N° d'ordre : .................


RÉPUBLIQUE ALGÉRIÈNNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET

DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

**Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira**

**Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées**


# MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MASTER**

En : **Mathématiques**

Spécialité : **Recherche opérationnelle**


Par : **HASSANI Roufaida**


## Sujet :

# Existence et comportement asymptotique d'un système couplé des l'équations des ondes viscoélastiques non-linéaires

*Soutenu publiquement le **27/06/2024**, devant le jury composé de :*

| | | |
|---|---|---|
| ***BOUDANE Khadidja*** | Maître Assistante/**A** | Présidente |
| ***BERKANI Amirouche*** | Maître de Conférence/**A** | Encadreur |
| ***MELOUANE Nassima*** | Maître de Conférence/**B** | Examinatrice |
| ***BANOUH Hicham*** | Maître de Conférence/**B** | Examinateur |

***Promotion 2023/2024***

# Remerciements

Je remercie avant tout Allah qui m'a donné la force et la volonté pour achever ce travail.

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Dr. BERKANI Amirouche**, enseignant à l'université de Bouira, pour son aide, sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif. Pendant ces années, il m'a témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Merci au membres de jury, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et nous les en remercions sincèrement.

Sans oublier de remercier tous nos enseignants pendant tous les paliers de notre parcours, et exceptionnellement aux enseignants qui ont enrichi nos connaissances.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire est vivement remerciée.

# Résumé

L'objet principal de ce mémoire est d'étudier l'existence et l'unicité ainsi que la comportement asymptotique de la solution d'un système couplé des 'équations d'ondes viscoélastiques non-linéaires. Après une introduction, nous allons présenter dans le chapitre 1 quelques notions fondamentales de l'analyse fonctionnelle. En utilisant la méthode de Faedo-Galerkin et les résultats de compacités, nous allons montrer que le système admet une solution unique.

Enfin, nous allons démontrer, la décroissance générale de la solution en utilisant la méthode des multiplicateurs. Plus précisément, dans ce travail on a détail l'article de Muhammad I. Mustafa [8] intitulé : **Well posedness and asymptotic behavior of a coupled system of nonlinear viscoelastic equations**. Nonlinear Analysis : Real World Applications 13 :452–463 (2012).



**Mots-clés :** *Équation aux dérivées partielles non-linéaires ; équation des ondes ; opérateur intégro-différentiel ; existence et unicité de la solution ; méthode de Faedo-Galerkin ; terme mémoire ; fonction de relaxation ; décroissance générale.*

# Table des matières

# Introduction générale

Notre compréhension des phénomènes du monde réel et notre technologie sont aujourd'hui en grande partie basées sur les équations aux dérivées partielles (É.D.P). C'est en effet grâce à la modélisation de ces phénomènes à travers des équations aux dérivées partielles, qui nous permettent de comprendre le rôle de tel ou tel paramètre, et surtout obtenir des prévisions parfois extrêmement précises. En particulier les équations d'ondes modélisent plusieurs phénomènes naturels en : Physique, Chimie, Biologie,..., etc.

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par les propriétés de propagation des ondes. On peut citer les ondes se propageant à la surface de l'eau à la suite de la chute d'un objet, les vagues se déplaçant à la surface de la mer, les ondes produites sur les cordes vibrantes, les ondes sonores, les ondes radio, les ondes optiques, etc. Du point de vue mathématique, le mouvement et les propriétés de ces ondes sont décrits, dans une bonne approximation, par une même équation, l'équation de d'Alembert (à une ou à plusieurs dimensions d'espace, suivant le cas), ce qui place l'étude des ondes sur un plan très général.

Dans ce travail, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution ainsi que le comportement asymptotique de la solutions d'un système couplé des 'équations des ondes viscoélastiques non-linéaires. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude du problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + f_1(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + f_2(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{1}$$

avec les condition au limite de type Dirichlet et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u = v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad v_t(x,0) = v_1(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

où $\Omega$ est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $\Gamma$ sa frontière. Les fonctions $u$ et $v$ sont essentiellement bornées et $\Delta$ est l'opérateur de Laplacien défini par $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Les fonctions $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions non-linéaires, et les fonctions $u_0$, $u_1$, $v_0$ et $v_1$ sont données. Comme il n'y a aucune dissipations dans le problème, en général le système n'est pas stable. En profitant de la propriétés physique des les matériaux viscoélastiques on peut établir la stabilité de système car ils fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire. Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiels dans les équations plus précisément c'est les termes intégrales suivants $\int_0^t g_1(t-s)\Delta u(x,s)\, ds$ et $\int_0^t g_2(t-s)\Delta v(x,s)\, ds$ avec $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions qui serons préciser dans la suite. Plus précisément, on s'intéresse à l'étude du problème suivant

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\, d\tau + f_1(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_{tt}(x,t) - \Delta v(x,t) + \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(x,\tau)\, d\tau + f_2(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,t) = v(x,t) & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad v_t(x,0) = v_1(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Des applications physiques du système ci-dessus sont liées aux problèmes de contrôle du bruit et de la suppression des vibration dans les applications pratiques. Pour plus des explications physiques sur les équations d'ondes viscoélastiques avec différentes types des conditions aux limites, nous renvoyons le lecteur à [5].

Ce travail est décomposé en trois chapitres.

**Chapitre 1 :** Dans ce chapitre nous présentons des rappels sur d'analyse fonctionnelle qui seront utilisés dans notre travail. En particulier, nous donnons quelques résultats fondamentaux concernant les espaces fonctionnels et les théorèmes d'existence pour certains problèmes d'évolution.

**Chapitre 2 :** Dans ce chapitre, nous allons voir que la méthode introduite par Muhammad I. Mustafa [8] est efficace dans notre cas. En appliquant cette méthode, nous allons prouver un résultat d'existence et unicité de la solution des l'équations des ondes intégro-différentielles.

**Chapitre 3 :** Dans cette partie, nous allons démontrer, comme dans l'article de Muhammad I.Mustafa [8], la décroissance générale de la solution. Les techniques utilisées sont basées sur la construction d'une fonction de Lyapunov $F$, qui est équivalente à la fonctionnelle d'énergie du problème (2). Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion.

Chapitre 1

# Quelques résultats de base

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques notions fondamentales qui nous seront utiles par la suite. Nous introduirons quelques espaces fonctionnels, ensuite nous annonçons des notions fondamentales en utilisant dans ce mémoire.

## 1.1 Les espaces $C^k(\Omega)$

Soient $m$ un entier positif et $\Omega$ un intervalle de $\mathbb{R}$. On notera par :

$C(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$\big(C(\Omega)\big)^m$ l'espace des fonctions continues de $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$,

$C_b(\overline{\Omega})$ l'espace des fonctions continues sur $\overline{\Omega}$, on le munit de la norme

$$\|u\|_\infty = \sup_{x\in\overline{\Omega}} |u(x)|.$$

Pour $k \geq 1$, $k \in \mathbb{N}$, on définit alors :

$C^k(\Omega)$ l'espace des fonctions $u$ qui sont $k$ fois dérivables et dont la dérivée d'ordre $k$ est continue sur $\Omega$,

$C_c^k(\Omega)$ est l'espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ dont le support est compact et inclus dans $\Omega$,

$C_0^\infty(\Omega)$ est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables à supports compacts qu'on appelle espace des fonctions test.

## 1.2 Espace séparable

**Définition 1.2.1** *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

**Théorème 1.2.1** *Soit $E$ un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_n$ une suite bornée dans $E$. Alors il existe une sous-suite extraite $\left(x_{n_k}\right)$ qui converge pour la topologie $\sigma(E, E^*)$.*

**Démonstration.** Voir [2]. ■

## 1.3 Espaces $L^p(\Omega) : 1 \leq p < \infty$

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des classes des fonctions intégrables sur $\Omega$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

L'espace vectoriel $L^1(\Omega)$ devient un espace complet muni de la norme :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |u(x)|\, dx.$$

Si $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p < \infty$, on définit l'espace des classes de fonctions $L^p(\Omega)$ par :

$$L^p(\Omega) = \left\{u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R},\ u \text{ mesurable et } \int_\Omega |u(x)|^p\, dx < \infty\right\}.$$

On munit cet espace vectoriel de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

qui le rend complet.

Si $p = \infty$, on définit :

$$L^\infty(\Omega) = \left\{u : \exists C > 0,\ \text{telle que } u \text{ est mesurable et } |u(x)| < C\right\}.$$

Cet espace vectoriel est complet pour la norme :

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf\left\{M > 0,\ |u(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\right\}.$$

**Remarque 1.3.1** *L'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u,v) = \int_\Omega uv\,dx,\ u,v \in L^2(\Omega)$$

*est un espace de Hilbert et l'espace $L^\infty(\Omega)$ est un espace de Banach.*

## 1.4 Espaces de Sobolev

**Définition 1.4.1** *(Dérivée faible) On dit que $u$ est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $w \in L^2(\Omega)$, telle que $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait*

$$\int_\Omega u(x)\frac{dv(x)}{dx}dx = -\int_\Omega v(x)w(x)dx. \tag{1.1}$$

*Cela revient à dire que $\frac{du(x)}{dx} = w(x)$ au sens des distributions.*

### Espace $W^{1,p}(\Omega)$

Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit l'espace vectoriel $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega),\ \text{tel que} : \frac{du(x)}{dx} \in L^p(\Omega) \right\}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \frac{du(x)}{dx} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose

$$H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega).$$

### Espaces $W^{m,p}(\Omega)$

Pour $m \geq 2$, $1 \leq p \leq \infty$, on définit $W^{m,p}(\Omega)$ par :

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u \in W^{m-1,p}(\Omega), \text{tel que } \frac{d^k u}{dx^k} \in L^p(\Omega),\ k \leq m \right\}$$

où $k \in \mathbb{N}$ et $\frac{d^k u}{dx^k}$ est la dérivée faible d'ordre $k$ de $u$ au sens de la définition (1.4.1). C'est un espace de Banach muni de la norme :

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{k\leq m} \left\| \frac{d^k u}{dx^k} \right\|_{L^p(\Omega)} .$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

**Remarque 1.4.1** *Les espaces $H^m(\Omega)$, sont des espaces de Hilbert muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = (u,v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{k\leq m} \left( \frac{d^k u}{dx^k}, \frac{d^k v}{dx^k} \right)_{L^2(\Omega)}, \ u,v \in H^m(\Omega).$$

## 1.5 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

**Définition 1.5.1** *Soient $1 \leq p < \infty$ et $X$ un espace de Banach, si $p$ est fini on définit $L^p(0,T;X)$ par :*

$$L^p\big(0,T;X\big) = \left\{ u : [0,T] \to X \text{ mesurable, telle que } \int_0^T \|u\|_X^p \, dt < \infty \right\}$$

*où $[0,T]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On munit cet espace de la norme :*

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left( \int_0^T \|u\|_X^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

*Si $p$ est infini, alors on définit*

$$L^\infty\big(0,T;X\big) = \left\{ u : ]0,T[ \to X \text{ mesurable, telle que } \sup_{t\in[0,T]} ess \|u\|_X < \infty \right\}.$$

*On le munit de la norme*

$$\|u\|_{L^\infty(0,T;X)} = \sup_{t\in[0,T]} ess \|u(t)\|_X .$$

**Théorème 1.5.1** *Les espaces $L^p\big(0,T;X\big)$ munis des normes précédentes sont des espaces de Banach pour $p \in [0,\infty]$.*

**Démonstration.** Voir [2]. ■

On peut, comme dans le cas d'une fonction réelle définir la dérivée au sens classique ou au sens généralisé d'une fonction à valeurs vectorielles.

