



Mémoire de Master

Présenté au

Département : Génie Électrique

Domaine : Sciences et Technologies

Filière : Electronique

Spécialité : Electronique des systèmes embarqués

Réalisé par :

Drissi Siham
Et
Zemari Kamilia

Thème

Commande PID adaptative d'ordre fractionnaire des systèmes fractionnaires

Soutenu le : 02/07/2024

Devant le Jury composé de :

Mr. Issaouni Salim	Univ. Bouira	Président
Mr. Benaouicha Karim	Univ. Bouira	Encadrant
Mr. Bensafia Yassine	Univ. Bouira	Co-Encadrant
Mr. Bougharouat Ali	Univ. Bouira	Examineur

Dédicace



Je dédie ce mémoire :

À mes chers parents

À mes chers frères

À toute ma famille

À tous mes amis

Siham



Remerciements



Avant tout, mes remerciements vont à ALLAH le tout puissant qui m'a aidé à faire ce travail.

Nous tenons à remercier Mr. Benaouicha Karim et Mr. Bensafia Yassine, pour la proposition du sujet de ce mémoire et pour ses conseils tout au long de ce travail.

Nous remercions également tous les membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à notre travail.

Nous exprimons nos sincères remerciements à nos très chers parents, nos amis qui nous ont soutenus et encouragés tout au long de ce mémoire.



Résumé

Ce mémoire de Master explore l'application des correcteurs PID et PID d'ordre fractionnaire dans les systèmes dynamiques fractionnaire. En utilisant le calcul fractionnaire, qui généralise les dérivées et intégrales à des ordres non entiers, cette étude vise à améliorer la performance et la robustesse des systèmes de contrôle. Les résultats montrent que les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ offrent une performance supérieure par rapport aux correcteurs PID classiques, en particulier dans le contrôle de long processus linéaires en utilisant la commande adaptative. Les simulations démontrent l'efficacité de ces correcteurs, ouvrant de nouvelles perspectives pour leur application industrielle.

Mots clés : Systèmes à ordre fractionnaire, Correcteurs PID, Correcteurs $PI^\lambda D^\mu$, Commande adaptative.

Abstract

This Master's thesis explores the application of PID and fractional-order PID controllers in fractional dynamic systems. Utilizing fractional calculus, which generalizes derivatives and integrals to non-integer orders, this study aims to enhance the performance and robustness of control systems. The results show that $PI^\lambda D^\mu$ controllers offer superior performance compared to traditional PID controllers, particularly in controlling long linear processes using adaptive control. The simulations demonstrate the effectiveness of these controllers, opening new prospects for their industrial application.

Keywords: Fractional-order systems, PID controllers, $PI^\lambda D^\mu$ controllers, Adaptive control.

ملخص

تستكشف هذه الأطروحة للماجستير تطبيق المتحكمات PID و PID ذات الترتيب الكسري في الأنظمة الديناميكية الكسرية. من خلال استخدام حساب التفاضل والتكامل الكسري، الذي يعمم المشتقات والتكاملات إلى ترتيبات غير صحيحة، تهدف هذه الدراسة إلى تعزيز أداء ومثانة أنظمة التحكم. تُظهر النتائج أن المتحكمات $PI^\lambda D^\mu$ تقدم أداءً أفضل مقارنة بالمتحكمات PID التقليدية، وبشكل خاص في التحكم بالعمليات الخطية الطويلة باستخدام التحكم التكيفي. تُظهر المحاكاة فعالية هذه المتحكمات، مما يفتح آفاقاً جديدة لتطبيقها الصناعي.

الكلمات المفتاحية: أنظمة ذات ترتيب كسري، متحكمات PID، متحكمات $PI^\lambda D^\mu$ ، التحكم التكيفي.

Table Des Matières

Introduction Generale	1
-----------------------------	---

Chapitre 1 : Les Systemes D'ordre Fractionnaire

1 Introduction.....	3
2 Operateurs D'ordre Fractionnaire	3
2.1 Définition Mathématique	3
2.1.1 Définition De Grunwald-Letnikov	3
2.1.2 Définition De Riemann-Liouville	3
2.1.3 Définition De Caputo	4
3 Proprietes Des Operateurs D'ordre Fractionnaire	4
4 Transformee De Laplace Des Operateurs D'ordre Fractionnaire	5
4.1 Transformée De Laplace De L'intégrale D'ordre Fractionnaire	5
4.2 Transformée De Laplace De La Dérivée D'ordre Fractionnaire	5
5 Approximation Des Operateurs D'ordre Fractionnaire	6
5.1 Méthode D'expansion Des Fractions Continues EFC	6
5.2 Méthode D'oustaloup	7
5.3 Méthode De Carlson	7
5.4 Méthode De Matsuda	7
5.5 Méthode De Charef	8
6 Modelisation Des Systemes Lineaires D'ordre Fractionnaire	10
6.1 Equation Différentielle Des Systèmes Linéaires D'ordre Fractionnaire	10
6.2 Représentation D'état Des Systèmes Linéaires D'ordre Fractionnaire	11
7 Controlabilite Et Observabilite D'un Systeme D'ordre Fractionnaire	11
7.1 Contrôlabilité	12
7.2 Observabilité	12
8 Stabilite D'un Systeme D'ordre Fractionnaire	12
9 Domaines D'application Des Systemes D'ordre Fractionnaire	13
10 Conclusion	14

Chapitre 2 : Correcteurs PID Et $PI^{\lambda}D^{\mu}$ Adaptatifs

1 Introduction.....	15
2 Structure Du Correcteur PID Classique.....	15
2.1 Type En Série.....	16
2.2 Type En Parallèle	17
3 Bases De Calcul.....	18

3.1	Indices De Performance	18
3.1.1	Pourcentage De Dépassement « D »	18
3.1.2	Intégrales Faisant Intervenir L'erreur	19
4	Correcteur D'ordre Fractionnaire	20
4.1	La Structure Du Correcteur $PI^\lambda D^\mu$	20
4.2	Techniques De Réglage Du Correcteur $PI^\lambda D^\mu$	23
5	Commande Adaptative	24
5.1	Commande PID Adaptative D'ordres Entier	24
5.2	Commande PID Adaptative D'ordres Fractionnaires	25
6	Conclusion	26

Chapitre 3 : Simulation Et Application

1	Introduction.....	28
2	Presentation Des Systemes	28
2.1	Etude Du Premier Système (Thermique)	28
2.1.1	Nature Fractionnaire Des Ordres De Dérivation.....	28
2.1.2	Coefficients Et Leur Impact	29
2.1.3	Réponse En Temps.....	29
2.1.4	Les Caractéristiques De Système	29
2.2	Etude Du Deuxième Système	29
2.2.1	Caractéristiques Fractionnaires Et Ordres De Dérivation.....	30
2.2.2	Coefficients Et Influences Dynamiques.....	30
2.2.3	Réponse En Fréquence Et Comportement Temporel.....	30
2.2.4	Les Caractéristiques De Système	31
3	Approximation De La Fonction De Transfert Fractionnaire	31
3.1	Pour Le Premier Système.....	31
3.2	Pour Le Deuxième Système	33
4	Application De La Commande PID/ $PI^\lambda D^\mu$ Adaptative	35
4.1	Pour Le Premier Système.....	35
4.1.1	La Commande PID Adaptative	35
4.1.2	La Commande $PI^\lambda D^\mu$ Adaptative	36
4.2	Pour Le Deuxième Système	37
4.2.1	La Commande PID Adaptative	37
4.2.2	La Commande $PI^\lambda D^\mu$ Adaptative	38
5	Etude Comparative Entre PID Et $PI^\lambda D^\mu$	40
6	Conclusion	41

Conclusion Generale	42
Références Bibliographiques	43

Liste des Figures

Figure 1. 1 : La zone de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire.....	13
Figure 2. 1 : Système de commande à retour unitaire classique.	15
Figure 2. 2 : Régulation PID type série.....	17
Figure 2. 3 : régulation PID type parallèle.....	17
Figure 2. 4 : La réponse type d'un procédé stable	18
Figure 2. 5 : Intégrale faisant intervenir l'erreur.....	19
Figure 2. 6 : Structure interne du correcteur $PI^\lambda D^\mu$	20
Figure 2. 7 : Lines Asymptotique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$	21
Figure 2. 8 : Diagramme de Bode des correcteurs PID et $PI^\lambda D^\mu$ pour ($\lambda=0.8$, $\mu=0.7$)	22
Figure 2. 9 : Correcteurs classiques et fractionnaires	22
Figure 2. 10 : Le système de régulateurs adaptatif PID d'ordre entier	24
Figure 2. 11 : Le régulateur adaptatif de $PI^\lambda D^\mu$ d'un système perturbé	25
Figure 2. 12 : le système de régulateurs adaptatif $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire	26
Figure 3. 1 : Réponse temporelle de système $G1(s)$	29
Figure 3. 2 : Réponse temporelle de système $G2(s)$	31
Figure 3. 3 : Réponse temporelles superposées pour G et G_e pour $N=5$	32
Figure 3. 4 : Réponse temporelles superposées pour G et G_e pour $N=10$	33
Figure 3. 5 : Réponse temporelles superposées pour G et G_e pour $N=3$	34
Figure 3. 6 : Réponse temporelles superposées pour G et G_e pour $N=5$	34
Figure 3. 7 : Réponse temporelle de système $G1(s)$ avec correction PID critère IAE.....	35
Figure 3. 8 : Réponse temporelle de système $G1(s)$ avec correction PID critère ISE.....	35
Figure 3. 9 : Réponse temporelle de système $G1(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère IAE	36
Figure 3. 10 : Réponse temporelle de système $G1(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère ISE	36
Figure 3. 11 : Réponse temporelle de système $G2(s)$ avec correction PID critère IAE.....	37
Figure 3. 12 : Réponse temporelle de système $G2(s)$ avec correction PID critère ISE.....	38
Figure 3. 13 : Réponse temporelle de système $G2(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère IAE	39
Figure 3. 14 : Réponse temporelle de système $G2(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère ISE	39

Liste des Tableaux

Tableau 3. 1: Caractéristiques de système $G1(s)$	29
Tableau 3. 2: Caractéristiques de système $G2(s)$	31
Tableau 3. 3 : Performances obtenues pour le système $G1(s)$ avec PID critères IAE/ISE	35
Tableau 3. 4 : Performances obtenues pour le système $G1(s)$ avec $PI^\lambda D^\mu$ critères IAE/ISE	37
Tableau 3. 5 : Performances obtenues pour le système $G2(s)$ avec PID critères IAE/ISE	38
Tableau 3. 6 : Performances obtenues pour le système $G2(s)$ avec $PI^\lambda D^\mu$ critères IAE/ISE	39
Tableau 3. 7 : Performances obtenues pour le système $G1(s)$ avec correction PID/ $PI^\lambda D^\mu$	40
Tableau 3. 8 : Performances obtenues pour le système $G2(s)$ avec correction PID/ $PI^\lambda D^\mu$	40

Listes des Acronymes et Symboles

- Acronymes**

EFC : Expansion Par Fractions Continues

BIBO: Bounded Input Bounded Output

PID: Proportionnel Intégral Dérivé

$PI^\lambda D^\mu$: Proportionnel Intégral d'ordre λ et Dérivé d'ordre μ

IAE: Integral of Absolute Error

ISE: Integral of Squared Error

ITAE: Integral of Time-weighted Absolute Error

ITSE: Integral of Time-weighted Squared Error

PSO: Particle Swarm Optimization

QFT: Quantitative Feedback Theory

- Symboles**

aD_t^α : Opérateur de dérivation fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre α .

$D^{-\alpha}$: Opérateur de dérivation fractionnaire inverse d'ordre α .

D^{-n} : Opérateur de dérivation fractionnaire inverse d'ordre n .

D_t^α : Opérateur de dérivation d'ordre non entier α .

dt : Élément différentiel utilisé en intégration.

e^{-t} : Fonction exponentielle avec un argument négatif, utilisée pour des expressions impliquant une décroissance.

$E_{1,n}(z)$: Fonction dépendant de z et des paramètres n et m , spécification nécessaire.

$E_{\alpha}(z)$: Fonction de Mittag-Leffler à un seul paramètre α .

$\binom{\alpha}{m}$: Coefficient binomial, une extension pour les indices non entiers.

$\Gamma(Z)$: Fonction Gamma, une extension des factorielles à l'ensemble des nombres complexes.

$G(s)$: Fonction de transfert représentant la relation entre la sortie et l'entrée d'un système linéaire.

$H(s)$: Autre notation pour une fonction de transfert, généralement utilisée pour désigner un système spécifique ou le transfert d'un second système dans une chaîne.

L : Transformée de Laplace.

L^{-1} : Inverse de la transformée de Laplace.

N : Paramètre influençant le comportement de certaines fonctions.

P_t : Constante correspondant à un pôle dans la fonction de transfert.

S^n : Puissance n de la variable S dans le domaine de Laplace.

t : Variable réelle positive.

Z : Nombre complexe.

$e(t)$: Erreur entre la consigne et la mesure.

$E(s)$: Transformée de Laplace de l'erreur entre la consigne et la mesure.

$u(t)$: Sortie du contrôleur.

$u(s)$: Transformée de Laplace de la sortie du contrôleur.

K_p : Gain proportionnel, ajuste la réponse proportionnelle du contrôleur.

T_d : Temps de dérivation, paramètre du contrôleur PID influençant le comportement dérivatif.

T_i : Temps intégral, paramètre du contrôleur PID influençant le comportement intégratif.

λ : Ordre de l'intégrale fractionnaire.

μ : Ordre de la dérivée fractionnaire.

Introduction Générale

La recherche contemporaine en contrôle des systèmes dynamiques s'est profondément enrichie avec l'adoption de concepts provenant de domaines mathématiques avancés, particulièrement le calcul fractionnaire. Cette approche, qui généralise les notions classiques de dérivées et d'intégrales aux ordres non entiers, a révolutionné notre capacité à modéliser et contrôler des systèmes dont la dynamique est trop complexe pour être décrite efficacement par les méthodes traditionnelles. Ce mémoire de Master se propose d'explorer l'application de cette science fascinante dans le cadre spécifique des correcteurs PID et PID à ordre fractionnaire, ouvrant ainsi de nouvelles perspectives pour l'ingénierie des systèmes de contrôle.

La structure de ce mémoire reflète une démarche rigoureuse et systématique, en commençant par une introduction générale des opérateurs d'ordre fractionnaire, dont les définitions fondamentales sont posées par Grunwald-Letnikov, Riemann-Liouville, et Caputo. Chaque définition est scrutée sous l'angle de sa contribution unique à la compréhension et à l'application des mathématiques fractionnaires dans le contexte des systèmes dynamiques.

Les propriétés de ces opérateurs, essentielles pour toute application en ingénierie, sont ensuite détaillées, en particulier leur comportement dans les transformations de Laplace, qui sont cruciales pour la conception de systèmes de contrôle en temps réel [1]. Suivant ces bases théoriques, le mémoire explore diverses méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire, nécessaires pour la mise en œuvre pratique dans des systèmes physiques et industriels. Ces méthodes incluent des techniques avancées telles que l'expansion par fractions continues et la méthode d'Oustaloup.

