornées et continues par morceaux sur $[0, t_f]$.
- $g(y(t), u(t), t)$ est une fonction de coût définie sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$.
- $\frac{dg}{dy}(y(t), u(t), t)$ est une dérivée de g par rapport à y .
- $\frac{dg}{dt}(y(t), u(t), t)$ est une dérivée de g par rapport à t .
- y_0 est l'état du système (1.13) à l'instant 0 (état initial).
- y_{t_f} est l'état du système (1.13) à l'instant t_f (état terminal).

Le problème consiste à transférer le point de l'état initial à l'état final tout en minimisant la fonctionnelle $J(u)$.

Définition 1.8.1. *La commande optimale $u^*(t)$ est optimale si elle correspond soit à un maximum, soit à un minimum, et cela est vrai pour toute commande optimale $u(t)$, $t \in [0, t_f]$*

$$J(u^*(t)) < J(u(t))$$

Définition 1.8.2. *On dit qu'un temps de commutation t_c est celui auquel l'extémalé de $u(t)$, pour t dans $\in [0, t_f]$ changé de signe.*

Définition 1.8.3. *On peut rassembler les équations (1.13)-(1.14) en utilisant la fonction $H(y(t), u(t), p(t), p_0, t)$ définie sur $\mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$ dans $\mathbb{R}$ telle que :*

$$H(y(t), u(t), p(t), p_0, t) = p_0 g(y(t), u(t), p(t), t) + \langle p(t), f(y(t), u(t), p(t), t) \rangle$$

$H(y(t), u(t), p(t), t)$: la fonction Hamiltonienne.

Les fonctions $H(y(t), u(t), p(t), p_0, t)$ et $\frac{dH}{dy}(y(t), u(t), p(t), p_0, t)$ sont continues sur $\mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$.

Définition 1.8.4. *On dit $p(t)$ est un vecteur adjoint s'il existe $p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue et non nulle, et $u(t) \in U$ est une contrôle associé à la trajectoire $p(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$ et on écrit :*

$$\dot{p}(\cdot) = -\frac{dH}{dy}(y(t), u(t), p(t), t), \quad \forall t \in [0, t_f],$$

où $\frac{dH}{du} = 0$, $\forall t \in [0, t_f]$, (Le principe de minimum faible).

Théorème 1.8.1. [18] *Nous Considérons le système de commande dans $\mathbb{R}^n$:*

$$\dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t). \quad (1.15)$$

Où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est de classe C^1 , les commandes sont des application mesurables bornées à valeurs dans $U \subset \mathbb{R}^m$. Soit M_0 et M_1 deux ensembles de $\mathbb{R}^n$. Notons par U l'ensemble des commandes réalisables u dont les trajectoires associées relient un point initial de M_0 à un point final M_1 en temps t . Le coût est défini

$$J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt, \quad (1.16)$$

où $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 , $y(\cdot)$ est la solution de (1.15) associée au contrôle u . On considère le problème de contrôle optimal suivant : Déterminer une trajectoire reliant M_0 à M_1 en minimisant le coût $J(u)$. Le temps final peut être fixé ou non. Si le contrôle $u \in U$ associé à la trajectoire $y(\cdot)$ est optimal sur $[0, t_f]$, alors il existe une application

$$p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

absolument continue, appelé vecteur adjoint, et un réel $p_0 \leq 0$, tels que le couple $(p(\cdot), p_0)$ est non trivial, et tels que, pour presque tout $t \in [0, t_f]$,

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{dH}{dp}(y(t), p(t), u(t), p_0, t), \\ \dot{p}(t) = -\frac{dH}{dy}(y(t), p(t), u(t), p_0, t). \end{cases} \quad (1.17)$$

Où $H(y(t), p(t), u(t), p_0, t) = \langle p(t), f(y(t), u(t), t) \rangle + p_0 g(y(t), u(t), t)$ est le Hamiltonien du système, et on a la condition de maximisation presque partout sur $[0, t_f]$

$$H(y(t), p(t), u^*(t), p_0, t) = \max_{u(t) \in U} H(y(t), p(t), u(t), p_0, t). \quad (1.18)$$

Si de plus M_0 et M_1 (ou juste l'un des deux ensembles) sont des variétés de $\mathbb{R}^n$ ayant des espaces tangent en $y(0) = y_0 \in M_0$ et $y(t_f) = y_{t_f} \in M_1$, alors le vecteur adjoint peut être construit de manière à vérifier les conditions de transversalités extrémités (ou juste l'une des deux)

$$p(0) \perp T_{y(0)} M_0 \quad (1.19)$$

et

$$p(t_f) - p_0 \frac{dh}{dy}(y(t_f), t_f) \perp T_{y(t_f)} M_1. \quad (1.20)$$

Remarque 1.8.1. Si le contrôle u est continu au temps t_f , la condition (1.18) peut écrire :

$$H(y(t_f), p(t_f), u(t_f), p_0, t_f) = -p_0 \frac{dh}{dt}(y(t_f), t_f). \quad (1.21)$$

Définition 1.8.5. On définit la variété M_1 par :

$$M_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n \quad / \quad \mathcal{F}_1(y) = \dots = \mathcal{F}_p(y) = 0 \right\},$$

où les $\mathcal{F}_i$ sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ (indépendantes puisque M_1 est une variété), alors la condition (1.19) écrit de la manière suivante

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \quad / \quad p(t_f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla \mathcal{F}_i(y(t_f)) + p_0 \frac{dh}{dy}(y(t_f), t_f). \quad (1.22)$$

- Les conditions du théorème (1.8.1), on a de plus pour presque tout $t \in [0, t_f]$

$$\frac{dH}{dt}(y(t), u(t), p(t), p_0, t) = \frac{\partial H}{\partial t}(y(t), u(t), p(t), p_0, t). \quad (1.23)$$

- Si $H(\cdot)$ ne dépendent pas de t , Si f et g ne dépendent pas de t , et on écrit :

$$\max_{u(t) \in U} H(y(t), u(t), p(t), p_0, t) = Cste, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Remarque 1.8.2. La convention $p_0 \leq 0$ conduit au principe du maximum. La convention $p_0 \geq 0$ conduirait au principe du minimum, c'est-à-dire la condition (1.18) serait une condition de minimum.

Remarque 1.8.3. L'orsqu'il n'y a pas de contraintes sur le contrôle, la condition de maximum (1.18) devient $\frac{dH}{dy}(y(t), u(t), p(t), t) = 0$

1.9 Méthode de détermination commande optimale

Il existe deux catégories de méthodes numériques en commande optimale : les méthodes directes et les méthodes indirectes. Les méthodes directes impliquent la discrétisation de l'état et de commande, ce qui réduit le problème à une optimisation non linéaire (programmation non linéaire). En revanche, Les méthodes indirectes consistent à résoudre numériquement, à l'aide d'une méthode de tir, un problème aux valeurs limites dérivé de l'application du principe du maximum [18].

1.9.1 Méthode indirecte

Les méthodes indirectes reposent sur le principe de maximum de Pontryagin. Il recherche ensuite une trajectoire qui satisfait à ces conditions.

1.9.2 Méthode directe

Les méthodes directes transforment le problème de commande optimale en un problème d'optimisation non linéaire à dimension finie.

Nous présentons un résumé des caractéristiques des méthodes directes et indirectes dans le tableau ci-dessous (Table 1.1) :

Méthodes directes	Méthodes indirectes
mise en oeuvre simple sans connaissance a priori	connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
peu sensibles au choix de condition initiale	très sensibles au choix de la condition initiale
facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
efficaces en basse dimension	efficaces en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisables
problème des minima locaux	petit domaine de convergence

TABLE 1.1 – Caractéristique des méthodes directes et indirectes.

1.9.3 Condition de transversalité

Conditions de transversalité concernant le vecteur adjoint

- **Problème de Lagrange**

On a déjà définie le problème de lagrange (1.5). Si de plus $y(t_f)$ est libre, alors la condition de transversalité concernant le vecteur adjoint,

$$p(t_f) = 0$$

- **Problème de Mayer**

On a déjà définie le problème de mayer (1.6). Si de plus $y(t_f)$ est libre, alors la condition de transversalité concernant le vecteur adjoint.

$$p(t_f) = \frac{dh}{dy}(y(t_f), t_f).$$

Conditions de transversalité sur Hamiltonien

- L'Hamiltonien $H(\cdot)$ ne depend pas explicitement de t et le temps final est libre, et $y(t_f)$ est fixé, alors l'Hamiltonien $H(\cdot)$ doit être nul quand est évalué sur une extrémale, i.e

$$H(y^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0, \quad t \in [0, t_f].$$

- L'Hamiltonien $H(\cdot)$ depend de t et le temps final est libre, alors l'Hamiltonien H doit être nul quand est évalué sur une extrémale, i.e

$$H(y^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) = 0, \quad t \in [0, t_f].$$

Exemple 1.9.1.