**Définition 1.5.2** *$C\big([0,T],X\big)=\Big\{u:[0,T]\longrightarrow X$ continue i.e. $\|u(t)-u(t_0)\|$ tend vers zéro quand $t$ tend vers $t_0\Big\}$. Si pour tout $t_0\in[0,T]$, la limite suivante existe dans $X$*

$$u'(t_0)=\lim_{h\longrightarrow 0}\frac{1}{h}\Big[u(t_0+h)-u(t_0)\Big]$$

*alors on dira que $u$ est dérivable au sens classique et si de plus, la fonction $t\longmapsto u'(t)$ est continue on dira alors que $u$ appartient à $C^1\big([0,T],X\big)$. De façon générale, pour $k\geq 1$ entier, on peut définir :*

$$C^k\big([0,T],X\big)=\Big\{u\in C^{k-1}\big([0,T],X\big)\ \textit{tel que}\ u^{(k)}\in C\big([0,T],X\big)\Big\}.$$

### 1.5.1 Inégalités

**Lemme 1.5.1** *(Inégalité de Hölder) (Voir [1]) Soit $1<p\leq\infty$; on désigne par $q$ l'exposant conjugué de $p$ définie par*

$$q=\frac{p}{p-1}\quad \textit{c'est à dire}\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

*Si $u\in L^p(\Omega)$ et $v\in L^q(\Omega)$, alors $uv\in L^1(\Omega)$ et*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx\leq \|u\|_{L^p(\Omega)}\|v\|_{L^q(\Omega)}. \tag{1.2}$$

**Corollaire 1.5.1** *Si $p=q=2$ on obtient l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$\int_\Omega |u(x)v(x)|dx\leq \|u\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.3}$$

**Lemme 1.5.2** *(Inégalité de Young) Soient $1<p,q<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ et $a,b\geq 0$. Alors pour tout $\eta>0$,*

$$ab\leq \eta a^p+C_\eta b^q$$

*où*

$$C_\eta = \frac{1}{q\left(\eta p\right)^{\frac{p}{q}}}.$$

**Démonstration.** Voir [5]. ∎

**Remarque 1.5.2** *pour $p = q = 2$, l'inégalité précédente s'écrit sous la forme*

$$ab \leq \eta a^2 + \frac{b^2}{4\eta}. \tag{1.4}$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{adhèrence de } D(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega), \\ &= \text{sous-espce } deH^1(\Omega)\text{, des fonctions "nulle" sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

**Lemme 1.5.3** *(Inégalité de poincaré). Soit $\Omega$ un ouvert $\mathbb{R}^n$ que l'on supposons borné, convexe et de frontière suffisamment régulière. Alors, il existe une constante $C_\Omega > 0$, telle que :*

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)},$$

*pour toute fonction $u \in H_0^1(\Omega)$.*

**Lemme 1.5.4** *(Inégalité de Gronwall). Soient $\alpha$ une fonction non-négative de $L^1(0,\infty)$ et $g$ une fonction de $L^\infty(0,\infty)$. Soit $\beta$ une constante positive ou nulle. Si*

$$g(t) \leq \beta + \int_0^t \alpha(s) g(s) ds;$$

*alors*

$$g(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t \alpha(s) ds\right).$$

### 1.5.2 Quelques formules utiles :

**Lemme 1.5.5** *(Formule de Green). Pour tout $u \in H^2(\Omega)$ et $v \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = -\int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta} v ds,$$

*où $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ est la dérivée normale de u le long de $\partial\Omega$ à dirigée vers l'extérieur.*

**Lemme 1.5.6** *(Formule de Leibniz). Supposons que $f(x,y)$ et $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ sont continues sur un rectangle $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, et supposons que $u(x)$ et $v(x)$ sont des fonctions de $a \leq x \leq b$ dans $c \leq y \leq d$ telles que $u'$ et $v'$ sont continues sur $a \leq x \leq b$. Alors*

$$\frac{d}{dx}\int_{u(x)}^{v(x)} f(x,y)dy = f\big(x, v(x)\big)v'(x) - f\big(x, u(x)\big)u'(x) + \int_{u(x)}^{v(x)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)dy.$$

### 1.5.3 Résultats de compacité

Le résultat de compacité générale dans l'espace de fonction à valeurs vectorielles est donné par le célèbre théorème de Lions-Aubin.

**Définition 1.5.3** *Soient $(X, \|.\|_X)$ et $(Y, \|.\|_Y)$ deux espaces normés.*

**(1)** *$X \hookrightarrow_{continue} Y$, signifie $X \subset Y$ avec l'injection continue c'est-à-dire :*

$$\exists c > 0,\ \|u\|_Y \leqslant c\|u\|_X,\ \forall u \in X.$$

**(2)** *$X \hookrightarrow_{compacte} Y$, si de toute suite bornée dans $X$, on peut extraire une sous suite converge dans $Y$.*

**Thérème 1.5.3** *Soient $X_0$, $X$ et $X_1$ trois espaces de Banach avec $X_0 \subset X \subset X_1$. On suppose que l'injection $X_0 \hookrightarrow_{compacte} X \hookrightarrow_{compacte} X_1$.*
*Soit $1 < p_0, p_1 < \infty$. On suppose $X_0$ et $X_1$ sont réflexifs et on définit :*

$$W = \Big\{u \in L^{p_0}(I; X_0), u' \in L^{p_1}(I; X_1)\Big\},$$

*muni de la norme :*

$$\|u\|_W = \|u\|_{L^{p_0}(I;X_0)} + \|u'\|_{L^{p_1}(I;X_1)},$$

*alors* $W \hookrightarrow_{compacte} L^{p_0}(I;X)$.

**Démonstration.** Ce théorème est classique , pour sa démonstration nous renvoyons le lecteur au livre de J. L. Lions [6]. ■

## 1.6 Méthode de Faedo-Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode, ou plutôt une famille de méthodes très générale et très robuste. Son idée est la suivante, partant d'un problème variationnel posé dans un espace de dimension infinie, on procède d'abord à une approximation dans une suite de sous-espaces de dimension finie. On résout ensuite le problème approché en dimension finie, ce qui est en générale plus facile de résoudre directement en dimension infinie. Enfin, on passe d'une façon ou d'un autre à la limite quand on fait tendre la dimension des espaces d'approximation vers l'infini pour construire une solution du problème de départ. Il convient de noter que, outre son intérêt théorique, la méthode de Galerkin fournit également dans certains cas un procédé constructif d'approximation.

**Définition 1.6.1** *Soit $V$ un espace de Hilbert séparable et $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes :*
*1) $V_n \subset V$, $dim\, V_n < \infty$ ;*
*2) $V_n \longrightarrow V$ quand $n \longrightarrow \infty$. Au sens suivant : il existe $\mathcal{V}_n$ sous-espace dense dans V, tel que pour tout $u \in \mathcal{V}_n$, on peut trouver une suite $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ vérifiant : pour tout n, $u_n \in V_n$ et $u_n \longrightarrow u$ dans V lorsque $n \longrightarrow \infty$. L'espace $V_n$ s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre n.*

### 1.6.1 Le schéma de la méthode de Faido-Galerkin

Soit $(P)$ le problème exact pour lequel on cherche à montrer l'existance d'une solution dans l'espace de fonction construit sur un espace de Hilbert séparable $V$. Soit u la solution unique du problème $(P)$.

Après avoir fait un choix d'une approximation de Galerkin $V_n$ de V, il convient de définir un problème approché $(P_n)$ dans l'espace de dimension finie $(V_n)$ ayant une unique solution $(u_n)$. Le déroulement de l'étude est alors le suivant :

**Étape 1 :** on définit la solution $u_n$ du problème $(P_n)$.

**Étape 2 :** on établit des estimations sur $u_n$ (dites estimation a priori) pour montrer que $u_n$ est uniformément bornée.

**Étape 3 :** par l'utilisation des résultats que $u_n$ est uniformément bornée,il est possible d'extraire de $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ une sous suite $\{u'_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape 2. Soit alors u la limite obtenue.

**Étape 4 :** on montre que u est une solution de problème (P).

**Étape 5 :** résultats de convergences fortes.

### 1.6.2 Stabilité de l'énergie

Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e

$$E(t) \longrightarrow 0 \text{ lorsque } t \longrightarrow \infty,$$

c'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

Pour le second, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e

$$E(t) \leq C\exp(-\beta t), \forall\, t > 0,$$

où C et $\beta$ sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Quant au troisième, il étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance des solutions n'est pas exponentielle, mais du type polynomial par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^{\alpha}}, \forall\, t > 0,$$

où C et $\alpha$ sont deux constantes positives avec C qui dépend des données initiales.

Chapitre 2

# Étude de l'existence et l'unicité de la solution

Dans ce chapitre nous intéressons à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution d'un système couplé des équations des ondes non-linéaires viscoélastiques en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

## 2.1 Système couplé d'équations des ondes

Les équations des ondes modélisée des phénomènes de propagation d'ondes ou de vibration. Par exemple, en deux dimensions d'espace c'est un modèle pour étudier les vibrations d'une membrane élastique tendue. Au repos, la membrane occupe un domaine plan $\Omega$ de frontière $\Gamma$, sous l'action d'une force normale à ce plan d'intensité $f$, elle se déforme et ses déplacements normal sont notés $u$ et $v$. On suppose qu'elle est fixée sur son bord, ce qui donne une condition aux limites de Dirichlet.