La partie centrale du mémoire se concentre sur la modélisation de systèmes linéaires d'ordre fractionnaire et aborde des questions vitales de contrôlabilité, d'observabilité, et de stabilité. Ces discussions s'inscrivent dans le cadre plus large de la conception et de l'optimisation des systèmes de contrôle adaptatifs, où les correcteurs PID classiques sont mis en contraste avec leurs homologues à ordre fractionnaire.

L'application pratique des théories et méthodes discutées est démontrée à travers des études de cas sur des systèmes réels, où les avantages des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ sont évalués en termes de performance, robustesse et efficacité [1]. Ce travail culmine avec une comparaison entre les approches traditionnelles et fractionnaires, soulignant les gains significatifs réalisés par l'adoption de la commande adaptative fractionnaire, particulièrement dans des scénarios industriels complexes.

En conclusion, ce mémoire ne se contente pas de présenter un état de l'art enrichi des systèmes de contrôle fractionnaires mais ambitionne également de pousser les frontières de ce que ces technologies peuvent offrir. Les résultats prometteurs obtenus suggèrent des directions futures pour

la recherche et des applications potentielles dans divers secteurs industriels, faisant de ce domaine un vecteur important d'innovation en ingénierie des systèmes.

Chapitre 1 :

Les systèmes d'ordre fractionnaire

1 Introduction

Le calcul d'ordre fractionnaire est un domaine mathématique passionnant qui se concentre sur l'analyse des dérivées et des intégrales d'ordres non entiers, constituant ainsi une généralisation du calcul traditionnel. Ce domaine se distingue par ses applications étendues dans divers domaines tels que la théorie de la commande, l'ingénierie et la médecine. Au cours des dernières années, les scientifiques et les ingénieurs ont redécouvert le calcul fractionnaire et l'ont utilisé de manière importante pour résoudre des problèmes complexes. Les contrôleurs d'ordre fractionnaire ont particulièrement réussi dans le contrôle de processus non linéaires, ce qui en fait un sujet de recherche et de développement très prometteur.

2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

2.1 Définition mathématique

Les opérateurs d'ordre fractionnaire sont une généralisation des dérivées et intégrales classiques à des ordres non entiers α . Ils permettent de définir des dérivées et intégrales fractionnaires d'une fonction. On peut définir l'opérateur intègro-différentiel continu comme suit [2] :

$${}_aD_t^\alpha = \begin{cases} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha} & \alpha > 0 \\ 1 & \alpha = 0 \\ \int_a^t (d\tau)^{-\alpha} & \alpha < 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Avec a et t sont des limites de l'opération.

Les principales définitions, mathématiques sont les suivantes :

2.1.1 Définition de Grunwald-Letnikov

La définition de Grunwald-Letnikov est une des définitions les plus couramment utilisées de la dérivée d'ordre fractionnaire [3], donnée par :

$${}_aD_t^\alpha = \frac{{}_a d_t^\alpha f(t)}{dt^\alpha} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(t - kh) \quad (1.2)$$

Cette définition découle de la généralisation aux ordres fractionnaires de la formule donnant la dérivée d'ordre entier supérieur n d'une fonction continue $f(t)$, qui est :

$$D^n f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^N (-1)^k \binom{n}{k} f(t - kh); N \in \mathbb{N} \quad (1.3)$$

2.1.2 Définition de Riemann-Liouville

La définition de Riemann-Liouville est une autre définition couramment utilisée de la dérivée d'ordre fractionnaire. Elle repose sur la formule de Cauchy qui se manifeste par l'équation ci-dessous:

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \int_a^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} f(x) dx \quad (1.4)$$

La définition de la dérivée ou de l'intégrale d'ordre fractionnaire α de $f(t)$ par Riemann-Liouville est la suivante [3] :

$${}_a D_t^{-n} f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_a^t (t-x)^{-\alpha-1} f(x) dx, & \text{si } R(\alpha) < 0 \\ f(t) & \text{si } R(\alpha) = 0 \\ D^N [{}_a D_t^{a-n} f(t)] , n = \min\{k \in \mathbb{N} > R(\alpha)\} & \text{si } R(\alpha) > 0 \end{cases} \quad (1.5)$$

Avec $\alpha \in \mathbb{C}$ un entier positif, et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0, \infty]$.

$\Gamma(\alpha)$ est la fonction Gamma généralisée aux nombres fractionnaires définie par :

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\alpha-1} dx \quad (1.6)$$

2.1.3 Définition de Caputo

Lors de ses recherches sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire à la fin des années 60, Caputo a proposé une nouvelle approche de la dérivation fractionnaire. [4] la définition exprimée mathématiquement comme suit :

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^r(\tau) d\tau \quad (1.7)$$

r est un entier positif qui confirme l'inégalité $(r-1) < \alpha < r$.

$f^r(t)$ Désigne la dérivée d'ordre entier r par rapport à τ , de la fonction $f(\tau)$.

${}_a D_t^\alpha f(t)$ Est la dérivée d'ordre fractionnaire α de la fonction $f(t)$ entre a et t selon la définition de Caputo.

3 Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [1] :

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de la variable z , alors la dérivée $g(z) = D_c^\alpha f(z)$ est une fonction analytique de z et α .
2. L'opération D_c^α et la dérivée habituelle d'ordre n dans Z^+ donnent le même résultat.
3. La dérivée fractionnaire D_c^α et l'intégrale n -fois habituelle avec n dans Z^- donnent le même résultat.
4. $D_c^\alpha f(z)$ Et ses premières dérivées d'ordre $(n-1)$ doivent s'annuler à zéro en $z = c$.
5. L'opérateur d'ordre $\alpha = 0$ est l'opérateur identité.
6. L'opérateur doit être linéaire : $D_c^\alpha [af(z) + bh(z)] = aD_c^\alpha f(z) + bD_c^\alpha h(z)$

7. Pour les intégrales d'ordre fractionnaire de tout ordre, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, il s'agit de la loi additive des exposants (propriété de semi-groupe) : $D_c^\alpha D_c^\beta f(z) = D_c^{\alpha+\beta} f(z)$.

4 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

Le formalisme mathématique des définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers est un peu complexe, mais leur expression dans le domaine de Laplace est très simple, en particulier dans le cas de l'étude des systèmes relaxés à $t=0$. Nous examinons ici la possibilité que l'ordre α soit réel.

4.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$ définie par l'équation (1.5) qu'on peut écrire comme un produit de convolution des fonctions $g(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1}$ et $f(t)$ [5][6] :

$$I^\alpha f(t) = D^{-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} * f(t) \quad (1.8)$$

On peut donner la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha-1}$ comme suit [2] :

$$G(s) = L\{t^{\alpha-1}\} = \Gamma(\alpha) s^{-\alpha} \quad (1.9)$$

Donc la transformée de Laplace de l'intégral de Riemann-Liouville est :

$$L\{I^\alpha(f(t))\} = s^{-\alpha} F(s) \quad (1.10)$$

De même, la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire définie par Grunwald-Letnikov et Caputo est également donnée par l'équation (1.10).

4.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée d'ordre arbitraire [2].

Dérivée de Riemann-Liouville

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (1.11)$$

Avec $(n-1) < \alpha < n$

La transformée de Laplace de la dérivée selon Riemann-Liouville est bien connue [7]. Cependant, son applicabilité pratique est restreinte car il n'existe pas d'interprétation physique des valeurs limites de la dérivée d'ordre fractionnaire pour $t=0$

Dérivée de Gröndwald-Leitnikov [2]

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) \quad (1.12)$$

Dérivée de Caputo

$$L\{D^\alpha f(t)\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0) \quad (1.13)$$

5 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Différentes méthodes existent pour estimer les opérateurs d'ordre fractionnaire en utilisant des fonctions rationnelles. On appelle approximations analogiques ou approximations du domaine fréquentiel les approximations disponibles dans le domaine s [8]. Voici quelques-unes des principales méthodes :

- La méthode d'expansion des fractions continues (EFC)
- La méthode de Charef.
- La méthode d'Oustaloup.
- La méthode de Carlson.
- La méthode de Matsuda.

5.1 Méthode d'expansion des fractions continues EFC

L'évaluation des fonctions par EFC est une méthode qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et qui converge dans un domaine plus vaste du plan complexe. On peut exprimer le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle $G(s)$ comme suit :

$$G(s) \cong a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s) + \frac{b_2(s)}{a_2(s) + \frac{b_3(s)}{a_3(s) + \dots}}} = a_0(s) + \frac{b_1(s)}{a_1(s)} + \frac{d_2(s)}{a_2(s)} + \frac{b_3(s)}{a_3(s)} + \dots \quad (1.14)$$

Où $a_i(s)$, $b_i(s)$ sont des fonctions rationnelles de la variable s .

Une fonction rationnelle $\hat{G}(s)$ est obtenue par application de cette méthode, qui est une approximation de la fonction irrationnelle $G(s)$. Par ailleurs, en ce qui concerne l'interpolation, il arrive que les fonctions rationnelles demeurent supérieures aux polynômes, car elles offrent la possibilité de modéliser les fonctions à l'aide de pôles.

Les méthodes de EFC reposent sur l'approximation d'une fonction irrationnelle $G(s)$ par une fonction rationnelle de la variable s , qui est le quotient de deux polynômes :

$$G(s) \cong R_{i(i+1) \dots (i+m)} = \frac{P_\mu(s)}{Q_\nu(s)} = \frac{p_0 + p_1 s + \dots + p_\mu s^\mu}{q_0 + q_1 s + \dots + q_\nu s^\nu} \quad (1.15)$$

5.2 Méthode d'Oustaloup

La méthode d'oustaloup [8], [9], [10] repose sur l'approximation d'une fonction de la forme suivante :

$$H(s) = s^\mu, \mu \in R^+ \quad (1.16)$$

Par une fonction rationnelle :

$$\hat{H}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + \frac{s}{\omega_k}}{1 + \frac{s}{\omega'_k}} \quad (1.17)$$

En utilisant toutes les formules ci-dessous :

$$\begin{aligned} \omega'_0 &= \alpha^{-0.5} \omega_\mu; \omega_0 = \alpha^{0.5} \omega_\mu; \frac{\omega_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha\eta > 1 \\ \frac{\omega'_{k+1}}{\omega_k} &= \eta > 0; \frac{\omega_k}{\omega'_{ik}} = \alpha > 0; N = \frac{\log(\frac{\omega_N}{\omega_0})}{\log(\alpha\eta)}; \mu = \frac{\log(\alpha)}{\log(\alpha\eta)} \end{aligned} \quad (1.18)$$

ω_u Est le gain fréquentiel unitaire et la fréquence centrale d'une bande de fréquences géométriquement distribuée autour. Soit $\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$ où ω_h , ω_b représentent respectivement la fréquence haute et basse.

5.3 Méthode de Carlson

Cette méthode repose sur la supposition suivante :

$$(H(s))^\frac{1}{\alpha} = s \quad (1.19)$$

La méthode de Newton itérative conduira à une série d'approximations $H_i(s)$ qui débute par la valeur initiale $H_0(s) = 0$ [11].

La forme de la fonction rationnelle approximant $H(s) = s^\alpha$ est la suivante :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(\frac{1}{\alpha}-1)(H_{i-1}(s))^\frac{1}{\alpha} + (\frac{1}{\alpha}+1)s}{(\frac{1}{\alpha}+1)(H_{i-1}(s))^\frac{1}{\alpha} + (\frac{1}{\alpha}-1)s} \quad (1.20)$$

5.4 Méthode de Matsuda

La méthode suggérée repose sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par EFC et l'ajustement de la fonction initiale dans un ensemble de points séparés par une échelle logarithmique [11].

Si les points sélectionnés sont s_i , avec ($i = 0, 1, 2, \dots$), l'approximation se présente sous la forme suivante :

$$H(s) = a_0(s) + \frac{(s-s_0)(s-s_1)(s-s_2)}{a_1(s)+a_2(s)+a_3(s)} \dots \dots \quad (1.21)$$

Où : $a_i = v_i(s_i)$, $v_0(s) = H(s)$, $v_{i+1} = \frac{s-s_i}{v_i(s)-a_i}$

5.5 Méthode de Charef

L'approximation sera différente en fonction de l'ordre de la fonction de transfert fractionnaire à approximer, que ce soit du premier ou du second ordre [12] :

Système d'ordre fractionnaire du premier ordre

Le système d'ordre fractionnaire du premier ordre est modélisé de la manière suivante :

$$G(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{PT})^\beta} \quad (1.22)$$

La fonction (1.22) est écrite de la manière suivante [9] :

$$G(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{PT})^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+\frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})} \quad (1.23)$$

La valeur de $(N + 1)$ correspond au nombre total de singularités qui peut être calculé en fonction de la bande de fréquences du système. La réduction de l'équation (1.19) à un nombre fini N permet d'obtenir l'approximation suivante :

$$H(s) = \frac{1}{(1+\frac{s}{PT})^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} (1+\frac{s}{z_i})}{\prod_{i=0}^N (1+\frac{s}{p_i})} \quad (1.24)$$

On obtient ainsi les pôles p_i et les zéros z_i de la fonction de la singularité :

$$\begin{aligned} p_i &= (ab)^i p_0 & i &= 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i &= (ab)^i a p_0 & i &= 1, 2, 3, \dots, N - 1 \end{aligned}$$

Avec

$$\begin{cases} p_0 = PT^{10^{\frac{\varepsilon_p}{20\beta}}} \\ a = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10(1-\beta)}} \\ b = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10\beta}} \\ \beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \end{cases}$$

ε_p : l'erreur tolérée en dB.

Système d'ordre fractionnaire du deuxième ordre

L'équation suivante représente un système de second ordre :

$$G(s) = \frac{1}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\xi\frac{s}{\omega_n} + 1)^\beta} \quad (1.25)$$

β est un nombre réel positif tel que $0 < \beta < 1$, on peut observer deux cas :

- Cas ou $0 < \beta < 0.5$

La fonction (1.22) peut être exprimée de la façon suivante :

$$G_e(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_n} + 1)(\frac{s}{\omega_{n+1}})^\eta}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1)} \quad (1.26)$$

Avec $\alpha = \zeta^\beta$ et $n = 1 - 2\beta$, cela peut également être approximatif par la fonction:

$$G_e(s) \approx \frac{(\frac{s}{\omega_n} + 1)}{s^2} \frac{\prod_{i=1}^{N-1} (1 + \frac{s}{z_i})}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1) \prod_{i=1}^N (1 + \frac{s}{p_i})} \quad (1.27)$$

On obtient les singularités (pôles et zéros) à partir des formules suivantes :

$$\begin{cases} p_i = (ab)^{i-1} az_1 & i = 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i = (ab)^{i-1} z_i & i = 2, 3, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} z_1 = \omega_n \sqrt{b} \\ a = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10(1-\eta)}} \\ b = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10\eta}} \\ \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \end{cases}$$

Il est possible de calculer l'ordre d'approximation N en définissant la bande de fréquences de travail, qui est représentée par N_{max} , telle que : $p_{n-1} < \omega_{max} < p_n$ ce qui conduit à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entiere de } \left\lceil \frac{\log(\frac{\omega_{max}}{p_i})}{\log(ab)} + 1 \right\rceil + 1 \quad (1.28)$$

La valeur des coefficients a_{m_i} et b_{m_i} est déterminée à partir des singularités P_i et Z_i , α et ω_i .