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = \int_0^2 -2y(t) + 4u(t)dt, \\ \dot{y}(t) = y(t) + u(t), \\ y(0) = 5, \quad y(2) \text{ est libre}, \\ u \in [0, 2], t \in I = [0, 2]. \end{cases}$$

On définit l'Hamiltonien ce problème par :

$$H(y(t), u(t), p(t), t) = p_0 g(y(t), u(t), p(t), t) + p(t) f(y(t), u(t), p(t), t).$$

On pose $p_0 = 1$.

$$H(y(t), u(t), p(t), t) = -2y(t) + 4u(t) + p(t)y(t) + p(t)u(t).$$

L'équation d'état :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = \frac{dH}{dP}(y(t), p(t), u(t), t), \\ y(t_f) = y(2). \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) + u(t), \\ y(t_f) = y(2). \end{cases}$$

Condition L'équation d'état adjoint :

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = -\frac{dH}{dy}(y(t), p(t), u(t), t), \\ p(2) = 0. \end{cases}$$

D'après de principe de minimum de Pontryagin, on obtient :

$$\begin{aligned} \min_{u \in [0, 2]} H(y(t), p(t), u(t), t) &= \min_{u \in [0, 2]} -2y(t) + 4u(t) + p(t)y(t) + p(t)u(t) \\ &= -2y(t) + p(t)y(t) + \min_{u \in [0, 2]} u(t)(4 + p(t)). \end{aligned}$$

Donc l'expression du contrôle optimal est :

$$u(t) = \begin{cases} 2 & , si \quad (4 + p(t)) < 0, \\ 0 & , si \quad (4 + p(t)) > 0, \\ \forall & , si \quad (4 + p(t)) = 0. \end{cases}$$

Détermination de l'expression de l'état adjoit

$$\begin{cases} \dot{p}(t) = 2 - p(t), \\ p(2) = 0. \end{cases}$$

- **Solution homogène**

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= -p(t) \Rightarrow \frac{\dot{p}(t)}{p(t)} = -1 \\ &\Rightarrow \ln p(t) = -t + c \\ &\Rightarrow p(t) = c(t) e^{-t}. \end{aligned}$$

- **Solution non homogène**

$$\begin{aligned} p(t) &= c(t) e^{-t} \dots (*) \\ \dot{p}(t) &= \dot{c}(t) e^{-t} - c(t) e^{-t} \\ \dot{c}(t) e^{-t} - c(t) e^{-t} &= 2 - c(t) e^{-t} \end{aligned}$$

nous donne :

$$\dot{c}(t) = 2 e^t \Rightarrow c(t) = 2 e^t + c_1$$

- **déterminons c_1**

$$\begin{aligned} p(2) = 0 &\Rightarrow 2 + c_1 e^{-2} = 0 \\ &\Rightarrow c_1 = -2 e^2 \end{aligned}$$

ainsi :

$$p(t) = 2 - 2 e^{2-t}.$$

- **Détermination de $u^*(t)$**

on suppose que : $\phi(t) = p^*(t) + 4 \Rightarrow \phi(t) = 6 - 2 e^{2-t}$

le signe de ϕ sur $[0, 2]$ est :

$$\begin{cases} \phi(t) < 0 & \text{si } t \in [0, 2 - \ln 3], \\ \phi(t) > 0 & \text{si } t \in]2 - \ln 3, 2]. \end{cases}$$

Ainsi

$$u^*(t) = \begin{cases} 2 & \text{si } t \in [0, 2 - \ln 3[, \\ 0 & \text{si } t \in]2 - \ln 3, 2]. \end{cases}$$

- **Détermination de $y^*(t)$:** La fonction $\phi(t) = p(t) + 4$ admet une seule solution sur l'intervalle $[0, 2]$. et $\phi(2 - \ln(3)) = 0$.
Déterminons $y^*(t)$ sur $[0, 2 - \ln 3]$:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t) + 2, \\ y(0) = 5. \end{cases}$$

Avec $u(t) = 2$.
la solution est :

$$y^*(t) = 7e^t - 2, \quad t \in [0, 2 - \ln 3].$$

comme la trajectoire $y^*(t)$ est une fonction continue. Alors

$$\begin{aligned} y^*(2 - \ln 3) &= 7e^{2 - \ln 3} - 2 \\ &= \frac{7}{3}e^2 - 2, \end{aligned}$$

- **Détermination de $y^*(t)$ sur $]2 - \ln 3, 2]$**
l'équation d'état s'écrit :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = y(t), \\ y(2 - \ln 3) = \frac{7}{3}e^2 - 2. \end{cases}$$

$$\Rightarrow y^*(t) = (7e^2 - 6)e^{t-2}, \quad t \in]2 - \ln 3, 2].$$

Ainsi :

$$y^*(t) = \begin{cases} 7e^t - 2, & t \in [0, 2 - \ln 3], \\ (7e^2 - 6)e^{t-2}, & t \in]2 - \ln 3, 2]. \end{cases}$$

Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman et quelques méthodes de sa résolution

Introduction

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman est une équation issue de la programmation dynamique, méthode introduite par Richard Bellman dans les années 50 pour résoudre les problèmes d'optimisation, c'est-à-dire des problèmes où nous devons prendre les meilleures décisions possibles pour un critère de performance spécifique à n'importe quel moment donné. L'équation de la programmation dynamique généralise les travaux antérieurs en mécanique classique de William Hamilton et Carl Gustave Jacobi, et est généralement référée comme l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman pour reconnaître la contribution de ces trois grands scientifiques. Ce chapitre est basé sur la programmation dynamique en temps continu. Nous allons introduire une fonction valeur :

$$V(y(s), s) : \mathbb{R}^n \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$$

En utilisant le principe d'optimalité de Bellman, cette fonction devient la solution d'une équation aux dérivées partielles en espace et en temps, appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). De plus, nous montrerons également, sous certaines hypothèses, comment la fonction valeur nous permet de synthétiser une commande sous forme de feedback.

$$U = L^1(U, [0, t_f]) = \left\{ u : [0, t_f] \rightarrow U \quad / \quad \int_0^{t_f} |u(t)| dt < +\infty \right\}.$$

On définit la fonction $g : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ et une fonction $h : \mathbb{R}^n \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ et la fonction de coût définie par :

$$J(u(t)) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt.$$

Le problème ci-dessus consiste à chercher $u^*(t) \in U$ tel que

$$J(u^*(t)) = \inf_{u(t)} J(y(t), u(t), t)..$$

On plonge le problème de minimisation dans une famille de problèmes de commande paramétrés par la paire $(y(s), s)$ où $s \in [0, t_f]$ et $y_s \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, le problème s'écrit par la formule suivante :

$$\begin{cases} J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_s^{t_f} g(y(t), u(t), t)dt, & \forall u \in U_1 \\ y(s) = y_s. \end{cases}$$

Où $U_1 = L^1([s, t_f], U)$.

Pour la résolution de contrôle optimal, nous utilisons des méthodes approximatives comme la méthode de décomposition Adomian et itération variationnelle.

2.1 Position de problème de commande optimale

La formulation d'un problème de commande optimale est donnée par :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t)dt, \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), \quad t \in [0, t_f], \\ y(0) = y_0, \\ y(t_f) = y_{t_f}, \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \end{cases} \quad (2.1)$$

Où

- $J(u)$: Le critère de qualité est une fonction d'efficacité qui est optimisée pour chaque commande sur l'intervalle $[0, t_f]$.
le critère de qualité (fonction objectifs), c'est une fonction d'efficacité à optimiser pour chaque commande sur l'intervalle $[0, t_f]$. Le problème revient à définir une expression mathématique qui, lorsqu'elle est optimisée, indique que le système est exécuté de la façon la plus souhaitable. Donc choisir une mesure de performance, est une traduction en termes mathématiques des exigences physiques du système.
- $y(0)$: la position initiale.
- $y(t_f)$: la position finale.
- $u(t)$: la commande.
- U est l'ensemble des applications mesurables (solution admissible), localement bornés sur $[0, t_f]$, prenant des valeurs dans un compact $U \subset \mathbb{R}^m$.

2.2 Fonction valeur de Bellman

Définition 2.2.1. Soient $0 < t_f < \infty$ et $y_{t_f} \in \mathbb{R}^n$ fixés. Prenons en compte l'équation ci-dessous :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), & \forall t \in [0, t_f], \\ y(t_f) = y_{t_f}. \end{cases} \quad (2.2)$$

qui est autonome et définie par un temps "final" et une condition "finale" fixée. Par contre $y(0)$ est libre. Supposons que :

- Un contrôle $u(t) \in U$ est mesurable et localement borné avec U un sous-ensemble non vide et compact de $\mathbb{R}^m$.

L'objectif du contrôle optimal consiste à minimiser le coût suivant :

$$J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt, \quad (2.3)$$

où h et g sont des fonctions continues.

Puisque la solution $y(\cdot)$ dépend de la position finale y_{t_f} et de contrôle $u(t)$, on note $y(\cdot) = y(y_{t_f}, u(t), \cdot)$.

Il s'agit ici de considérer le problème du contrôle optimal sur un intervalle $[0, s] \subset [0, t_f]$ très petit, c'est-à-dire le système :

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), & \forall t \in [0, s], \\ y(s) = y_s. \end{cases} \quad (2.4)$$

où $y(y_{t_f}, u(t), s) = y_s$ et chercher la restriction de $u(t)$ sur $[0, s]$ qui minimise :

$$J(u) = h(y(s), s) + \int_0^s g(y(t), u(t), t) dt, \quad (2.5)$$

qui on note par $V(y_s, s)$.

Définition 2.2.2. [18] Une fonction $V(y_s, s) : \mathbb{R}^n \times [0, s] \rightarrow \mathbb{R}$ est dite fonction de valeur de Bellman si

$$V(y_s, s) = \inf_{u(t): [0, s] \rightarrow U} \left\{ h(y(s), s) + \int_0^s g(y(t), u(t), t) dt \right\} \quad (2.6)$$

où $y(\cdot)$ est la solution du système (2.4). En particulier, pour tout $y_0 \in \mathbb{R}^n$,

$$V(y(0), 0) = V(y_0, 0) = h(y_0, 0).$$

Clairement si $s = t_f$, alors

$$V(y_{t_f}, t_f) = V(y(t_f), t_f) = \inf_{u(t): [0, t_f] \rightarrow U} J(u(t_f), t_f)$$

Où $y(\cdot)$ est une solution de (2.2).

Nous posons les deux hypothèses suivantes :
les hypothèses sur la fonction $f(y(t), u(t), t)$:

- La fonction $f(y(t), u(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f]$ uniformément en $u(t) \in U$.
- La fonction $f(y(t), u(t), t)$ est dérivable par rapport à $y(t)$ et la fonction $\frac{df}{dy}(\cdot)$ est continue bornée sur $\mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f]$.
- il existe une constante $c \geq 0$ telle que

$$\|f(y(t), u(t), t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq c(1 + \|y(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}), \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f].$$

les hypothèses suivantes sur le critère de performance :

- La fonction $g(y(t), u(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f]$, uniformément en $u(t) \in U$.
- Il existe des constantes $\varepsilon > 0$, et $\nu \geq 0$ telles que

$$g(y(t), u(t), t) \geq \varepsilon \|u(t)\|_{\mathbb{R}^m}^2 - \nu \quad \text{sur } \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f].$$

- La fonction $h(y(t_f), t_f)$ est continue et minorée sur $\mathbb{R}^n \times [0, t_f]$.