Le système couplé d'équations des ondes dont $u$ et $v$ sont des solutions est donnée par le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + f_1(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + f_2(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \end{cases} \tag{2.1}$$

avec les condition au limite d type Dirichlet et les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} u = v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) \quad , \quad v_t(x,0) = v_1(x) & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases} \tag{2.2}$$

Le problème aux limites précédent modélise, par exemple, la propagation au cours du temps du déplacement vertical d'une membrane élastique.

### 2.1.1 Système couplé des équations des ondes amorties

Si la vitesse de mouvement est retardé par une force d'amortissement viscoélastique proportionnelle à la vitesse de la membrane. Du point de vue mathématique, c'est le terme mémoire suivant qui est responsable de cette amortissement pour chaque équation

$$\int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau,$$

et

$$\int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau$$

respectivement.

Ce terme mémoire tient compte de toute la préhistoire du matériel à travers un noyau appelé fonction de relaxation en théorie de viscoélasticité. Dans ce cas là, on obtient le système couplé des équations des ondes intégro-différentielles :

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) + \int\limits_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(x,\tau)\, d\tau + f_1(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v_{tt}(x,t) - \Delta v(x,t) + \int\limits_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(x,\tau)\, d\tau + f_2(u,v) = 0 & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = v = 0 & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \\ v(x,0) = v_0(x), \qquad v_t(x,0) = v_1(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{cases} \tag{2.3}$$

où $g_1$ et $g_2$ sont des fonctions de relaxation, et les fonctions $u_0$, $u_1$, $v_0$ et $v_1$ sont des données initiales.

## 2.2 Formulation variationnelle

Soient $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et une fonction $w \in H_0^1(\Omega)$. Multiplions les équation de (2.3) par la fonction $w$ et intégrons sur $\Omega$, on obtient :

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega u_{tt} w\, dx - \int\limits_\Omega \Delta u w\, dx + \int\limits_\Omega w \int\limits_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)\, d\tau\, dx + \int\limits_\Omega w f_1(u,v)\, dx = 0, \\ \int\limits_\Omega v_{tt} w\, dx - \int\limits_\Omega \Delta v w\, dx + \int\limits_\Omega w \int\limits_0^t j_2(t-\tau)\Delta v(\tau) d\tau dx + \int\limits_\Omega w f_2(u,v)\, dx = 0. \end{cases}$$

Et d'après le théorème de Fubini, on peut écrire :

$$\begin{cases} \int\limits_\Omega u_{tt} w dx - \int\limits_\Omega \Delta u w\, dx + \int\limits_0^t g_1(t-\tau) \int\limits_\Omega w \Delta u(\tau) d\tau\ \ dx + \int\limits_\Omega f_1(u,v) w\, dx = 0, \\ \int\limits_\Omega v_{tt} w dx - \int\limits_\Omega \Delta v w\, dx\rangle + \int\limits_0^t g_2(t-\tau) \int\limits_\Omega w \Delta v(\tau) d\tau\ \ dx + \int\limits_\Omega f_2(u,v) w\, dx = 0. \end{cases}$$

Maintenant d'après la formule de Green et la condition $u = v = 0$ sur $\Gamma \times \mathbb{R}^+$, on trouve :

$$\begin{cases} \langle u_{tt}, w\rangle + \langle \nabla u, \nabla w\rangle - \int\limits_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u(\tau), \nabla w\rangle \, d\tau + \langle f_1(u,v), w\rangle = 0, \\ \langle v_{tt}, w\rangle + \langle \nabla v, \nabla w\rangle - \int\limits_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v(\tau), \nabla w\rangle \, d\tau + \langle f_2(u,v), w\rangle = 0, \end{cases}$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ reprèsente le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.

On peut poser le problème variationnel associé à (2.3) de la façon suivante :

pour $(u_0, v_0) \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ et $(u_1, v_1) \in H_0^1(\Omega)$, on cherche u et v e à valeurs vectorielles tels que :

$$\begin{cases} \langle u_{tt}, w\rangle + \langle \nabla u, \nabla w\rangle - \int\limits_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u(\tau), \nabla w\rangle d\tau + \langle f_1(u,v), w\rangle \ = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \\ \langle v_{tt}, w\rangle + \langle \nabla v, \nabla w\rangle - \int\limits_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v(\tau), \nabla w\rangle d\tau + \langle f_2(u,v), w\rangle \ = 0 \quad \forall w \in H_0^1(\Omega) \\ u(x,0) = u_0(x) \quad , \quad u_t(x,0) = u_1(x) \qquad \text{dans} \qquad \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) \quad , \quad v_t(x,0) = v_1(x) \qquad \text{dans} \qquad \Omega, \end{cases} \tag{2.4}$$

pour $t \in \mathbb{R}^+$.

## 2.3 Existance et unicité de la solution

Afin de démontrer notre résultat d'existence et d'unicité de la solution du système (2.3), nous supposons que les fonctions de relaxation $g_i :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}^+$ vérifiant les hypothèses suivantes :

**(H1)** $g_i : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$( i=1,2) sont des fonction bornée de classe $C^1$ telles que :

$$g_i(0) > 0, \qquad\qquad 1 - \int\limits_0^\infty g_i(\tau)\, d\tau = l_i > 0.$$

**(H2)** Il existe deux fonctions continues non-décroissantes $\xi_1, \xi_2 : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ telles que :

$$g_i'(t) \leq -\xi_i(t) g_i(t), \qquad t \geq 0 \qquad i = 1,2.$$

Pour les fonctions $f_1$et $f_2$ on suppose la condition suivante :

**(H3)** $f_i : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ (pour i=1,2) sont de classe $C^1$ et il existe une fonction $F$ telle que :

$$f_1(x,y) = \frac{dF}{dx}, \qquad f_2(x,y) = \frac{dF}{dy}$$

et

$$\begin{aligned} F \geq 0 \qquad & xf_1(x,y) + yf_2(x,y) - F(x,y) \geq 0, \\ et \qquad & \Big|\frac{df_i(x,y)}{dx}\Big| + \Big|\frac{df_i(x,y)}{dy}\Big| \leq d\big(1 + |x|^{\beta_{i1}-1} + |y|^{\beta_{i2}-1}\big) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

avec $d > 0$ constante et $\beta_{i1} \geq 1, (x-2)\beta_{ij} \leq n$ pour $i, j = 1, 2$.

Le résultat d'existence et d'unicité de lq solution est donné par le théorème suivant :

**Thérème 2.3.1** *Soient* $(u_0, u_1), (v_0, v_1) \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega)$ *et supposons que* ***(H1)-(H3)*** *sont vérifies, alors le problème* (2.3) *admet une solution unique* $(u, v)$ *telle que :*

$$u, v \in L^\infty\big(\mathbb{R}^+,\ H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big) \cap w^{2,\infty}\big(\mathbb{R}^+,\ H_0^1(\Omega)\big) \cap w^{1,\infty}\big(\mathbb{R}^+,\ L^2(\Omega)\big)$$

*pour tout* $t \geq 0$.

**Remarque 2.3.2** *L'idée principale de la démonstration repose sur la méthode de Faedo-Galerkin. Cette méthode fournit un procédé constructif d'approximation. Nous donnons d'abord un lemme qui sera un support à la démonstration du théorème 2.3.1.*

**Démonstration.** Soit l'espace $V = H_0^1(\Omega)$ un espace séparable. Pour construire l'approximation des problèmes en dimension finie, on restreint simplement la formulation variationnelle (2.4) à l'espace $V_n$, que l'on appelle espace de Galerkin. Montrons l'existence d'une solution pour ce problème en dimension finie.

**Étape 1 :** (Approximation)

Soit $\{w_i\}_{i=1}^\infty$ un système orthonormale dans $H_0^1(\Omega)$ pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note par :

$V_m = \text{vect}\,\{w_1, w_2, ... w_m\}$ l'espace engendré par $\{w_1, w_2, ... w_m\}$. On cherche une solution approchée de la forme :

$$\begin{cases} u^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} h_{j,m}(t) w_j(x), \qquad x \in \Omega, \ \ t \in \mathbb{R}^+ \\ v^m(x,t) = \sum_{i=1}^{m} k_{j,m}(t) w_j(x), \qquad x \in \Omega, \ \ t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$$

vérifie le problème approché dans $V_m$ suivant :

$$\begin{cases} \langle u^m_{tt}(t), w\rangle + \langle \nabla u^m(t), \nabla w\rangle - \int\limits_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u^m(\tau), \nabla w\rangle \, d\tau + \langle f_1(u^m, v^m), w\rangle = 0, \\ \langle v^m_{tt}(t), w\rangle + \langle \nabla v^m(t), \nabla w\rangle - \int\limits_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla u^m(\tau), \nabla w\rangle \, d\tau + \langle f_2(u^m, v^m), w\rangle = 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

$\forall w_j \in V_m,\ j = 1, 2, ..., m$ avec les conditions initiales

$$\begin{cases} u^n(0) = u_{m_0} = \sum\limits_{j=1}^m \langle a_j, w_j\rangle w_j \longrightarrow u_0 \quad \text{lorsque} \quad m \longrightarrow \infty \quad \text{dans} \quad H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ v^m(0) = v_{m_0} = \sum\limits_{j=1}^m \langle b_j, w_j\rangle w_j \longrightarrow v_0 \quad \text{lorsque} \quad m \longrightarrow \infty \quad \text{dans} \quad H^2(\Omega) \cap H^1_0(\Omega) \\ u^m_t(0) = u_{m_1} = \sum\limits_{j=1}^m \langle c_j, w_j\rangle w_j \longrightarrow u_1 \quad \text{lorsque} \quad m \longrightarrow +\infty \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \\ v^m_t(0) = v_{m_1} = \sum\limits_{j=1}^m \langle d_j, w_j\rangle w_j \longrightarrow v_1 \quad \text{lorsque} \quad m \longrightarrow +\infty \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \end{cases} \tag{2.7}$$

Les équations (2.4) conduisent à un système d'équations différentielles ordinaires avec m les fonctions $h_{j,m}$ et $k_{j,m}$ inconnues où $j = 1, 2, ...m$. D'après la théorie des E.D.O. le système (2.4) va admettre une solution sur $[0, t_m]$.