- Cas ou $0.5 < \beta < 1$

L'approximation est donnée de la manière suivante :

$$G_e(s) = \frac{(\frac{s}{\omega_n} + 1)}{s^2} \frac{(\frac{s}{\omega_{n+1}})^\eta}{(\frac{s^2}{\omega_n^2} + 2\alpha\frac{s}{\omega_n} + 1)} \quad (1.29)$$

Où $\alpha = q^\beta$ Et $\eta = 2\beta - 1$

Les formules suivantes fournissent les pôles et les zéros :

$$\begin{cases} p_i = (ab)^{i-1}p_1 & i = 1, 2, 3, \dots, N \\ z_i = (ab)^{i-1}ap_1 & i = 2, 3, \dots, N - 1 \end{cases}$$

Avec

$$\begin{cases} p_1 = \omega_n \sqrt{b} \\ a = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10(1-\eta)}} \\ b = 10^{\frac{\varepsilon_p}{10\eta}} \\ \eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \end{cases}$$

6 Modélisation des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Tout comme dans le cas des opérateurs entiers, il existe plusieurs modèles pour représenter les systèmes d'ordre fractionnaire. Parmi les principaux, on peut citer :

6.1 Équation différentielle des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Un système d'ordre non entier linéaire mono-variable et invariant dans le temps, avec une entrée $u(t)$ et une sortie $y(t)$, est décrit par l'équation suivante :

$$a_n D^{\alpha_n} y(t) + \dots + a_0 D^{\alpha_0} y(t) = b_m D^{\beta_m} u(t) + \dots + b_0 D^{\beta_0} u(t) \quad (1.30)$$

Si tous les ordres de dérivation sont des multiples entiers de l'ordre de base α ($0 < \alpha < 1$), c'est-à-dire $(a_i, b_j) \in \mathcal{R}^+$, On dit que le système est commensurable, et dans ce cas, l'équation (1.30) prend la forme suivante :

$$\sum_{i=0}^n a_i D^{i\alpha} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j D^{j\alpha} u(t) \quad (1.31)$$

Dans ces équations, on réalise la transformée de Laplace et, en supposant que les conditions initiales sont nulles, on obtient des fonctions de transfert avec des puissances d'ordre non entier de la variable complexe de Laplace.

La fonction de transfert d'un système commensurable dans le domaine continu se présente comme suit :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{j=0}^m b_j (s^\alpha)^j}{\sum_{i=0}^n a_i (s^\alpha)^i} \quad (1.32)$$

6.2 Représentation d'état des systèmes linéaires d'ordre fractionnaire

Une équation d'état d'ordre fractionnaire de la forme peut être utilisée pour représenter un système linéaire d'ordre fractionnaire mono variable [13] :

$$\begin{cases} d^{[\alpha]}x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.33)$$

$$d^{[\alpha]}x(t) = [d^{\alpha_1}x_1(t) d^{\alpha_2}x_2(t) \dots d^{\alpha_n}x_n(t)]^T$$

$x(t)$: vecteur d'état de dimension $(n \times 1)$

$d^{[\alpha]}x(t)$: vecteur de la dérivée d'ordre α (avec $\alpha \in \mathbb{R}$)

Où : $0 < \alpha_i < 1$

A, B, C, D sont des matrices réelles constantes de dimension appropriée.

En effectuant la transformée de Laplace et la définition de la dérivée d'ordre fractionnaire au sens de Caputo, l'équation (1.33) devient :

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I_n - A)^{-1} BU(s) + (s^\alpha I_n - A)^{-1} s^{\alpha-1} x(0) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.34)$$

Notons que la définition de Caputo est nécessaire si l'on veut que les conditions initiales soient exprimées comme les valeurs des états au temps $(t = 0)$. Dans le cas où les conditions initiales sont nulles, l'équation (1.34) devient :

$$\begin{cases} X(s) = (s^\alpha I_n - A)^{-1} BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases} \quad (1.35)$$

Et la fonction de transfert $G(s)$ correspondante de cette équation est donnée par :

$$Y(s) = G(s)U(s), \quad G(s) = C(s^\alpha I_n - A)^{-1}B + D \quad (1.36)$$

7 Contrôlabilité et observabilité d'un système d'ordre fractionnaire

Supposons un système linéaire d'ordre fractionnaire commensurable représenté par l'équation d'état :

$$\begin{cases} D^\alpha x(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.37)$$

Avec $0 < \alpha < 1$

7.1 Contrôlabilité

La contrôlabilité des systèmes fractionnaires est définie de la même manière que celle des systèmes entiers.

Le système non entier d'ordre commensurable de l'équation (1.37) est contrôlable si pour un temps donné t_0 il existe $t_1 > t_0$ tel que, quelque soient deux états $x(t_0) = x_0$ et $x(t_1) = x_1$ dans L'espace d'état, il existe une entrée de contrôle $u(t)$, $t \in [t_0, t_1]$ qui permet de transférer l'état $x(t)$ de x_0 à x_1 en un temps fini t_1 .

Si le rang de la matrice de contrôlabilité est égal à n , le système non entier d'ordre commensurable peut être contrôlé.

$$M_{cont} = [B \ AB \ \cdots \ A^{N-1}B] \quad (1.38)$$

$M_{cont} (n \times n)$ est une matrice de rang n .

7.2 Observabilité

De même, la condition d'observabilité des systèmes d'ordre non entier commensurables est définie à partir de la définition de l'observabilité des systèmes entiers et est donnée par :

Les systèmes non entiers d'ordre commensurable de l'équation (1.37) sont observables pendant l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$, $t_1 > 0$, si n'importe quel état $x(t_0)$ peut être déduit à partir des observations de la sortie $y(t)$ et de l'entrée $u(t)$ pendant un temps fini $t \in [t_0, t_1]$. Dans ce cas aussi, la condition d'observabilité du système est que le rang de la matrice d'observabilité soit égal à n .

$$M_{Ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{N-1} \end{bmatrix} \quad (1.39)$$

Est une matrice de rang n .

8 Stabilité d'un système d'ordre fractionnaire

La stabilité au sens BIBO (Bounded Input, Bounded Output), également connue sous le nom de stabilité externe, est définie comme suit [14] :

Un système BIBO est considéré comme stable uniquement si, à une entrée bornée, correspond une sortie bornée.

La condition de stabilité pour les systèmes entiers est que l'équation caractéristique du système ne contient aucune racine à partie réelle positive. En revanche, les systèmes fractionnaires peuvent avoir des racines dans la moitié droite du plan complexe et être stable.

Actuellement, il n'existe aucune technique polynomiale pour analyser la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire, similaire au critère de Routh-Hurwitz utilisé pour les systèmes d'ordre entier.

Le seul moyen connu jusqu'à présent est l'application du principe conditionnel sur l'argument.

Un système d'ordre commensurable, dont le polynôme caractéristique est $\Delta(p)$ selon l'équation (1.37), est stable si et seulement si :

$$|Arg(p_i)| \geq \alpha \frac{\pi}{2}, \forall i \quad (1.40)$$

Où : $\Delta(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_1 p^1 + a_0$

Avec p_i la $i^{ème}$ racine de $\Delta(p)$. Cette condition définit la zone de stabilité d'un système d'ordre fractionnaire dans le plan complexe S , comme illustré dans la figure ci-dessous :

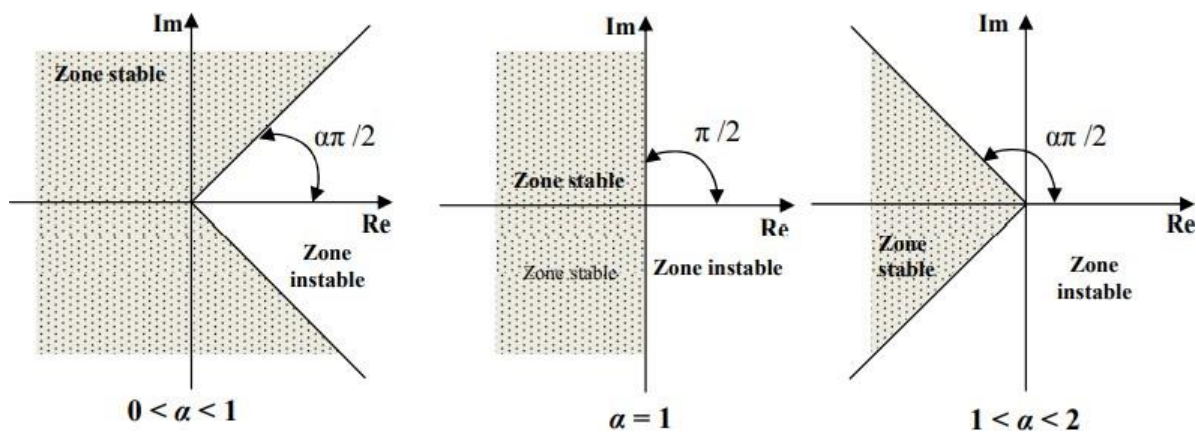


Figure 1. 1 : La zone de la stabilité des systèmes d'ordre fractionnaire

9 Domaines d'application des systèmes d'ordre fractionnaire

La théorie du calcul fractionnaire est largement utilisée dans les domaines des sciences fondamentales et de l'ingénierie. [15], [16]. Et couvrent de nombreux domaines, notamment :

- **Ingénierie électrique et électronique** : Les systèmes d'ordre fractionnaire sont utilisés dans la conception de circuits électriques et électroniques, notamment dans le contrôle de la tension et du courant, la modélisation des circuits intégrés, et la conception de filtres.

- **Contrôle et automatique** : Les techniques d'ordre fractionnaire sont de plus en plus utilisées dans le domaine du contrôle et de l'automatique pour améliorer la performance des systèmes de contrôle, notamment dans les systèmes de commande adaptative, les systèmes de contrôle robustes, et les systèmes non linéaires.
- **Télécommunications** : Les systèmes d'ordre fractionnaire sont utilisés dans la modélisation et la conception de systèmes de communication, tels que les antennes, les modulateurs/démodulateurs, et les égaliseurs de canal.
- **Mécanique et génie civil** : Ils sont également utilisés dans la modélisation des systèmes mécaniques, tels que les systèmes de suspension des véhicules, les systèmes de vibration, et les structures complexes.
- **Biologie et médecine** : Les systèmes d'ordre fractionnaire sont utilisés pour modéliser les phénomènes biologiques complexes, tels que la croissance cellulaire, la diffusion des médicaments dans le corps, et les réponses physiologiques aux stimuli.
- **Économie et finance** : Ils sont appliqués dans la modélisation des phénomènes économiques et financiers, tels que les marchés boursiers, les taux de change, et les modèles de croissance économique.

10 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons introduit quelques définitions fondamentales de l'intégration et de la dérivation d'ordre fractionnaire, ainsi que leurs propriétés et leur représentation dans le domaine de Laplace. Nous avons présenté diverses méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.

Finalement, nous avons examiné différents modèles de représentation des systèmes fractionnaires et leurs propriétés, telles que la stabilité, la contrôlabilité et l'observabilité.

Chapitre 2 :

Correcteurs PID et $PI^\lambda D^\mu$ adaptatifs

1 Introduction

Le contrôle PID (Proportionnel, Intégral, Dérivé) est l'un des mécanismes de contrôle les plus couramment utilisés dans l'ingénierie et l'automatisation. Il vise à réguler un système en ajustant une sortie de manière à maintenir une variable de processus à une valeur souhaitée, appelée consigne, en fonction des erreurs entre cette consigne et la mesure réelle de la variable de processus.

L'ordre fractionnaire est une branche de mathématique qui étudie la différenciation et l'intégration de l'opération dans un ordre arbitraire, ce qui signifie que l'ordre peut être n'importe quel nombre réel ou même complexe. Ils voulaient étendre la dérivation ou l'intégration d'ordre fractionnaire en utilisant non seulement un ordre entier, mais aussi des ordres non entiers [17].

2 Structure du correcteur PID classique

Aujourd'hui, les correcteurs PID représentent la structure de régulation la plus courante dans les circuits de rétroaction, constituant plus de 90% de toutes les boucles de régulation utilisées. Généralement, ces correcteurs PID classiques sont intégrés dans des systèmes de commande à boucle fermée, comme illustré dans la figure (2.1), où $u(t)$ symbolise le signal de commande et $e(t)$ désigne l'écart entre la consigne $r(t)$ et la variable contrôlée $y(t)$. La fonction de transfert du correcteur est notée $C(s)$, tandis que celle du système est représentée par $G_p(s)$.

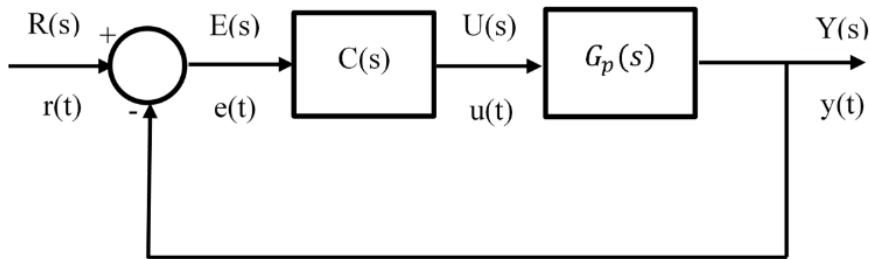


Figure 2. 1 : Système de commande à retour unitaire classique.

Le correcteur PID classique, schématisé dans la figure (2.1) est régi par une équation spécifique.

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\tau) d\tau + T_D \frac{de(t)}{dt} \right) \quad (2.1)$$

Les paramètres associés à ce correcteur incluent le gain proportionnel K_p , la constante d'intégration K_I et la constante de dérivation K_D , chacun influençant le système de manière distincte et complémentaire.

Composante Proportionnelle (P) : La composante proportionnelle, la forme la plus élémentaire de rétroaction, ajuste le signal de commande en fonction de l'écart entre la consigne et la variable contrôlée, multiplié par K_P .

Augmenter ce gain accélère la correction de l'écart, mais un gain trop élevé peut induire des oscillations, réduisant la stabilité du système. Cependant, une action purement proportionnelle ne peut pas éliminer complètement l'erreur statique

Composante Intégrale (I) : La suppression de l'écart permanent est réalisée grâce à la composante intégrale, qui, même avec un petit signal d'erreur constant, augmente progressivement l'amplitude de la commande. Elle accumule l'erreur passée et continue à augmenter ou diminuer la sortie jusqu'à ce que l'erreur soit nulle. Ce mécanisme est souvent interprété comme un ajustement automatique du point de fonctionnement du correcteur.

