

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJE-BOUIRA**



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées  
Département de Mathématiques

**Mémoire de fin d'étude**

Présenté par :

**Koussa Safia**

**Hemad Hinda**

En vue de l'obtention du diplôme de **Master 02 en mathématiques:**

Spécialité : RO

Thème :

**Nouvelle approche de résolution d'un problème de  
contrôle optimal**

**Devant le jury composé de :**

Mohamed Boudref  
Daya Ouidja  
Karim Hamid  
Demmouche Nacer

MCB  
MAA  
MAA  
MAA

Univ. de Bouira  
Univ. de Bouira  
Univ. de Bouira  
Univ. de Bouira

Président  
Encadreur  
Examineur  
Examineur

**Année Universitaire 2018/2019**

## **"Nouvelle approche de résolution d'un problème de contrôle optimal "**

**Résumé :** Dans ce mémoire On présente une méthode de résolution des problème de contrôle optimal. Cette méthode qui est à la fois , précise et rapide , fait partie des méthode dites "directes" . En utilisant cette méthode on a exposé une méthode originale qui est un couplage entre la méthode de discrétisation et la procédure finale et on obtient un problème de programmation linéaire qu'on résoudra avec la méthode de Newton.

**Mots clés :** Contrôle optimal, Programmation linéaire, Méthode de discrétisation, Procédure final, Méthode de Newton.

---

## **"New approach to solving an optimal control problem "**

**Abstract :** We are interested here in the study of a resolution method of optimal control . This method ,which is precise and fast at the same time , is part of direct method . By exploiting this method we proposed an orginal method which is coupling between the discretization method and the final procedure and we obtain a problem of linear programming we solve it with the method of Newton .

**Key words :** Optimal control, Linear programming, Discretization method, Final procedure, method of Newton .

## REMERCIEMENTS

Nous remercions tout d'abord **Allah** le tout puissant de m'avoir donnée le courage et la patience afin de réaliser notre travail.

Nous tenons à exprimer nos profonde gratitude et nos remerciements les plus sincères vers notre promotrice **Mme OUIDJA Daya**, sous la direction du quel nous avons eu le plaisir de travailler. Ses conseils, ses critiques et pour sa patience et son encouragement tout au long de ce travail .

Nous exprimons nos sincères remerciements à les membres du jury **BOUDREF AHMED MOHAMMED** le président et **M DEMMOUCH NACER**, **M KARIM HAMID** l'examineurs d'avoir accepter de juger notre mémoire.

Nous remercions tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

# *Dédicaces*

*De SAFIA*

*À mes très chers parents qui ont fait beaucoup pour que je puisse réaliser ce travail, merci pour votre soutien et votre encouragement durant toutes ces années.*

*À Mon frère **BACHIR**, sa femme **RANIA** et leurs jumeaux **Isshak** , **Isslam**.*

*À Mes soeurs **DJAMILA**, **AKILA**, **ZAHIA**, **NABILA**, **BAYA**, **Razika** et leurs enfants.*

*À Mon mari **MOSTAFA** et sa famille .*

*À toute ma familles ainsi qu'à mes amis et collègues prés ou lointains .*

*À Mon binôme **HEMAD HINDA** et sa famille .*

*À Toutes et à Tous .*

*Je vous dédie ce modeste travail*

*De HINDA*

*À mes très chers parents qui ont fait beaucoup pour que je puisse réaliser ce travail, merci pour votre soutien et votre encouragement durant toutes ces années.*

*À Mon frère **ALLA**.*

*À toute ma familles ainsi qu'à mes amis et collègues prés ou lointains .*

*À Mon binôme **KOUSSA SAFIA** et sa famille .*

*À Toutes et à Tous .*

*Je vous dédie ce modeste travail*

# Table des matières

|                                                                                                          |           |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduction générale . . . . .</b>                                                                   | <b>3</b>  |
| <b>1 Introduction au contrôle optimal . . . . .</b>                                                      | <b>5</b>  |
| 1.1 Introduction . . . . .                                                                               | 5         |
| 1.2 Position de problème . . . . .                                                                       | 5         |
| 1.2.1 Objet de la commande . . . . .                                                                     | 6         |
| 1.2.2 Le but de la commande . . . . .                                                                    | 6         |
| 1.2.3 Classe des commandes admissibles . . . . .                                                         | 6         |
| 1.2.4 Commande Bang-bang . . . . .                                                                       | 6         |
| 1.2.5 Critère de qualité . . . . .                                                                       | 6         |
| 1.2.6 Ensemble d'accessibilité . . . . .                                                                 | 7         |
| 1.3 Propriétés essentielles du problème de contrôle optimal . . . . .                                    | 7         |
| 1.3.1 Position du problème . . . . .                                                                     | 7         |
| 1.3.2 Commandabilité . . . . .                                                                           | 8         |
| 1.3.3 Stabilisation . . . . .                                                                            | 10        |
| 1.3.4 Observabilité . . . . .                                                                            | 12        |
| <b>2 Résolution d'un problème terminal de contrôle optimal d'un système dynamique linéaire . . . . .</b> | <b>15</b> |
| 2.1 Introduction . . . . .                                                                               | 15        |
| 2.2 Position du problème . . . . .                                                                       | 15        |
| 2.3 Support-contrôle . . . . .                                                                           | 17        |
| 2.4 Formule d'accroissement de la fonctionnelle . . . . .                                                | 17        |
| 2.5 Critère d'optimalité . . . . .                                                                       | 19        |
| 2.6 Critère du $\varepsilon$ - optimalité . . . . .                                                      | 20        |
| 2.7 Détermination d'un support- contrôle de départ . . . . .                                             | 23        |
| 2.8 Méthode de résolution . . . . .                                                                      | 24        |
| 2.8.1 Changement de commande . . . . .                                                                   | 24        |
| 2.8.2 Changement de support . . . . .                                                                    | 26        |
| 2.9 Procédure finale . . . . .                                                                           | 27        |
| 2.10 Algorithme de la méthode . . . . .                                                                  | 28        |
| 2.11 Application numérique . . . . .                                                                     | 31        |
| <b>3 Nouvelle approche de résolution d'un problème de contrôle optimal . . . . .</b>                     | <b>36</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .                                                                               | 36        |
| 3.2 Position du problème . . . . .                                                                       | 36        |
| 3.3 Définitions essentielles . . . . .                                                                   | 37        |
| 3.4 Problème discret du problème initial . . . . .                                                       | 37        |
| 3.5 La valeur de suboptimalité . . . . .                                                                 | 39        |
| 3.6 Critère d'optimalité et d' $\varepsilon$ - optimalité . . . . .                                      | 39        |
| 3.7 L'algorithme numérique pour la réalisation du problème discret . . . . .                             | 40        |

|          |                                                                     |           |
|----------|---------------------------------------------------------------------|-----------|
| 3.7.1    | Changement de commande . . . . .                                    | 40        |
| 3.7.2    | Changement de support . . . . .                                     | 41        |
| 3.7.3    | Procédure finale . . . . .                                          | 43        |
| <b>4</b> | <b>Exemple d'application</b>                                        | <b>45</b> |
| 4.1      | Position de Problème : . . . . .                                    | 45        |
| 4.2      | Application de la méthode adaptée . . . . .                         | 47        |
| <b>A</b> | <b>Résolution d'un PPL à variable bornée par la méthode adaptée</b> | <b>53</b> |
| A.1      | Méthode de résolution . . . . .                                     | 53        |
| A.1.1    | Changement de plan . . . . .                                        | 54        |
| A.1.2    | changement du support . . . . .                                     | 55        |
| A.1.3    | Itération de l'algorithme . . . . .                                 | 57        |
|          | <b>Conclusion générale</b> . . . . .                                | <b>58</b> |

# Introduction générale

En mathématique, la théorie du contrôle optimal s'inscrit dans la continuité du calcul des variations. Elle est apparue après la seconde guerre mondiale, répondant à des besoins pratiques de guidage, notamment dans le domaine l'aéronautique et de la dynamique de vol .

Historiquement, la théorie du contrôle est liée d'une part on calcul variationnell et d'autre part avec la résolution des équations différentielles ordinaires. Pour la première fois Johann Bernouilli a soumis le problème de Bruchistochrone correspondant au problème de la trajectoire la plus rapide entre deux points, (1696) Leibniz, Newton, de l'hôpital ainsi que son frère Jacques Bernouilli ont trouvé la solution. La méthode classique pour résoudre le problème de controle optimal est le calcul des variations,la méthode utilisé par Jean Bernouilli est basée sur une analogie de l'optique. Ceci est considéré comme un résultat pionnier dans le domaine du contrôle optimal, cette théorie qui est une extension du calcul des variations traite de la facon de trouver une loi de commande pour un système modélisé par un ensemble d'équations différentielles décrivant les trajectoires d'état et de contrôle,de telle sorte qu'un certain critère d'optimalité soit atteint .

Une des méthodes de résolution pour résoudre des problèmes de contrôle optimal est basée sur la programmation linéaire. C'est, sans doute l'un des plus beaux succès de la recherche opérationnelle en particulier et des mathématiques appliqués en général. C'est une technique qui s'intéresse aux méthodes de résolution du problème et qui consiste à minimiser ou à maximise une fonction linéaire ,appelé fonction objectif ,sur un domaine délimité par un ensemble d'équations linéaires appelées contraintes son origine remonte au dix-septième siècle lorsque Lagrange (1762) a résolu un problème d'optimisation avec un ensemble de contraintes linéaires .

Dantzig (1947) a développé la méthode de simplexe qu' est efficace pour résoudre les problèmes pratiques de programmation linéaire. Klee et Minty (1972) ont trouvé un exemple où la méthode de simplexe est de complexité exponentiel

Khachian (1979) a développé un premier algorithme de point intérieur en temps polynomial pour résoudre un problème de programmation linéaire.

Karmarkar (1984) a présenté l'algorithme de point intérieur en temps polynomial concurrentiel à la méthode de simplexe pour résoudre les problèmes de grande dimension, il existe d'autre méthodes pour résoudre les problèmes de programmation linéaire, par exemple les méthodes actives, la méthode de Gill et al, la méthode de Santo-Palomo en 2004,la méthode de support, ect Cette dernière est une généralisation de la méthode de simplexe, elle s'appelle aussi méthode adaptée utilisant certains métriques du simplexe ,elle a été utilisé pour la résolution de certains types de problèmes linéaires de contrôle optimal .

Le but de notre travail est la résolution de différents problèmes de contrôle optimal,on particulier on cherche la condition initiale optimal et une commande qui nous permet de ramener le probl de



contrôle optimal de l'état initial  $x_0 \in X_0$  où  $X_0$  est un ensemble fermé vers l'état final vérifiant certaine contrainte :

$$Hx(t^*) = g$$

Le plan de notre travail est le suivant :

Dans le premier chapitre, on présente la notion essentielles du problème de contrôle optimal en particulier la contrôlabilité, la stabilité et l'observabilité.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à résoudre le système par la méthode directe appelée la méthode adaptée qui est constituée de trois procédures le changement de support, le changement de commande et la procédure finale.