On peut vérifier que les hypothèses ci-dessus sont des conditions suffisantes d'une part qu'il existe une unique trajectoire $y(t) \in \mathcal{A}cc(\mathbb{R}^n, [0, t_f])$ pour tout contrôle $u(t) \in U = L^1(U, [0, t_f])$, et d'autre part pour que le critère $J(u)$ ait bien un sens et $V(y_s, s) > -\infty$, $\forall (y_s, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f]$.

Remarque 2.2.1. "Non différentiabilité de la fonction valeur" On fera attention au fait que la fonction valeur : n'est pas toujours différentiable en tout point.

Maintenant, le principe d'optimalité de Bellman celui-ci constitue la clé de voute de la programmation dynamique. Heuristiquement, le principe d'optimalité de Bellman nous dit qu'un contrôle est optimal si à tout instant $s \in [0, t_f]$ sur la trajectoire associée $y^*(t)$, le contrôle restreint aux instants ultérieurs $[u^*(t)]_s^{t_f}$ est optimal pour le nouveau problème ayant l'état Courant $y^*(s)$ comme état initial.

Lemme 2.2.1. [12] Soient $0 \leq r \leq s \leq t_f$ et $y(s) = y_s$. Si $u^*(t) : [0, s] \rightarrow U$ est une réalisation de $V(y(s), s)$, alors la restriction de $u^*(t)$ sur $[0, r]$ est une réalisation de $V(y(r), r)$.

Par conséquent, le contrôle optimal peut être construit sur des intervalles de plus en plus grand jusqu'à atteindre la largeur $[0, t_f]$.

Lemme 2.2.2. [12] Soient $0 \leq r \leq s \leq t_f$ et $y(s) = y_s$. Si $u^*(t) : [0, s] \rightarrow U$ est une réalisation de $V(y(s), s)$, alors

$$V(y(s), s) = V(y(r), r) + \int_r^s g(y(y(t), u^*(t), t), u^*(t), t) dt.$$

Ce qui nous montre le théorème suivant :

Théorème 2.2.1. [12] Soient $0 \leq r \leq s \leq t_f$ et $y(s) = y_s$. On a

$$V(y_s, s) = \inf_{u(t):[r,s] \rightarrow U} \left\{ V(y(r), r) + \int_r^s g(y(y(s), u(t), t), u(t), t) dt \right\}.$$

Notons que les résultats précédents sont applicables sur les systèmes avec condition (initiale) de la forme

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), & \forall t \in [0, t_f], \\ y(0) = y_0, \end{cases} \quad (2.7)$$

avec contrainte sur le contrôle et un coût donné par :

$$J(u) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt. \quad (2.8)$$

Donc la fonction valeur de Bellman $V(y(s), s) : \mathbb{R}^n \times [s, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ est définie par :

$$V(y_s, s) = \inf_{u(t) : [s, t_f] \rightarrow U} \left\{ h(y(t_f), t_f) + \int_s^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt \right\}, \quad (2.9)$$

où $y(\cdot)$ est solution du système

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t), & \forall t \in [s, t_f], \\ y(t_f) = y_{t_f}. \end{cases}$$

Dans ce cas, la fonction $V(\cdot)$ vérifie la condition finale $V(y_{t_f}, t_f) = h(y_{t_f}, t_f)$.

2.3 Principe d'optimalité de Bellman

La programmation dynamique permet de résoudre le problème de contrôle optimal de manière fondamentale. Elle repose sur le principe d'optimalité de Bellman. Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u(t)) = h(y(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt, \\ \dot{y}(t) = f(y(t), u(t), t). \end{cases} \quad (2.10)$$

Le principe de Bellman stipule que la trajectoire optimale sur l'intervalle $[0, t_f]$ inclut la trajectoire optimale sur l'intervalle $[s, t_f]$ avec $s \in [0, t_f]$, et $y^*(t) = y(s)$. Comme le montre la figure suivante :

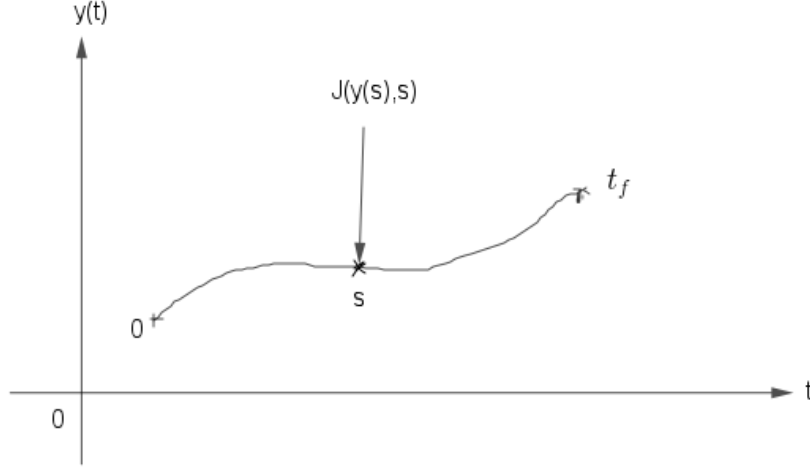


FIGURE 2.1 – Trajectoire optimale (Principe de Bellman).

Le principe de Bellman indique que la solution à un problème de contrôle optimal global peut être trouvée en le décomposant en sous-problèmes plus simples à résoudre.

Théorème 2.3.1. [3] Soit $u^*(t) \in U$ un contrôle optimal. Soit $(y_s, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f]$. Alors pour tout $s_1 \in [s, t_f]$, on a

$$V(y_s, s) = \inf_{u \in U_s^{s_1}} \left\{ V(y(s_1), s_1) + \int_s^{s_1} g(y(t), u(t), t) dt \right\} \quad (2.11)$$

où $U_s^{s_1} = L^1([s, s_1], U)$.

Preuve :

Tout $u(t) \in U_s$ peut correspondre à un couple $(u_1(t), u_2(t)) \in U_s^{s_1} \times U_{s_1}$.

i.e. $u_1(t) = u(t)$ qui définit sur $[s, s_1]$, et $u_2(t) = u(t)$ qui définit sur $[s_1, t_f]$.

Par ailleurs,

- le contrôle $u_1(t)$ conduit à la trajectoire $y_1(t) \equiv y(t)$ sur $[s, s_1]$ telle que $y_1(s) = y_s, y_s \in \mathbb{R}^n$.
- le contrôle $u_2(t)$ conduit à la trajectoire $y_2(t) \equiv y(t)$ sur $[s_1, t_f]$ telle que $y_2(s_1) = y_1(s_1), y_1(s_1) \in \mathbb{R}^n$.

On a

$$\begin{aligned}
V(y(s), s) &= \inf_{u(t) \in U_s} \left(h(y(t_f), t_f) + \int_s^{t_f} g(y(t), u(t), t) dt \right) \\
&= \inf_{(u_1(t), u_2(t)) \in U_{s_1}^{s_1} \times U_{s_1}} \left(\int_s^{s_1} g(y_1(t), u_1(t), t) dt + \left(h(y_2(t_f), t_f) + \int_{s_1}^{t_f} g(y_2(t), u_2(t), t) dt \right) \right) \\
&= \inf_{u_1(t) \in U_{s_1}^{s_1}} \left(\int_s^{s_1} g(y_1(t), u_1(t), t) dt + \inf_{u_2(t) \in U_{s_1}} \left(h(y_2(t_f), t_f) + \int_{s_1}^{t_f} g(y_2(t), u_2(t), t) dt \right) \right) \\
&= \inf_{u_1(t) \in U_{s_1}^{s_1}} \left(V(y_1(s_1), s_1) + \int_s^{s_1} g(y_1(t), u_1(t), t) dt \right).
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

On rappelle que l'Hamiltonien associé au système de contrôle non-linéaire

$$J(u^*) = \inf_{u(t) \in U} J(y(t), u(t), t),$$

définie par l'application $H(\cdot)$:

$$H(y(t), u(t), p(t), t) = g(y(t), u(t), t) + \langle p(t), f(y(t), u(t), t) \rangle,$$

où $(y(t), u(t), p(t), t) \in \mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$.

D'autre part, on définit l'Hamiltonien minimisé comme l'application

$$\min_{u(t)} H(\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times U \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$$

telle que

$$\min_{u(t)} H(y(t), u(t), p(t), t) = \inf_{u(t) \in U} H(y(t), u(t), p(t), t).$$

2.4 Équation d'Hamiltonien-Jacobi-Bellman

[12] Supposons que pour tout $s \in [0, t_f]$ et tout $y_s \in \mathbb{R}^n$ le système (2.4) défini sur $[0, s]$ avec condition finale $y(s) = y_s$ admet une solution optimale $y^*(\cdot) = y(y_s, u^*, \cdot)$ associée au contrôle optimal $u^*(t)$ minimisant le coût (2.5) . Alors

$$V(y_s, s) = h(y^*(0), 0) + \int_0^s g(y^*(t), u^*(t), t) dt.$$

Supposons que la fonction valeur $V(y_s, s)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times [0, s]$. Ainsi, en prenant la dérivée par rapport au temps, nous obtenons

$$\frac{dV}{dt}(y_s, s) + \frac{dV}{dy}(y_s, s) f(y^*(s), u^*(s), s) - g(y^*(s), u^*(s), s) = 0 \quad (2.12)$$

Rappelons le Hamiltonien :

$$H(y^*(s), u^*(s), p(s), s) = g(y^*(s), u^*(s), s) + \langle f(y^*(s), u^*(s), s), p(s) \rangle .$$

Nous savons par le principe du maximum que

$$H(y^*(s), u^*(s), p(s), s) = \min_{u \in U} H(y_s, u, p(s), s), \quad p.p. \quad s \in [0, t_f] .$$

On obtient, pour tout $(y_s, s) \in \mathbb{R}^n \times]0, t_f]$ tel que $y^*(s) = y_s$,

$$\frac{dV}{dt}(y_s, s) + \min_{u \in U} H(y_s, u, \frac{dV}{dt}(y_s, s), s) = 0.$$

Cette équation, qui est une équation aux dérivées partielles du premier ordre, est connue sous le nom "d'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman" (HJB).