Cela permet d'éliminer l'erreur statique, améliorant ainsi la précision à long terme. Toutefois, elle peut provoquer des oscillations ou de l'instabilité si elle est trop agressive.

Composante Dérivée (D) : À l'opposé, la composante dérivée produit une correction proportionnelle à la dérivée de l'erreur, c'est-à-dire la vitesse à laquelle l'erreur change.

Elle anticipe l'erreur future en observant sa tendance, contribuant à amortir les oscillations et améliorant la stabilité et la réactivité du système. Une action dérivée trop forte peut rendre le système sensible au bruit.

Différentes possibilités d'associations des modules P, I et D existent. Ces structures sont fonctionnellement équivalentes, et il est facile de convertir les coefficients utilisés dans l'une pour obtenir ceux d'une autre [18].

2.1 Type en série

$$u(t) = u_0 + K_{c,s} \left(\frac{T_{i,s} + T_{d,s}}{T_{i,s}} \right) \varepsilon(t) + \frac{K_{c,s}}{T_{i,s}} \int_0^t \varepsilon(t) dt + k_{c,s} T_{d,s} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.2)$$

Avec :

$$\varepsilon(t) = y_c(t) - y(t) \quad (2.3)$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{u(p)}{\varepsilon(t)} = K_{c,s} \left[\frac{T_{i,s} + T_{d,s}}{T_{i,s}} + \frac{1}{T_{i,s}p} + T_{d,s}p \right] = K_{c,s} \left(1 + \frac{1}{T_{i,s}p} \right) (1 + T_{d,s}p) \quad (2.4)$$

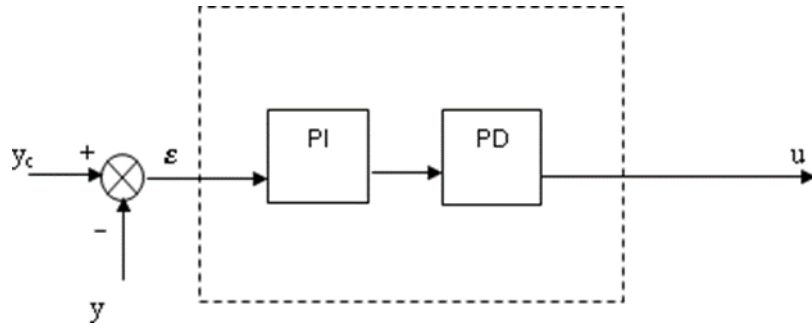


Figure 2. 2 : Régulation PID type série

2.2 Type en parallèle

$$u(t) = K_{c,p}\varepsilon(t) + \frac{1}{T_{i,p}} \int_0^1 \varepsilon(t)dt + T_{d,p} \frac{d\varepsilon(t)}{dt} \quad (2.5)$$

La fonction de transfert s'écrit :

$$\frac{u(p)}{\varepsilon(t)} = K_{c,p} + \frac{1}{T_{i,p}p} + T_{d,p}p \quad (2.6)$$

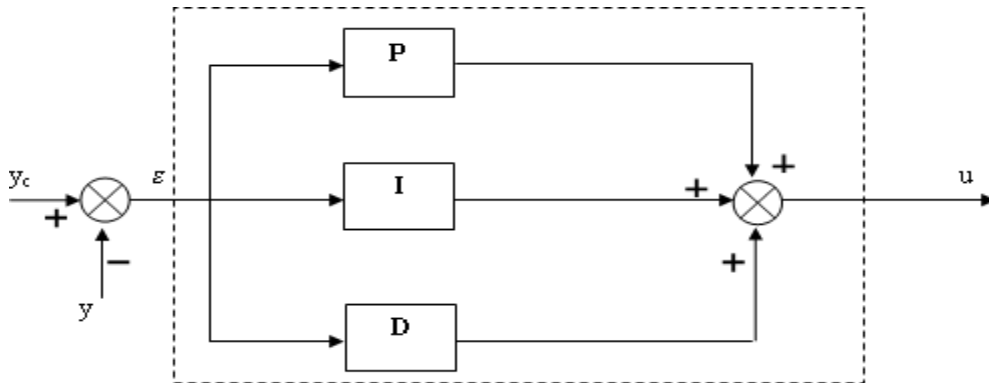


Figure 2. 3 : régulation PID type parallèle

Pour obtenir une bonne réponse du procédé et de la régulation, il est nécessaire de déterminer les coefficients K , T_i , et T_d , qui représentent respectivement l'action proportionnelle, intégrale et dérivée du régulateur. Le réglage d'un PID consiste à ajuster ces coefficients afin de garantir une réponse adéquate du procédé et de la régulation. Les objectifs sont de rendre le système robuste, rapide et précis. Pour cela :

- **En mode de régulation (consigne fixe) :** Il est crucial de choisir des réglages permettant à la grandeur mesurée de revenir à sa valeur de consigne dans un temps raisonnable.
- **En mode d'asservissement (consigne variable) :** Il faut sélectionner des réglages qui limitent les dépassements éventuels (over shoot) de la grandeur mesurée.

La réponse type d'un procédé stable est la suivant :

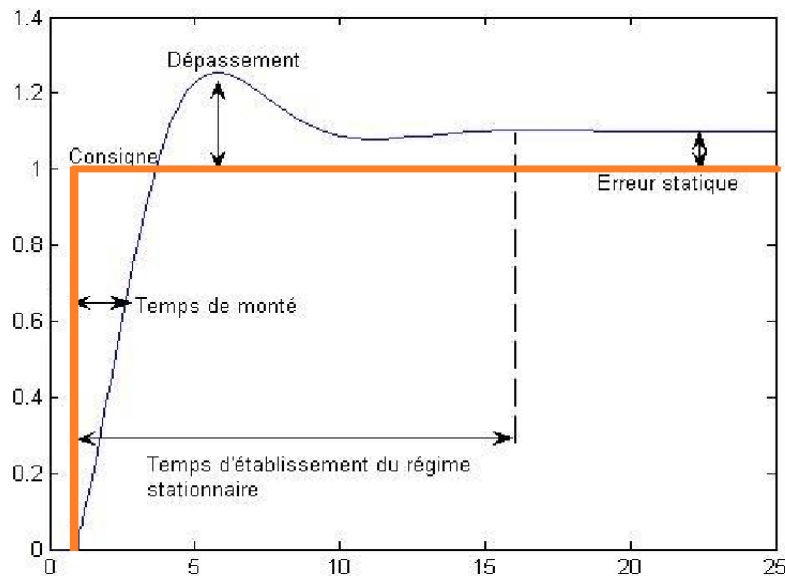


Figure 2. 4 : La réponse type d'un procédé stable

Les paramètres du domaine temporel de la réponse du système :

- Le dépassement de crête (M_p).
- Le temps de montée (t_r).
- Le temps de stabilisation (t_s).
- L'erreur statique (E_s).

3 Bases de Calcul

3.1 Indices de Performance

Pour évaluer la qualité de la régulation, on se base généralement sur l'analyse de la réponse indicielle de l'ensemble régulateur et du système (boucle à l'état ouvert). Différents indices de performance peuvent être évalués à partir de la réponse temporelle. En général, on cherche à quantifier la différence entre la réponse réelle du système asservi et une valeur idéale, typiquement représentée par un échelon.

Les indices couramment utilisés sont définis de la manière suivante :

3.1.1 Pourcentage de Dépassement « D »

Avant de se stabiliser, la sortie du système passe par un régime transitoire oscillant autour de la valeur finale. Le pourcentage de dépassement est défini par :

$$d\% = \left[\frac{Y_{\max} - Y(\infty)}{Y(\infty)} \right] 100 \quad (2.7)$$

3.1.2 Intégrales Faisant Intervenir l'Erreur

Pour évaluer la différence entre la réponse réelle et une réponse idéale de type échelon, on calcule l'intégrale d'un terme positif faisant intervenir l'erreur. De cette façon, l'indice calculé augmente avec l'écart entre la réponse réelle et la réponse idéale. En pratique, l'intégrale est calculée sur un intervalle $[0, T]$ suffisamment long pour contenir tout le régime transitoire.

Ces indices de performance permettent de quantifier la qualité de la régulation et d'ajuster les paramètres du système pour atteindre les objectifs de robustesse, de rapidité et de précision.

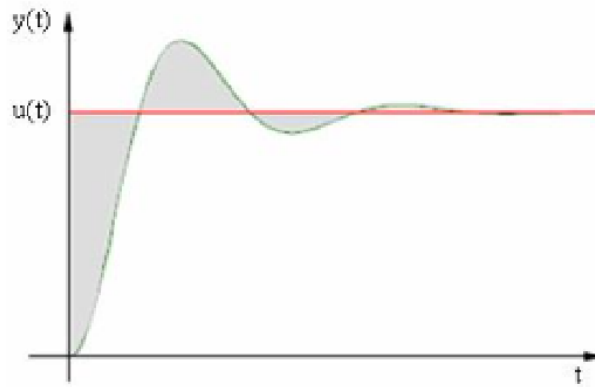


Figure 2. 5 : Intégrale faisant intervenir l'erreur.

L'erreur :

$$\varepsilon(t) = y(t) - u(t) \quad (2.8)$$

Où $y(t)$: signal de sortie, $u(t)$: signal d'entrée

- L'intégrale de la valeur absolue de l'erreur $\varepsilon(t)$ est donnée par (**Integral of Absolute Error**):

$$IAE = \int_0^T |\varepsilon(t)| dt \quad (2.9)$$

Cet indice exprime la surface générée par la différence entre la valeur de consigne et la valeur réelle.

- On utilise également l'intégrale de l'erreur quadratique, définie par (**Integral of Squared Error**) :

$$ISE = \int_0^T \varepsilon^2(t) dt \quad (2.10)$$

Mesure la somme des erreurs quadratiques, mettant davantage l'accent sur les grandes erreurs.

- Pour pénaliser les systèmes dont le régime transitoire dure trop longtemps, on utilise également l'intégrale du produit de l'erreur par le temps, donnée par (**Integral of Time-weighted Absolute Error**) :

$$ITAE = \int_0^T t|\varepsilon(t)|dt \quad (2.11)$$

- Et également l'intégrale du produit de l'erreur quadratique par le temps, donnée par (**Integral of Squared Time-weighted Error**) :

$$ITSE = \int_0^T t|\varepsilon^2(t)|dt \quad (2.12)$$

Pénalise les erreurs quadratiques qui persistent sur une longue période.

4 Correcteur d'ordre fractionnaire

4.1 La structure du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Pour améliorer la performance des correcteurs PID, la version fractionnaire, le correcteur $PI^\lambda D^\mu$, est introduite, comprenant un intégrateur d'ordre λ et un différentiateur d'ordre μ , où λ et μ sont des valeurs réelles quelconques.

Les gains d'intégration KI et de dérivation KD sont liés aux paramètres standard par des relations spécifiques. La structure interne du correcteur $PI^\lambda D^\mu$, illustrée dans la figure (2.6), combine parallèlement les parties proportionnelle, intégrale et dérivée d'ordre fractionnaire.

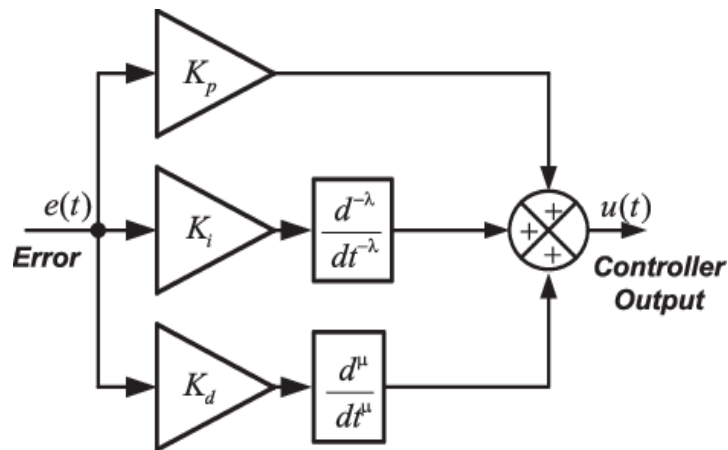


Figure 2. 6 : Structure interne du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

L'équation de la sortie du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ dans le domaine temporel est donnée par :

$$u(t) = K_p \left(e(t) + \frac{1}{T_I} D^{-\lambda}(e(t)) + T_D D^\mu(e(t)) \right) \quad (2.13)$$

Les diagrammes de Bode pour ce correcteur, représentés dans la figure (2.7), montrent des pentes caractéristiques pour les parties intégrale et dérivée [19].

λ représente l'ordre fractionnaire de l'action d'intégration, et il est défini dans l'intervalle $0 < \lambda < 1$. De même, μ est l'ordre fractionnaire de l'action de différentiation, situé également entre $0 < \mu < 1$. L'algorithme du correcteur $PI^\lambda D^\mu$, tel qu'il est décrit dans l'équation (2.13), peut être représenté par la fonction de transfert suivante :

$$C(s) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_I s^\lambda} + T_D s^\mu \right) \quad (2.14)$$

En général, pour les calculs analytiques, une expression où les paramètres apparaissent de manière linéaire est souvent préférée. Cette approche est facilitée par l'utilisation de la forme parallèle, qui permet une formulation plus directe et accessible des paramètres.

$$C(s) = K_p + \frac{K_I}{s^\lambda} + K_D s^\mu \quad (2.15)$$

Le diagramme de Bode asymptotique pour le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire, conforme à l'équation (2.15), est présenté dans la figure (2.7) [19]. On observe clairement les pentes caractéristiques des composantes intégrale et dérivée du correcteur, qui sont respectivement de -20λ dB/décade et 20μ dB/décade.

Les diagrammes de Bode, qui détaillent l'amplitude et la phase pour ce correcteur fractionnaire, sont également illustrés dans la même figure (2.8). Une comparaison de ces tracés avec ceux d'un correcteur PID standard démontre l'effet significatif des ordres fractionnaires sur les pentes des composantes intégrale et dérivée du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ [19].

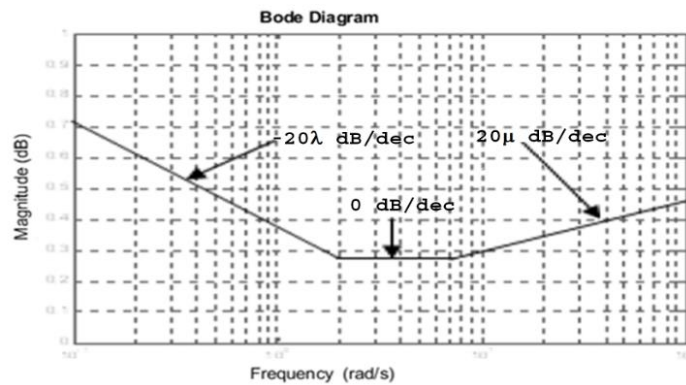


Figure 2. 7 : Lines Asymptotique du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Comme illustré dans la figure (2.9), le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ étend le concept du correcteur PID traditionnel d'un point à un plan. Cette extension offre une plus grande flexibilité dans la conception des commandes PID. En positionnant $(\lambda=1, \mu=1)$, on retrouve le correcteur PID traditionnel. De même, en fixant $(\lambda=1, \mu=0)$, ainsi que $(\lambda=0, \mu=1)$, on obtient respectivement les correcteurs PI et PD classiques. Ces configurations représentent des cas particuliers du correcteur $PI^\lambda D^\mu$, tel que défini par l'équation (2.15).