Dans troisième chapitre, on présente la nouvelle approche de résolution d'un problème de contrôle optimal qui consiste en couplage de deux méthodes : la méthode de discrétisation qui est constitué de deux procédures le changement de commande et le changement de support, la solution du problème discret nous permet de trouver le support du problème de départ en utilisant la procédure finale basée sur la méthode de Newton.

Nous terminons notre travail par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Introduction au contrôle optimal

### 1.1 Introduction

La théorie du contrôle optimal analyse les propriétés des systèmes commandés, c'est -à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande (ou contrôle). Le but est alors d'amener le système d'un état initial donné à un certain état final prescrit, en respectant éventuellement certains critères. Les systèmes abordés sont multiples : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes avec retard..., et leurs origines sont très diverses par exemple (mécanique, électricité, économie...). L'objectif est de stabiliser le système pour le rendre insensible à certaines perturbations (stabilisation), ou encore de déterminer des solutions optimales pour un certain critère d'optimisation (contrôle optimal).

### 1.2 Position de problème

un problème de contrôle optimal se définit par un système d'équations différentielle dont le comportement dépend de variables extérieure dites variables de contrôle (ou commande). Pour un contrôle donné, on définit la trajectoire associée, ainsi qu'un critère à optimiser.

Pour résoudre un problème d'optimisation, il faut d'abord définir un objectif ou la nécessité d'une définition du problème en termes physiques et sa modélisation en termes mathématiques. En connaissant la fonction à optimiser, l'état, le modèle et les paramètres du système, le problème est de déterminer la meilleure commande qui optimise l'objectif, par exemple, une commande en temps optimal c'est à dire réaliser l'objectif d'un processus dans le temps le plus court.

A l'aide des commandes  $u$  on désire faire de sorte que le système suive une trajectoire déterminée ou atteigne un état fixe ou minimise le long d'une trajectoire un ou plusieurs critères (énergétique, économiques,...) données à l'avance. voir figure (1,1) :



FIGURE 1.1 – Problème du contrôle optimal

Un problème de commande (contrôle) optimale est défini par les éléments suivants [12] :

### 1.2.1 Objet de la commande

On suppose que l'état  $x$  est solution d'une équation différentielle :

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x(t), u(t)), x(t_0) = x_0$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}$  est la position de l'objet à l'instant  $t$ ,  $x(t_0) \in \mathbb{R}$  la position initiale du système, et  $u(t)$  la commande.

### 1.2.2 Le but de la commande

Dans un problème de contrôle, le but de la commande consiste à ramener l'objet considéré de la position initiale  $x_0 = x(t_0)$ , ( $x_0 \in G_0$ ) à la position  $(x_1(t_1))$ , ( $x_1 \in G$ ), (où  $G_0$  est l'ensemble de départ, et  $G$  l'ensemble d'arrivée (accessibilité)). Et aussi d'optimiser le fonctionnement d'un système en fonction d'un critère de coût pertinent, ou de stabiliser un système pour le rendre insensible à certaines perturbations.

### 1.2.3 Classe des commandes admissibles

La classe des commandes admissibles  $U$  est constituée de fonctions mesurables  $u(t)$  :

$$U = u(t), t \in T = [0, t^*].$$

Chaque commande transfère l'objet du point de départ  $x_0$  en un point de l'ensemble d'arrivée  $G(t^*)$ .

### 1.2.4 Commande Bang-bang

Soit  $U$  l'ensemble de commandes et  $U_e$  l'ensemble de points extrémaux de  $U$ . La commande admissible  $u$  est dite de Bang-bang si  $u \in U_e$  c'est-à-dire  $u$  prend les valeurs extrémales de  $U$ , ensemble borné. Ainsi, par exemple, si on a  $|u(t)| \leq 1$ , les commandes Bang-bang sont telles que  $u(t) = \pm 1$ .

### 1.2.5 Critère de qualité

C'est une fonction d'efficacité de chaque commande sur l'intervalle  $T$ , à optimiser.

### 1.2.6 Ensemble d'accessibilité

Considérons le système contrôlé suivant :

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t_0) = x_0. \quad (1.1)$$

L'ensemble des points accessibles à partir de  $x_0$  en un temps  $t^* > 0$  est :

$$\begin{aligned} A(x_0, t^*) = \{x_1 \in \mathbb{R}^n / & \exists u \in C_{morceaux}^0([0, t^*], I) \\ & \exists x : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n, C^1_{morceaux} \quad t.q : \quad x(0) = x_0, \\ & \forall x \in [0, t^*] \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), x(t^*) = x_1 \} \end{aligned}$$

Autrement dit  $A(x_0, t^*)$  est l'ensemble des extrémités des solutions de (1,1) au temps  $t^*$ , lorsqu'on fait varier le contrôle  $u$ .

## 1.3 Propriétés essentielles du problème de contrôle optimal

### 1.3.1 Position du problème

Dans la classe des commandes constantes par morceaux

$$U = \{u(t), t \in T = [0, t^*]\}.$$

Considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$\begin{cases} J(u(t)) = c' x(t^*) + \int_0^{t^*} f_0(x, u, t) dt \longrightarrow \max_{u \in U} \\ \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0 \\ Hx(t^*) = g \\ |u(t)| \leq 1; t \in [0, t^*] \end{cases}$$

- $J(u)$  est le critère de qualité (fonction objectif).
- $x(t) = (x_j, j \in J) \in \mathbb{R}^n$ , un  $n$ -vecteur représenter la position (l'états) à l'instant  $t \in T$ .
- $A(I, J)$  est une  $n \times m$  - matrice qui caractérise le système.
- $b(J)$  est un  $n$ -vecteur donné.
- $H = H(I, J)$  c'est une  $m \times n$  -matrice telle que le rang de  $Hlm \leq n$ .
- $g$  est un  $m$ -vecteur qui représente la sortie du signal à l'instant  $t^*$ .
- $u(t)$  est une commande.
- $C = c(J)$  est le  $n$ -vecteur des coûts.

- $I = \{1, \dots, m\}$  et  $J = \{1, \dots, n\}$  sont des ensembles d'indices.
- $x_0$  la position initiale.

### 1.3.2 Commandabilité

Dans tous les problèmes, avant leur résolution, on s'intéresse à l'existence de leurs solutions en utilisant les notions de *commandabilité* ou de *contrôlabilité*. Elle consiste à faire passer le système d'un état initial  $x_0$  à un état final  $x_1$  prescrit en un temps fini. Une fois le problème de contrôlabilité résolu, on peut vouloir passer de l'état initial à l'état final en minimisant un certain critère.

#### Commandabilité des systèmes linéaires autonome :

**Définition 1.3.1.** Un système est défini par :

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(t_0) = x(0)$$

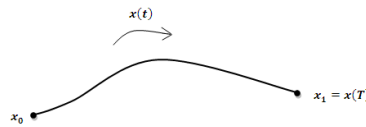


FIGURE 1.2 – Problème de contrôlabilité

est dit *non autonome*, et il est dit *autonome* si les matrices  $A(t) = A$  et  $B(t) = B$  sont constantes.

**Définition 1.3.2.** Le système  $\dot{X} = AX + BU$  où l'état  $x \in \mathbb{R}^n$ , la commande (on dit aussi l'entrée)  $u \in \mathbb{R}^m$  et les matrices  $A$  et  $B$  sont constantes et de taille  $(n \times n)$  et  $(n \times m)$  respectivement, est contrôlable (ou commandable) si pour tous les états  $x_0, x_1 \in \mathbb{R}_*^n$ , il existe une commande mesurable, bornée  $u(t)$  telle que la trajectoire associée relie  $x_0$  et  $x_1$  en un temps fini  $T$ .

#### Le critère de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman, en général, facilement applicable. Soient  $A$  et  $B$  deux matrices constantes sur  $[0, t^*]$  et on note  $C = (A|B) = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in M_{n,mn}(\mathbb{R})$  la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de  $B, \dots, A^{n-1}B$ .

#### Théorème : (Critère de Kalman) [6]

Le système autonome  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$  est commandable en temps  $t^*$  (quelconque) si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman est de  $\text{rang } n = \dim(x)$ , on écrit :

$$\text{rang}(A|B) = n.$$

#### Lemme

La matrice  $C$  est de  $\text{rang } n$  si et seulement si l'application linéaire

$$\begin{cases} \phi : L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}^m) \rightarrow \mathbb{R}^n \\ u \rightarrow \int_0^{t^*} e^{t^*-t} Bu(t) dt \end{cases}$$

est surjective.

**Remarque 1.3.1.** La condition de *Kalman* ne dépend ni de  $t^*$  ni de  $x_0$ . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps  $t^*$  depuis  $x_0$  alors il est contrôlable en tous temps depuis tout point.

**Exemple 1.** Considérons le système dynamique linéaire autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 - u \end{cases}$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Pour vérifier la contrôlabilité de ce système, il suffit de calculer le déterminant de la matrice de Kalman. Par conséquent, la matrice de Kalman  $C$  est donnée par :

$$C = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant de  $C$  est égal à :  $\det(C) = -1 \neq 0$  , donc le  $\text{rang}(C) = 2$ , d'où le système est contrôlable.

## Commandabilité des systèmes non linéaires

Se prononcer sur cette propriété reste jusqu' à présent une tâche très difficile. Pour étudier la commandabilité des systèmes non linéaires, on a tendance à utiliser le systèmes linéarisé partant du fait que la commandabilité du système linéarisé implique celle du système non linéaire d'une manière locale [17] . La non commandabilité du système linéarisé n'implique pas forcément la non commandabilité du système non linéaire [17] . Ceci constitue l'inconvénient principal de cette méthode.

Considérons un système de contrôle non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

## Définitions et préliminaires

Etant donné un point  $x_1 \in \mathbb{R}^n$ , on cherche à trouver un temps  $T$  et un contrôle  $u$  sur  $I$  tel que la trajectoire  $x_u$  associée à  $u$ , vérifie :

$$x_u(0) = x_0, \quad x_u(t^*) = x_1. \quad (1.3)$$

Ceci conduit à la définition suivante :

**Définition 1.3.3.** Soit  $t^* > 0$  , l'application *entrée / sortie* en un temps  $t^*$  du système de contrôle suivant :

$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), x(0) = x_0$$

initialisé à  $x_0$  est l'application :

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{x_0, t^*} : L^\infty([0, t^*], \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u \mapsto x_u(t^*) = x_1 \end{cases} \quad (1.4)$$

où  $x_u(\cdot)$  est la solution du système

$$\begin{cases} \dot{x}_u(t) = Ax_u(t) + Bu(t) \\ x_u(0) = x_0 \end{cases} \quad (1.5)$$

$U$  est l'ensemble des contrôles  $u$  tels que la trajectoire associée est bien définie sur  $[0, t^*]$ .

### Résultats de contrôlabilité

**Définition 1.3.4.** L'ensemble accessible en temps  $t^*$  pour le système (1.5), noté  $A(t^*)$ , est l'ensemble des extrémités au temps  $t^*$  des solutions du système partant de 0 . Autrement dit, c'est l'image de l'application *entrée/sortie* en temps  $t^*$  .