Maintenant les estimations a priori ci-dessous permettant de prolonger la solution dans $\mathbb{R}$, c'est á dire $t_m = +\infty$.

**Étape 2 :** (Estimations a priori)

**Première estimation a priori.** On prend $w = u^m_t$ dans la premiére équation de (2.3), et $w = v^m_t$ dans la deuxième équation de (2.3), on aura :

$$\langle u^m_{tt}(t), u^m_t(t)\rangle + \langle \nabla u^m(t), \nabla u^m_t(t)\rangle - \int\limits_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u^m(\tau), \nabla u^m_t(t)\rangle d\tau + \langle f_1(u^m, v^m), u^m_t\rangle = 0$$

et

$$\langle v^m_{tt}(t), v^m_t(t)\rangle + \langle \nabla v^m(t), \nabla v^m_t(t)\rangle - \int\limits_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v^m(\tau), \nabla v^m_t(t)\rangle d\tau + \langle f_2(u^m, v^m), v^m_t\rangle = 0.$$

La somme de deux dernières équations, nous donne :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| u_{tt}^m(t)\| + \|\nabla u_t^m(t)\|\right) + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\| v_{tt}^m(t)\| + \|\nabla v_t^m(t)\|\right) + \int_\Omega F(u^m, v^m)dx \\ &= \int_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u^m(\tau), \nabla u_t^m(t)\rangle \, d\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v^m(\tau), \nabla v_t^m(t)\rangle \, d\tau.\end{aligned} \tag{2.8}$$

Il facile de voire que :

$$\begin{aligned}&-\int_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u^m(\tau), \nabla u_t^m(t)\rangle d\tau - \int_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v^m(\tau), \nabla v_t^m(t)\rangle d\tau \\ &= \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\nabla u^m(x,t) - \nabla u^m(x,\tau)\right)^2 dxd\tau \\ &+ \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega \left(\nabla v^m(x,t) - \nabla v^m(x,\tau)\right)^2 dxd\tau - \int_0^t g_1(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u^m(x,t)|^2 dxd\tau \\ &- \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v^m(x,t)|^2 dxd\tau \\ &= \frac{1}{2}\int_0^t g_1(t-\tau)\frac{d}{dt}\|\nabla u^m(t) - \nabla u(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t g_2(t-\tau)\frac{d}{dt}\|\nabla v^m(t) - \nabla v(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \\ &- \frac{1}{2}\int_0^t g_1(t-\tau)\frac{d}{dt}\|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g_2(t-\tau)\frac{d}{dt}\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-\tau)\|\nabla u^m(t) - \nabla u^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^t g_2(t-\tau)\|\nabla v^m(t) - \nabla v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t g_1'(t-\tau)\|\nabla u^m(t) - \nabla u^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau - \frac{1}{2}\int_0^t g_2'(t-\tau)\|\nabla v^m(t) - \nabla v^m(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\, d\tau \\ &\quad - \frac{1}{2}\int_0^t g_1(t)\, d\tau \|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2}\frac{d}{dt} g_2(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{2.9}$$

En remplaçant (2.9) dans (2.8), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big(\|u_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\Big(1-\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau\Big)\|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+(g_1\circ\nabla u^m)(t)\Big)+\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big(\|v_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}$$
$$+\Big(1-\int_0^t g_2(\tau)\,d\tau\Big)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+(g_2\circ\nabla v^m)(t)\Big)$$
$$=\frac{1}{2}(g_1'\circ\nabla u^m)(t)-\frac{1}{2}g_1(t)\|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}(g_2'\circ\nabla v^m)(t)-\frac{1}{2}g_2(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.10}$$

avec :

$$(h\circ\psi)(t)=\int_0^t h(t-\tau)\|\psi(t)-\psi(\tau)\|^2_{L^2(\Omega)}\,d\tau,\qquad \forall v\in L^2(\Omega).$$

On pose :

$$\begin{aligned}E_m(t)&=\frac{1}{2}\|u_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\Big(1-\int_0^t g_1(\tau)\,d\tau\Big)\|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+(g_1\circ\nabla u^m)(t)\\&+\frac{1}{2}\|v_t^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\Big(1-\int_0^t g_2(\tau)\,d\tau\Big)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+(g_2\circ\nabla v^m)(t)+\int_\Omega F(u^m,v^m)\end{aligned} \tag{2.11}$$

et d'après (2.10), on trouve :

$$\frac{d}{dt}E_m(t)=\frac{1}{2}(g_1'\circ\nabla u^m)(t)-\frac{1}{2}g_1(t)\|\nabla u^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)}+\frac{1}{2}(g_2'\circ\nabla v^m)(t)-\frac{1}{2}g_2(t)\|\nabla v^m(t)\|^2_{L^2(\Omega)} \tag{2.12}$$

et par l'hypothèse **(H2)**, on trouve :

$$\frac{d}{dt}E_m(t)\le 0 \tag{2.13}$$

En intégrant (2.13) entre 0 et $t$ on a :

$$E_m(t)\le E_m(0)\le c \tag{2.14}$$

où $c$ est une constante positive indépendante de $m\in\mathbb{N}$ et $t_m\in[0,T]$. Alors on déduit que $t_m=T$.

**Deuxième estimation a priori.** On prend $w=-\nabla u_t^m$ dans la première équation de (2.4) et $w=-\nabla v_t^m$ dans la deuxième équation de (2.4), on aura :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|\nabla u_t^m\|_2^2+\Big(1-\int_0^t g_1(s)ds\Big)\|\Delta u^m\|_2^2+\|\nabla v_t^m\|_2^2+\Big(1-\int_0^t g_2(s)ds\Big)\|\Delta v^m\|_2^2+g_1\circ\Delta u^m\\
&+g_2\circ\Delta v^m\Big]=\frac{1}{2}\Big(g_1'\circ\Delta u^m\Big)-\frac{1}{2}g_1(t)\|\Delta u^m\|_2^2+\frac{1}{2}\Big(g_2'\circ\Delta v^m\Big)-\frac{1}{2}g_2(t)\|\Delta v^m\|_2^2\\
&\qquad+\int_\Omega\Big(f_1(u^m,v^m)\Delta u_t^m+f_2(u^m,v^m)\Delta v_t^m\Big)dx\\
&\qquad\le\int_\Omega\Big(f_1(u^m,v^m)\Delta u_t^m+f_2(u^m,v^m)\Delta v_t^m\Big)dx.
\end{aligned}\tag{2.15}$$

Donc, on intégrant entre 0 et $t$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|\nabla u_t^m\|_2^2+\Big(1-\int_0^t g_1(s)ds\Big)\|\Delta u^m\|_2^2+\|\nabla v_t^m\|_2^m+\Big(1-\int_0^t g_2(s)ds\Big)\|\Delta v^m\|_2^2+g_1\circ\Delta u^m\\
&+g_2\circ\Delta v^m\Big]\le\frac{1}{2}\Big[\|\nabla u_1^m\|_2^2+\|\Delta u_0^m\|_2^2+\|\nabla v_1^m\|_2^2+\|\Delta v_0^m\|_2^2\Big]\\
&\qquad+\int_\Omega(f_1(u^m,v^m)\Delta u^m-f_1(u_0^m,v_0^m)\Delta u_0^m+f_2(u^m,v^m)\Delta v^m)\\
&\qquad-f_2(u_0^m,v_0^m)\Delta v_0^m)dx-\int_0^t\int_\Omega\Big(\frac{\partial f_1}{\partial u}(u^m,v^m)u_t^m\Delta u^m+\frac{\partial f_1}{\partial v}(u^m,v^m)v_t^m\Delta u^m\\
&\qquad+\frac{\partial f_2}{\partial u}(u^m,v^m)u_t^m\Delta v^m+\frac{\partial f_2}{\partial v}(u^m,v^m)v_t^m\Delta v^m\Big)dxds
\end{aligned}$$

d'après inégalité de Young, on a :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega f_1(u^m,v^m)\Delta u^m dx&\le k\int_\Omega\Big(|u^m|+|v^m|+|u^m|^{\beta_{11}}+|v^m|^{\beta_{12}}\Big)|\Delta u^m|dx\\
&\le\delta\|\Delta u^m\|_2^2+\frac{c}{\delta}\int_\Omega\Big(|u^m|^2+|v^m|^2+|u^m|^{2\beta_{11}}+|v^m|^{2\beta_{12}}\Big)dx\\
&\le\delta\|\Delta u^m\|_2^2+\frac{c}{\delta}\Big(\|u^m\|^2+\|v^m\|_2^2+\|u^m\|_2^{2\beta_{11}}+\|v^m\|_2^{2\beta_{12}}\Big)\\
&\le\delta\|\Delta u^m\|_2^2+\frac{c}{\delta}
\end{aligned}$$

d'après l'inegalité de Hölder, on a :

$$\begin{aligned}
|J|&\le d\int_\Omega\big(1+|u^m|^{\beta_{11}-1}+|v^m|^{\beta_{12}-1}\big)|u_t^m||\Delta u^m|dx\\
&\le d\big(\|u_t^m\|^2+\|u^m\|_{2\beta_{11}}^{\beta_{11}-1}\|u_t^m\|_{2\beta_{11}}+\|v^m\|_{2\beta_{12}}^{\beta_{12}-1}\|v_t^m\|_{2\beta_{12}}\big)\|\Delta u^m\|_2.
\end{aligned}$$

D'aprés l'inegalité de Young, on obtient :

$$|J| \le c\Big(1 + \|\nabla u^m\|_2^{\beta_{11}-1} + \|\nabla v^m\|_2^{\beta_{12}-1}\Big)\|\nabla u_t^m\|_2\|\Delta u^m\|_2$$
$$\le c\|\nabla u_t^m\|_2\|\Delta u^m\|_2 \le c\|\nabla u_t^m\|_2^2 + c\|\Delta u^m\|_2^2.$$

D'aprés le lemme de Gronwall, on aura :

$$\|\nabla u_t^m\|_2^2 + \|\Delta u^m\|_2^2 + \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \|\Delta v^m\|_2^2 \le c + c\int_0^t \Big(\|\nabla u_t^m\|_2^2 + \|\Delta u^m\|_2^2 + \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \|\Delta v^m\|_2^2\Big)dx$$

on obtient l'estimation suivant :

$$\|\nabla u_t^m\|_2^2 + \|\Delta u^m\|_2^2 + \|\nabla v_t^m\|_2^2 + \|\Delta v^m\|_2^2 \le C, \qquad \forall t \in [0,T], \qquad m \in \mathbb{N} \tag{2.16}$$