En ajoutant la condition initiale de $V(\cdot, 0)$, il vient :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(y_s, s) + \min_{u \in U} H(y_s, u, \frac{dV}{dt}(s, y_s), s) = 0, \\ V(0, \cdot) = h(\cdot) \end{cases} \quad (2.13)$$

où $(y_s, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f]$ et $V(0, \cdot)$ est la fonction valeur définie par (2.6).

Remarque 2.4.1.

- De manière générale, la fonction $V(y_s, s)$ n'est pas différentiable partout sur $\mathbb{R}^n \times [0, t_f]$.
- La fonction valeur $V(y_s, s)$ n'est pas nécessairement la seule solution de (2.13).

Théorème 2.4.1. [18] Supposons que les fonctions $f(\cdot)$, $h(\cdot)$ et $g(\cdot)$ soient uniformément bornées et Lipschitziennes par rapport à $y(t) \in \mathbb{R}^n$ alors la fonction valeur $V(\cdot, \cdot)$ est bornée et lipschitzienne par rapport à $y(t)$ et t . De plus, elle représente la solution unique de l'équation

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(y, t) + \min_{u \in U} H(y, u, \frac{dV}{dy}(y, t), t) = 0, (y, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f], \\ V(0, \cdot) = h(\cdot). \end{cases}$$

Exemple 2.4.1. Considérons le problème de commande optimale suivant :

$$\begin{cases} \min_{-1 \leq u(t) \leq 1} h(y(t_f), t_f), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ y(s) = y_s, \quad s \in [0, t_f], \end{cases}$$

où $h : \mathbb{R}^n \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

On définit l'Hamiltonien associé au problème suivante :

$$H(y(t), u(t), V_y, t) = V_y u(t).$$

Où $\frac{dV}{dy} = V_y$.

On définit la fonction $V(y_s, s)$,

$$\min_{u(t) \in U} H(y(t), u(t), V_y, t) = \inf_{u(t) \in U} H(y(t), u(t), V_y, t)$$

alors

$$\begin{aligned} V(y_s, s) &= \inf_{u(t) \in U} H(y(t), u(t), V_y, t) \\ &= \inf_{u(t) \in U} V_y u(t). \end{aligned}$$

Ceci revient à déterminer le minimum de $V_y u(t)$, et on écrit :

$$\inf_{u(t) \in U} H(y(t), u(t), p(t), t) = \begin{cases} 1 & \text{si } p(t) < 0, \\ -1 & \text{si } p(t) > 0. \end{cases}$$

Alors $V(y_s, s) = -|V_y|$. On déduit l'équation HJB :

$$\begin{cases} -\frac{dV(y_s, s)}{dy_s} + \frac{dV(y_s, s)}{ds} = 0, \\ V(y_s, s) = h(y(t_f), t_f). \end{cases}$$

2.4.1 Unicité de solution régulière

Soient la fonction $W(y_s, s) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, t_f]) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0, t_f])$ suffisamment régulière et satisfait l'équation HJB et la condition au temps finale.

- Si le sous-ensemble U est bornée alors $W(y_s, s) = V(y_s, s)$, alors elle admet au plus une seule solution régulière de l'équation HJB.
- Ce résultat de l'équation HJB a au plus une solution régulière.
- Ce résultat d'unicité s'étend au cas U est non borné sous hypothèse de décroissance de $W(y_s, s)$ quand $|y_s| \rightarrow +\infty$ Uniformément en temps t .

2.4.2 Synthèse d'un feedback optimal

Nous supposons que la fonction de valeur $V(y_s, s)$ est régulière, c'est-à-dire : $V(y_s, s) \in C(\mathbb{R}^n \times [0, t_f]) \cap C^1(\mathbb{R}^n \times [0, t_f])$.

De plus, nous supposons que pour tout $(y_s, s) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f]$, il est possible de trouver un feedback optimal.

$$u^*(y_s, s) = \min_{u(t) \in U} H(y_s, u, \frac{dV(\cdot)}{dy_s}, s).$$

(L'existence d'un tel feedback optimal est assuré par les hypothèses sur $f(\cdot)$ et $g(\cdot)$, en général, on n'a pas unicité).

On suppose enfin que l'on peut choisir le feedback $u^*(y_s, s)$ de sorte à ce que le système différentiel

$$\begin{cases} \dot{y}^*(t) = f(y^*(t), u^*(y_s, s), t), & t \in [0, t_f], \\ y^*(0) = y_0, \end{cases}$$

admet une solution $y^*(t) \in A \subset (\mathbb{R}^n, [0, t_f])$.

Dans ces conditions

$$u^*(t) = u^*(y_s, s)$$

est un contrôle optimal sur $[0, t_f]$.

2.5 Les méthodes d'approximation d'une résolution de l'équation HJB

Nous présentons brièvement deux méthodes pour la résolution d'un problème de commande optimale : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et la méthode d'itération variationnelle (VIM).

2.5.1 Principes de la méthode décomposition Adomian

George Adomian (1932-2005) était un mathématicien américain qui a apporté d'importantes contributions dans les domaines de la physique, mathématique et de l'analyse non linéaire.

Né à Manchester, New Hampshire en 1932, il a obtenu un doctorat en mathématiques de l'Université du Maryland en 1957. Il a passé la majeure partie de sa carrière universitaire à l'Université de Géorgie, où il a été professeur de mathématiques de 1960 jusqu'à sa retraite en 1998.

George Adomian est surtout connu pour avoir développé la méthode de décomposition d'Adomian, une technique puissante pour résoudre des équations non linéaires et intégrales.

La méthode de décomposition Adomian est une méthode mathématique qui nous aide à résoudre les équations différentielles et aux dérivées partielles linéaire et non linéaire. Les problèmes algébriques, intégrales, les équations différentielles ordinaires d'ordre supérieur. De plus, cette technique permet de décomposer l'opérateur non linéaire en une série de fonctions où chaque terme est un polynôme généralisé appelé "polynôme d'Adomian". La méthode de décomposition consiste à calculer les solutions des équations sous forme d'une série infinie convergente vers la solution du problème donné.

2.5.2 Présentation de problème de la méthode décompositionnelle

Pour exemplifier le principe de la méthode de décomposition d'Adomian, examinons l'équation différentielle non linéaire suivante [2] :

$$\mathbf{L}V + \mathbf{R}V + \mathbf{N}V = f(t), \quad (2.14)$$

où

- $\mathbf{L}$ et $\mathbf{R}$ sont des opérateurs linéaires (tels que : $\mathbf{L}$ est la dérivée d'ordre le plus élevé et supposée inversible, $\mathbf{R}$ est un coefficient différentiel linéaire inférieur ou égal à $\mathbf{L}$).
- $\mathbf{N}$ est l'opérateur non linéaire.
- $f(t)$ est une fonction continue (partie non homogène).

Lorsqu'on applique l'opérateur inverse $\mathbf{L}_t^{-1}$ à l'équation (2.14), cela produit [1].

$$\mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{L}V) = \mathbf{L}_t^{-1}(f(t)) - \mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{R}V) - \mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{N}V). \quad (2.15)$$

Par conséquent :

$$V = \Phi(t) - \mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{R}V) - \mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{N}V), \quad (2.16)$$

où La fonction $\Phi(t)$ est déterminée en intégrant le terme $f(t)$ tout en considérant les conditions initiales données.

D'après la méthode de décomposition d'Adomian, la solution V est exprimée comme la somme d'un nombre infini de termes donnés.

$$V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n, \quad (2.17)$$

où les termes $V_n, n \geq 0$ sont déterminés d'une manière itérative [1].

Dans la méthode de décomposition d'Adomian, le terme non linéaire $\mathbf{N}(V)$ est défini par :

$$\mathbf{N}(V) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n. \quad (2.18)$$

Où A_n : les polynômes d'Adomian.

Les composantes $V_0, V_1, V_2, \dots V_n$ sont déterminés par la relation suivante :

$$\begin{cases} V_0 = \Phi(t), \\ V_{n+1} = -\mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{R}V) - \mathbf{L}_t^{-1}(A_n). \end{cases} \quad (2.19)$$

La méthode propose la construction d'une série de polynômes spéciaux appelés polynômes d'Adomian lesquels sont obtenus à partir des relations suivantes :

$$V(\lambda) = \sum_{I=0}^{\infty} (\lambda^I V_i) = V_0 + \lambda V_1 + \lambda^2 V_2 + \dots, \quad (2.20)$$

et aussi

$$\mathbf{N}(V(\lambda)) = \mathbf{N}\left(\sum_{i=0}^{\infty}(\lambda^i V_i)\right) = \mathbf{N}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^n A_n)\right). \quad (2.21)$$

Où λ : un paramètre introduit par convenance.

De (2.20) et (2.21) en déduit :

$$A_n = \left(\frac{1}{n!}\right) \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\mathbf{N}\left(\sum_{i=0}^n V_i \lambda^i\right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.22)$$

2.5.3 La méthode Adomian pour l'équation HJB

Considérons l'équation HJB de la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = H(y(t), u(t), V_y(\cdot), t), \\ V(y(0), 0) = h(y(0), 0). \end{cases} \quad (2.23)$$

avec $V_y = \frac{dV}{dy}$.