**Remarque 1.3.2.** La condition de contrôlabilité dépend de  $t^*$  , mais ne dépend pas du point initial  $x_0$ . Autrement dit, si le système considéré est contrôlable depuis  $x_0$ , en temps  $t^*$  , alors il est contrôlable depuis tout point.

### 1.3.3 Stabilisation

Un contrôle (ou une commande) en boucle ouverte est une application  $t \longrightarrow u(t)$  d'un intervalle de temps dans l'espace des contrôles. Un contrôle en boucle fermée, appelé aussi une rétroaction, ou un bouclage (ou encore un feed back), est une application  $u \longrightarrow g(t)$  définie sur les variables d'état du système. Un des objectifs de la théorie du contrôle est de déterminer des rétroactions qui stabilisent le système en un état particulier.

### Bouclage statique

**Définition 1.3.5. Bouclage statique** On dit que  $u$  est un bouclage statique du système  $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$ , et  $(x(t) \in M, u(\cdot) \in U)$  si sa valeur  $u(t)$  à l'instant  $t$  ne dépend que de  $x(t)$  , c'est-à-dire  $u = g(x)$  où  $g$  est une fonction.

Ce système s'écrit tout simplement

$$\dot{x} = f(x, g(x)) \quad (1.6)$$

Il est représenté par la figure(1,3)

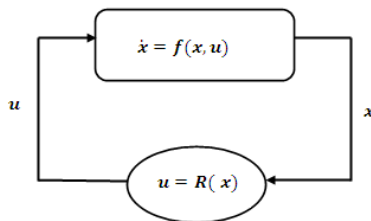


FIGURE 1.3 – Bouclage

Le problème de la stabilisation (ou régulation) consiste à maintenir le système près d'un équilibre  $x^*$ . Il s'agit donc de construire une loi de commande telle que  $x^*$  soit un équilibre asymptotiquement stable du système en boucle fermée (1,6).

## Concepts de stabilité

On se donne un système

$$\dot{x}(t) = f(x) \quad (1.7)$$

tel que  $f(0) = 0$ , admettant  $x = 0$  comme équilibre (noter que par un changement de variable on peut toujours ramener l'équilibre à l'origine).

**Définition 1.3.6.** L'équilibre  $x = 0$  du système (1,6) est dit stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.6), on ait

$$\|x(0)\| < \eta \Rightarrow \forall t \geq 0 \quad \|x(t)\| < \varepsilon.$$

Si l'équilibre n'est pas stable on dit qu'il est instable.

**Définition 1.3.7.** L'équilibre  $x = 0$  du système (1,7) est dit attractif s'il existe  $r > 0$  tel que pour toute solution  $x(t)$  de (1.7) on ait

$$\|x(t)\| < r \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.7) est dit *globalement attractif* si pour toute solution  $x(t)$  de (1.7) on a  $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$ . L'ensemble  $B$  défini par la propriété

$$x(0) \in B \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0$$

s'appelle le bassin d'attraction de l'origine. Ainsi  $x = 0$  est attractif si  $B$  est un voisinage de 0. Il est globalement attractif si  $B = \mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.3.8.** L'équilibre  $x = 0$  du système (1.7) est dit *asymptotiquement stable* s'il est stable et attractif. Il est dit *globalement asymptotiquement stable* (GAS) s'il est stable et globalement attractif.

**Définition 1.3.9.** L'équilibre  $x = 0$  du système (1.7) est dit *exponentiellement stable* s'il existe  $r > 0$ ,  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que la solution de  $x(t)$  on ait

$$\|x(t)\| < r \Rightarrow \|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

L'équilibre  $x = 0$  du système (1.7) est dit *globalement exponentiellement stable* s'il existe  $M > 0$  et  $\alpha > 0$  tels que la solution de  $x(t)$  on a

$$\|x(t)\| \leq M \|x(0)\| e^{-\alpha t}, \text{ pour tout } t \geq 0$$

On peut montrer que stable n'implique pas attractif, attractif n'implique pas stable, exponentiellement stable implique asymptotiquement stable, et asymptotiquement stable n'implique pas exponentiellement stable ( voir [11]).



### 1.3.4 Observabilité

#### Système commandé-observé

Dans beaucoup de situations pratiques, une partie seulement de l'état du système, appelée la sortie ou la variable observée, est mesurée. Un système commandé-observé est un système différentiel de la forme :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, t) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (1.8)$$

avec  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ , le vecteur  $x$  est le vecteur des états du système, le vecteur  $u$  celui des contrôles (entrées) et le vecteur  $y$  celui des variables observées (sorties). Ce système est dit en boucle ouverte et est représenté par la figure (1,4)

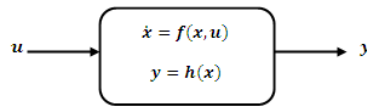


FIGURE 1.4 – Système commandé-observé

Un système non linéaire sera dit *observable* si la sortie  $y(t)$  permet de retrouver l'état  $x(t)$ . Un observateur pour le système (1.8) est un système.

$$\dot{\hat{x}}(t) = g(\hat{x}(t), u(t), y(t))$$

ayant comme entrées  $u(t)$  et  $y(t)$  (la sortie du système (1.8)) et tel que l'erreur  $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$  tende vers 0 quand  $t \rightarrow \infty$ .

**Définition 1.3.10.** Considérons le système :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \quad (1.9)$$

ou :  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ ,  $y(t) \in \mathbb{R}^p$ ,  $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ ,  $B \in \mathbf{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ ,  $C \in \mathbf{M}_{p,n}(\mathbb{R})$  et  $D \in \mathbf{M}_{p,m}(\mathbb{R})$ . Le système (1.12) est observable en temps  $T$  si :

$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $(x_1 \neq x_2) \Rightarrow \exists u \in \mathbf{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) / y_u(., x_1) \neq y_u(., x_2)$ . Dans ce cas on dit que  $x_1$  et  $x_2$  sont *distinguishables*.

Autrement dit, deux états initiaux  $x_1$  et  $x_2$  sont *distinguishables* ou *discernables* si on peut trouver sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , une entrée telle que les trajectoires de sortie (observées) correspondant aux deux états, lorsque cette entrée est appliquée, soient différentes. De manière équivalente, on peut dire :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n, \Rightarrow \exists u \in \mathbf{L}^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) / y_u(., x_1) \neq y_u(., x_2) \Rightarrow x_1 = x_2.$$

La connaissance de la trajectoire observée détermine de manière univoque l'état initial.

L'intérêt de la notion d'observabilité est le suivant : si on considère le système comme une boîte noire à laquelle on applique une *entre*<sup>1</sup> (contrôle)  $u(t)$ , et de laquelle émerge une *sortie*<sup>2</sup> (observable)  $y(t)$ , la propriété d'être distinguable signifie la possibilité de différencier par des expériences de type entrée-sortie. On peut alors se demander si la connaissance partielle de l'état permet de reconstituer l'état complet, c'est la propriété d'observabilité.

**Définition 1.3.11.** Considérons les systèmes linéaires commandés-observés (systèmes linéaires invariants SLI) définis par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (1.10)$$

Un système est dit observable si l'observation de ses entrées et sorties pendant un intervalle de temps fini  $[t_i, t^*]$  permet de retrouver l'état initial  $x(t_i)$ . En fait, puisque'il est possible pour les SLI d'avoir une solution analytique, l'observabilité est donc une propriété intéressante qui nous permet d'affirmer que l'on peut connaître l'état  $x(t)$  à tout instant compris dans l'intervalle  $[t_i, t^*]$ .

### Critère d'observabilité de Kalman pour les SLI

Il existe une caractérisation algébrique de l'observabilité d'un système linéaire due à Kalman.

#### Théorème [3]

Le système linéaire (1.10) est observable si et seulement si :

$$\text{rang} \Omega = \text{rang} \begin{pmatrix} C \\ AC \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

La matrice  $\Omega$  est appelée la matrice *d'observabilité de Kalman*, et ses lignes se calculent facilement de façon itérative :

$$CA^{k+1} = CA^k \times A$$

Noter que la paire  $(A, C)$  est observable si et seulement s'il existe  $T > 0$  tel que la matrice .

$$\Omega_T = \int_0^T e^{sA'} C' C e^{sA} ds$$

soit inversible.

**Remarque 1.3.3.** La notion d'observabilité de l'état ne porte que sur les matrices  $A$  et  $C$ .

Dire que le système est observable équivaut à dire que la paire  $(A, C)$  est observable.

**Exemple 1.3.1.** Considérons le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases}$$

où :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathcal{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, D = 0$$

n=3 états , p =2 sorties

$$\Omega(A, C) = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}, \Omega(A, C) \in \mathbb{R}^{6 \times 3}$$

$$\Omega(A, C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

Matrice de *rang*  $4 \neq 3 \Rightarrow$  Le système n'est pas observable.

## Chapitre 2

# Résolution d'un problème terminal de contrôle optimal d' un système dynamique linéaire

### 2.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à la Résolution d'un problème terminal de contrôle optimal d' un système dynamique linéaire.

Nous utiliserons , dans la résolution de ce problème une méthode directe dite "méthode adaptée .

Les méthodes directes ont pris de l' importance dans le domaine du contrôle optimal numérique depuis les années 80. Ils sont très faciles á appliquer, et relativement robustes á l'initialisation. On peut traiter un système avec un grand nombre de variables d'état. Leur précision est limité par la précision de la discrétisation , donc le nombre de variables utilisées, peut s'avérer insuffisantes pour certaines problème .

### 2.2 Position du problème

Considérons le problème de maximisation de la fonctionnelle (P) suivante :

$$J(u) = c'x(t^*) \rightarrow \max_u \quad (2.1)$$

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0 \quad (2.2)$$

$$Hx(t^*) = g \quad (2.3)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in T = [0, t^*] \quad (2.4)$$

où

- $x(t) \in \mathbb{R}^n$  la position du système au temps  $t$  ,
- $A(I, J)$  une  $m \times n$  matrice qui caracterise le système ,
- $b(j)$  un  $n$ -vecteur ,
- $H(I, J)$  une  $m \times n$  - matrice et,  $\text{rang}H = m \leq n$ ,

- $Hx(t^*) = g$  un m-vecteur ,
- $u(t)$  une commande constante par morceau ,
- $c = c(J)$ , le vecteur des coûts  $\in \mathbb{R}^n$  ,
- $I = \{1, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, \dots, n\}$  l'ensemble des indices des lignes et des colonnes de la matrice  $A$ .

La solution du système différentiel (2,2) donnée par la formule de Cauchy est égale à :

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^{t^*} F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau, \quad t \in T;$$

où  $F(t)$  ,  $t \in T$  est la solution (résolvante) du système

$$\begin{cases} \dot{F} = AF \\ F(0) = I_n, t \in T \end{cases}$$

avec  $I_n$  la matrice identité .