**Étape 3 :** (passage á la limite). D'aprés les estimations (2.14) et (2.16) , on déduit que :

$$\|u_{tt}^m\|_2^2 + \|v_{tt}^m\|_2^2 \le C, \qquad \forall t \in [0,T], \qquad m \in \mathbb{N} \tag{2.17}$$

À partir (2.15) et (2.17), on aura :

$$\begin{cases} (u^m),(v^m) & \text{est uniformément bornée dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)), \\ (u_t^m),(v_t^m) & \text{est uniformément bornée dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)), \\ (u_{tt}^m),(v_{tt}^m) & \text{est uniformément bornée dans} \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.18}$$

Donc, il existe des sous-suites de $(u^m)$ et $(v^m)$, vérifiants :

$$\begin{cases} (u^m) \longrightarrow u \quad \text{et} \quad (v^m) \longrightarrow v \quad \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)\cap H_0^2(\Omega)), \\ (u_t^m) \longrightarrow u_t \quad \text{et} \quad (v_t^m) \longrightarrow v_t \quad \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,H_0^1(\Omega)), \\ (u_{tt}^m) \longrightarrow u_{tt} \quad \text{et} \quad (v_{tt}^m) \longrightarrow vtt \quad \text{faible étoile dans} \quad L^\infty(0,T,L^2(\Omega)). \end{cases} \tag{2.19}$$

Maintenant, on sait que l'injection $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^s(\Omega)$ est compact pour $2 \le s \le 2n/(n-2)$ si $n \ge 3$ ou $s \ge 2$ si $n = 1,2$, c'est-à-dire pour tout $\Phi \in H_0^1(\Omega)$ il existe $c > 0$ une constate on a

$$\|\Phi\|_s \le c\|\nabla\Phi\|_2. \tag{2.20}$$

D'où, l'injection $H_0^1(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ et compacte. Donc, on peut donc appliquer le théoreme de compacité de Aubin-lious avec : $B_0 = H_0^1(\Omega)$ et $B = B_1 = L^2(\Omega)$ et $p_0 = p_1 = 2$ c'est-á-dire qu'on peut extraire deux suites telles que :

$$(u^m) \longrightarrow u \quad \text{et} \quad (v^m) \longrightarrow v \quad \text{forte dans} \qquad L^2(0,T,L^2(\Omega)). \tag{2.21}$$

Alors,

$$(u^m) \longrightarrow u \quad \text{et} \quad (v^m) \longrightarrow v \quad \text{presque partout} \quad (0,T,L^2(\Omega)) \tag{2.22}$$

et donc, d'après l'hypothèse **(H2)**, on a

$$f_i\big(u^m,\ v^m\big) \longrightarrow f_i\big(u,\ v\big), \quad \text{presque partout} \quad (0,T,L^2(\Omega)) \quad i = 1,2. \tag{2.23}$$

Aussi, comme $u^m,\ v^m$ sont bornées dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$, alors en utilisant toujours l'hypothèse **(H2)** et comme on obtient $f_i\big(u^m,\ v^m\big)$ sont bornées dans $L^\infty(0,T,L^2(\Omega))$ pour $i = 1,2$.

Les convergences (2.19) et (2.21) sont suffisent pour passer a la limite dans (2.4), pour obtenir :

$$\begin{cases} \langle u_{tt}^m(t), w\rangle + \langle \nabla u(t)^m, \nabla w\rangle - \displaystyle\int_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u^m(\tau), \nabla w\rangle\, d\tau + \langle f_1(u^m, v^m), w\rangle = 0, \\ \langle v_{tt}^m(t), w\rangle + \langle \nabla u^m(t), \nabla w\rangle - \displaystyle\int_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v^m(\tau), \nabla w\rangle\, d\tau + \langle f_2(u^m, v^m), w\rangle = 0 \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Par conséquent :

$$\begin{cases} \langle u_{tt}(t), w\rangle + \langle \nabla u(t), \nabla w\rangle - \displaystyle\int_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla u(\tau), \nabla w\rangle\, d\tau + \langle f_1(u, v), w\rangle = 0, \\ \langle v_{tt}(t), w\rangle + \langle \nabla u(t), \nabla w\rangle - \displaystyle\int_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla v(\tau), \nabla w\rangle\, d\tau + \langle f_2(u, v), w\rangle = 0 \qquad \forall\, w \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

D'oú l'existance de la solution du problème (2.3).

**Unicité de la solution**. Soient $z$ et $y$ deux solutions du problème (2.4) telles que :

$$z, y \in L^{\infty}\big([0,T]; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)\big)$$
$$z_t, y_t \in L^{\infty}\big([0,T]; H_0^1(\Omega)\big)$$
$$z_{tt}, y_{tt} \in L^{\infty}\big([0,T], L^2(\Omega)\big).$$

Alors, si on pose $z = u^1 - u^2$ et $y = v^1 - v^2$ vérifier :

$$\begin{aligned}
&\langle z_{tt}, w\rangle + \langle \nabla z, \nabla w\rangle - \int_0^t g_1(t-\tau)\langle \nabla z(\tau), \nabla w\rangle d\tau + \langle f_1(z,y), w\rangle = 0,\\
&\langle y_{tt}, w\rangle + \langle \nabla y, \nabla w\rangle - \int_0^t g_2(t-\tau)\langle \nabla y(\tau), \nabla w\rangle d\tau + \langle f_2(z,y), w\rangle = 0, \qquad w \in H_0^1(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.24}$$

On prend $w = z_t^m$ dans la première équation de (2.24) et $w = y_t$ dans la deuxième équation de (2.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big[\|z_t\|_2^2 + \Big(1 - \int_0^t g_1(s)ds\Big)\|\nabla z\|_2^2 + \|y_t\|_2^2 + \Big(1 - \int_0^t g_2(s)ds\Big)\|\nabla y\|_2^2 + g_1 \circ \nabla z + g_2 \circ \nabla y\Big]\\
&\qquad \le \int_\Omega f_1(u_2,v_2) - f_2(u_1,v_1) + \int_\Omega \big(f_2(u_2,v_2) z_t dx - f_2(u_1,v_1) y_t dx\big)
\end{aligned} \tag{2.25}$$

Remarquons que :

$$\begin{aligned}
&-\int_0^t f_1(u_2,v_2) - f_2(u_1,v_1) + \int_\Omega f_2(u_2,v_2) z_t dx - f_2(u_1,v_1) y_t dx\\
&\le k\int_\Omega (1 + |u_1|^{B_{11}-1}) + |u_2|^{B_{11}-1} + |v_1|^{B_{12}-1} + |v_2|^{B_{12}-1})(|z| + |y|) z_t| dx\\
&+ k\int_\Omega (1 + |u_1|^{B_{21}-1}) + |u_2|^{B_{21}-1} + |v_1|^{B_{22}-1} + |v_2|^{B_{22}-1})(|z| + |y|) y_t| dx\\
&\le c\Big(\|z_t\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|y_t\|_2^2 + \|\nabla y\|_2^2\Big).
\end{aligned} \tag{2.26}$$

D'après (2.25) et (2.26), on intégrant entre 0 et $t$, et en utilisant lemme de Gronwall, on trouve :

$$\|z_t\|_2^2 + \|\nabla z\|_2^2 + \|y_t\|_2^2 + \|\nabla y\|_2^2 = 0. \tag{2.27}$$

Et donc : $(u_1, v_1) = (u_2, v_2)$ d'où l'unicité de solution pour notre problème. ∎

Chapitre 3

# Comportement asymptotique de la solution

## 3.1 Introduction

Dans ce travail nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique de la solution d'un systéme couplé de les équations des ondes non-linéaire avec une dissipation visco-élastique. Nous montrerons que la décroissance générale pour l'énergie du problème (2.3) quand le temps tend vers l'infini sous les hypothèses **(H1)–(H3)**.

## 3.2 Énergie modifiée du problème (2.3)

Multipliant la première équation de (2.3) par $u_t$, la deuxième équation de (2.3) par $v_t$, intégrons sur $\Omega$, et en sommant les deux résultats, on obtient :

$$\int_\Omega u_t u_{tt} dx + \int_\Omega v_t v_{tt} dx - \int_\Omega u_t \Delta u(x,t) dx - \int_\Omega v_t \Delta v(x,t) dx + \int_\Omega u_t \int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau) d\tau dx$$
$$+ \int_\Omega v_t \int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau) d\tau dx + \int_\Omega u_t f_1(u,v) dx + \int_\Omega v_t f_2(u,v) dx = 0. \tag{3.1}$$

Les termes en (3.1), sont estimés comme suit :

**Le premier et le deuxième terme :**

$$\int_\Omega u_t u_{tt}dx + \int_\Omega v_t v_{tt}dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2\Big). \tag{3.2}$$

**Le troisième et le quatrième terme :** En utilisant la formule de Green et la condition au limite, on obtient :

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u_t\Delta u(t)dx - \int_\Omega v_t\Delta v(t)dx &= \int_\Omega \nabla u_t\nabla u(t)dx + \int_\Omega \nabla v_t.\nabla v(t)dx \\ &= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla v(t)\|_2^2\Big). \end{aligned} \tag{3.3}$$