Considérons $\mathbf{L}_t = \frac{d}{dt}$, Ensuite nous avons,

$$\mathbf{L}_t V = H(y(t), u(t), V_y, t). \quad (2.24)$$

Puis en séparant le côté droit d'équation (2.24) en tant que terme linéaire et non linéaire, i.e

$$\mathbf{L}_t V = \mathbf{R}(V) + \mathbf{N}(V). \quad (2.25)$$

Maintenant, en prenant l'inverse de l'opérateur L sur les deux côtés de l'équation (2.25), nous obtenons

$$\mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{L}_t V = \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{R}(V) + \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{N}(V).$$

Ensuite nous avons, d'après (2.17) et (2.18)

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n = V_0 + \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{R}\left(\sum_{n=0}^{\infty} V_n\right) + \mathbf{L}_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right). \quad (2.26)$$

Où $V_0 = h(y(0), 0)$,

et les termes V_n peuvent être déduits d'après (2.19) comme suit :

$$\begin{cases} V_1 = \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{R}(V_0) - \mathbf{L}_t^{-1} A_0, \\ V_2 = \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{R}(V_1) - \mathbf{L}_t^{-1} A_1, \\ V_3 = \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{R}(V_2) - \mathbf{L}_t^{-1} A_2, \\ \vdots \\ V_{n+1} = \mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{R}(V_n) - \mathbf{L}_t^{-1} A_n. \end{cases}$$

Exemple 2.5.1. *Considérons le problème de contrôle ci-dessous :*

$$\begin{cases} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u^2(t) + y^2(t)) dt, \\ \dot{y}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

Tout d'abord, nous définissons la fonction Hamiltonienne associée :

$$\begin{aligned} H(y(t), u(t), V_y, t) &= g(y(t), u(t), t) + V_y f(y(t), u(t), t), \\ &= \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{2} y^2(t) + V_y u(t), \end{aligned} \tag{2.27}$$

on cherche

$$\frac{dH}{du}(y(t), u(t), V_y, t) = 0 \Rightarrow u(t) + V_y = 0.$$

Donc la solution est :

$$u(t) = -V_y.$$

Si on remplace $u(t)$ dans l'Hamiltonien (2.27), la formule suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} H(y(t), u(t), V_y, t) &= \frac{1}{2} V_y^2 + \frac{1}{2} y^2(t) - V_y^2 \\ &= \frac{1}{2} y^2(t) - \frac{1}{2} V_y^2. \end{aligned}$$

Son équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) est exprimée par la formule suivante

$$H(y(t), u(t), V_y(\cdot), t) + V_t = 0 \Rightarrow V_t = \frac{1}{2} V_y^2 - \frac{1}{2} y^2(t),$$

et la condition initial

$$V(y(t_f), t_f) = 0.$$

Donc

$$\begin{cases} V_t = \frac{1}{2} V_y^2 - \frac{1}{2} y^2(t), \\ V(y(t_f), t_f) = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Cela peut s'écrire

$$L_t V(y(t), t) = \frac{1}{2} V_y^2 - \frac{1}{2} y^2(t),$$

où $L_t = \frac{d}{dt}$.

Maintenant, en prenant l'inverse de l'opérateur L , noté $L^{-1} = \int_0^t [\cdot] dt$, des deux côtés, on obtient :

$$L_t^{-1} L_t V = \frac{1}{2} L_t^{-1} V_y^2 - \frac{1}{2} L_t^{-1} y^2(t),$$

ici

$$L_t^{-1} L_t V = V(y(\cdot), t) - V(y(t_f), t_f)$$

$$= V(y(\cdot), t).$$

et mettons $V(y(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$. Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n = V_0(y(t), t) + \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

Calcule $V_0(y(t), t)$:

$$V_0(y(t), t) = -\frac{1}{2} L_t^{-1} (y^2(t))$$

$$= -\frac{1}{2} \int_0^t y^2(s) ds$$

$$= -\frac{t}{2} y^2(t).$$

où V_y^2 est la partie non linéaire qui est remplacée par des polynômes A_n . et les termes A_n peuvent être obtenus comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = V_0^2, \\ A_1 = 2V_0V_1, \\ A_2 = V_1^2 + 2V_0V_2, \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Nous calculons $V_n(y(t), t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ comme suit :

❖ **Calcule** $V_1(y(t), t)$:

$$V_1(y(t), t) = \frac{1}{2} L_t^{-1} (V_{0y})^2$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t (-sy(s))^2 ds$$

$$= \frac{t^3}{6} y^2(t).$$

❖ *Calcule* $V_2(y(t), t)$:

$$\begin{aligned}
V_2(y(t), t) &= \frac{1}{2} \mathbf{L}_t^{-1} (2V_{0y}V_{1y}) \\
&= -\frac{1}{3} \int_0^t s^4 y^2(s) ds \\
&= -\frac{t^5}{15} y^2(t).
\end{aligned}$$

❖ *Calcule* $V_3(y(t), t)$:

$$\begin{aligned}
V_3(y(t), t) &= \frac{1}{2} \mathbf{L}_t^{-1} (2V_{0y}V_{2y} + (V_{1y})^2) \\
&= \frac{1}{2} \int_0^t \frac{4s^6}{15} y^2(s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{s^6}{9} y^2(s) ds \\
&= \frac{17}{630} y^2(t) t^7. \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot
\end{aligned}$$

Nous écrivons une solution finale sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_0(y(t), t) = -\frac{t}{2} y^2(t), \\ V_1(y(t), t) = \frac{t^3}{6} y^2(t), \\ V_2(y(t), t) = -\frac{t^5}{15} y^2(t), \\ V_3(y(t), t) = \frac{17}{630} y^2(t) t^7, \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \\ \quad \cdot \end{array} \right.$$

Maintenant, en substituant cette valeur dans $V(y(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$.
 Nous obtenons :

$$V(y(t), t) = -\frac{t}{2} y^2(t) + \frac{t^3}{6} y^2(t) - \frac{t^5}{15} y^2(t) + \frac{17}{630} y^2(t) t^7 + \dots$$

2.5.4 Méthode d'itérations variationnelles(VIM)

La méthode d'itération variationnelle (VIM) a été proposée et développée par le mathématicien chinois Je-HaunHe au début des années 1990 [9], [10], elle a été proposée la première fois pour résoudre des problèmes en mécanique. Cette méthode a été utilisée pour résoudre une variété de problèmes linéaires et non linéaires avec des approximations successives rapidement convergentes vers la solution exacte si elle existe.

Pour illustrer le concept de base de la méthode, ses principales étapes sont brièvement décrites, on considère l'équation différentielle non-linéaire suivante :

$$\mathbf{L}V + \mathbf{N}V = \mathbf{f}(t). \quad (2.29)$$

où :

$\mathbf{L}$: est un opérateur linéaire défini par $L = \frac{d^m}{dy^m}$, $m \in \mathbb{N}$, (tel que : $\mathbf{L}$ est la dérivée d'ordre le plus élevé et supposée inversible).

$\mathbf{L}$ (c'est un opérateur linéaire).

$\mathbf{N}$: est un opérateur non linéaire.

$\mathbf{f}$: le partie non homogène (fonction continue).

pour déterminer la solution de cette équation par la méthode VIM, on introduit une fonctionnelle de correction de l'équation (2.29) donnée comme suit

$$V_{n+1}(t) = V_n(t) + \int_0^t p(s) \{ \mathbf{L}V_n(s) + \mathbf{N}\tilde{V}_n(s) - \mathbf{f}(s) \} ds, \quad (2.30)$$

où p est le multiplicateur de Lagrange, qui peut être identifié de manière optimale par la théorie variationnelle, est une variation restreinte ce qui signifie $\delta\tilde{V}_n(s) = 0$.

Il est clair que les principales étapes de la méthode VIM demandent en premier lieu la détermination du multiplicateur qui sera identifié d'une façon optimale.

l'intégration par parties est utilisée pour la détermination du multiplicateur de Lagrange. Dans le cas d'une équation de premier et second ordre, l'intégration donne

$$\int_0^t p(s)V_n'(s)ds = p(s)V_n(s) - \int_0^t p'(s)V_n(s)ds, \quad (2.31)$$

$$\int_0^t p(s)V_n''(s)ds = p(s)V_n'(s) - p'(s)V_n(s) + \int_0^t p'(s)V_n(s)ds, \quad (2.32)$$

Les approximations successives $V_{n+1}(t)$, $n \geq 0$, de la solution $V_n(t)$ seront facilement obtenues en utilisant le multiplicateur de Lagrange déterminé et toute fonction sélective $V_0(t)$. En fait, la fonctionnelle de correction (2.30) donneront plusieurs approximations, et donc la solution exacte est obtenue comme limite des approximations successives résultantes.

La solution est donc donnée

$$V = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n(t).$$

Description de la méthode

pour illustrer les différentes étapes à suivre pour résoudre l'équation HJB, on suit les étapes suivantes.

Considérant l'équation différentielle générale d'Hamilton-Jacobi-Bellman suivante

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} + \frac{dV}{dy} f(y(t), u^*(t), t) + \mathbf{R}(y(t), u^*(t), t) = 0, \\ V(y(t_f), t_f) = h(y(t_f), t_f). \end{cases} \quad (2.33)$$

Cette équation est une condition suffisante pour l'optimalité. En général, il n'est pas possible de résoudre cette équation analytiquement et la recherche d'une solution approximative est au moins la solution la plus logique. Des méthodes numériques, dont la méthode VIM, sont appliquées ici. Dans la méthode VIM, la fonction de correction de l'équation (2.33) peut être utilisée et s'écrire comme suit

$$\begin{aligned} V_{n+1}(y, t) &= V_n(y(t), t) \\ &+ \int_0^{t_f} p(s) \left(\frac{dV_n(y(s), s)}{ds} + \frac{d\tilde{V}_n(y(s), s)}{dy} f(y(s), u^*(s), s) + \mathbf{R}(y(s), u^*(s), s) \right) ds. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Où :

p : le multiplicateur de Lagrange.