On remplace la valeur de  $x(t^*)$  dans le problème (P) . on obtient

$$\begin{cases} J(u) = c'[F(t^*)x_0 + F(t^*) \int_0^{t^*} F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau], \\ H[F(t^*)x_0 + F(t^*) \int_0^{t^*} F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau] = g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} J(u) = c'F(t^*)x_0 + c'F(t^*) \int_0^{t^*} F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau, \\ \int_0^{t^*} HF(t^*)F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau = g - HF(t^*)x_0, \\ f_* \leq u(t) \leq f^* \end{cases}$$

posons :

$$\bar{g} = g - HF(t^*)x_0, \quad c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b, \quad \varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b.$$

de là le problème ( P) devient :

$$\begin{cases} J(u) = c'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \longrightarrow \max_u \\ \int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt = \bar{g} \\ f_* \leq u(t) \leq f^*, \quad t \in [0, t^*] \end{cases}$$

**Définition 2.2.1.** Toute commande vérifiant les contraintes

$$Hx(t^*) = g, \text{ et } f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in [0, t^*]$$

est dite commande admissible du problème (P) .

**Définition 2.2.2.** Une commande admissible  $u(t)$  est dite optimale si et seulement si :

$$J(u^0) = \max_{f_* \leq u(t) \leq f^*} J(u)$$

et la trajectoire correspondante à cette commande est dite " Trajectoire optimale ".

**Définition 2.2.3.** Une commande admissible  $u^\varepsilon(t)$  est dite  $\varepsilon$ -optimale si et seulement si

$$J(u^0) - J(u^\varepsilon) < \varepsilon, \quad \forall \varepsilon > 0 . (\varepsilon \text{ donné})$$

## 2.3 Support-contrôle

**Définition 2.3.1.** Dans l'ensemble  $T$ , choisissons  $\tau_B = \{\tau_j, j = \overline{1, m}\}$  formé de points isolés. l'ensemble  $\tau_B$  est appelé support du problème si  $\det \varphi(\tau_B) \neq 0$

**Définition 2.3.2.** L'ensemble  $T_B = \{T_j = [\tau_j, \bar{\tau}^j], j = \{\overline{1, m}\}\}, T_j \subset T$ , telque  $[\tau_j, \bar{\tau}^j] \cap [\tau_i, \tau^i] = \emptyset, \forall i \neq j$  est appelé support généralisé du problème (P) si le système :

$$Hx(t^*) = 0, \quad t \in T \quad (2.5)$$

n'admet pour  $u(t) \equiv 0, t \in T_H = T/T_B$  que la solution triviale  $u(t) \equiv 0, t \in T_B$ , mais pour tout intervalle  $T^* = [\tau_*, \tau^*]$ ,  $T^* \subset T_H, \tau_* \neq \tau^*$ , et  $u(t) \equiv 0, t \in T_H = T/T^*, u(t) = u^*, t \in T^*$  le système (2.5) admet une solution triviale i.e :  $u(t) \neq 0, t \in T_B \cup T^*$ .

### Deuxième notion du support généralisé

L'ensemble  $T_B$  est un support généralisé si et seulement si la matrice du support

$$\varphi(T_B) = \left\{ \int_{T_j} \varphi(t) dt, \quad j = \overline{1, m} \right\}$$

et non dégénérée.

**Remarque 2.3.1.** La notion de support est très liée avec la notion de commandabilité

**Définition 2.3.3.** La paire  $\{u, \tau_B\}$  formé de la commande admissible  $u = (u(t), t \in T)$  et du support  $\varphi_B$  est appelé support - contrôle.

**Définition 2.3.4.** (non dégénérecence )

Une commande support est dite non dégénérée si :

$\exists \lambda_0 > 0, \mu_0 > 0, \mu_j^\lambda, j = \overline{1, m}$ , telque pour tout  $\lambda, 0 < \lambda < \lambda_0$ , les relations suivantes sont vérifiées :

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^m \int_{t_j-\lambda}^{t_j+\lambda} \varphi(t) u(t) dt = \sum_{i=1}^m u_j^\lambda \int_{t_j-\lambda}^{t_j+\lambda} \varphi(t) dt \\ f_* + \mu_0 \leq u_j^\lambda \leq f^* - \mu_0, \quad i = \{1, \dots, m\} \end{cases}$$

## 2.4 Formule d'accroissement de la fonctionnelle

Soit  $u(t), t \in T$  support - contrôle non dégénérée de départ et  $x(t), t \in T$  sa trajectoire correspondante .Construisons le vecteur des potentiels :

$$y' = c'_B \varphi_B^{-1}, \text{ ou } c'_B = (c(\tau_j), j = \overline{1, m}) \quad (2.6)$$

et la co-commande (vecteur des estimations) :

$$E(t) = -\psi'(t)b, \quad t \in T \quad (2.7)$$

où  $\psi(t)$  est la solution du système conjugué :

$$\dot{\psi} = A\psi, \quad \psi(t^*) = c - H'y \quad (2.8)$$

En calculons  $\psi(t), t \in T$

$$\psi(t) = (c' - y'H)F(t^*)F^{-1}(t)$$

La co-commande (vecteur des estimations) peut être écrit sous la forme :

$$\begin{aligned} E(t) &= -(c' - y'H)F(t^*)F^{-1}(t)b \\ &= y'\varphi(t) - c(t) \end{aligned}$$

où

$$\varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b,$$

et

$$c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b.$$

d'où

$$E(t) = y'\varphi(t) - c(t), \quad t \in T. \quad (2.9)$$

soit  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$  une autre commande admissible et  $\bar{x}(t) = x(t) + \Delta x(t)$ ,  $t \in T$ , la trajectoire correspondante associée .

Déterminons l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned} \Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) \\ &= c'F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} c(t)\bar{u}(t)dt - c'F(t^*)x_0 - \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} c(t)\bar{u}(t)dt - \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} c(t)(\bar{u}(t) - u(t))dt \\ &= \int_0^{t^*} c(t)\Delta u(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} [y'\varphi(t) - \Delta u(t)]\Delta u(t)dt \\ &= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt - \int_0^{t^*} E(t)\Delta u(t)dt \\ \Delta J(u) &= - \int_0^{t^*} E(t)\Delta u(t)dt \end{aligned} \quad (2.10)$$

car  $\int_0^{t^*} y'\varphi(t)\Delta u(t)dt = 0$  de l'admissibilité de  $u$  et  $\bar{u}$ .

## La valeur de suboptimalité

On a la commande  $\bar{u}(t)$  est admissible donc :

$$f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t).$$

Le maximum de l'acroissement de la fonctinnelle (2.10) sous les contraintes

$$f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t)$$

et atteint pour :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} f_* - u(t) & \text{si } E(t) \geq 0 \\ f^* - u(t) & \text{si } E(t) \leq 0 \\ 0 & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases}$$

et  $\beta(u, \tau_B)$  est égal à :

$$\beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} E(t)(u(t) - f_*)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - f^*)dt \quad (2.11)$$

où :

$$T^+ = \{t \in T : E(t) > 0\}, T^- = \{t \in T : E(t) < 0\}.$$

$\beta = \beta(u, \tau_B)$  appelé valeur de suboptimalité du support - contrôle  $\{u, \tau_B\}$  De ce qui précède ,on a toujours l'inégalité :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B), \quad \forall \bar{u}$$

## 2.5 Critère d'optimalité

**Théoreme 2.5.1.** (*critère d'optimalité*)

les relations

$$\begin{cases} u(t) = f_* & \text{si } E(t) > 0 \\ u(t) = f^* & \text{si } E(t) < 0 \\ f_* \leq u(t) \leq f^* & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases} \quad (2.12)$$

sont suffisantes et dans le cas de non dégénérescence ,elle sont nécessaires pour l'optimalité de support contrôle  $\{u, \tau_B\}$ .

## Preuve

### (a)-Condition suffisante

Si les relations (2.12) sont vérifiées alors  $\beta(u, \tau_B) = 0$  comme  $\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, \tau_B)$ ,  $\forall \bar{u} \Rightarrow J(\bar{u}) \leq J(u)$ ,  $\forall \bar{u}$  donc  $\{u, \tau_B\}$  est une commande support optimal.

### (b)-Condition nécessaire

Soit  $\{u, \tau_B\}$  un support contrôle optimal non dégénéré et supposons que les relations (2.12) ne sont pas vérifiées c'est-à-dire il existe un moment  $t_0 \in T_H$  telque :  
 $E(t_0) > 0$  et  $u(t_0) > f_*$  où  $E(t_0) < 0$  et  $u(t_0) < f^*$  .

supposons qu'on a le cas  $E(t_0) > 0$  et  $u(t_0) > f_*$   
 Construisons la commande  $\bar{u} = u(t) + \Delta u(t)$  de la manière suivante :

$$\Delta u(t) = \begin{cases} -\theta & \text{si } t = t_0, \\ 0 & \text{si } t \in T_H \setminus t_0, \end{cases} \quad \theta > 0$$



De là pour  $\theta$  suffisamment petit , on a  $f_* \leq u(t) \leq f^*$ ,  $t \in T$  ; et l' accroissement de la fonctionnelle :

$$\begin{aligned}\Delta J(u) &= J(\bar{u}) - J(u) \\ &= - \int_0^{t^*} E(t) \Delta u(t) dt \\ &= -E(t_0) \Delta u(t_0) - \int_{T \setminus t_0} E(t) \Delta u(t) dt \\ &= E(t_0) \theta > 0\end{aligned}$$

Ceci contredit l'optimalité de la commande  $u(t)$  .

### Remarque

Le critère d'optimalité peut être sous forme du principe du maximum en utilisant la fonction Hamiltonienne  $H(x, \psi, u) = \psi(Ax + bu)$  où  $\psi$ ,  $t \in T$  , et la solution du système conjugué . La condition

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u) \quad t \in T$$

est suffisante et dans le cas de la non dégénérescence elle est nécessaire pour l'optimalité du support contrôle  $\{u, \tau_B\}$  .