**Le cinquième et le sixième terme :**

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\int_0^t g_1(t-\tau)u_t(t)\Delta u(\tau)d\tau dx + \int_\Omega\int_0^t g_2(t-\tau)v_t(t)\Delta v(\tau)d\tau dx \\ &= \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega u_t(t)\Delta u(\tau)dxd\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega v_t(t)\Delta v(\tau)dxd\tau. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green et le condition au limite, on a :

$$\begin{aligned} &\int_\Omega\int_0^t g_1(t-\tau)u_t(t)\Delta u(\tau)d\tau dx + \int_\Omega\int_0^t g_2(t-\tau)v_t(t)\Delta v(\tau)d\tau dx \\ &= -\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t(t)\nabla u(\tau)dxd\tau - \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v_t(t)\nabla v(\tau)dxd\tau \\ &= \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t\big[\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\big]dxd\tau - \int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega \nabla u_t\nabla u(t)dxd\tau \\ &- \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v_t\big[\nabla u(\tau)-\nabla v(t)\big]dxd\tau - \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega \nabla v_t\nabla v(t)dxd\tau \\ &= \frac{1}{2}\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2dxd\tau - \frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-\tau)\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2dxd\tau \\ &+ \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2dxd\tau - \int_0^t g_2(t-\tau)\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla v(t)|^2dxd\tau\Big) \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dxd\tau + \int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 dxd\tau \\
&- \int_0^t g_1'(t-\tau)\int_\Omega |\nabla u(\tau)-\nabla u(t)|^2 dxd\tau - \frac{d}{dt}\int_0^t g_1(t-\tau)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dxd\tau \\
&- \int_0^t g_2'(t-\tau)\int_\Omega |\nabla v(\tau)-\nabla v(t)|^2 dxd\tau - \frac{d}{dt}\int_0^t g_2(t-\tau)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dxd\tau \\
&+ \int_0^t g_1'(t-\tau)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx + g_1(t)\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx \\
&+ \int_0^t g_2'(t-\tau)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx + g_2(t)\int_\Omega |\nabla v(t)|^2 dx\Big) \\
&= \frac{d}{dt}\Big(\frac{1}{2}\int_\Omega g_1(t-\tau)\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\|_2^2 d\tau - \int_\Omega g_1(t-\tau)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&+ \frac{1}{2}\int_\Omega g_2(t-\tau)\|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)\|_2^2 d\tau - \int_\Omega g_2(t-\tau)\|\nabla v(t)\|_2^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(g_2(t)\|\nabla v(t)\|_2^2 \\
&\int_\Omega g_1'(t-\tau)\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\|_2^2 d\tau + g_1(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \frac{1}{2}\int_\Omega g_2'(t-\tau)\|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)\|_2^2 d\tau\Big).
\end{aligned}
$$

Donc, en substituant (3.2)–(3.4) dans (3.1), on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big(\|u_t\|_2^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|v_t\|_2^2 + \|\nabla v(t)\|_2^2 \\
&+ \int_\Omega g_1(t-\tau)\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\|_2^2 d\tau + \int_\Omega g_2(t-\tau)\|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)\|_2^2 d\tau\Big) \\
&- \frac{d}{dt}\Big(\int_\Omega g_1(t-\tau)\|\nabla u(t)\|_2^2 - \int_\Omega g_2(t-\tau)\|\nabla v(t)\|_2^2\Big) + \frac{1}{2}\Big(g_1(t)\|\nabla u(t)\|_2^2 \\
&- \int_\Omega g_1'(t-\tau)\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\|_2^2 d\tau - \int_\Omega g_2'(t-\tau)\|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)\|_2^2 d\tau + g_2(t)\|\nabla v(t)\|_2^2\Big) = 0
\end{aligned}
\tag{3.5}
$$

Alors,

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\Big[\|u_t\|_2^2 + \Big(1-\int_0^t g_1(\tau)d\tau\Big)\|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_0^t g_1(t-\tau)\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\|_2^2 d\tau \\
&+ \|v_t\|_2^2 + \Big(1-\int_0^t g_2(\tau)d\tau\Big)\|\nabla v(t)\|_2^2 + \int_0^t g_2(t-\tau)\|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)\|_2^2 d\tau\Big]
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

$$= \frac{1}{2}\Bigg[\int_0^t g_1'(t-\tau)\left\|\nabla u(\tau)-\nabla u(t)\right\|_2^2 ds - g_1(t)\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2$$

$$+\int_0^t g_2'(t-\tau)\left\|\nabla v(\tau)-\nabla v(t)+\right\|_2^2 d\tau - g_2(t)\left\|\nabla v(t)\right\|_2^2\Bigg].$$

On pose

$$\begin{aligned} E(t) =& \frac{1}{2}\left\|u_t\right\|_2^2+\left(1-\int_0^t g_1(\tau)d\tau\right)\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}(g_1\circ\nabla u)(t) \\ & \frac{1}{2}\left\|v_t\right\|_2^2+\left(1-\int_0^t g_2(\tau)d\tau\right)\left\|\nabla v(t)\right\|_2^2+\frac{1}{2}(g_2\circ\nabla v)(t)+\int_\Omega F(u,v)dx, \end{aligned} \tag{3.7}$$

où

$$(h\circ\psi)(t)=\int_0^t h(t-\tau)\|\psi(t)-\psi(\tau)\|_{L^2(\Omega)}^2\,d\tau, \qquad \forall v\in L^2(\Omega).$$

La fonctionnelle $E(t)$ représente l'énergie modifiée du problème (2.3). Donc, d'après (3.6), on a :

$$E'(t)=\frac{1}{2}\Big[(g_1'\circ\nabla u)(t)-g_1(t)\left\|\nabla u(t)\right\|_2^2+(g_2'\circ\nabla v)(t)-g_2(t)\left\|\nabla v(t)\right\|_2^2\Big], \quad t\geq 0 \tag{3.8}$$

ce qui implique

$$E'(t)\leq\frac{1}{2}\Big[(g_1'\circ\nabla u)(t)+(g_2'\circ\nabla v)(t)\Big]\leq 0, \quad \forall t\geq 0.$$

## 3.3 Décroissance générale

Notre objectif dans cette section est de montrer que l'énergie associée au problème (2.3) décroît de une manière générale vers zéro quant $t\to+\infty$.

**Remarque 3.3.1** *Il est clair que la dérivée de l'énergie modifiée est de signe négative. On construit une fonctionnelle de Lyapunov F qui doit vérifier une inégalité de la forme :*

$$\frac{d}{dt}F(t)\leq -C_0\xi(t)F(t), \quad t\geq 0$$

*où $C_0$ est une constante positive. Cette inégalité donne le taux de décroissance générale de $F(t)$. Pour passer a $E(t)$ nous aurons besoin d'une relation d'équivalence entre les deux.*

On pose :

$$F(t) = E(t) + \varepsilon_1 \psi(t) + \varepsilon_2 \chi(t), \tag{3.9}$$

où $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ sont des constantes positives qui seront déterminé par la suite avec

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_\Omega u u_t dx + \int_\Omega v v_t dx, \\ \text{et } \chi(t) &= -\int_\Omega u_t \int_0^t g_1(t-s)[u(t)-u(s)]ds dx - \int_\Omega v_t \int_0^t g_2(t-s)[v(t)-v(s)]ds dx. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Le premier résultat donne une équivalence entre $F(t)$ et $E(t)$.

**Proposition 3.3.1** *Il existe deux constantes positives $\alpha_1$ et $\alpha_2$ telles que*

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t), \tag{3.11}$$

*pour tout $t \geq 0$.*

**Démonstration.** On a

$$\begin{aligned} F(t) = N_1 E(t) &+ \varepsilon_1 \int_\Omega u u_t \, dx - \varepsilon_2 \int_\Omega u_t \int_0^t g_1(t-\tau)\big[u(t)-u(\tau)\big] d\tau dx \\ &+ \varepsilon_1 \int_\Omega v v_t \, dx - \varepsilon_2 \int_\Omega v_t \int_0^t g_2(t-\tau)\big[v(t)-v(\tau)\big] d\tau dx. \end{aligned} \tag{3.12}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned} F(t) \leq N_1 E(t) &+ \frac{\varepsilon_1}{2}\Big(\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2\Big) + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\Big(\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2\Big) \\ + \frac{\varepsilon_2}{2}\Big[\int_\Omega \Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big[u(t)-u(\tau)\big] d\tau\Big)^2 dx &+ \int_\Omega \Big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big[v(t)-v(\tau)\big] d\tau\Big)^2 dx\Big]. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Maintenant, on estime le quatrième terme de membre droite de la relation (3.13).

$$\begin{aligned} &\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big[u(t)-u(\tau)\big] d\tau\Big)^2 + \Big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big[v(t)-v(\tau)\big] d\tau\Big)^2 \\ &= \Big(\int_0^t \sqrt{g_1(t-\tau)}\sqrt{g_1(t-\tau)}\big[u(t)-u(\tau)\big] d\tau\Big)^2 + \Big(\int_0^t \sqrt{g_2(t-\tau)}\sqrt{g_2(t-\tau)}\big[v(t)-v(\tau)\big] d\tau\Big)^2, \end{aligned}$$

et par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, nous obtenons :

$$
\begin{aligned}
&\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big[u(t)-u(\tau)\big]d\tau\Big)^2 dx+\Big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big[v(t)-v(\tau)\big]d\tau\Big)^2 dx\\
&\leq \Big(\big(\int_0^t g_1(t-\tau)d\tau\big)^{\frac{1}{2}}\big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big|u(t)-u(\tau)\big|^2 d\tau\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\\
&+\Big(\big(\int_0^t g_2(t-\tau)d\tau\big)^{\frac{1}{2}}\big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big|v(t)-v(\tau)\big|^2 d\tau\big)^{\frac{1}{2}}\Big)^2\\
&\leq \Big(\int_0^t g_1(t-\tau)d\tau\Big)\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big|u(t)-u(\tau)\big|^2 d\tau\Big)+\Big(\int_0^t g_2(t-\tau)d\tau\Big)\Big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big|v(t)-v(\tau)\big|^2 d\tau\Big)\\
&\qquad\leq (1-l_1)\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big|u(t)-u(\tau)\big|^2 d\tau\Big)+(1-l_2)\Big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big|v(t)-v(\tau)\big|^2 d\tau\Big).
\end{aligned}
\tag{3.14}
$$

En substituant (3.14) dans (3.13), ensuite en utilisant l'inégalité de Poincaré, nous aboutissions à

$$
\begin{aligned}
F(t) \leq & N_1 E(t)+\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\Big(\|u_t\|_2^2+\|v_t\|_2^2\Big)+\frac{\varepsilon_1}{2}C_p\Big(\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla v(t)\|_2^2\Big)\\
&+\frac{\varepsilon_2(1-l_1)}{2}C_p(g_1\circ\nabla u)(t)+\frac{\varepsilon_2(1-l_2)}{2}C_p(g_2\circ\nabla v)(t).
\end{aligned}
\tag{3.15}
$$

Comme $\frac{1}{2}\Big(\|u_t\|_2^2+\|v_t\|_2^2\Big)\leq E(t)$, alors on a

$$\frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\Big(\|u_t\|_2^2+\|v_t\|_2^2\Big)\leq(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E(t). \tag{3.16}$$

De la même manière, nous avons :

$$\frac{\varepsilon_1}{2}C_p\Big(\|\nabla u(t)\|_2^2+\|\nabla v(t)\|_2^2\Big)\leq\Big(\frac{\varepsilon_1}{l_1}C_p+\frac{\varepsilon_1}{l_2}C_p\Big)E(t), \tag{3.17}$$

$$\frac{\varepsilon_2(1-l_1)}{2}C_p(g_1\circ\nabla u)(t)+\frac{\varepsilon_2(1-l_2)}{2}C_p(g_2\circ\nabla v)(t)\leq\Big[\varepsilon_2(1-l_1)C_p+\varepsilon_2(1-l_2)C_p\Big]E(t). \tag{3.18}$$