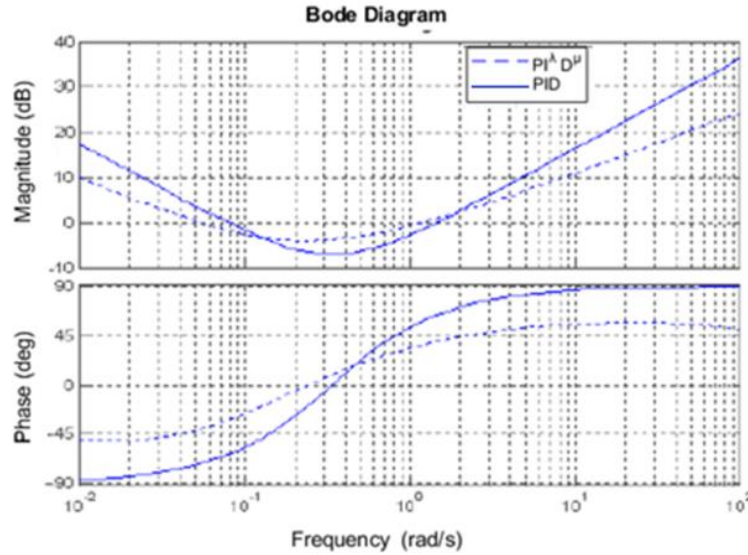


Figure 2. 8 : Diagramme de Bode des correcteurs PID et $PI^\lambda D^\mu$ pour $(\lambda=0.8, \mu=0.7)$

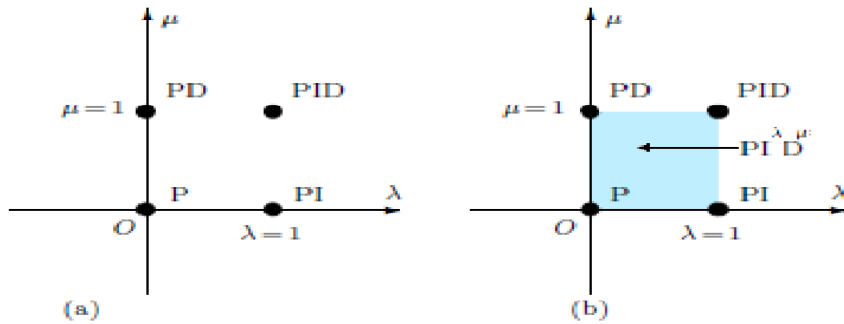


Figure 2. 9 : Correcteurs classiques et fractionnaires

L'un des principaux avantages des systèmes fractionnaires $PI^\lambda D^\mu$ est leur capacité à réguler avec précision la dynamique des systèmes d'ordre fractionnaire. Ils offrent également une plus grande robustesse aux variations des paramètres du système contrôlé. Avec deux degrés de liberté supplémentaires, les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ permettent une meilleure adaptation aux propriétés dynamiques des systèmes. Des recherches sont en cours pour développer de nouvelles méthodes de réglage des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ en étendant les principes de la théorie de commande classique.

4.2 Techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Pour améliorer les performances des systèmes de contrôle et répondre aux spécifications nécessaires, diverses architectures de contrôle ont été explorées. Parmi ces approches, la conception de correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire a été particulièrement mise en avant. Selon les travaux mentionnés dans la référence [20], passer de l'intégration et de la différenciation d'ordre entier à celles d'ordre fractionnaire augmente considérablement la flexibilité de réglage. Cette modification permet donc de mieux satisfaire aux exigences de contrôle que les correcteurs conventionnels.

Les variations des composantes intégrales et dérivées du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire et leur impact sur les systèmes de commande d'ordre non entier ont été principalement explorées à travers des analyses qualitatives et des simulations, comme indiqué dans la référence [21]. Par ailleurs, une approche novatrice a été proposée pour les systèmes de premier ordre avec un temps de retard conséquent [22], où une contrainte de robustesse spécifique est appliquée pour maintenir la phase du système en boucle ouverte plate à la fréquence de coupure. Dans une autre étude [23], le réglage des contrôleurs $PI^\lambda D^\mu$ a été effectué en utilisant la théorie de rétroaction quantitative QFT (Quantitative Feedback Theory), ce qui a permis d'élargir les techniques de réglage existantes en intégrant les incertitudes des systèmes, y compris les incertitudes paramétriques, dans le modèle QFT. La référence [24] propose deux ensembles de règles pour déterminer les paramètres des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, s'appuyant uniquement sur les données de réponse temporelle du système, similaires à celles utilisées par les règles de Ziegler-Nichols pour les correcteurs PID classiques, sans nécessiter de modèle du système. Enfin, la référence [25] décrit l'utilisation de l'algorithme d'optimisation par essaims particulaires (PSO) pour le réglage optimal des paramètres des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire.

L'idée d'un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ adaptatif d'ordre fractionnaire est explorée dans [26], visant à surpasser les performances des systèmes de commande adaptative traditionnels en intégrant des opérateurs d'ordre fractionnaire dans les algorithmes de commande. La conception de ces correcteurs fractionnaires s'appuie souvent sur une extension des principes de la commande PID classique. En effet, l'adoption de méthodes d'optimisation pour concevoir des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre non entier représente une direction dynamique et en pleine expansion dans ce domaine. Une avancée significative a été réalisée dans [25], où l'accent a été mis sur une approche de conception basée sur l'optimisation. Cette approche utilise plusieurs critères de qualité pour évaluer et optimiser les performances des correcteurs. Par ailleurs, d'autres études ont proposé des designs de correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre non entier qui répondent à des exigences spécifiques telles que la robustesse aux incertitudes du modèle et la résilience aux bruits de haute fréquence.

Il est important de noter que cette revue n'est pas exhaustive ; elle exclut d'autres travaux pertinents liés au calcul d'ordre fractionnaire et à ses applications, principalement parce que leurs thèmes ne correspondent pas directement à l'objectif de cette thèse.

5 Commande adaptative

5.1 Commande PID adaptative d'ordres entier

La loi de commande de contrôleur adaptatif d'ordre entier en boucle fermée est donnée par (2.16) :

$$\begin{aligned}
 u(t) &= -k_c[k_1(t)e(t) + I\{k_2(t)e(t)\} + D\{k_3(t)e(t)\}] . \\
 k_1(t) &= k_p(t) + \alpha_1 k_i(t) + \alpha_3 k_d(t) . \\
 k_2(t) &= \alpha_2 k_i(t) . \\
 k_3(t) &= \alpha_4 k_d(t) . \\
 k_p(t) &= e^2(t) . \\
 k_i(t) &= I\{e^2(t)\} . \\
 k_d(t) &= D\{e^2(t)\} . \\
 e(t) &= y(t) - r(t) .
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

Tel que : K_c, a_1, a_2, a_3 et a_4 :sont constantes positifs.

K_1, K_2 et K_3 sont des paramètres intermédiaires

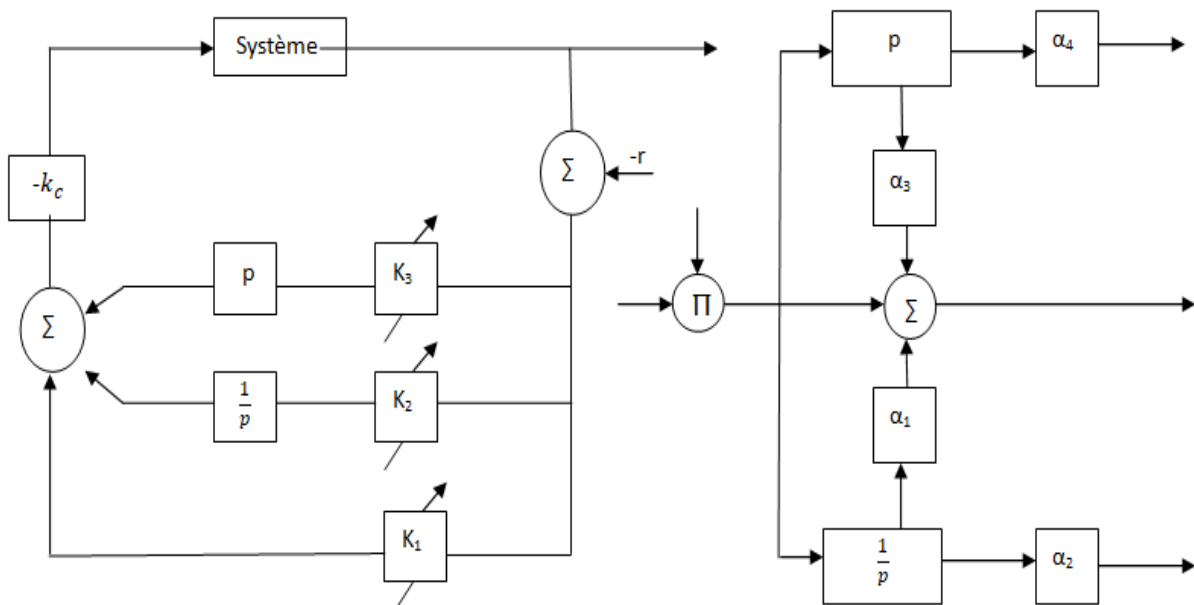


Figure 2. 10 : Le système de régulateurs adaptatif PID d'ordre entier

5.2 Commande PID adaptative d'ordres fractionnaires

La figure (2.11) présente une structure simplifiée des régulateurs adaptatifs des ($PI^\lambda D^\mu$).

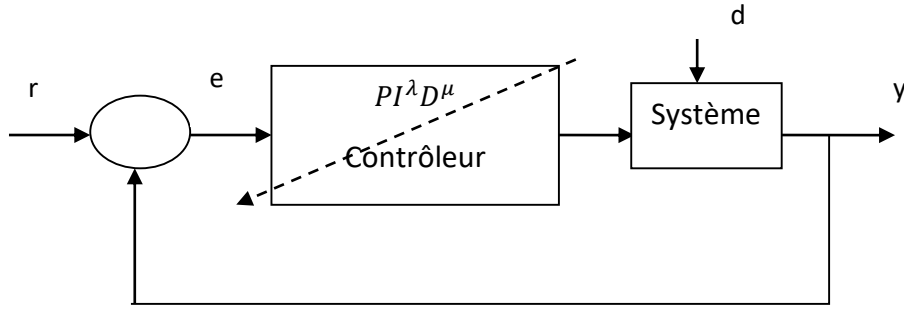


Figure 2. 11 : Le régulateur adaptatif de $PI^\lambda D^\mu$ d'un système perturbé

En s'ajoutant à l'algorithme donné dans l'équation (2.16) l'action fractionnaire de l'intégrale λ et l'action fractionnaire de dérivation d'ordre μ ; nous obtenons le contrôleur adaptatif fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ [27].

Son algorithme est proposé dans l'équation (2.17) :

$$u(t) = -k_c [k_1(t)e(t) + I^\lambda \{k_2(t)e(t)\} + D^\mu \{k_3(t)e(t)\}] .$$

$$k_1(t) = k_p(t) + \alpha_1 k_i(t) + \alpha_3 k_d(t) .$$

$$k_2(t) = \alpha_2 k_i(t) .$$

$$k_3(t) = \alpha_4 k_d(t) .$$

$$k_p(t) = e^2(t) .$$

$$k_i(t) = I^\lambda \{e^2(t)\} .$$

$$k_d(t) = D^\mu \{e^2(t)\} .$$

$$e(t) = y(t) - r(t) .$$

Tel que : K_c, a_1, a_2, a_3 et a_4 sont constantes positifs.

K_1, K_2 et K_3 sont des paramètres intermédiaires.

(2.17)

Les principes du contrôleur adaptatif fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$ sont illustrés dans cette figure (2.12).

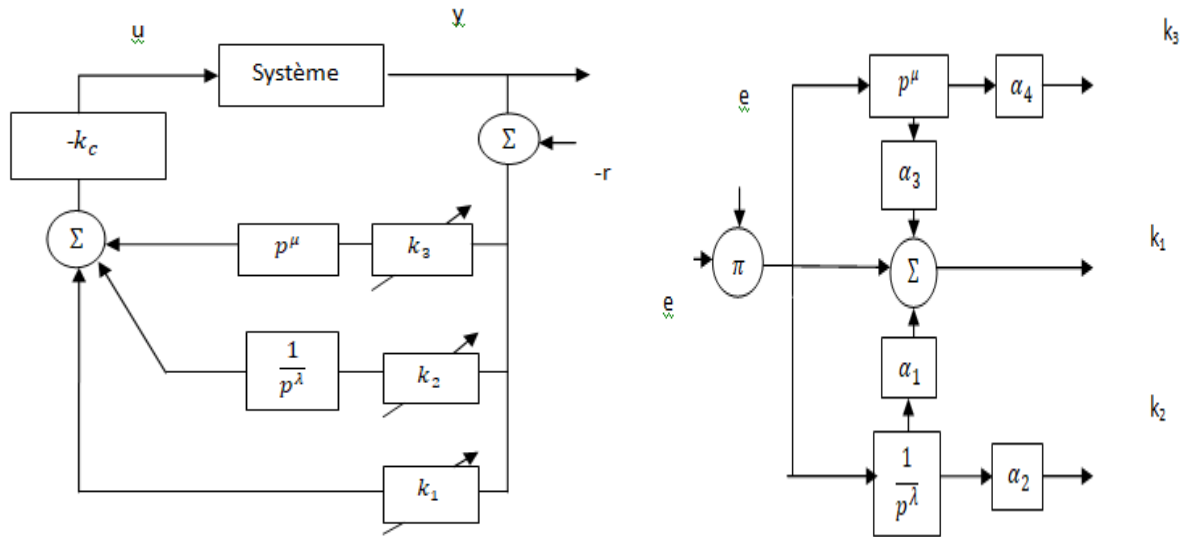


Figure 2. 12 : le système de régulateurs adaptatif $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire

Note :

En observant les deux illustrations du schéma de contrôleur adaptatif, il est évident que la seule distinction entre le PID adaptatif classique et le PID adaptatif d'ordre fractionnaire se fait dans l'ordre d'intégration et de dérivation.

6 Conclusion

Ce chapitre a exploré les principes fondamentaux et les applications avancées des systèmes de commande PID et $PI^\lambda D^\mu$, en mettant un accent particulier sur les correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Nous avons débuté par une présentation des régulateurs PID classiques, reconnus pour leur simplicité et leur efficacité dans de nombreux contextes industriels. Nous avons ensuite étendu notre discussion aux correcteurs $PI^\lambda D^\mu$, qui enrichissent le paradigme PID traditionnel par l'introduction de dynamiques d'ordre fractionnaire, offrant ainsi une flexibilité accrue et une meilleure adaptation aux systèmes complexes.