## 2.6 Critère du $\varepsilon$ - optimalité

### Théoreme 2.6.1. (critère de suboptimalité)

Soit  $\varepsilon \geq 0$  donné . La commande admissible  $u(t)$   $t \in T$  , est  $\varepsilon$ -optimale si et seulement si s' il existe un tel support  $\tau_B$  sur lequel le long de  $u(t)$  et des solutions  $(x(t), \psi(t))$   $t \in T$  ) des système direct et conjugué , la condition  $\varepsilon$ -optimalité est vérifiée :

$$H(x(t), \psi(t), u(t)) = \max_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u(t)) - \varepsilon(t), t \in T$$

avec

$$\int_0^{t^*} \varepsilon(t) dt \leq \varepsilon$$

### preuve

#### (a)-Condition suffisante

En utilisant l'accroissement de fonctionnelle , la valeur de suboptimalité  $\beta$  de la commande appui  $\{u, \tau_B\}$  est égale à :

$$\beta(u, \tau_B) = \int_{T^+} E(t)[u(t) - f_*]dt + \int_{T^-} E(t)[u(t) - f^*]dt$$

D'après la relation (2.7) et on a :

$$\begin{aligned}
\beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} -\psi'(t)b[u(t) - f_*]dt \\
&+ \int_{T^-} -\psi'(t)b[u(t) - f^*]dt \\
&= \int_{T^+} [\psi'(t)bf_* - \psi'(t)bu(t)]dt \\
&+ \int_{T^-} [\psi'(t)bf^* - \psi'(t)bu(t)]dt \\
&= \int_{T^+} [\psi'(t)Ax(t) - \psi'(t)Ax(t)\psi'(t)bf_* - \psi'(t)bu(t)]dt \\
&+ \int_{T^-} [\psi'(t)Ax(t)\psi'(t)bf^* - \psi'(t)Ax(t) - \psi'(t)bu(t)]dt \\
&= \int_{T^+} [\psi'(t)(Ax(t) + bf_*)\psi'(t) - \psi'(t)(Ax(t) + bu(t))]dt \\
&+ \int_{T^-} [\psi'(t)(Ax(t) + bf^*)\psi'(t) - \psi'(t)(Ax(t) + bu(t))]dt \\
&= \int_{T^+} \psi'(t)(Ax(t) + bf_*)dt \\
&+ \int_{T^-} \psi'(t)(Ax(t) + bf^*)dt \\
&- \int_0^{t^*} \psi'(t)(Ax(t) + bu(t))dt \\
&= \int_0^{t^*} [\max_{f_* \leq u(t) \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u(t)) - H(x(t), \psi(t), u(t))]dt \\
&= \int_0^{t^*} \varepsilon(t)dt \\
&\leq \varepsilon
\end{aligned}$$

d'où  $\beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$  et comme  $J(\bar{u}) - J(u) < \beta(u, \tau_B)$  ,  $\forall \bar{u}$  alors pour  $\bar{u} = u^0$  ,  
on obtient  $J(u^0) - J(u) < \beta(u, \tau_B) \leq \varepsilon$  donc  $\bar{u}(t)$  est  $\varepsilon$ -optimale .

### (b)-Condition nécessaire

Soit  $u(t)$  une commande  $\varepsilon$ -optimale . Faisons une décomposition de suboptimalité  $\beta(u, \tau_B)$  .  
Pour cela introduisons le problème dual du primal (2.7) .

$$\begin{cases} D(u, v(t), w(t)) = c'F(t^*)x_0 + \bar{g}u - \int_0^{t^*} v(t)f_*dt + \int_0^{t^*} w(t)f^*dt \rightarrow \max \\ u'\varphi(t) - v(t) + w(t) = c(t) \\ v(t) \geq 0, w(t) \geq 0 \quad t \in [0, t^*] \\ \bar{g} = g - Hf(t^*)x \end{cases} \quad (2.13)$$

L'ensemble  $\{(y, v(t), w(t), t \in T)\}$  défini de la forme suivante :

$$\begin{cases} u = y \\ v(t) = E(t), w(t) = 0 \quad si \quad E(t) > 0 \\ v(t) = 0, w(t) = -E(t) \quad si \quad E(t) < 0, \quad t \in T \end{cases} \quad (2.14)$$

Vérifie les contraintes du problème (2.12) c'est à dire c'est un plan dual , et désignons par  $(y^0, v^0(t), w^0(t), t \in T)$  une solution optimale .

On remplace les relations  $E(t) = y'\varphi(t) - c(t)$  et  $\psi'(t) = (c' - y'H)F(t^*)F^{-1}(t)$  dans la valeur de suboptimalité  $\beta$ , on obtient :

$$\begin{aligned}\beta &= \int_0^{t^*} E(t)u(t)dt - \int_{T^+} E(t)f_*dt - \int_{T^-} E(t)f^*dt \\ &= \int_0^{t^*} [y'\varphi(t) - c(t)]u(t)dt - \int_0^{t^*} v(t)f_*dt + \int_0^{t^*} w(t)f_*dt \\ &= \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt - \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt + \int_0^{t^*} v(t)f_*dt - \int_0^{t^*} w(t)f_*dt\end{aligned}$$

D'autre part on a :

$$\int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt = g - HF(t_1)x_0 = \bar{g} \Rightarrow \int_0^{t^*} y'\varphi(t)u(t)dt = \bar{g}y'$$

$$J(u^0) = D(y^0, v^0, w^0)$$

donc

$$\int_0^{t^*} c(t)u^0dt = \bar{g}y^0 - \int_0^{t^*} v^0f_*dt + \int_0^{t^*} w^0f^*dt$$

d'où :

$$\begin{aligned}\beta &= \left[ \int_0^{t^*} c(t)u^0dt - \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \right] + \bar{g}y' - \int_0^{t^*} v(t)f_*dt + \int_0^{t^*} w(t)f^*dt \\ &= \left[ \int_0^{t^*} c(t)u^0dt - \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \right] + [\bar{g}y' - \int_0^{t^*} v(t)f_*dt + \int_0^{t^*} w(t)f^*dt \\ &\quad - (\bar{g}y^0 + \int_0^{t^*} v^0f_*dt + \int_0^{t^*} w^0f^*dt)] \\ &= [J(u^0) - J(u)] + [D(y(t), v(t), w(t)) - D(y^0, v^0, w^0)] \\ &= \beta_u + \beta_B\end{aligned}\tag{2.15}$$

où :

$\beta_u = J(u^0) - J(u)$  est appelée la mesure de la non optimalité de la commande  $u(t), t \in T$ .

$\beta_B = D(y, v(t), w(t)) - D(y^0, v^0(t), w^0(t))$  est appelée la mesure de la non optimalité du support  $\tau_B$ .

Si on associe à la commande  $u(t), t \in T$  un support  $\tau_B^0$  tel que l'ensemble  $\{y, v(t), w(t)\}$  défini d'après (2.14) devient la solution du problème (2.13)

On aura

$$\beta_B = 0, \quad \beta(u, \tau_B^0) = \beta_u \leq \varepsilon$$

posons :

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} E(t)(u(t) - f_*) & \text{si } t \in T^+ \\ E(t)(u(t) - f^*) & \text{si } t \in T^- \\ 0 & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases}$$

où

$$T^+ = \{t \in T, E(t) > 0\}, T^- = \{t \in T, E(t) < 0\}$$

et comme  $E(t) = -\psi(t)b$ ,  $t \in T$  alors on obtient :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= -\psi'(t)b(u(t) - f_*) \\ &= -\psi'(t)u(t)b + \psi'(t)bf_* \\ &= -\psi'(t)[Ax(t) + bf_*] - \psi'(t)[Ax(t) + bu(t)] \end{aligned}$$

donc

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \psi'(t)(Ax(t) + bf_*) - \psi'(t)(Ax(t) + bu(t)) & \text{si } \psi'(t)b < 0 \\ \psi'(t)(Ax(t) + bf^*) - \psi'(t)(Ax(t) + bu(t)) & \text{si } \psi'(t)b > 0 \\ 0 & \text{si } \psi'(t)b = 0, t \in T \end{cases}$$

En introduisant la fonction Hamiltonienne  $\varepsilon(t)$  on obtient :

$$\varepsilon(t) = \max_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u) - H(x(t), \psi(t), u)$$

d'où

$$H(x(t), \psi(t), u) = \max_{f_* \leq u \leq f^*} H(x(t), \psi(t), u) - \varepsilon(t), \quad t \in T$$

## 2.7 Détermination d'un support- contrôle de départ

Pour trouver une commande appui de départ réalisable, on prend une commande  $u(t)$ ,  $t \in T$  vérifiant la condition  $f_* \leq u(t) \leq f^*$ ,  $t \in T$  et on calcule la trajectoire correspondante  $x(t)$ ,  $t \in T$ , solution du système

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(0) = x_0$$

Si la condition  $Hx(t^*) = g$  est vérifiée, alors  $u(t)$  est admissible et pour le support  $\tau_B$  on le choisit :  $\tau_B = \{\tau_j, j = \overline{1, m}\} \subset T$ , tel que  $\det \varphi(\tau_B) \neq 0$ .

Si on ne peut pas trouver un tel  $\tau_B$ , on va démarrer par  $\tau_B = \emptyset$ , avec  $|\varphi_B| \neq 0$ .

Si  $Hx(t^*) \neq g$ , on ajoute des variables artificielles.

## 2.8 Méthode de résolution

Soit  $\{u, \tau_B\}$  un support contrôle de départ pour lequel la condition  $\varepsilon$ -maximum n'est pas vérifiée et l'itération de l'algorithme  $\{u, \tau_B\} \rightarrow \{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  est constituée de trois procédures :

1. Changement de commande  $u(t) \rightarrow \bar{u}$
2. Changement de support  $\tau_B \rightarrow \bar{\tau}_B$
3. La procédure finale .

### 2.8.1 Changement de commande

On construit une nouvelle commande admissible sous la forme

$$\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t) = u(t) + \theta l(t), \quad t \in T$$

où  $l(t)$  est la direction d'amélioration de la commande  $u(t)$ ,  $t \in T$  et  $\theta$  est le pas maximal admissible le long de cette direction

#### Détermination de la direction admissible

Sur  $T_H$  , on pose  $\theta = 1$  et  $l(t)$  sera définie de sorte quelle maximise l'accroissement de la fonctionnelle . pour celà posons :

$$l(t) = \begin{cases} f^* - u(t) & \text{si } t \in T_H^- \\ f_* - u(t) & \text{si } t \in T_H^+ \end{cases} \quad (2.16)$$

où

$$T_H^- = \{t \in T_H, E(t) < 0\}, \quad T_H^+ = \{t \in T_H, E(t) > 0\}$$

Comme  $u(t), \bar{u}(t)$  sont admissible , alors :

$$\theta \int_0^{t^*} \varphi(t) l(t) dt = 0$$

$$\int_{T_B} \varphi(t) l(t) dt + \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt = 0$$

$$\int_{T_B} \varphi(t) l(t) dt = - \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt$$

Comme  $l_B$  est constante et  $\varphi(T_B)$  est inversible donc

$$l(T_B) = -\varphi^{-1}(T_B) \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt. \quad (2.17)$$

## Détermination du pas maximal

Comme  $\bar{u}(t)$  doit être admissible donc elle doit vérifier  $f_* \leq \bar{u} \leq f^*$  c'est à dire

$$f_* \leq u + \theta l \leq f^* \quad t \in T$$

On a

$$f_* \leq u(t) + \theta(t)l(t) \leq f^* \quad t \in T, \quad \Rightarrow f_* - u(t) \leq \theta(t)l(t) \leq f^* - u(t), \quad t \in T$$

alors pour que  $\bar{u}(t)$  vérifie  $f_* \leq u(t) + \theta l(t) \leq f^*$  il faut que  $\theta = \theta(t_0)$  avec  $\theta(t_0) = \min \theta(t)$  où

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{(f^* - u(t))}{l(t)} & \text{si } l(t) > 0 \\ \frac{(f_* - u(t))}{l(t)} & \text{si } l(t) < 0 \\ \infty & \text{si } l(t) = 0 \end{cases} \quad t \in T_B \quad (2.18)$$

d'où

$$\theta^0 = \min(1, \theta(t_0)) \quad \text{et} \quad \bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t), \quad t \in T$$

Calculons la valeur de suboptimalité de  $\{\bar{u}, \tau_B\}$  :

$$\begin{aligned} \beta &= \{\bar{u}, \tau_B\} \\ \beta &= \int_{T^+} E(t)[\bar{u} - f_*]dt + \int_{T^-} E(t)[\bar{u} - f^*]dt \\ &= \int_{T^+} E(t)[u(t) + \theta^0 l(t) - f_*]dt + \int_{T^-} E(t)[u(t) + \theta^0 l(t) - f^*]dt \\ &= \beta(u, \tau_B) - \theta^0 \int_{T^+} E(t)[u(t) - f_*]dt - \theta^0 \int_{T^-} E(t)[u(t) - f^*]dt \\ &\quad + \int_{T^+} E(t)\theta^0 l(t)dt + \int_{T^-} E(t)\theta^0 l(t)dt \\ &= \beta(u, \tau_B) - \theta^0 \beta(u, \tau_B) \\ &= (1 - \theta^0)\beta(u, \tau_B) \end{aligned}$$

De là

Si  $\theta^0 = 1$  alors  $\beta(u, \tau_B) = 0$  d'où  $\bar{u}$  est une commande optimale .