Alors, l'équation (3.15) donne :

$$F(t)\leq\Big[N_1+\frac{\varepsilon_1 C_p}{l_1}+\frac{\varepsilon_1 C_p}{l_2}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2(1-l_1)C_p+\varepsilon_2(1-l_2)C_p\Big]E(t)\leq\beta_1 E(t),$$

où $\beta_1=N_1+\frac{\varepsilon_1 C_p}{l_1}+\frac{\varepsilon_1 C_p}{l_2}+(\varepsilon_1+\varepsilon_2)+\varepsilon_2(1-l_1)C_p+\varepsilon_2(1-l_2)C_p$, ce qui implique

$$E(t)\geq\alpha_1 F(t),\quad \text{pour}\quad \alpha_1=\frac{1}{\beta_1}. \tag{3.19}$$

De même, de (3.14) et en utilisant l'inégalité de Young, on obtient :

$$F(t) \geq N_1 E(t) - \frac{\varepsilon_1}{2}\Big(\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2\Big) - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\Big(\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2\Big)$$
$$-\frac{\varepsilon_2}{2}\Big[\int_\Omega\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)\big[u(t)-u(\tau)\big]d\tau\Big)^2dx + \Big(\int_0^t g_2(t-\tau)\big[v(t)-v(\tau)\big]d\tau\Big)^2dx\Big].$$

D'après (3.16), nous avons :

$$F(t) \geq N_1 E(t) - \frac{\varepsilon_1}{2}\Big(\|u(t)\|_2^2 + \|v(t)\|_2^2\Big) - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\Big(\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2\Big) - \frac{\varepsilon_2(1-l_1)}{2}\int_0^t g_1(t-\tau)\|u(t)-u(\tau)\|_2^2 d\tau$$
$$-\frac{\varepsilon_2(1-l_2)}{2}\int_0^t g_2(t-\tau)\|v(t)-v(\tau)\|_2^2 d\tau.$$

En utilisant l'inégalité de Poincaré, on aura :

$$F(t) \geq N_1 E(t) - \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2}{2}\Big(\|u_t\|_2^2 + \|v_t\|_2^2\Big) - \frac{\varepsilon_1}{2}C_p\Big(\|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla v(t)\|_2^2\Big)$$
$$-\frac{\varepsilon_2(1-l_1)}{2}C_p(g_1\circ\nabla u)(t) - \frac{\varepsilon_2(1-l_2)}{2}C_p(g_2\circ\nabla v)(t).$$

D'où, d'après les relations (3.16)–(3.18), on arrive à :

$$F(t) \geq \Big\{N_1 - \Big(\frac{\varepsilon_1 C_p}{l_1} + \frac{\varepsilon_1 C_p}{l_2} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2(1-l_1)C_p + \varepsilon_2(1-l_2)C_p\Big)\Big\}E(t). \tag{3.20}$$

En choisissant $\varepsilon_1$ et $\varepsilon_2$ assez petit pour que

$$\alpha = \frac{\varepsilon_1 C_p}{l_1} + \frac{\varepsilon_1 C_p}{l_2} + (\varepsilon_1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2(1-l_1)C_p + \varepsilon_2(1-l_2)C_p < 1,$$

de telle sorte que :

$$F(t) \geq (N_1-\alpha)E(t).$$

Alors,

$$E(t) \leq \alpha_2 F(t), \quad \text{pour} \quad \alpha_2 = \frac{1}{N_1-\alpha}. \tag{3.21}$$

Finalement, la combinaison de (3.19) et (3.21), nous donne

$$\alpha_1 F(t) \leq E(t) \leq \alpha_2 F(t),$$

et cela achève la démonstration de la proposition. ∎

Maintenant on dénonce et on démontre le résultat principal de stabilisation pour notre problème.

**Théorème 3.3.1** *Sous les hypothèses* (**H1**)–(**H3**), *il existe deux constantes positives* $C,\omega > 0$ *telle que*

$$E(t) \leq Ce^{-\omega \int_0^t \xi(s)ds} \tag{3.22}$$

*avec*

$$\xi(t) = \min\big(\xi_1(t), \xi_2(t)\big), \qquad t \geq 0. \tag{3.23}$$

Nous donnons deux Lemmes qui seront un support pour la preuve de ce théorème.

**Lemme 3.3.1** *Sous les hypothèses* (**H1**) et (**H2**) *la fonctionnelle*

$$\psi(t) = \int_\Omega uu_t dx + \int_\Omega vv_t dx$$

*vérifie le long de la solution, l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) \leq &-\frac{l_1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u_t^2 dx + c(g_1 \circ \nabla u)(t) - \frac{l_2}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega v_t^2 dx + c(g_2 \circ \nabla v)(t) \\ &- \int_\Omega F(u,v)dx\end{aligned} \tag{3.24}$$

*pour tout* $t \geq 0$.

**Démonstration.** En utilisant (2.3), la différentiation de la fonctionnelle $\psi$ par rapport au temps $t$ donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\psi(t) = &\int_\Omega u_t^2 dx + \int_\Omega u(t)\Delta u(t)dx - \int_\Omega u(t)\int_0^t g_1(t-\tau)\Delta u(\tau)d\tau dx \\ &+ \int_\Omega v_t^2 dx + \int_\Omega v(t)\Delta v(t)dx - \int_\Omega v(t)\int_0^t g_2(t-\tau)\Delta v(\tau)d\tau dx.\end{aligned}$$

L'utilisation la formule de Green et les conditions aux limites, nous donne :

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\psi(t) &= \int_\Omega u_t^2 dx - \int_\Omega |\nabla u(t)|^2 + \int_\Omega \nabla u(t) \int_0^t g_1(t-\tau)\nabla u(\tau) d\tau dx \\
&\quad + \int_\Omega v_t^2 dx - \int_\Omega |\nabla v(t)|^2 + \int_\Omega \nabla v(t) \int_0^t g_2(t-\tau)\nabla v(\tau) d\tau dx \\
&\leq \int_\Omega u_t^2 dx - l_1 \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega \nabla u \int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(\tau) - \nabla u(t)) d\tau dx \\
&\quad + \int_\Omega v_t^2 dx - l_1 \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \int_\Omega \nabla v \int_0^t g_2(t-\tau)(\nabla v(\tau) - \nabla v(t)) d\tau dx - \int_\Omega F(u,v) dx.
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

Maintenant, on estime le troisième terme de membre de droite de la relation (3.25), d'après l'inégalité de Young, on a

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega \nabla u \int_0^t g_1(t-\tau)[\nabla u(\tau) - \nabla u(t)] d\tau dx \\
&\leq \delta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\delta} \int_\Omega \Big( \int_\Omega g_1(t-\tau)|\nabla u(\tau) - \nabla u(t)| d\tau \Big)^2 dx \\
&\leq \delta \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{c}{\delta}(g_1 \circ \nabla u)(t),
\end{aligned}
\tag{3.26}
$$

d'une maniére analogue, on a :

$$
\int_\Omega \nabla v \int_0^t g_2(t-\tau)(\nabla v(\tau) - \nabla v(t)) d\tau dx \leq \delta \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{c}{\delta}(g_2 \circ \nabla v)(t). \tag{3.27}
$$

pour $\delta$ assez petit, la substitution de (3.26) et (3.27) dans (3.25) donne (3.24). ■

**Lemme 3.3.2** *Supposons que les hypothèses* (**H1**)–(**H3**) *sont vérifier. Alors le long de la solution et pour* $0 < \delta < 1$*, on a :*

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\chi(t) \leq &-\Big( \int_0^t g_1(s) ds - \delta \Big) \int_\Omega u_t^2 dx + \delta c \int_0^t |\nabla u|^2 dx + \frac{c}{\delta}(g_1 \circ \nabla u)(t) - \frac{c}{\delta}(g_1' \circ \nabla u)(t) \\
&-\Big( \int_\Omega g_2(s) ds - \delta \Big) \int_\Omega v_t^2 dx + \delta c \int_\Omega |\nabla v|^2 dx + \frac{c}{\delta}(g_2 \circ \nabla v)(t) - \frac{c}{\delta}(g_2' \circ \nabla v)(t)
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

*pour tout* $t \geq 0$.

**Démonstration.** La différentiation de $\chi(t)$ par rapport à $t$ en utilisant (2.3), donne :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\chi(t) =&\Big(1-\int_0^t g_1(s)ds\Big)\int_\Omega \nabla u\int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau dx\\ &+\int_\Omega \Big(g_1(t-\tau)|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)|d\tau\Big)^2+\int_\Omega f_1(u,v)\int_0^t g_1(t-\tau)(u(t)-u(\tau)d\tau dx \\ &-\int_\Omega u_t\int_0^t g_1'(t-\tau)(u(t)-u(\tau)d\tau dx-\Big(\int_0^t g_1(s)ds\Big)\int_\Omega u_t^2dx.\end{aligned} \tag{3.29}$$

En utilisant l'inégalité de young et lemme (3.3.1), on obtient :

$$\begin{aligned}&\Big(1-\int_0^t g(s)ds\Big)\int_\Omega \nabla u\int_0^t g_1(t-\tau)(\nabla u(t)-\nabla u(\tau))d\tau dx+\int_\Omega\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)|\nabla u(t)-\nabla u(\tau)|d\tau\Big)^2dx\\ &\le \int_\Omega|\nabla u|^2dx+\frac{c}{\delta}(g_1\circ\nabla u)(t)\end{aligned} \tag{3.30}$$

et

$$-\int_\Omega u_t\int_0^t g_1'(t-\tau)(u(t)-u(\tau)d\tau dx \le \delta\int_\Omega u_t^2dx-\frac{c}{\delta}(g_1'\circ\nabla u)(t). \tag{3.31}$$