Ici, il peut s'agir d'une constante ou d'une fonction, et V est une valeur restreinte avec $\delta\tilde{V}_n = 0$. Où la variation des deux côtés de (2.35) par rapport à la variable indépendante V , nous trouvons

$$\frac{\delta V_{n+1}(y, t)}{\delta V_n} = 1 + \frac{\delta}{\delta V_n} \int_0^{t_f} p(s) \left(\frac{dV_n(y(s), s)}{ds} + \frac{d\tilde{V}_n(y(s), s)}{dy} f(y(s), u^*(s), s) + \mathbf{R}(y(s), u^*(s), s) \right) ds.$$

où équivalent

$$\begin{aligned} \delta V_{n+1}(y(t), t) &= \delta V_n(y(t), t) \\ &+ \delta \int_0^{t_f} p(s) \left(\frac{dV_n(y(s), s)}{ds} + \frac{d\tilde{V}_n(y(s), s)}{dy} f(y(s), u^*(s), s) + \mathbf{R}(y(s), u^*(s), s) \right) ds. \end{aligned} \quad (2.35)$$

ça donne

$$\delta V_{n+1}(y, t) = \delta V_n(y(t), t) + \delta \left(\int_0^{t_f} p(s) \frac{dV_n(y(s), s)}{ds} ds \right), \quad (2.36)$$

obtenu en utilisant $\delta\tilde{V}_n(y, s) = 0$ et $\delta h = 0$. En intégrale de (2.36) par parties on obtient

$$\delta V_{n+1}(y, t) = \delta V_n + \delta \left(p(s) V_n(y(s), s) \Big|_{s=0}^{s=t_f} \right) - \delta \left(\int_0^{t_f} p'(s) V_n(y(s), s) ds \right), \quad (2.37)$$

où équivalent

$$\delta V_{n+1}(y, t) = \delta (1 - p(s)|_{s=0}) V_n - \delta \left(\int_0^{t_f} p(s) V_n(y(s), s) ds \right). \quad (2.38)$$

La stationnarité de $V_{n+1}(y, t)$ requiert que $V_{n+1} = 0$. Cela signifie que le côté gauche de (2.38) et le côté droit doivent également être 0. Cela donne les conditions stationnarité suivante

$$\begin{cases} 1-p|_{s=0} = 0, \\ -p'(t)|_{s=0} = 0. \end{cases}$$

Ce qui donne

$$p(t) = 1.$$

Introduisant cette valeur de $p(t)$ dans l'équation (2.35).

$$\begin{aligned} V_{n+1}(y, t) &= V_n(y(t), t) \\ &+ \int_0^{t_f} \left(\frac{dV_n(y(s), s)}{ds} + \frac{dV_n(y(s), s)}{dy} f(y(s), u^*(s), s) + \mathbf{R}(y(s), u^*(s), s) \right) ds. \end{aligned} \quad (2.39)$$

$$V(y(t), t) = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n(y(t), t).$$

Exemple 2.5.2. Soit le problème de commande optimale suivant

$$\begin{cases} J(u) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} (u^2(t) + y^2(t)) dt, \\ \dot{y}(t) = u(t), \quad t \in [0, t_f], \\ y(0) = y_0. \end{cases}$$

On définit L Hamiltonienne associée :

$$\begin{aligned} H(y(t), u(t), V_y, t) &= g(y(t), u(t), t) + V_y f(y(t), u(t), t), \\ &= \frac{1}{2} u^2(t) + \frac{1}{2} y^2(t) + V_y u(t), \end{aligned}$$

l'équation Hamiltonien-Jacobi-Bellman s'écrit sous la formule suivante :

$$H(y(t), u(t), V_y, t) + V_t = 0.$$

Alors

$$\begin{cases} V_t = \frac{1}{2} V_y^2 - \frac{1}{2} y^2(t), \\ V(y(t_f), t_f) = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

Sa fonctionnelle de correction peut s'écrire sous la forme :

$$V_{n+1}(y, t) = V_n(y, t) + \int_0^t p(s) \left[V_{ns}(y, s) - \frac{1}{2} (V_{ny}(y, s))^2 + \frac{1}{2} y^2(s) \right] ds.$$

On pose $p = -1$ et en commençant par l'approximation initiale $V_0(y, t) = 0$. Nous calculons $V_n(y(t), t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ comme suit

❖ *Calcule* $V_1(y, t)$:

$$\begin{aligned} V_1(y, t) &= V_0(y, t) - \int_0^t \left[V_{0t}(y, s) - \frac{1}{2}(V_{0y}(y, s))^2 + \frac{1}{2}y^2(s) \right] ds. \\ &= -\frac{1}{2} \int_0^t y^2(s) ds. \\ &= -\frac{t}{2} y^2(t). \end{aligned}$$

❖ *Calcule* $V_2(y, t)$:

$$\begin{aligned} V_2(y, t) &= V_1(y, t) - \int_0^t \left[V_{1t}(y, s) - \frac{1}{2}(V_{1y}(y, s))^2 + \frac{1}{2}y^2(s) \right] ds. \\ &= -\frac{t}{2} y^2(t) - \int_0^t \frac{s^2}{2} y^2(s) ds. \\ &= -\frac{t}{2} y^2(t) + \frac{t^3}{6} y^2(t). \end{aligned}$$

❖ *Calcule* $V_3(y, t)$:

$$\begin{aligned} V_3(y, t) &= V_2(y, t) - \int_0^t \left[V_{2t}(y, s) - \frac{1}{2}(V_{2y}(y, s))^2 + \frac{1}{2}y^2(s) \right] ds. \\ &= V_2(y, t) - \int_0^t \left(-\frac{s^6}{18} y^2(s) + \frac{s^4}{3} y^2(s) \right) ds. \\ &= -\frac{t}{2} y^2(t) + \frac{t^3}{6} y^2(t) - \frac{t^5}{15} y^2(t) + \frac{t^7}{126} y^2(t). \end{aligned}$$

·
·
·

Nous formulons la solution finale comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(y(t), t) = -\frac{t}{2}y^2(t), \\ V_2(y(t), t) = -\frac{t}{2}y^2(t) + \frac{t^3}{6}y^2(t), \\ V_3(y(t), t) = -\frac{t}{2}y^2(t) + \frac{t^3}{6}y^2(t) - \frac{t^5}{15}y^2(t) + \frac{t^7}{126}y^2(t), \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

Approches ADM et VIM pour la résolution d'un problème de contrôle optimal

Introduction

Les deux grands principes permettant de traiter le problème du contrôle optimal, grâce au principe des minimums de Pontriaguine et le principe de Bellman sont présentés. Ce dernier conduit à l'équation aux dérivées partielles hyperbolique non linéaire du premier ordre s'appelle équation HJB.

En général, cette équation n'admet pas de solutions analytiques, donc trouver une solution approximative est une alternative intéressante.

Dans ce chapitre, nous appliquons les deux méthodes itératives ADM et VIM pour résoudre le problème de contrôle optimal en l'adoptant pour la résolution de l'équation différentielle de l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). La résolution de cette équation permet de déterminer le contrôle optimal de type feedback. L'efficacité et la convergence de ces méthodes sont démontrées en détail dans l'exemple de l'application.

3.1 Application numérique

Exemple 3.1.1. [6] *Considérer le problème du contrôle suivant :*

$$\begin{cases} J(u) = \int_0^1 \left(-y^2(t) - \frac{1}{4}u^2(t) \right) dt, \\ \dot{y}(t) = -\frac{1}{2}u(t) \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

On définit L'Hamiltonien associé :

$$H(y(t), u(t), V_y, t) = g(y(t), u(t), t) + V_y f(y(t), u(t), t), \quad (3.1)$$

$$= -y^2(t) - \frac{1}{4}u^2(t) + V_y \left(-\frac{1}{2}u(t) \right), \quad (3.2)$$

on cherche :

$$\frac{dH}{du}(y(t), u(t), V_y, t) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}u(t) - \frac{1}{2}V_y = 0.$$

Donc la solution est :

$$u(t) = -V_y.$$

On remplace $u(t)$ dans L'Hamiltonien est donné par la formule suivante :

$$H(y(t), u(t), V_y(\cdot), t) = -y^2(t) + \frac{1}{4}V_y^2(\cdot).$$

Son équation Hamiltonien-Jacobi-Bellman, écrire par la formule suivante :

$$H(y(t), u(t), V_y(\cdot), t) + V_t = 0 \Rightarrow V_t = -H(y(t), u(t), V_y(\cdot), t).$$

Alors

$$\begin{cases} V_t = y^2(t) - \frac{1}{4}V_y^2, \\ V(y(0), 0) = 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

3.2 Résolution analytique (programmation dynamique)

Dans cette partie, nous allons déterminer la fonction valeur de solution de l'équation HJB (3.1) selon la forme séparée suivante :

$$V(y(t), t) = -\phi(t)y^2(t),$$

alors

$$\frac{dV(y(t), t)}{dt} = -\phi'(t)y^2(t),$$

et

$$\frac{dV(y(t), t)}{dy} = -2\phi(t)y(t),$$

alors l'équation HJB (3.1) s'écrit :

$$\begin{cases} -\phi'(t)y^2(t) = y^2(t) - \phi^2(t)y^2(t), \\ \phi(0) = 0. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} -\phi'(t) - 1 + \phi^2(t) = 0, \\ \phi(0) = 0. \end{cases}$$

On a

$$\phi'(t) = \phi^2(t) - 1,$$

alors

$$\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\phi(t) - 1}{\phi(t) + 1} \right| = t + c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

qui donne

$$\left| \frac{\phi(t) - 1}{\phi(t) + 1} \right| = c_1 e^{2t}, \quad c_1 \in \mathbb{R}^*$$

$$\phi(t) - 1 = c_1 e^{2t} (\phi(t) + 1).$$

Ce qui donne

$$\phi(t) = \frac{1 + c_1 e^{2t}}{1 - c_1 e^{2t}},$$

comme $\phi(0) = 0$, on aura

$$\frac{1 + c_1}{1 - c_1} = 0$$

$$\Rightarrow c_1 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow c_1 = -1.$$

Par suite

$$\phi(t) = \frac{1 - e^{2t}}{1 + e^{2t}}$$

$$= \tanh(-t),$$

avec $\tanh(-t) = -\tanh(t)$.