Les techniques de réglage des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ ont été examinées, illustrant comment les méthodes conventionnelles peuvent être adaptées ou entièrement remodelées pour exploiter les propriétés uniques des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Ces techniques incluent des approches basées sur des critères de performance classiques ainsi que des méthodes d'optimisation avancées, telles que celles utilisant l'algorithme d'optimisation par essais particuliers (PSO), pour affiner les paramètres des régulateurs en fonction des spécifications du système.

Enfin, la commande adaptative PID et $PI^\lambda D^\mu$ a été abordée, soulignant comment ces systèmes peuvent être configurés pour répondre dynamiquement aux changements de l'environnement ou aux perturbations internes du système. Cette adaptabilité est cruciale pour les applications où les conditions de fonctionnement varient de manière significative ou sont imprévisibles.

Chapitre 3 :

Simulation et application

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous abordons l'étude et la commande de deux systèmes à dynamique fractionnaire distincte : un système de chauffage, intrinsèquement lent, et un système électrique, naturellement rapide. L'objectif principal est de démontrer comment une approche de commande par régulateurs PID et $PI^\lambda D^\mu$ peut être efficacement appliquée à des systèmes ayant des réponses temporelles radicalement différentes.

2 Présentation des systèmes

Nous commençons par une présentation détaillée des systèmes étudiés : le système de chauffage, modélisé comme un processus de transfert thermique lent, et le système électrique, représenté par une dynamique électromécanique rapide. Chaque système est d'abord analysé individuellement pour établir les paramètres critiques influençant leur comportement et leur réponse aux entrées de commande.

2.1 Étude du premier système (thermique)

Le premier système est donné par la fonction de transfert suivante [28] :

$$G_1(s) = \frac{1}{2012.4s^{1.8063} + 107.29s^{0.93529} + 1.0305} \quad (3.1)$$

Cette fonction représente un système thermique de chauffage avec une dynamique fractionnaire, qui affiche des comportements et qui s'approche dans ses réponses d'un système de premier ordre. Cette description indique un comportement complexe où les ordres de dérivation ne sont pas entiers, caractéristique des systèmes dits à ordre fractionnaire. Voici une description de ce système de chauffage basée sur sa fonction de transfert :

2.1.1 Nature fractionnaire des ordres de dérivation

L'ordre de dérivation le plus élevé dans le dénominateur est de 1.8063, ce qui implique une réponse qui n'est pas typiquement exponentielle ou simple à modéliser avec les systèmes entiers. Cet ordre plus élevé peut refléter une inertie ou un retard plus complexe dans le système, typique des processus thermiques impliquant des milieux avec une capacité thermique élevée ou des échanges de chaleur non linéaires.

Le second terme du dénominateur, $107.29s^{(0.93529)}$, montre un ordre inférieur à 1, indiquant une dynamique qui est plus réactive que celle dictée par un processus de premier ordre, mais sans atteindre la réactivité instantanée d'un système à ordre zéro.

2.1.2 Coefficients et leur impact

Le coefficient le plus élevé, 2012.4, associé à l'ordre le plus élevé de ' s ', indique que la réponse du système est fortement influencée par des changements à long terme ou des effets retardés, ce qui est courant dans les systèmes de chauffage où l'accumulation de chaleur et sa dissipation sont des processus graduellement influents.

Le terme constant, 1.0305, bien qu'apparemment mineur par rapport aux autres coefficients, assure une stabilité basale dans la fonction de transfert, stabilisant la réponse du système dans son ensemble.

2.1.3 Réponse en temps

La réponse temporelle de système $G_1(s)$ est montrée par la Figure (3.1).

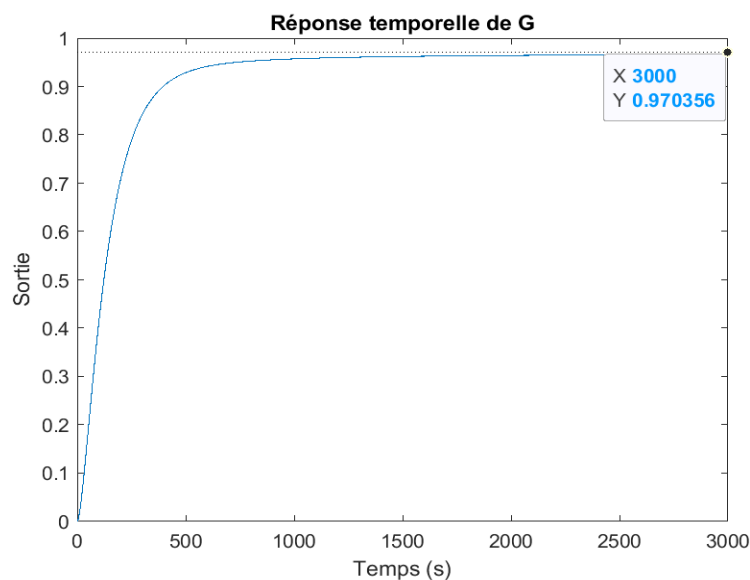


Figure 3. 1 : Réponse temporelle de système $G_1(s)$

2.1.4 Les caractéristiques de système

Les caractéristiques de ce système sont dans le tableau ci-dessous :

Temps de montée	309.4545
Temps de stabilisation	723.6196
dépassement	0.9691

Tableau 3. 1: Caractéristiques de système $G_1(s)$

2.2 Etude du deuxième système

Le deuxième système décrit par la fonction de transfert suivante [29] :

$$G_2(s) = \frac{1}{(0.8s^{2.2} + 0.5s^{0.9} + 1)} \quad (3.2)$$

Cette fonction représente un système électrique rapide qui affiche des comportements oscillatoires et qui s'approche dans ses réponses d'un système de deuxième ordre. Cette description fractionnaire unique suggère une complexité significative dans la dynamique du système. Voici une analyse détaillée pour mieux comprendre et interpréter cette fonction de transfert :

2.2.1 Caractéristiques fractionnaires et ordres de dérivation

Le terme de plus haut ordre, $0.8s^{2.2}$, bien qu'il dépasse légèrement l'ordre deux typique des systèmes oscillatoires de deuxième ordre, suggère que le système peut présenter une réponse avec une inertie légèrement accrue ou des comportements prolongés après des perturbations, par rapport à un système purement quadratique.

Le terme $0.5s^{0.9}$ est inférieur à l'unité, indiquant une réaction plus immédiate et moins intégrée aux variations d'entrée, pouvant contribuer à la rapidité de la réponse du système sans atteindre une action purement proportionnelle.

2.2.2 Coefficients et influences dynamiques

Le coefficient 0.8 affecte le terme d'ordre le plus élevé, influençant principalement la manière dont le système répond sur le long terme et sa capacité à gérer ou atténuer les oscillations prolongées.

Le coefficient 0.5 modère le terme de dérivation inférieure, $0.5s^{0.9}$, ayant un effet substantiel sur la réponse transitoire du système, ce qui peut être crucial pour le contrôle des oscillations initiales ou la réaction à des changements soudains.

2.2.3 Réponse en fréquence et comportement temporel

La réponse temporelle devrait montrer des oscillations caractéristiques d'un système de deuxième ordre, mais avec des nuances introduites par les ordres fractionnaires. Ces nuances peuvent inclure des oscillations qui ne s'amortissent pas de manière typique ou qui présentent des dynamiques de relaxation ou de réponse initiale différentes.

La réponse temporelle de système $G_2(s)$ est montrée par la Figure suivante :

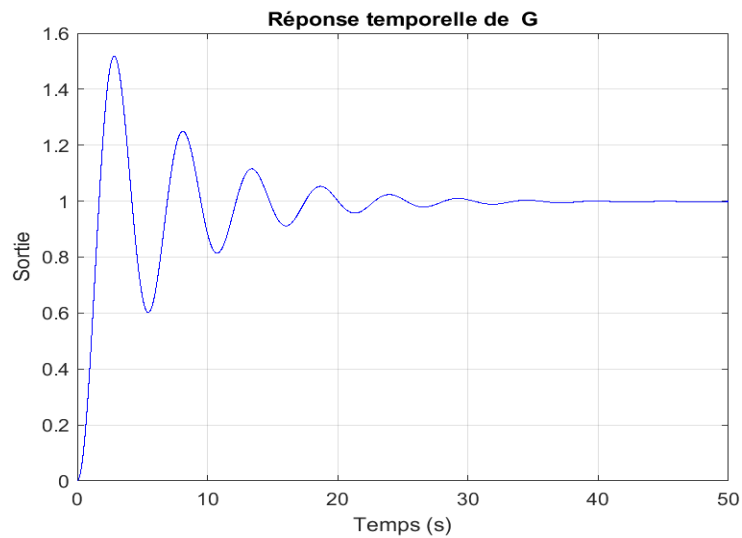


Figure 3. 2 : Réponse temporelle de système $G_2(s)$

2.2.4 Les caractéristiques de système

Les caractéristiques de ce système sont dans le tableau ci-dessous :

Temps de montée	2.0002
Temps de stabilisation	8.8503
Dépassement	1.0837

Tableau 3. 2: Caractéristiques de système $G_2(s)$

3 Approximation de la fonction de transfert fractionnaire

Dans la suite nous allons utiliser la méthode d'Oustaloup (voir le chapitre 01) pour approximer la fonction de transfert fractionnaire $G(s)$ à une fonction de transfert entière $G_e(s)$.

Dans cette méthode, l'ordre du filtre est l'un des paramètres les plus critiques. C'est l'ordre détermine la qualité de l'approximation du système fractionnaire.

3.1 Pour le premier système

D'après la figure (3.1) on peut choisir $w_b = 10^{-5}$, $w_h = 10^3$ et de faire varier l'ordre du filtre N .

- Pour l'ordre d'approximation ($N=5$) le modèle approximé de ce système est le suivant :

$$G_e(s) = \frac{s^{10} + 170 s^9 + 7711 s^8 + 4.663e4 s^7 + 8.106e4 s^6 + 1.943e4 s^5 + 1343 s^4 + 12.79 s^3 + 0.03503 s^2 + 1.279e(-5)s + 1.246e(-9)}{8.247e4 s^{11} + 8.214e06 s^{10} + 7.239e07 s^9 + 1.756e08 s^8 + 6.566e7 s^7 + 7.77e6 s^6 + 2.709e5 s^5 + 3581 s^4 + 19.16 s^3 + 0.03857 s^2 + 1.347e(-5)s + 1.287e(-9)} \quad (3.3)$$

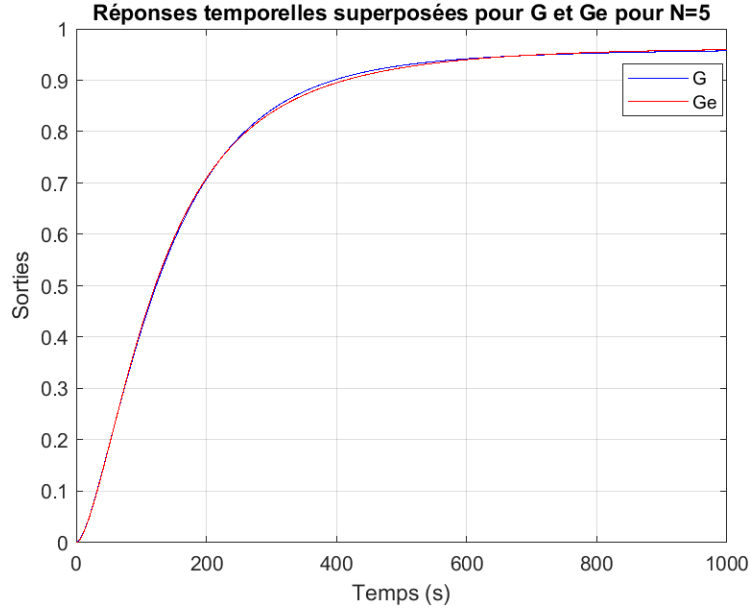


Figure 3.3 : Réponse temporelles superposées pour G et Ge pour N=5

- Pour (N=10) le modèle approximé de ce système est le suivant :

$$G_e(s) = \frac{s^{20} + 225.4 s^{19} + 1.691e4 s^{18} + 4.907e5 s^{17} + 6.18e6 s^{16} + 3.343e7 s^{15} + 8.144e7 s^{14} + 8.676e7 s^{13} + 4.192e7 s^{12} + 8.887e6 s^{11} + 8.557e5 s^{10} + 3.617e4 s^9 + 694.3 s^8 + 5.847 s^7 + 0.02234 s^6 + 3.731e(-5)s^5 + 2.807e(-8)s^4 + 9.071e(-12)s^3 + 1.272e(-15)s^2 + 6.903e(-20)s + 1.246e(-24)}{8.247e04 s^{21} + 1.219e7 s^{20} + 4.905e8 s^{19} + 7.785e9 s^{18} + 5.105e10 s^{17} + 1.49e11 s^{16} + 1.91e11 s^{15} + 1.129e11 s^{14} + 3.058e10 s^{13} + 4.011e09 s^{12} + 2.615e08 s^{11} + 8.965e6 s^{10} + 1.675e5 s^9 + 1733 s^8 + 9.834 s^7 + 0.02951 s^6 + 4.353e(-5) s^5 + 3.067e(-8)s^4 + 9.615e(-12) s^3 + 1.328e(-15) s^2 + 7.156e(-20) s + 1.287e(-24)} \quad (3.4)$$

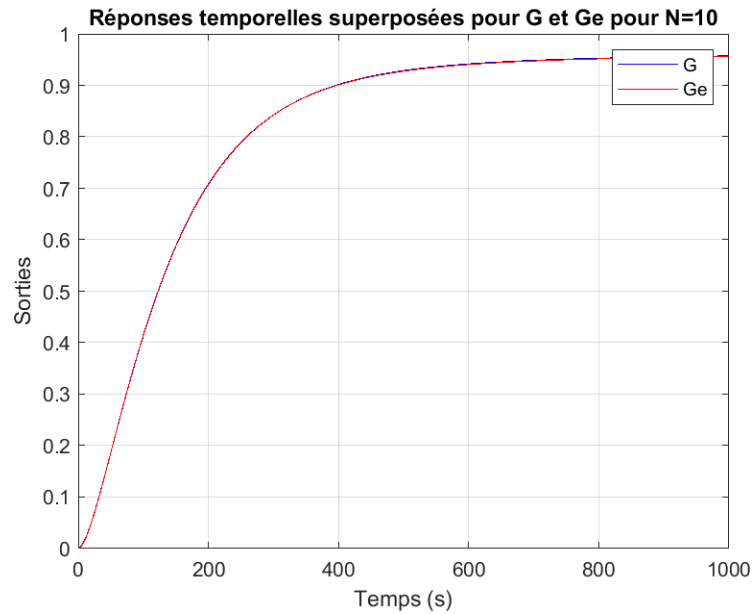


Figure 3. 4 : Réponse temporelles superposées pour G et Ge pour N=10

D'après les figures (3.3) et (3.4) on constat que pour $N = 10$ les deux fonctions de transferts originale est approximée sont presque superposables, pour cela on va la choisir pour la commande PID adaptative entière.