D'aprés estimation de troisiéme terme de (3.29), nous utilisant la fonction :

$$\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2\le 2E(t)\le 2E(0)$$

on obtient :

$$\begin{aligned}&\int_\Omega f_1(u,v)\int_0^t g_1(t-\tau)[u(t)-u(\tau)]d\tau dx\\ &\le \delta c\int_\Omega\Big(|u|^2+|v|^2+|u|^{2\beta_{11}}+|v|^{2\beta_{12}}\Big)dx+\frac{c}{\delta}\int_\Omega\Big(\int_0^t g_1(t-\tau)[u(t)-u(\tau)]d\tau\Big)^2dx\\ &\le \delta c\Big(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla u\|_2^{2\beta_{11}}+\|\nabla v\|_2^{2\beta_{12}}\Big)+\frac{c}{\delta}(g_1\circ\nabla u)(t)\\ &= \delta c\Big(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^2+\|\nabla u\|_2^{2\beta_{11}-1}\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla v\|_2^{2\beta_{12}-1}\|\nabla v\|_2^2\Big)+\frac{c}{\delta}(g_1\circ\nabla u)(t)\\ &\le \delta c\Big(\|\nabla u\|_2^2+\|\nabla u\|_2^2+[2E(0)]^{\beta_{11}-1}\|\nabla u\|_2^2+[2E(0)]^{\beta_{12}-1}\|\nabla v\|_2^2\Big)\frac{c}{\delta}(g_1\circ\nabla u)(t)\\ &\le \delta c\|\nabla u\|_2^2+\delta c\|\nabla v\|_2^2+\frac{c}{\delta}(g_1\circ\nabla u)(t)\end{aligned} \tag{3.32}$$

D'aprés (3.29) et(3.32), on obtient :

$$\frac{d}{dt}\chi(t) \leq -\Big(\int_\Omega g_1(s)ds - \delta\Big)\int_\Omega u_t^2 dx + \delta c \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{c}{\delta}(g_1 \circ \nabla u)(t) - \frac{c}{\delta}(g_1' \circ \nabla u)(t)$$
$$+ \delta c \int_\Omega |\nabla v|^2 dx$$

pour tout $t \geq 0$. ■

**Preuve du théorème** 3.3.1. Pour tout $t_0 > 0$ fixé, soient $g_0 = \min\Big(\int_0^{t_0} g_1(s)ds, \int_0^{t_0} g_2(s)ds\Big)$, $N_2 = \varepsilon_1$ et $\varepsilon_2 = 1$. En utilisant (3.24), (3.25) et (3.30) pour $\delta = \frac{l}{4cN_2}$ ou $l = \min(l_1, l_2)$, on aura

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\frac{1}{4}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx - \Big(N_2 g_0 - \frac{1}{4c} - 1\Big)\int_\Omega (u_t^2 + v_t^2)dx - \int_\Omega F(u,v)$$
$$\Big(\frac{4c^2}{l}N_2^2 + c\Big)[(g_1 \circ \nabla u)(t) + (g_2 \circ \nabla v)(t)] + \Big(\frac{1}{2}N_1 - \frac{4c^2}{l}N_2^2\Big)[(g_1' \circ \nabla u)(t) + (g_2' \circ \nabla v)(t)].$$

A ce point, nous choisissons $N_2$ assez grand pour que :

$$k = \Big(N_2 g_0 - \frac{l}{4c} - 1\Big) > 0,$$

alors pour $N_1$ assez grand on a :

$$\frac{1}{2}N_1 - \frac{4c^2}{l}N_2^2 > 0.$$

Donc, ce qui implique que

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -\frac{l}{4}\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)dx - k\int_\Omega (u_t^2 + v_t^2)dx - \int_\Omega F(u,v)dx + c(g_1 \circ \nabla u)(t) + c(g_2 \circ \nabla v)(t)$$

ce qui donne :

$$\frac{d}{dt}F(t) \leq -mE(t) + c(g_1 \circ \nabla u)(t) + c(g_2 \circ \nabla v)(t), \qquad t \geq t_0 \tag{3.33}$$

où $m > 0$ est une constante. Donc, si $\xi(t) = \min\Big(\xi_1(t), \xi_2(t)\Big)$, $t \geq 0$, en utilisant **H1**, (3.8) et

(3.33), on obtient :

$$\xi(t)F'(t) \le -m\xi(t)E(t) + c\xi(t)(g_1 \circ \nabla u)(t) + c\xi(t)(g_2 \circ \nabla v)(t)$$
$$\le -m\xi(t)E(t) + c\xi_1(t)\int_\Omega \int_0^t g_1(t-\tau)|\nabla u(t) - \nabla u(\tau)|^2 d\tau dx$$
$$+ c\xi_2(t)\int_\Omega \int_0^t g_2(t-\tau)|\nabla v(t) - \nabla v(\tau)|^2 d\tau dx$$
$$\le -m\xi(t)E(t) + c\int_\Omega \int_0^t \xi_1(t-\tau)g_1(t-\tau)|\nabla u(t) - \nabla u(\tau)|^2 d\tau dx$$
$$+ c\int_\Omega \int_0^t \xi_2(t-\tau)g_2(t-\tau)|\nabla v(t) - \nabla v(\tau)|^2 d\tau dx$$
$$\le -m\xi(t)E(t) - c\int_\Omega \int_0^t g_1'(t-\tau)|\nabla u(t) - \nabla u(\tau)|^2 d\tau dx$$
$$- c\int_\Omega \int_0^t g_2'(t-\tau)|\nabla v(t) - \nabla v(\tau)|^2 d\tau dx.$$

Ce qui implique que :

$$\xi(t)F'(t) + cE'(t) \le -m\xi(t)E(t), \qquad \forall t \ge t_0.$$

Comme la fonction $\xi$ non croissante continue et comme $\xi_1$ et $\xi_2$ sont aussi non croissantes et donc $\xi$ est différentiable avec $\xi'(t) \le 0$, alors :

$$\big(\xi F + cE\big)'(t) \le \xi(t)\xi(t)F'(t) + cE'(t) \le -m\xi(t)E(t), \qquad t \ge t_0.$$

Or, d'après la proposition 3.3.1, on a $F(t) \sim E(t)$, donc

$$R(t) = \xi(t)F(t) + C\,E(t) \sim E(t) \tag{3.34}$$

avec

$$R'(t) \le -\omega\,\xi(t)R(t), \quad t \ge t_0$$

pour tout constante positive $\omega$.

On suppose que $E(t),\xi(t)>0$ pour $t>0$, et comme $R'(t)<0$ pour $t\geq t_0$, ce qui implique que $R(t), t\geq t_0$ est décroissante. Donc :

$$\ln\frac{R(t)}{R(t_0)}\leq\int_{t_0}^{t}(\ln R)'(s)ds=\int_{t_0}^{t}\frac{R'(s)}{R(s)}ds\leq-\omega\int_{t_0}^{t}\xi(s)ds,$$

et

$$R(t)\leq R(t_0)e^{-\lambda\int_{t_0}^{t}\xi(s)ds},\qquad\forall t\geq t_0.$$

Par conséquent (3.22) est satisfaite d'après l'équivalence (3.34). Ceci achève la démonstration du théorème 3.3.1.

**Remarque 3.3.2** *Si* $\xi_1(t)=\xi_2(t)\equiv a>0$ *, alors*

$$E(t)\leq C_2\,E(0)\,e^{-\lambda at},\quad\forall t\geq 0.$$

### 3.3.1 Exemples sur le taux de décroissance d'énergie

Dans cette sous section, nous illustrons le taux de décroissance d'énergie donné par le théorème 3.3.1 à travers des exemples sur les fonctions de relaxation $g_1$ et $g_1$ .

(**1**) Si $g_1(t)=g_2=a_2e^{-b(1+t)^p}$, pour $0<p\leq 1$, alors pour $i=1,2$ $g_i'(t)=-\xi(t)g_i(t)$ avec $\xi=bp(1+t)^{p-1}$. Alors $g_i$ vérifier **H1** et l'estimation (3.22) nous donne

$$E(t)\leq C\,e^{-\omega b(1+t)^p}.$$

(**2**) Si $g_1(t)=\frac{a_1}{(1+t)^q}$ et $g_2=a_2e^{-b(1+t)^p}$, pour $0<p\leq 1$, alors :

$$E(t)\leq\frac{c}{(1+t)^{q\omega}}$$

(**3**) Si $g_1(t)=\frac{a_1}{(e+t)[\ln(e+t)]^s}$, pour $s>1$, $g_2(t)=\frac{a_2}{(1+t)^q}$, $q>1$ on a :

$$E(t)=\frac{c}{\left[(e+t)[\ln(e+t)]^s\right]^{\omega}}$$

(**4**) Pour la fonction $g_i(t)$ non décroissante (pour $i=1,2$), vérifie la condition (**H1**), $\xi_i=\frac{-g_i'}{g_i}$ non décroissante, et $c\xi_1(t)\leq\xi_2(t)$, pour $0<c\leq 1$, donc :

$$E(t)\leq c[g_1(t)]^{\omega}.$$

# Conclusion

Dans ce travail, nous avons considéré un système couplé de l'équations d'onde visco-élastique non linéaire.

Après une introduction, dans le Chapitre 1, nous avons introduit quelques rappels de notions d'analyse fonctionnelle. Ensuite, dans le Chapitre 2, nous avons étudiè l'existance et l'unicité de la solutions pour notre problème en utilisant la méthode de Faedo-Galarkin et certaines techniques développée dans l'article de Cavalcanti *et al.* dans [3].

Enfin, dans le dernier Chapitre, nous avons établi un résultats de stabilité d'ordre général du problème sous certaines hypothèses **(H1)** et **(H2)** pour les fonctions de relaxation $g_i$ $i = 1,2$. Dans ce travail, nous avons utilisé les techniques de Muhammad I. Mustafa [8].

# Bibliographie


[1] R. A. Adams and J. F. Fourier, *Sobolev Spaces*. Academic Press, 2003.

[2] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*. Masson, 1987.

[3] M.M. Cavalcanti, *Existence and uniform decay for the Euler-Bernoulli viscoelastic equation with nonlocal boundary dissipation*. Discrete Contin. Dyn. Syst., **8**(3) :675–695, 2002.

[4] M.S. de Querioz, D.M. Dawson, S.P. Nagarkatti and F. Zhang, *Lyapunov-based control of mechanical system*. Birkhäuser, Boston 2000.

[5] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[6] J. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogenes et applications*, Vol.1 et 2. Paris 1968.

[7] J.L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. second Edition, Dunod, Paris 2002.

[8] Muhammad I. Mustafa, *Well posedness and asymptotic behavior of a coupled system of nonlinear viscoelastic equations*. Nonlinear Analysis :Real World Applications 13(2012)452–463.

[9] J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*. Birkhäuser Basel 1993.