Si  $(1 - \theta^0)\beta(u, \tau_B) < \varepsilon$  alors  $\bar{u}$  est  $\varepsilon$  - optimale .

Si  $(1 - \theta^0)\beta(u, \tau_B) > \varepsilon$  alors on passe au changement du support .

### 2.8.2 Changement de support

Pour  $\theta^0 = \theta(t_0), t_0 \in \tau_B$  et  $\beta(\bar{u}, \tau_B) > \varepsilon$ .

De là le moment  $t_0$  doit sortir de la base et ceci nous donne le changement du support  $\tau_B \rightarrow \bar{\tau}_B$ , qui consiste à diminuer la mesure de non optimalité  $\beta(Q_B)$ .

Ce changement de support entraine le changement du vecteur des potentiels et des estimations (co-commande) :

$$\bar{y} = y + \sigma z(I); \text{ et } \bar{E}(t) = E(t) + \sigma^0 z(t), \quad t \in T \quad (2.19)$$

où  $z(t)$  est une direction admissible du changement de la co-commande et  $\sigma^0$  est le pas maximal dual.

### Construction de la direction admissible $z(t)$ :

Posons

$$z(t) = \begin{cases} 0 & si & t \in T_B \setminus t_0 \\ 1 & si & \bar{u}(t) = f_*, \quad t = t_0 \\ -1 & si & \bar{u}(t) = f^*, \quad t = t_0 \end{cases} \quad (2.20)$$

En utilisant les notions faites et la définition de co-commande  $\bar{E}(t), t \in T$ , on a

$$\begin{aligned} \bar{E}(t) &= \bar{y}'\varphi(t) - c(t) \\ &= E(t) + \sigma z(t) \\ &= y'\varphi(t) - c(t) + \sigma z(t) \end{aligned}$$

De là on obtient  $(\bar{y}' - y')\varphi(t) = \sigma z(t)$

c'est à dire

$$\sigma z(I)\varphi(t) = \sigma z(t) \quad \Rightarrow z(I)\varphi(t) = z(t), t \in T$$

Sur  $T_B$ , on a :

$$z(I) = z'(T_B)\varphi_B^{-1}$$

et en utilisant cette dernière quantité, on obtient :

$$z(I) = z'(T_B)\varphi_B^{-1}\varphi(t), \quad t \in T \quad (2.21)$$

### Construction du pas maximal $\sigma^0$

Le pas maximal  $\sigma^0$  sera égale à :  $\sigma^0 = \min \sigma(t), \quad t \in T$

où :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{-E(t)}{z(t)} & si & E(t)z(t) < 0 \quad t \in T_H \\ 0 & si & E(t) = 0, \text{ et } u \neq f_*, z(t) > 0 \text{ ou} \\ & & E(t) = 0, \text{ et } u \neq f^*, z(t) < 0, \quad t \in T_H \\ \infty & si & non. \end{cases} \quad (2.22)$$

$$\sigma^0 = \min_{t \in T_H} \sigma(t) = \sigma(t^*)$$

De là le nouveau support sera :

$$\bar{\tau}_B = (\tau_B \setminus \{t_0\}) \cup t_1$$

Calculons la nouvelle valeur de la suboptimalité du support contrôle  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  :

Si  $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = 0$  alors la commande - appui  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  est optimale pour le problème (P) .

Si  $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) < \varepsilon$  alors la commande - appui  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  est  $\varepsilon$ -optimale pour le problème (P) .

Si non on passe à la procédure finale .

## 2.9 Procédure finale

Soit  $\{\tau_j, j = \overline{1, m}\}$  le support , obtenu dans les deux précédentes procédure . En utilisant ce dernier , calculons la pseudo-commande  $w(t)$   $t \in T$  , définie de la manière suivante :

$$w(t) = \begin{cases} f^* & si \quad E(t) < 0 \\ f_* & si \quad E(t) > 0 \\ \in [f_*, f^*] & si \quad E(t) = 0, \quad t \in T \end{cases} \quad (2.23)$$

et sa quasi trajectoire correspondante  $\chi = (\chi(t), \quad t \in T)$  tel que

$$\dot{\chi} = A\chi(t) + bw, \quad \chi(0) = x_0 \quad (2.24)$$

où  $E(t)$  est calculé avec  $\tau_B$  .

Si  $H\chi(t^*) = g$  alors la quasi-commande  $w(t)$ ,  $t \in T$  est optimale .

Si  $H\chi(t^*) \neq g$  , construisons  $\alpha$  :

$$\alpha(\tau_B) = \varphi^{-1}(\tau_B)(g - H\chi(t^*)), \quad \alpha \in \mathbb{R}^m \quad (2.25)$$

on passe à la procédure finale si  $\|\alpha(\tau_B)\| \leq \mu$  .

On désigne par  $\tau_B = \{t_j \in T, \quad j = \overline{1, m}, E(t) = \psi(t)b = 0\}$  et supposons que  $\dot{E}(t_j) \neq 0$ ,  $t_j \in T_B$  où  $\psi(t)$ ,  $t \in T$  est la solution du système conjugué (2.8) .

La procédure finale consiste à déterminer l'appui  $\tau_B^0 = \{\tau_j^0, \quad j = \overline{1, m}\}$  de tel sorte à avoir  $g = H\chi(t^*)$  :

$$\begin{aligned} H\chi(t^*) - g &= H[F(t^*)x_0 + \int_0^{t^*} F(t^*)F^{-1}(t)bw(t)dt - g] \\ &= \int_0^{t^*} \varphi(t)w(t)dt - g + HF(t^*)x_0 \\ &= \int_{T_B} \varphi(t)w(t)dt + \int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt - g + HF(t^*)x_0 \end{aligned}$$

En identifiant la partie  $\int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt - g + HF(t^*)x_0$  à zéro , on obtient

$$H\chi(t_1) - g = \int_{T_H} \varphi(t)w(t)dt$$

subdivisons l'ensemble  $T_B$  en sous ensemble  $T_B = T_B^- \cup T_B^+$  :

$$T_B^+ = \{t_j \in T, \quad \dot{E}(t_j) > 0\}, \quad T_B^- = \{t_j \in T, \quad \dot{E}(t_j) < 0\}$$



Posons  $T_B = \{[t_j - \lambda], [t_j + \lambda]\}$ ,  $j = \overline{1, m}$  et  $\tau_j = |t_j - \lambda|$  on aura ainsi :

$$H\chi(t^*) - g = \begin{cases} \sum_{j=1}^m (f^* - f_*) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi(t) dt & \text{si } \dot{E}(t_j) < 0 \\ \sum_{j=1}^m -(f^* - f_*) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi(t) dt & \text{si } \dot{E}(t_j) > 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

$$\Rightarrow H\chi(t^*) - g = (f^* - f_*) \sum_{j=1}^m \text{sign} \dot{E}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi(t) dt \quad (2.27)$$

on résout ce système par la méthode de Newton en prenant comme approximation initiales :

$$\tau_B^{(0)} = \{\tau_j^{(0)}, j = \overline{1, m}\}$$

Supposons connu la  $K^{ieme}$  approximation :  $\tau_B^{(k)} = \{\tau_j^{(k)}, j = \overline{1, m}\}$  alors  $(K+1)^{ieme}$  approximation  $\tau_B^{(k+1)}$  sera :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{f^* - f_*} \{\text{sign} \dot{E}(t_j), \alpha_j(\tau_B^{(k)}), j = \overline{1, m}\} \quad (2.28)$$

où  $\alpha_j(\tau_B^{(k)})$  est calculé par la relation (2.25) .

Soit  $\tau_B^{(0)}$  la solution du système(2.26) , alors la commande  $w^0(t)$  , correspondante à  $\tau_B^{(0)}$  est optimale .

## 2.10 Algorithme de la méthode

1. Test de comandabilité du système

\* Calculer le rg  $[B, AB, A^2B \dots A^{n-1}B]$  alors

si rg  $[B, AB, A^2B \dots A^{n-1}B] = n$  Alors le système est commandable .  
aller à 2 .

si non arrêter le processus de résolution donc le problème (P) n'admet pas du solution .

2. Soit  $\{u, \tau_B\}$  un support-contrôle de départ admissible du problème (P)

\* Déterminer sa trajectoire admissible correspondante  $x(t)$ ,  $t \in T$ .

\* Calculer  $\varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b$

\* Calculer  $c(t) = c'F(t^*)F^{-1}(t)b$

\* Déterminer la co-commande  $E(t) = y'\varphi(t) - c(t)$ ,  $t \in T$  .

\* Calculer la valeur de la fonctionnelle  $J(u) = c'x(t^*)$ .

3. Test d'optimalité du support- contrôle de départ

\* Calculer la valeur de suboptimalité  $\beta(u, \tau_B) = \beta$  où

$$\beta = \int_{T^+} E(t)(u(t) - f_*)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - f^*)dt$$

si  $\beta = 0$  alors le support-contrôle  $\{u, \tau_B\}$  est optimal .

si  $\beta \leq 0$  alors le support-contrôle  $\{u, \tau_B\}$  est  $\varepsilon$ -optimal .

si  $\beta > 0$  alors aller en 4 .