3.2 Pour le deuxième système

D'après la figure (3.2) on peut choisir $w_b = 10^{-3}$, $w_h = 10^5$ et de faire varier l'ordre du filtre N .

- Pour l'ordre d'approximation ($N=3$) le modèle approximé de ce système est le suivant :

$$G_e(s) = \frac{s^6 + 8.232e04 s^5 + 6.455e08 s^4 + 1.121e11 s^3 + 1.891e12 s^2 + 7.06e11 s + 2.512e10}{8 s^8 + 6.099e05 s^7 + 1.578e09 s^6 + 2.435e11 s^5 + 1.397e12 s^4 + 1.323e12 s^3 + 2.39e12 s^2 + 7.251e11 s + 2.514e10} \quad (3.5)$$

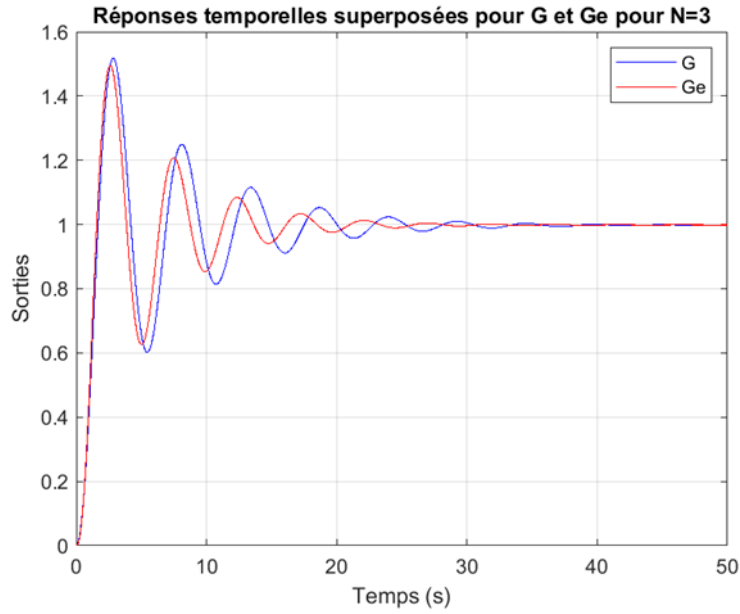


Figure 3. 5 : Réponse temporelles superposées pour G et Ge pour N=3

- Pour (N = 5) on trouve :

$$G_e(s) = \frac{s^{10} + 1.088e5 s^9 + 2.197e9 s^8 + 5.356e12 s^7 + 2.65e15 s^6 + 1.618e17 s^5 + 2.01e18 s^4 + 3.082e18 s^3 + 9.589e17 s^2 + 3.603e16 s + 2.512e14}{8 s^{12} + 7.725e5 s^{11} + 9.129e9 s^{10} + 1.824e13 s^9 + 5.282e15 s^8 + 2.646e17 s^7 + 1.98e18 s^6 + 3.393e18 s^5 + 4.101e18 s^4} \quad (3.6)$$

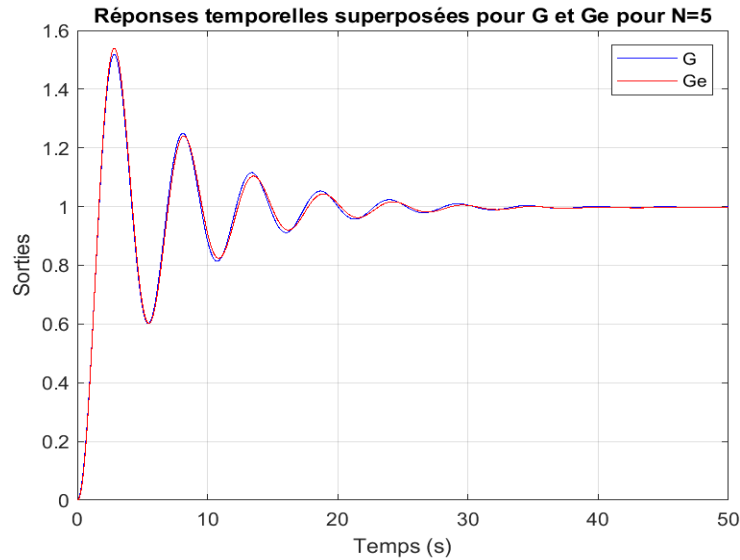


Figure 3. 6 : Réponse temporelles superposées pour G et Ge pour N=5

D'après les figures (3.5) et (3.6) on constat que pour $N = 5$ donne des résultats satisfaisants, pour cela on va choisir la fonction de transfert qui lui correspond afin d'appliquer la commande PID adaptative entière dans la suite de notre travail.

4 Application de la commande PID/ $PI^\lambda D^\mu$ adaptative

4.1 Pour le premier système

4.1.1 La commande PID adaptative

Comme notre commande est d'ordre entier (PID) on a opter pour la fonction de transfert de l'équation (N=10). Nous avons appliqué la commande en choisissant deux indices de performance, à savoir IAE et ISE.

Les résultats en termes de performance sont montrés par le tableau (3.3). Les figures (3.7) et (3.8) représentent les réponses temporelles de premier système commandés par PID.

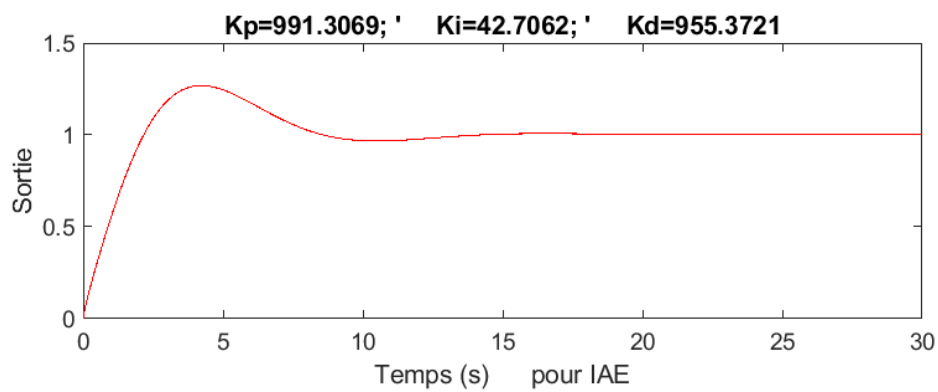


Figure 3. 7 : Réponse temporelle de système $G_1(s)$ avec correction PID critère IAE

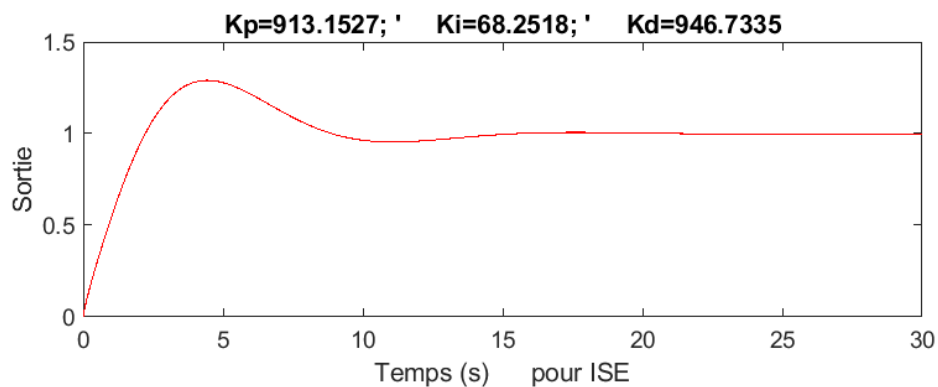


Figure 3. 8 : Réponse temporelle de système $G_1(s)$ avec correction PID critère ISE

PID	temps de montée	temps de stabilisation	Dépassement
IAE	1.7121	12.2643	1.2686
ISE	1.7601	13.5917	1.2905

Tableau 3. 3 : Performances obtenues pour le système $G_1(s)$ avec PID critères IAE/ISE

Comparaison entre IAE et ISE :

Le temps de montée avec le critère IAE est légèrement plus rapide, indiquant une réponse plus rapide aux entrées.

Le temps de stabilisation avec le critère IAE est plus court, indiquant que le système atteint la stabilité plus rapidement comparé au critère ISE.

Le dépassement est moindre avec le critère IAE, indiquant que le système est moins sujet à un dépassement important.

En considérant le premier système comme un système de chauffage lent, qui pourrait bénéficier d'une réponse rapide pour atteindre rapidement la température désirée :

IAE peut être plus approprié pour obtenir une réponse plus rapide.

4.1.2 La commande $PI^\lambda D^\mu$ adaptative

Les figures (3.9) et (3.10) représente les réponses temporelles de premier système corrigés par un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ adaptative. Les résultats en termes de performance sont montrés par le tableau (3.4).

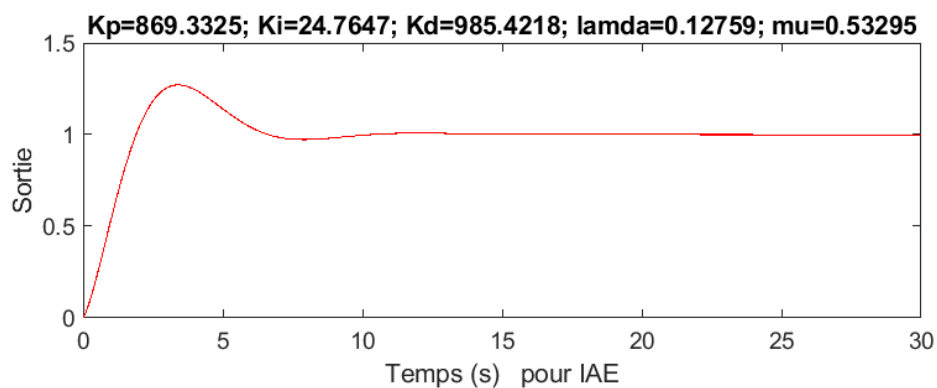


Figure 3. 9 : Réponse temporelle de système $G_1(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère IAE

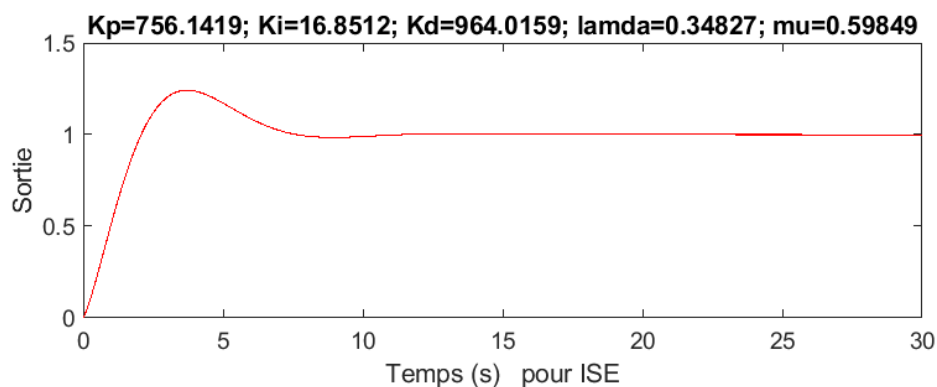


Figure 3. 10 : Réponse temporelle de système $G_1(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère ISE

$PI^{\lambda}D^{\mu}$	temps de montée	temps de stabilisation	Dépassement
IAE	1.4102	8.7532	1.2713
ISE	1.5505	7.0830	1.2420

Tableau 3. 4 : Performances obtenues pour le système $G_1(s)$ avec $PI^{\lambda}D^{\mu}$ critères IAE/ISE

Comparaison entre IAE et ISE :

Le temps de montée avec le critère IAE est légèrement plus rapide, ce qui signifie une réponse plus rapide aux entrées.

Le temps de stabilisation avec le critère ISE est plus court, ce qui signifie que le système atteint la stabilité plus rapidement comparé au critère IAE.

Le dépassement est moindre avec le critère ISE, ce qui signifie que le système est moins sujet à un dépassement important.

Le même objectif est d'obtenir une réponse rapide, le critère IAE peut être plus approprié

4.2 Pour le deuxième système

En suivant les mêmes étapes que nous avons appliquées pour le premier système.

4.2.1 La commande PID adaptative

Les différents résultats obtenus pour la commande PID adaptative sont données par les figures (3.11), (3.12) et le tableau (3.5) pour le deuxième système.

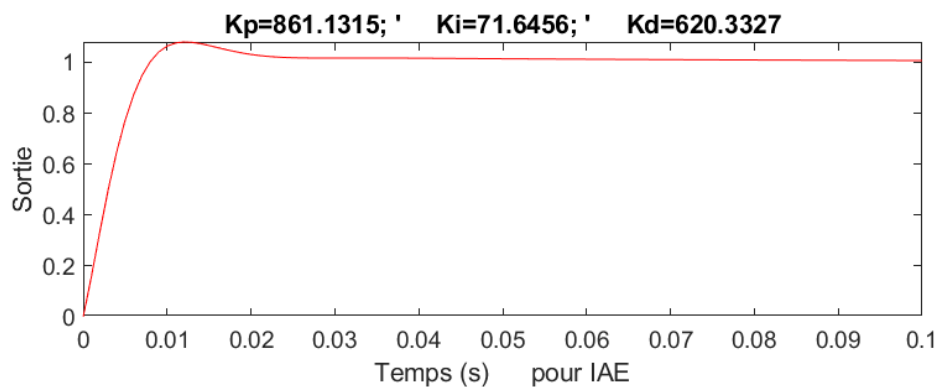


Figure 3. 11 : Réponse temporelle de système $G_2(s)$ avec correction PID critère IAE

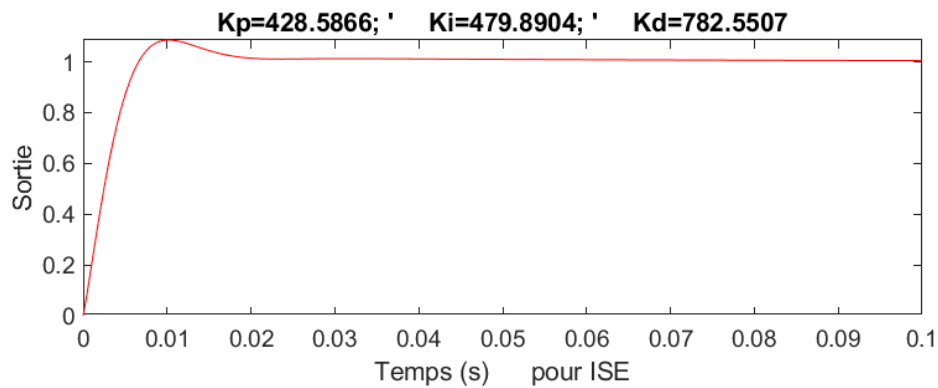


Figure 3. 12 : Réponse temporelle de système $G_2(s)$ avec correction PID critère ISE

PID	temps de montée	temps de stabilisation	Dépassement
IAE	0.0058	0.0209	1.0802
ISE	0.0048	0.0174	1.0858

Tableau 3. 5 : Performances obtenues pour le système $G_2(s)$ avec PID critères IAE/ISE

Comparaison entre IAE et ISE :

Le critère ISE offre un temps de montée légèrement plus rapide (0.0048 s) comparé au critère IAE (0.0058 s). Cela indique que le système répond plus rapidement avec le critère ISE.