Alors

$$V(y(t), t) = -\phi(t)y^2(t)$$

$$= \tanh(t)y^2(t).$$

Calculer le contrôle optimal :

$$\begin{aligned}u^*(t) &= -\frac{dV}{dy} \\ &= -2y^*(t) \tanh(t)\end{aligned}$$

Calculer la trajectoire optimale :

$$\dot{y}^*(t) = -\frac{1}{2}u(t) \Rightarrow \dot{y}^*(t) = y^*(t) \tanh(t)$$

En intégrant, on obtient

$$\ln |y^*(t)| = \ln |\cosh(t)| + C$$

Donc,

$$y^*(t) = K \cosh(t).$$

D'après la condition initiale, on obtient

$$y^*(0) = 1 \Rightarrow K = 1.$$

En remplaçant la valeur de K dans l'équation, on a

$$y^*(t) = \cosh(t).$$

La solution finale s'écrit comme suit

$$\begin{aligned}u^*(t) &= -2y^*(t) \tanh(t) \\ &= -2(\cosh(t)) \tanh(t) \\ &= -2 \cosh(t) \tanh(t).\end{aligned}$$

Ainsi, la solution finale est

$$u^*(t) = -2 \cosh(t) \tanh(t).$$

3.3 Résolution par la méthode de décomposition Adomian (ADM)

On va résoudre l'équation (3.3) par la méthode ADM :

$$\mathbf{L}_t V(y(t), t) = y^2(t) - \frac{1}{4} V_y^2,$$

où $L_t = \frac{d}{dt}$.

Maintenant, en prenant l'opérateur l'inverse $L_t^{-1} = \int_0^t [\cdot] dt$ des deux côtés, on aura :

$$\mathbf{L}_t^{-1} = \int_0^t [\cdot] dt$$

ici

$$\mathbf{L}_t^{-1} \mathbf{L}_t V(y(t), t) = V(y(t), t) - V(y(0), 0)$$

$$= V(y(t), t).$$

et mettons $V(y(t), t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$. Nous avons

$$\sum_{n=0}^{\infty} V_n = V_0(y(t), t) - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

Calcule $V_0(y(t), t)$:

$$V_0 = \mathbf{L}_t^{-1}(y^2(t))$$

$$= \int_0^t y^2(s) ds$$

$$= t y^2(t).$$

où $V_y^2(\cdot)$ est la partie non linéaire qui est remplacée par des polynômes A_n . et les termes A_n peuvent être déduits comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0 = V_0^2, \\ A_1 = 2V_0V_1, \\ A_2 = V_1^2 + 2V_0V_2, \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Nous calculons $V_n(y(t), t)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ comme suit :

❖ *Calcule* $V_1(y(t), t)$:

$$\begin{aligned}
V_1(y(t), t) &= -\frac{1}{4} \mathbf{L}_t^{-1} (V_{0y})^2 \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^t (2y(s)s)^2 ds \\
&= -\frac{1}{3} y^2(t) t^3.
\end{aligned}$$

❖ *Calcule* $V_2(y(t), t)$:

$$\begin{aligned}
V_2(y(t), t) &= -\frac{1}{4} \mathbf{L}_t^{-1} (2V_{0y}V_{1y}) \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^t \left(-\frac{8}{3} y^2(s)s^4\right) ds \\
&= \frac{2}{15} y^2(t) t^5.
\end{aligned}$$

❖ *Calcule* $V_3(y(t), t)$:

$$\begin{aligned}
V_3(y(t), t) &= -\frac{1}{4} \mathbf{L}_t^{-1} \left(2V_{0y}V_{2y} + (V_{1y})^2\right) \\
&= -\frac{1}{4} \int_0^t \frac{4}{9} y^2(s)s^6 + \frac{16}{15} y^2(s)s^6 ds \\
&= -\frac{4}{15} \int_0^t y^2(s)s^6 ds - \frac{1}{9} \int_0^t y^2(s)s^6 ds \\
&= -\frac{17}{315} y^2(t) t^7.
\end{aligned}$$

·
·
·

Nous écrivons une solution finale sous la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(y(t), t) = -\frac{1}{3}y^2(t)t^3, \\ V_2(y(t), t) = \frac{2}{15}y^2(t)t^5, \\ V_3(y(t), t) = -\frac{17}{315}y^2(t)t^7, \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

Maintenant, en substituant cette valeur dans (2.26) et $V = \sum_{n=0}^{\infty} V_n$.

Nous obtenons :

$$V = ty^2(t) - \frac{1}{3}y^2(t)t^3 + \frac{2}{15}y^2(t)t^5 - \frac{17}{315}y^2(t)t^7 + \dots$$

Calculer le contrôle optimal :

D'après les trois itérations, on obtient

$$\begin{aligned} V_3 &= ty^2(t) - \frac{1}{3}y^2(t)t^3 + \frac{2}{15}y^2(t)t^5 - \frac{17}{315}y^2(t)t^7 \\ &= \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 \right) y^2(t) \end{aligned}$$

on a

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -\frac{dV_3}{dy} \\ &= -2y^*(t) \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 \right) \end{aligned}$$

Calculer la trajectoire optimale :

$$\dot{y}^*(t) = -\frac{1}{2}u(t) \Rightarrow \dot{y}^*(t) = y^*(t) \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 \right)$$

En intégrant, on obtient

$$\ln |y^*(t)| = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{17t^8}{2520} + C$$

Donc,

$$y^*(t) = K e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{17t^8}{2520}}$$

D'après la condition initiale, on obtient

$$y^*(0) = 1 \Rightarrow K = 1.$$

En remplaçant la valeur de K dans l'équation, on a

$$y^*(t) = e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{17t^8}{2520}}.$$

La solution finale s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -2y^*(t) \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 \right) \\ &= -2 \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 \right) e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{17t^8}{2520}} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution finale est

$$u^*(t) = -2 \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{17}{315}t^7 \right) e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{17t^8}{2520}}.$$

3.4 Résolution par la méthode d'itérations variationnelles (VIM)

La fonctionnelle de correction peut s'écrit sous la forme :

$$V_{n+1}(y(t), t) = V_n(y(t), t) + \int_0^t p(s) \left[V_{ns}(y(s), s) + \frac{1}{4}(V_{ny}(y(s), s))^2 - y^2(s) \right] ds.$$

On pose $p(s) = -1$ et en commençant par l'approximation initiale $V_0(y, t) = 0$.

Nous calculons $V_n(y(t), t)$, $n \in \mathbb{N}^*$ comme suit

❖ **Calcule** $V_1(y(t), t)$:

$$\begin{aligned} V_1(y(t), t) &= V_0(y(t), t) - \int_0^t \left[V_{0t}(y(s), s) + \frac{1}{4}(V_{0y}(y(s), s))^2 - y^2(s) \right] ds. \\ &= - \int_0^t (-y^2(s)) ds. \\ &= y^2(t)t. \end{aligned}$$

❖ **Calcule** $V_2(y(t), t)$:

$$\begin{aligned} V_2(y(t), t) &= V_1(y(t), t) - \int_0^t \left[V_{1t}(y(s), s) + \frac{1}{4}(V_{1y}(y(s), s))^2 - y^2(s) \right] ds. \\ &= y^2(t)t - \int_0^t (y^2(s)s^2) ds. \\ &= y^2(t)t - \frac{1}{3}y^2(t)t^3. \end{aligned}$$

❖ **Calcule** $V_3(y(t), t)$:

$$\begin{aligned}
V_3(y(t), t) &= V_2(y(t), t) - \int_0^t \left[V_{2t}(y(s), s) + \frac{1}{4}(V_{2y}(y(s), s))^2 - y^2(s) \right] ds. \\
&= V_2(y(t), t) - \int_0^t \left(-\frac{2}{3}y^2(s)s^4 + \frac{1}{9}y^2(s)s^6 \right) ds. \\
&= y^2(t)t - \frac{1}{3}y^2(t)t^3 + \frac{2}{15}y^2(t)t^5 - \frac{1}{63}y^2(t)t^7. \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot \\
&\quad \cdot
\end{aligned}$$

Nous écrivons la solution finale sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} V_1(y(t), t) = y^2(t)t, \\ V_2(y(t), t) = y^2(t)t - \frac{1}{3}y^2(t)t^3, \\ V_3(y(t), t) = y^2(t)t - \frac{1}{3}y^2(t)t^3 + \frac{2}{15}y^2(t)t^5 - \frac{1}{63}y^2(t)t^7, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{array} \right.$$

Donc

$$V_3 = y^2(t)t - \frac{1}{3}y^2(t)t^3 + \frac{2}{15}y^2(t)t^5 - \frac{1}{63}y^2(t)t^7.$$

Calculer le contrôle optimal :

D'après les trois itérations, on obtient

$$V_3 = y^2(t)t - \frac{1}{3}y^2(t)t^3 + \frac{2}{15}y^2(t)t^5 - \frac{1}{63}y^2(t)t^7.$$

$$= \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 \right) y^2(t)$$

on a

$$\begin{aligned}
u^*(t) &= -\frac{dV_3}{dy} \\
&= -2y^*(t) \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7 \right)
\end{aligned}$$

Calculer la trajectoire optimale :

$$\dot{y}^*(t) = -\frac{1}{2}u(t) \Rightarrow \dot{y}^*(t) = \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7\right) y^*(t)$$

En intégrant, on obtient

$$\ln |y^*(t)| = \frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{t^8}{504} + C$$

Donc,

$$y^*(t) = K e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{t^8}{504}}$$

D'après la condition initiale, on obtient

$$y^*(0) = 1 \Rightarrow K = 1.$$

En remplaçant la valeur de K dans l'équation, on a

$$y^*(t) = e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{t^8}{504}}.$$

La solution finale s'écrit comme suit

$$\begin{aligned} u^*(t) &= -2y^*(t) \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7\right) \\ &= -2 \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7\right) e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{t^8}{504}} \end{aligned}$$

Ainsi, la solution finale est

$$u^*(t) = -2 \left(t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 - \frac{1}{63}t^7\right) e^{\frac{t^2}{2} - \frac{t^4}{12} + \frac{2t^6}{90} - \frac{t^8}{504}}.$$

D'après l'analyse des erreurs présentée dans le Tableau (3.1), nous pouvons conclure que le résultat obtenu avec l'ADM est meilleur que celui obtenu avec le VIM. En d'autres termes, l'ADM fournit une meilleure approximation pour l'équation HJB.