#### 4.Changement de commande en $\bar{u}$

\* Déterminer la direction  $l(t)$ ,  $t \in T$  avec

$$l(t) = \begin{cases} f^* - u(t) & si & t \in T_H^- = T_H \cap T^- \\ f_* - u(t) & si & t \in T_H^+ = T_H \cap T^+ \end{cases}$$

et

$$l(T_B) = -\varphi^{-1}(T_B) \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt.$$

\* Déterminer le pas maximal  $\theta = \min(1, \theta(t_0))$  avec  $\theta(t_0) = \min \theta(t)$ ,  $t \in T$  où

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{(f^* - u(t))}{l(t)} & si & l(t) > 0 \\ \frac{(f_* - u(t))}{l(t)} & si & l(t) < 0 \\ \infty & si & l(t) = 0 \quad t \in T_B \end{cases}$$

\* Calculer la nouvelle commande  $\bar{u}(t)$  où  $\bar{u}(t) = u(t) + \theta l(t)$ ,  $t \in T$

#### 5.Test d'optimalité du nouveau support-contrôle $\{\bar{u}, \tau_B\}$ :

\* Calculer la nouvelle valeur de suboptimalité  $\bar{\beta} = \beta(\bar{u}, \tau_B) = (1 - \theta^0)\beta$  .

si  $\bar{\beta} = 0$  alors le support-contrôle  $\{\bar{u}, \tau_B\}$  est optimal .

si  $\bar{\beta} \leq \varepsilon$  alors le support-contrôle  $\{\bar{u}, \tau_B\}$  est  $\varepsilon$ -optimal .

si  $\bar{\beta} > \varepsilon$  aller en 6 .

#### 6.Changement de support $\tau_B$ en $\bar{\tau}_B$

\* Déterminer la direction  $z(t)$ ,  $t \in T$  avec

$$z(t) = \begin{cases} 0 & si & t \in T_B \setminus t_0 \\ 1 & si & \bar{u}(t_0) = f_* \\ -1 & si & \bar{u}(t_0) = f^* \end{cases}$$

et

$$z(t) = z_B \varphi_B^{-1} \varphi(t), \quad t \in T_H$$

\* Déterminer le pas maximal  $\sigma^0 = \min \sigma(t)$ ,  $t \in T$  où

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{-E(t)}{z(t)} & si & E(t)z(t) < 0 \quad t \in T_H \\ 0 & si & E(t) = 0, \text{ et } u \neq f_*, z(t) > 0 \text{ ou} \\ & & E(t) = 0, \text{ et } u \neq f^*, z(t) < 0 \\ \infty & si & non. \end{cases}$$

\*Calculer la nouvelle co-commande  $\bar{E}(t) = E(t) + \sigma^0 z(t)$ ,  $t \in T$

\*Déterminer  $t_1 \in T \setminus T_B$  tel que  $\bar{\Delta}(t) = 0, z(t^*) \neq 0$

\*Construire le nouveau appui  $\bar{T}_B$  avec  $\bar{T}_B = T_B \setminus \{t_0\} \cup \{t_1\}$

7. Test d'optimalité du nouveau support-contrôle  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$

\*Calculer la valeur de suboptimalité  $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B)$

si  $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) = 0$  alors la commande -appui  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  est optimale pour le problème (P) .

si  $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) < \varepsilon$  alors la commande -appui  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  est  $\varepsilon$ - optimale pour le problème (P) .

si  $\beta(\bar{u}, \bar{\tau}_B) > \varepsilon$  alors aller en 2 avec la nouvelle commande -appui  $\{\bar{u}, \bar{\tau}_B\}$  où aller en 8 .

8. Procédure finale :

\*Construire la quasi-commande  $w(t)$ ,  $t \in T$

$$w(t) = \begin{cases} f^* & si & E(t) < 0 \\ f_* & si & E(t) > 0 \\ \in [f_*, f^*] & si & E(t) = 0 \end{cases}$$

et sa quasi trajectoire  $\chi(t)$ ,  $t \in T$

$$\dot{\chi} = A\chi(t) + bw, \quad \chi(0) = x_0$$

si  $Hx(t^*) = g$  alors  $w(t)$  est optimale

si non calculer le vecteur

$$\alpha(T_B) = \varphi^{-1}(T_B)(g - H\chi(t^*))$$

\*résoudre le système suivant

$$(f^* - f_*) \sum_{j=1}^m \text{sign} \dot{E}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j} \varphi(t) dt + g = 0$$

\*Déterminer l'appui  $\tau_B^0$  à partir de la relation suivante :

$$\tau_B^{(k+1)} = \tau_B^{(k)} + \frac{1}{f^* - f_*} \{ \text{sign} \dot{E}(t_j), \alpha_j(\tau_B^{(k)}), j = \overline{1, m} \}$$

On utilise comme approximation initiale  $\tau_B^{(0)} = \tau_B$

Arrêter le processus de résolution avec  $\{w^0(t) = w(t), t \in T, \tau_B^0\}$  une commande- appui optimale du problème (P).

## 2.11 Application numérique

$$(p) = \begin{cases} J(u) = c'x(2) \longrightarrow \max \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = u \\ Hx(2) = g \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in T = [0,2], x(0) = 0 \end{cases}$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad c' = (0, 1) \quad \text{et} \quad H = (2, 1) \quad \text{et} \quad g = 4$$

Le système est commandable car  $rg(b, Ab) = 2$  La solution du système dynamique (p) à condition initial nulle est donnée par :

$$x(t) = F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)Bu(\tau) d\tau, \quad t \in T$$

avec F la solution du système :

$$\begin{cases} \dot{F} = AF \\ F(0) = I_n \end{cases}$$

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(2) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

calculons :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= HF(2)F^{-1}(t)b \\ &= -2t + 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C(t) &= c'F(2)F^{-1}(t)b \\ &= 1 \end{aligned}$$

Soit la commande constante par morceaux suivante :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{sur } [0, 1] \\ -1 & \text{sur } [1, 2] \end{cases}$$

Vérifions que la commande  $u(t)$  est admissible :

— Sur  $[0, 1[$

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t)x_0 + F(t) \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow x(1) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— Sur  $[1, 2[$

$$\begin{aligned} x(t) &= F(t)x(1) - \int_1^t F(t)F^{-1}(\tau)bd\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} + t \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t + \frac{1}{2} \\ t - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-t^2}{2} + 2t \\ 2 - t \end{pmatrix} \Rightarrow x(2) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} Hx(2) &= \begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \\ J(u) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

### la méthode de résolution

On prend comme support généralisé  $T_B = \{[\frac{1}{2}, 1]\}$  a qui correspond le moment d'appui :

$$\tau_B = \{t_j = \frac{1}{2}\} \quad d'où \quad \varphi_B = \varphi(\frac{1}{2}) = 4 \Rightarrow \varphi_B^{-1} = \frac{1}{4}$$

$$y' = c_B \varphi_B^{-1} = \frac{1}{4} \quad donc \quad E(t) = y' \varphi(t) - c(t) = \frac{1}{4}(1 - 2t)$$

$$\begin{cases} E(t) = 0 & si \quad t = \frac{1}{2} \\ E(t) > 0 & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \\ E(t) < 0 & si \quad t \in [1, 2] \end{cases}$$

calculons la valeur de suboptimalité correspondante a ce plan d'appui :

$$\begin{aligned} \beta(u, \tau_B) &= \int_{T^+} E(t)(u(t) - d_1)dt + \int_{T^-} E(t)(u(t) - d_2)dt \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\frac{1}{2}} 2(1 - 2t)dt + \frac{1}{4} \int_1^2 -2(1 - 2t)dt \\ &= \frac{9}{8} > \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \{u, \tau_B\}$  n'est pas optimal, donc on passe à changement de commande :

## Changement de commande

Soit  $\bar{u}(t) = u(t) + \theta^0 l(t)$   
 Déterminons la direction  $l(t)$

$$l(t) = \begin{cases} d_2 - u(t) & si \quad E(t) < 0 \\ d_1 - u(t) & si \quad E(t) > 0, t \in T_H \end{cases}$$

$$\Rightarrow l(t) = \begin{cases} 2 & si \quad t \in [1, 2] \\ -2 & si \quad t \in [0, \frac{1}{2}] \end{cases}$$

$$\begin{aligned} l(T_B) &= -\varphi_B^{-1} \int_{T_H} \varphi(t) l(t) dt \\ &= -\frac{1}{4} \left[ \int_0^{\frac{1}{2}} -2(5-2t) dt + \int_1^2 2(5-2t) dt \right] \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Déterminons le pas maximal  $\theta^0$  :

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{d_2 - u(t)}{l(t)} & si \quad l(t) > 0 \\ \frac{d_1 - u(t)}{l(t)} & si \quad l(t) < 0 \\ \infty & si \quad l(t) = 0, \quad t \in T_B \end{cases}$$

comme  $l(T_B) > 0$  donc  $\theta(t) = 0$  on a :

$$\theta^0 = \min(1, \theta(t)) \Rightarrow \theta^0 = 0$$

d'où :

$$\bar{u}(t) = u(t) \text{ et } \beta(\bar{u}, \tau_B) = \beta(u, \tau_B) \Rightarrow \{\bar{u}, \tau_B\} \Rightarrow \{\bar{u}, \tau_B\} \text{ n'est pas optimal .}$$

alors on passe au changement de support .

## Changement du support

Soit  $\bar{E}(t) = E(t) + \sigma^0 z(t)$ ,  $t \in T$   
 Déterminons la direction  $z(t)$  :

$$z(t) = \begin{cases} 0 & si \quad t \neq t^0 \\ 1 & si \quad \bar{u}(\frac{1}{2}) = d_1 \\ -1 & si \quad \bar{u}(\frac{1}{2}) = d_2, \quad t \in T_B \end{cases}$$

$$\Rightarrow z(t) = -1$$

$$\begin{aligned} z(t_H) &= z(t_B)\varphi_B^{-1}\varphi(t) \\ &= -\frac{1}{4}(5-2t) \\ &= \frac{1}{4}(2t-5) \end{aligned}$$

Déterminons le pas maximal  $\sigma^0 = \min \sigma(t)$

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{-E(t)}{z(t)} & \text{si } E(t)z(t) < 0 \\ 0 & \text{si } E(t) = 0, \text{ et } u \neq d_1, z(t) > 0 \text{ ou} \\ & E(t) = 0, \text{ et } u \neq d_2, z(t) < 0 \\ \infty & \text{si } \text{non} \end{cases}$$

on a :

$$\Delta(t)z(t) = \frac{1}{16}(1-2t)(2t-5) < 0 \text{ si } t \in [0, \frac{1}{2}[ \quad \text{donc} \quad \sigma(t) = \frac{2t-1}{2t-5}$$

si on pose  $f(t) = \frac{2t-1}{2t-5}$  cherchons le min de  $f(t)$  sur  $[0, \frac{1}{2}[$ .

on a  $f(t)$  est décroissante donc le min obtient au point  $t = \frac{1}{2} \Rightarrow \min f(t) = 0$ . donc on passe à la procédure finale .