Le critère ISE atteint la stabilisation plus rapidement (0.0174 s) que le critère IAE (0.0209 s), ce qui signifie que le système est plus efficace à atteindre son état stable avec le critère ISE.

Les valeurs de dépassement sont très proches pour les deux critères, avec une légère différence où le critère ISE a un dépassement légèrement supérieur (1.0858) par rapport au critère IAE (1.0802).

Étant donné que le système électrique est rapide, nécessite une grande précision et une stabilité à long terme, à savoir minimiser le dépassement, le critère IAE est plus adapté.

4.2.2 La commande $PI^{\lambda}D^{\mu}$ adaptative

Les résultats obtenus par le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ adaptative est sont montrés par les figures (3.13), (3.14) et le tableau (3.6).

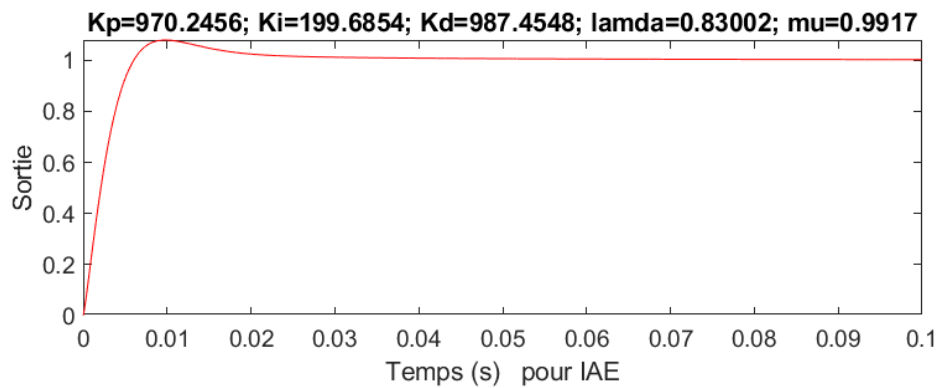


Figure 3. 13 : Réponse temporelle de système $G_2(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère IAE

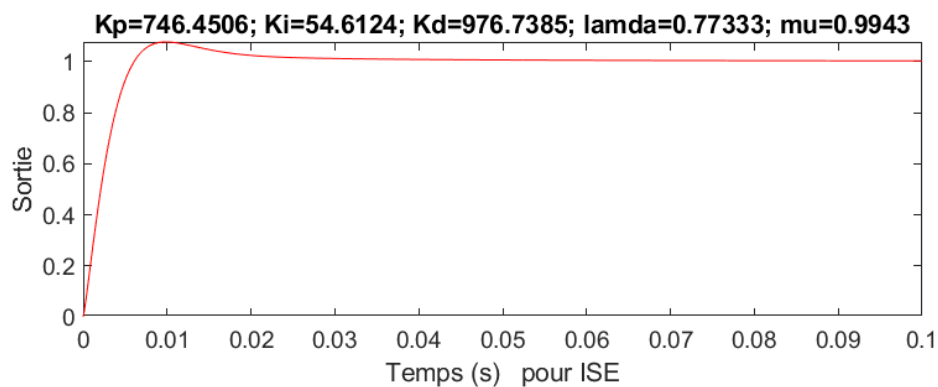


Figure 3. 14 : Réponse temporelle de système $G_2(s)$ avec correction $PI^\lambda D^\mu$ critère ISE

$PI^\lambda D^\mu$	temps de montée	temps de stabilisation	Dépassement
IAE	0.0042	0.0206	1.0796
ISE	0.0043	0.0206	1.0768

Tableau 3. 6 : Performances obtenues pour le système $G_2(s)$ avec $PI^\lambda D^\mu$ critères IAE/ISE

Comparaison entre IAE et ISE :

Les temps de montée sont très proches dans les deux critères, indiquant une réponse presque immédiate aux entrées.

Les temps de stabilisation sont identiques dans les deux critères, indiquant que le système atteint la stabilité à la même vitesse.

Le dépassement est légèrement inférieur avec le critère ISE, indiquant que le système est moins susceptible d'un dépassement significatif comparé au critère IAE.

Le même objectif est d'obtenir une plus grande stabilité et de réduire le dépassement, le critère ISE est le choix le plus approprié.

5 Étude comparative entre PID et $PI^\lambda D^\mu$

- Pour le premier système, les résultats en termes de performance sont montrés par le tableau suivant :

$G_1(s)$	temps de montée	temps de stabilisation	Dépassement
PID	1.7121	12.2643	1.2905
$PI^\lambda D^\mu$	1.4102	8.7532	1.2713

Tableau 3. 7 : Performances obtenues pour le système $G_1(s)$ avec correction $PID/PI^\lambda D^\mu$

Le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ a un temps de montée plus rapide que le contrôleur PID. Cela signifie que le système répond plus rapidement aux entrées avec le $PI^\lambda D^\mu$.

Le temps de stabilisation est également meilleur avec le $PI^\lambda D^\mu$ par rapport au PID, indiquant une stabilisation plus rapide du système.

La valeur de dépassement est légèrement inférieure pour le $PI^\lambda D^\mu$ comparée au PID, ce qui indique un dépassement moins important.

En résumé, le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ surpasse le contrôleur PID en termes de temps de montée plus rapide, de stabilisation plus rapide et de moindre dépassement pour le système $G_1(s)$.

- Pour le deuxième système, les résultats sont montrés par le tableau suivant :

$G_2(s)$	temps de montée	temps de stabilisation	Dépassement
PID	0.0058	0.0209	1.0802
$PI^\lambda D^\mu$	0.0043	0.0206	1.0768

Tableau 3. 8 : Performances obtenues pour le système $G_2(s)$ avec correction $PID/PI^\lambda D^\mu$

Le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ a un temps de montée légèrement plus rapide comparé au contrôleur PID. Cela signifie que le système répond plus rapidement aux entrées avec le $PI^\lambda D^\mu$.

Le temps de stabilisation est meilleur avec le $PI^\lambda D^\mu$ par rapport au PID.

La valeur de dépassement est légèrement inférieure pour le $PI^\lambda D^\mu$ comparée au PID, ce qui indique un dépassement moins important.

En résumé, le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ surpasse le contrôleur PID en termes de temps de montée plus rapide, de stabilisation rapide et de moindre dépassement pour le système $G_2(s)$.

6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons exploré et comparé deux types de systèmes dynamiques : un système rapide et un système lent. Pour chacun, nous avons développé une approximation de leur fonction de transfert fractionnaire en utilisant une fonction de transfert d'ordre entier. Nous avons ensuite mis en œuvre un contrôle adaptatif PID/ $PI^\lambda D^\mu$, guidé par les critères d'erreur intégrale absolue (IAE) et d'erreur intégrale au carré (ISE).

Pour chaque critère, les constantes de contrôle ont été soigneusement ajustées, et les performances des systèmes ont été évaluées selon plusieurs paramètres clés, tels que le temps de montée, le temps de stabilisation, et le dépassement. Nos analyses révèlent que le choix du critère de performance dépend étroitement de l'équilibre souhaité entre la rapidité de la réponse et la qualité de la stabilisation finale.

En conclusion, une étude comparative entre les contrôleurs PID classique et $PI^\lambda D^\mu$ a été effectuée. Il en ressort que le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ surpasse généralement le PID classique, offrant de meilleures performances en termes de précision et de réponse dynamique. Cette supériorité marque une avancée significative dans l'optimisation des stratégies de contrôle pour des systèmes de nature diverse.

Conclusion Générale

Ce mémoire de Master a exploré en profondeur les systèmes à ordre fractionnaire et leur application dans le contrôle des systèmes dynamiques, mettant un accent particulier sur les correcteurs PID classiques et à ordre fractionnaire. À travers une analyse détaillée des opérateurs d'ordre fractionnaire, ce travail a démontré comment la généralisation des dérivées et des intégrales peut être exploitée pour améliorer la modélisation et la commande des systèmes complexes.

Les méthodes d'approximation telles que l'expansion par fractions continues, la méthode d'Oustaloup, et d'autres approches ont été évaluées pour leur efficacité dans la simplification de l'implémentation pratique des régulateurs à ordre fractionnaire. En outre, la modélisation des systèmes linéaires à l'aide de ces opérateurs a permis de mettre en lumière les aspects de contrôlabilité, d'observabilité, et de stabilité, essentiels pour la conception de systèmes de contrôle fiables et efficaces.

L'application des connaissances théoriques à des cas pratiques a été une composante majeure de ce mémoire, avec des simulations et des études de cas démontrant l'amélioration de la performance des correcteurs $PI^\lambda D^\mu$ par rapport aux correcteurs PID traditionnels. L'adaptabilité et la flexibilité des correcteurs fractionnaires ont été testées dans divers contextes, révélant des avantages significatifs, surtout dans la gestion des processus linéaires longs et complexes.

Ce travail a non seulement confirmé l'efficacité des systèmes à ordre fractionnaire dans le contrôle avancé des processus mais a également ouvert la voie à des recherches futures. L'intégration de ces approches innovantes pourrait transformer les pratiques industrielles, en offrant des solutions plus robustes, précises, et efficaces pour les défis de contrôle les plus exigeants.

Les perspectives d'avenir pour la recherche incluent l'exploration de l'application des correcteurs fractionnaires dans d'autres domaines tels que les systèmes non linéaires et les environnements multi-agents, ainsi que l'amélioration continue des méthodes d'approximation pour faciliter leur déploiement dans des systèmes réels. En conclusion, les systèmes à ordre fractionnaire représentent un champ prometteur pour les avancées technologiques en automatique et contrôle des systèmes, porteur d'innovations significatives pour l'ingénierie de contrôle moderne.

Références bibliographiques

- [1] Monje, C. A., Chen, Y., Vinagre, B. M., Xue, D., & Feliu-Batlle, V. (2010). Fractional-order systems and controls: Fundamentals and applications. London: Springer.
- [2] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations. San Diego: Academic Press.
- [3] Samko, S. G., Kilbas, A. A., & Marichev, O. I. (1993). Fractional integrals and derivatives: Theory and applications. Yverdon: Gordon and Breach Science Publishers.
- [4] Miller, K. S., & Ross, B. (1993). An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. New York: John Wiley and Sons.
- [5] Podlubny, I. (1999). Fractional differential equations: An introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. San Diego: Academic Press.
- [6] Sabatier, J., Agrawal, O. P., & Tenreiro Machado, J. A. (2007). Advances in fractional calculus: Theoretical development and applications in physics and engineering. Netherlands: Springer.
- [7] Caputo, M. (1967). Linear models of dissipation whose Q is almost frequency independent. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 13(5), 529-539.
- [8] Petras, I., Podlubny, I., O'Leary, P., Dorcak, L., & Vinagre, B. M. (2002). Analogue realization of fractional order controllers. Fakulta BERG, TU Kocise.
- [9] Oustaloup, A. (1991). La commande crone : Commande robuste d'ordre non entier. Paris : Hermes.
- [10] Oustaloup, A. (1983). Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire. Paris : Masson.
- [11] Podlubny, I. (1999). Fractional order systems and $PI^\lambda D^\mu$ controllers. IEEE Transactions on Automatic Control, 44(1), 208-214.
- [12] Charef, A., Sun, H., Tsao, Y., & Onaral, B. (1992). Fractal system as represented by singularity function. IEEE Transactions on Automatic Control, 37, 1465-1470.
- [13] Idiou, D. (2017). Modélisation et Identification des Systèmes d'Ordre Fractionnaire. Thèse de doctorat, Université des Frères Mentouri, Constantine, Algérie.
- [14] Guermah, S. (2011). Commande CRONE, Application à un procédé pilote de laboratoire. Thèse de doctorat, Université Mouloud Mammeri Tizi Ouzou.

- [15] Hilfer, R. (Ed.). (2000). Applications of fractional calculus in physics. Singapour : World Scientific.
- [16] Houmor, T. (2014). Analyse du Chaos dans un Système d'Équations Différentielles Fractionnaires. Thèse de doctorat, Université Mentouri de Constantine.
- [17] Bensafia, Y. (2017). Utilisation des filtres fractionnaires pour la conception de régulateurs adaptatifs robustes. Thèse de doctorat, Université du 20 Août 1955-Skikda.
- [18] Besancon-Voda, A., & Gentil, S. (2012). Régulateur PID analogiques et numériques. Edition Technique d'Ingénieur.
- [19] Mecheri, B. (2020). Contribution à la conception d'un contrôleur d'ordre fractionnaire basé sur les méthodes d'optimisation méta-heuristique. Thèse de doctorat, Université 8 Mai 1945 Guelma.
- [20] Caponetto, R., Fortuna, L., & Porto, D. (2002). Parameter tuning of a non integer order PID controller. In 15th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (pp. 12-16).
- [21] Qing-Shan, Z., Guang-Yi, C., & Xin-Jian, Z. (2002). The effect of the fractional order controller's orders variations on the fractional order control systems. In Proceedings of the first international conference on machine learning and cybernetics (pp. 4-5).
- [22] Chen, Y. Q., Vinagre, B. M., & Monje, C. A. (2003). Une proposition pour la synthèse de correcteurs PI d'ordre non entier. In Action Thématique "Les Systèmes à Dérivées Non Entières".
- [23] Cervera, J., Baños, A., Monje, C. A., & Vinagre, B. M. (2006). Tuning of fractional PID controllers by using QFT. In 32nd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society.
- [24] Valerio, D., & Sa Da Costa, J. (2006). Tuning of fractional PID controllers with Ziegler-Nichols type rules. Signal Processing, 86(10), 2771-2784.
- [25] Cao, J. Y., & Cao, B. G. (2006). Design of fractional order controller based on Particle Swarm Optimization. International Journal of Control, Automation, and Systems, 4(6), 775-781.
- [26] Ladaci, S., & Charef, A. (2006). An adaptive fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller. In Proc. TMCE (pp. 18-22).
- [27] Ladaci, S., & Charef, A. (2006). An adaptive fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller. In Proceedings of TMCE 2006 (pp. 18-22), Ljubljana, Slovenia. Edited by I. Horvath and J. Duhovnik. Organizing Committee of TMCE 2006. ISBN 961-6536-04-4.

[28] Tepljakov, A., Petlenkov, E., & Belikov, J. (2011). FOMCON: A MATLAB toolbox for fractional-order system identification and control. *IJOMACS*, 2(2), 51-62.

[29] Podlubny, I. (1999). Fractional-Order Systems and $PI^\lambda D^\mu$ Controllers. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 44(1).