Temps	Erreur absolue d'ADM	Erreur absolue d'VIM
0.1	2.18×10^{-11}	3.79×10^{-9}
0.2	1.10×10^{-8}	4.77×10^{-7}
0.3	4.15×10^{-7}	7.92×10^{-6}
0.4	5.38×10^{-6}	5.70×10^{-5}
0.5	3.88×10^{-5}	0.000259
0.6	0.000192	0.000874
0.7	0.000736	0.002401
0.8	0.002331	0.005658
0.9	0.006379	0.011842
1	0.015562	0.022533

TABLE 3.1 – Comparaison des erreurs absolue entre les deux méthodes.

Voici, la figure (3.1) représente les solutions de l'ADM, du VIM et de l'Exacte, et la figure (3.2) montre l'erreur absolue de l'ADM et du VIM par rapport à l'Exacte.

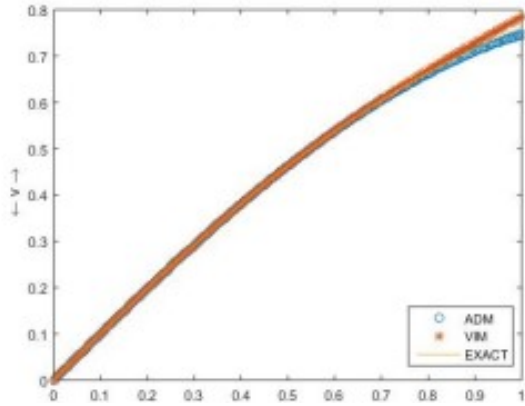


FIGURE 3.1 – Solutions données par ADM, VIM et Exactes.

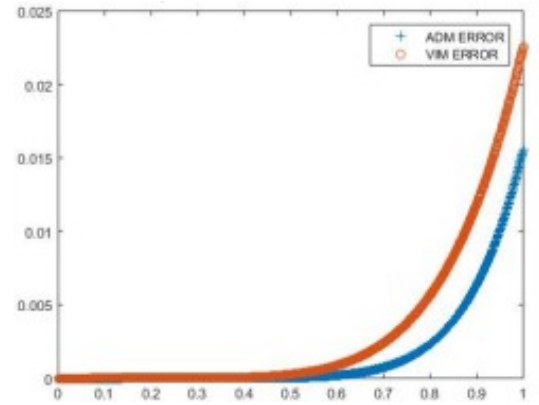


FIGURE 3.2 – Erreur Absolue de l'ADM et du VIM par rapport à l'Exact

Cette section présente une comparaison entre les valeurs exactes de la fonction $u^*(t)$ et les solutions obtenues par deux méthodes analytiques : la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et la méthode variationnelle itérative (VIM). Les erreurs absolues associées à chaque méthode sont également fournies pour évaluer la précision des approximations.

Temps	Valeur exacte	Valeur ADM	Erreur absolue d'ADM
0.1	-0.2003	-0.1909	0.0094
0.2	-0.4027	-0.4026	0.0001
0.3	-0.6090	-0.6091	0.0001
0.4	-0.8215	-0.8216	0.0001
0.5	-1.0422	-1.1272	0.085
0.6	-1.2733	-1.2748	0.0015
0.7	-1.5172	-1.3035	0.2137
0.8	-1.7762	-1.7835	0.0073
0.9	-2.0530	-2.0634	0.0104
1	-2.350	- 2.2985	0.0515

TABLE 3.2 – Comparaison de la solution exacte avec la solution obtenue par méthode VIM.

Temps	Valeur exacte	Valeur VIM	Erreur absolue d'VIM
0.1	-0.2003	-0.2003	0.0000
0.2	-0.4027	-0.4034	0.0007
0.3	-0.6090	-0.6090	0.0000
0.4	-0.8215	-0.8217	0.0002
0.5	-1.0422	-1.0433	0.0011
0.6	-1.2733	-1.2774	0.0041
0.7	-1.5172	-1.5292	0.012
0.8	-1.7762	-1.8435	0.0673
0.9	-2.0530	-2.1197	0.0667
1	-2.350	- 2.6752	0.3252

TABLE 3.3 – Comparaison de la solution exacte avec la solution obtenue par méthode VIM .

Remarque : *Il s'agit du fait que le résultat obtenu avec l'ADM est meilleur que celui obtenu avec le VIM. En d'autres termes, l'ADM fournit une meilleure approximation pour l'équation HJB.*

3.5 Conclusion

L'objectif de ce chapitre est de proposer quelques méthodes pour développer une commande optimale pour un système dynamique, en cherchant à optimiser un critère de performance spécifique.

La phase clé implique de trouver l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème de contrôle optimal, suivie de la résolution de cette équation aux dérivées partielles pour obtenir la solution. On applique différentes méthodes telles que la méthode ADM et la méthode VIM. Grâce à l'application des méthodes ADM et VIM, il devient possible de trouver une solution approximative de l'équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman à l'aide d'une formule itérative, simplifiant ainsi la détermination de la contrôle optimal.

On peut en déduire que les méthodes ADM et VIM sont extrêmement robustes et efficaces, fournissant une solution approximative et analytique pour les équations différentielles.

Conclusion générale

L'objectif de notre travail est de fournir une synthèse du théorème de contrôle optimal des systèmes dynamiques en utilisant l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Étant donné que cette équation est non linéaire et très difficile à résoudre analytiquement, nous faisons appel à des méthodes itératives couramment utilisées, comme la méthode de décomposition d'Adomian (ADM) et la méthode des itérations variationnelles (VIM). Ces méthodes permettent d'obtenir une solution convergente vers celle exacte de l'équation HJB.

Premièrement, Nous abordons quelques notions fondamentales concernant un problème de contrôle optimal. Deuxièmement, nous présentons le principe de l'HJB (programmation dynamique). Ensuite, nous définissons l'équation différentielle HJB et utilisons des outils mathématiques, appelés méthodes itératives, pour déterminer la solution de cette équation. L'idée fondamentale de ces méthodes est de trouver la solution de manière itérative à partir d'une approximation initiale, en prenant en compte les conditions initiales ou les conditions aux limites. Parmi ces méthodes, celles qui sont les plus répandues et largement documentées dans la littérature sont la méthode de décomposition d'Adomian et les itérations variationnelles.

Dernièrement, nous avons extrait les polynômes d'ADM et VIM et nous avons remarqué qu'ils convergent vers la solution exacte.

À ce stade, il est essentiel de noter que les méthodes offrent les principaux avantages suivants :

- Fréquemment, elle tend à converger vers la solution exacte si celle-ci existe, sinon, une solution approximative peut toujours être obtenue.
- En ce qui concerne la programmation dynamique (équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman), la solution peut être obtenue sous forme d'un feedback.

Ainsi, nous pouvons affirmer que les méthodes présentées se révèlent être extrêmement puissantes et efficaces pour obtenir des solutions analytiques et approximatives des équations différentielles.

Bibliographie

- [1] G. Adomian, Solving frontier problems of physics : the Decomposition Method. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1994.
- [2] A. AKKOUCHE, A. MAIDI and M. AIDENE ,Solving Optimal Control Problems by Variational Approach Based on the Adomian's Decomposition Method, Proceedings of the 3rd International Conference on Systems and Control, Algiers, Algeria, October 29-31, 2013.
- [3] Alexandre Ern, MAP434 - Contrôle de modèles dynamiques, ENPC - INRIA - X, amphi du mardi 28 mai 2019.
- [4] M. Azi, Optimisation des systèmes dynamiques et application en économie financière, Thèse de Doctorat, Université A. Mira de Béjaia, 2021.
- [5] R. Bellman. Dynamic Programming. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1957.
- [6] Bhimsen Khadka and Durga Jang K.C., *A Few Methods of Solving Optimal Control Problem in Hamilton-Jacobi-Bellman Equation Form*, Journal of the Society of Engineers, Vol. 9, 2021.
- [7] Bonnans, J. F. (2015). Commande optimale.
- [8] S. Boyd and L. Vandenberghe. Convex Optimization. Cambridge, United Kingdom : Cambridge University Press, 2004.
- [9] J. H. He. Variational iteration method for autonomous ordinary differential systems. Applied mathematics and computation, 114(2-3) :115–123, 2000.
- [10] J. H. He. Variational iteration method—some recent results and new interpretations. Journal of computational and applied mathematics, 207(1) :3–17, 2007.
- [11] R.E. Kalman, Contributions to the theory of optimal control. Boletinde Sociedad Matematica Mexicana 1960.
- [12] Mokkedem, F. Z. (2019). Introduction à la théorie du contrôle. Abou Bakr Belkaid University of Tlemcen.
- [13] C.L.Navasca and A.J.kener "solution of hamilton-Jacobi-Bellman Equation" Departement of mathématiques, University of California. Davis, CA 95616-8633.
- [14] Nenik Nijmeijer, Arjan Van Der Shaft, Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer-Verlag New York Inc. 1990.

- [15] D.Ouidja "Principe de maximum et la méthode de tir." Mémoire de Magister U.M.M.T.O. 2011.
- [16] A. V. Rao. A survey of numerical methods for optimal control. Applied Mathematics and Computation, 345 :543-548, 2007.
- [17] R. W. H. Sargent. Optimal control. Journal of Computational and Applied Mathematics, 124 :361-371, 2000.
- [18] E.Trealat, Contrôle optimal : Théorie et Applications. université Paris-Sud, laboratoire EN-EDP mathématiques UMR 8628 Bat u25, 91405 osay cedex 2005.
- [19] A, Fakhriam-M.T Hamidi Beheshti and A, Davari "solving de Hamilton-Jacobi-Bellman equation using Adomian décomposition method" international of computer Mathematics, 87(12)-2010.