## Procédure finale

soit :

$$w(t) = \begin{cases} d_2 & \text{si } E(t) < 0 \\ d_1 & \text{si } E(t) > 0 \\ \in [d_1, d_2] & \text{si } E(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow w(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [1, 2] \\ -1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \in [-1, 1] & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

et sa quasi trajectoire  $\chi(t)$  vérifie :

$$\dot{\chi}(t) = A\chi + bw, \quad \chi(0) = x_0$$

— Sur  $[0, \frac{1}{2}[$

$$\begin{aligned} \chi(t) &= f(t)[\chi_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bw(\tau)d\tau] \\ &= -\int_0^t F(t)F^{-1}(\tau)bd\tau \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-t^2}{2} \\ -t \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} \frac{-1}{8} \\ \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

— Sur  $[\frac{1}{2}, 2]$

$$\begin{aligned}\chi(t) &= f(t)[\chi(\frac{1}{2}) + \int_0^t F(t)F^{-1}(\tau)bd\tau] \\ &= \begin{pmatrix} \frac{t^2}{2} - t \\ t - 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \chi(2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

On a  $H\chi(2) = 1$  donc  $H\chi(2) \neq g$   
la valeur de :

$$\begin{aligned}\alpha(T_B) &= \varphi^{-1}(T_B)(g - H\chi(2)) \\ &= \frac{3}{4}\end{aligned}$$

Déterminons  $\tau_B^0 = \{\tau_j^0, j = \overline{1, m}\}$  a partir de résolution du système suivant :

$$\begin{aligned}g - H\chi(t_1) &= (d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{sign} \dot{E}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j^0} \varphi(t) dt \\ (d_2 - d_1) \sum_{j=1}^m \text{sign} \dot{E}(t_j) \int_{t_j}^{\tau_j^0} \varphi(t) dt + g - H\chi(2) &= 0 \\ \Rightarrow -2 \int_{\frac{1}{2}}^{\tau^0} (5 - 2t) dt + 3 &= 0 \\ \Rightarrow 2\tau^0 - 10\tau^0 + \frac{15}{2} &= 0 \Rightarrow \tau^0 = 0,9\end{aligned}$$

donc

$$w^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in [1, 2] \\ -1 & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \in [-1, 1] & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

qui est calculée par le support  $\tau_B^0 = 0,9$  et le support généralisé  $T_B = ]\frac{1}{2}, 0,9]$  est une commande appui optimale pour le problème original avec

$$J(w) = c' \chi(2) = 1 > J(\bar{u})$$



## Chapitre 3

# Nouvelle approche de résolution d'un problème de contrôle optimal

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on résout le problème de contrôle optimal par une autre approche qui est un couplage de la méthode de discrétisation et de la procédure finale. La solution du problème discret permet de trouver un support qu'on utilisera dans la résolution du problème initial.

### 3.2 Position du problème

Dans l'intervalle de temps  $T = [0, t^*]$ , considérons un problème terminal de contrôle optimal :

$$J(u) = c' x(t^*) \rightarrow \max_u \quad (3.1)$$

$$\dot{x} = Ax + bu, x(0) = x_0 \quad (3.2)$$

$$Hx(t^*) = g \quad (3.3)$$

$$f_* \leq u \leq f^*, \quad t \in T = [0, t^*]. \quad (3.4)$$

où  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n, t \in T$ , est l'état du système (3.1) à l'instant  $t$  ;  
 $u(\cdot) = (u(t), t \in T), T = [0, t^*]$ , la fonction continue par morceaux ;  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $b, c \in \mathbb{R}^n$ .  $H \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,  $\text{rang} H = m \leq n$ ,  $g \in \mathbb{R}^m$ ,  $f_*, f^*$  sont des scalaires,  $I = \{1, \dots, m\}$ ,  $J = \{1, \dots, n\}$ , sont des ensembles d'indices,  $c'$  est le transposé de  $c$ .

En utilisant la formule de Cauchy, On obtient la solution du système (3.2) :

$$x(t) = F(t)(x_0 + \int_0^t F^{-1}(\tau)bu(\tau)d\tau), t \in T \quad (3.5)$$

ou  $F(t) = e^{At}$ ,  $t \in T = [0, t^*]$  est la solution (résolvante) du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t) \\ F(0) = Id \end{cases}$$

En utilisant la formule (3.5), le problème (3.1) – (3.4) devient un problème de variable  $u(t)$ ,  $t \in T$  :

$$J(u) = \tilde{c}' x_0 + \int_0^{t^*} c(t)u(t)dt \rightarrow \max_u \quad (3.6)$$

$$D(I, J)x_0 + \int_0^{t^*} \varphi(t)u(t)dt = g. \quad (3.7)$$

$$f_* \leq u \leq f^*, t \in T. \quad (3.8)$$

où  $\tilde{c}' = c' F(t^*)$ ,  $c(t) = c' F(t^*)F^{-1}(t)b$ ,  $D(I, J) = HF(t^*)$ ,  $\varphi(t) = HF(t^*)F^{-1}(t)b$ .

### 3.3 Définitions essentielles

#### Définition 1.3.1

La commande  $u(t)$  est admissible si elle satisfait les contraintes (3.2)-(3.4).

#### Définition 1.3.2

Une commande admissible  $u^0(.)$  est optimale si elle réalise le maximum de la fonctionnelle :

$$J(u^0) = \max_u J(u)$$

#### Définition 1.3.3

Pour  $\varepsilon \geq 0$ , la commande  $u^\varepsilon(.)$  est dite  $\varepsilon$  – optimale (solution approchée) si :

$$J(u^0) - J(u^\varepsilon) \leq \varepsilon.$$

### 3.4 Problème discret du problème initial

Dans l'intervalle  $T$ , choisissons un sous-ensemble  $T_h = \{0, h, \dots, t^* - h\}$  formé de valeurs discrètes au temps, où le pas  $h = t^*/N$ ,  $N$  est un entier. Faisons une discrétisation de la fonction  $u(t)$ ,  $t \in T$ .

$$u(t) \equiv u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h), \quad \tau \in T_h$$

En utilisant cette discrétisation, le problème (3.6)-(3.8) devient :

$$\tilde{c}' x_0 + \sum_{t \in T_h} q(t)u(t) \rightarrow \max_u \quad (3.9)$$

$$D(I, J)x_0 + \sum_{t \in T_h} d(t)u(t) = g \quad (3.10)$$

$$f_* \leq u(t) \leq f^*, t \in T \quad (3.11)$$

$d(t)$  est définie par l'expression suivante :

$$d(t) = \int_t^{t+h} \varphi(v)dv = \int_t^{t+h} \psi'(v)b(v)dv$$

et  $q(t)$  est égale à :

$$q(t) = \int_t^{t+h} c(v)dv = \int_t^{t+h} \varrho(v)dv, \quad t \in T_h$$

Ici  $\psi(t)$  ,  $t \in T$  est la solution du système adjoint (conjugué) :

$$\dot{\psi} = -A' \psi, \quad (3.12)$$

avec la condition initiale :

$$\psi(t^*) = c$$

et  $\varrho(t)$  ,  $t \in T$  est une matrice  $m \times n$  , solution de l'équation suivante :

$$\dot{\varrho} = -\varrho A \quad (3.13)$$

avec la condition initiale

$$\varrho(t^*) = H.$$

Par suite on résout le problème linéaire (3.9)-(3.11) par la méthode adaptée. Choisissons un sous-ensemble arbitraire  $T_B \subset T_h$  de  $m$  éléments et formons la matrice

$$P_B = (d(t), t \in T_B) \quad (3.14)$$

L'ensemble  $T_B$  est dit support du problème (3.1) - (3.4) si  $\det P_B \neq 0$ . La paire  $\{u, T_B\}$  formée d'une commande admissible  $u(\cdot)$  et du support  $T_B$  est dite support contrôle. Le support contrôle  $\{u, T_B\}$  est dit non dégénérée si  $f_* < u(t) < f^*$ ,  $t \in T_B$ .

Considérons une autre commande admissible  $\bar{u}(t) = u(t) + \Delta u(t)$ ,  $t \in T$ , et calculons l'accroissement de la fonctionnelle :

$$\Delta J(u) = J(\bar{u}) - J(u) = \sum_{t \in T_h} q(t) \Delta u(t)$$

De l'admissibilité de  $u$  et  $\bar{u}$  on a :

$$\sum_{t \in T_h} d(t) \Delta u(t) = 0$$

et par conséquent l'accroissement de la fonctionnelle devient :

$$\Delta J(u) = \sum_{t \in T_h} (q(t) - y' d(t)) \Delta u(t),$$

où  $y \in \mathbb{R}^m$  est la fonction des multiplicateurs de Lagrange appelée vecteur des potentiels, calculé comme solution de l'équation :  $y' = q_B' P_B^{-1}$ ,  $q_B = (q(t), t \in T_B)$ . Introduisons le  $n$  - vecteur des estimations  $E(t) = y' d(t) - q(t)$ ,  $t \in T_h$ . En utilisant ce vecteur, l'accroissement de la fonctionnelle prend la forme suivante :

$$\Delta J(u) = - \sum_{t \in T_h} E(t) \Delta u(t), \quad (3.15)$$

Le support contrôle  $\{u, T_B\}$  est non dégénérée pour le dual si  $E(t) \neq 0$ ,  $t \in T_H$ , ou  $T_H = T_h / T_B$ .

### 3.5 La valeur de suboptimalité

Comme  $u$  et  $\bar{u}$  sont admissibles, on a alors :

$$f_* - u(t) \leq \Delta u(t) \leq f^* - u(t), t \in T, \quad (3.16)$$

Le maximum de la fonctionnelle (3.15) sous les contraintes (3.16) est atteint pour :

$$\begin{cases} \Delta u(t) = f_* - u(t) & \text{si } E(t) > 0 \\ \Delta u(t) = f^* - u(t) & \text{si } E(t) < 0 \\ f_* \leq \Delta u(t) \leq f^* & \text{si } E(t) = 0, t \in T \end{cases}$$

et est égal à :

$$\beta = \beta(u, T_B) = \sum_{t \in T_h^+} E(t)(u(t) - f_*) + \sum_{t \in T_h^-} E(t)(u(t) - f^*),$$

où :

$$T_h^+ = \{t \in T_H, E(t) > 0\}, \quad T_h^- = \{t \in T_H, E(t) < 0\}.$$

Le nombre  $\beta(u, T_B)$  est appelé valeur de suboptimalité du support contrôle  $\{u, T_B\}$ . On en déduit que l'inégalité,

$$J(\bar{u}) - J(u) \leq \beta(u, T_B)$$

est toujours vérifiée, et pour  $\bar{u} = u^0$ , on a :

$$J(u^0) - J(u) \leq \beta(u, T_B)$$

### 3.6 Critère d'optimalité et d' $\varepsilon$ - optimalité

#### téorème [19]

Pour l'optimalité du support-contrôle  $\{u, T_B\}$ , les relations suivantes :

$$\begin{cases} u(t) = f_* & \text{si } E(t) > 0 \\ u(t) = f^* & \text{si } E(t) < 0 \\ f_* \leq u(t) \leq f^* & \text{si } E(t) = 0, \quad t \in T_H \end{cases}$$

sont suffisantes, et dans le cas de la non dégénérescence, elles sont nécessaires.

#### téorème

Pour  $\varepsilon \geq 0$  donnée, la commande admissible  $u$  est  $\varepsilon$  - optimale si et seulement si il existe un tel support  $T_B$  tel que  $\beta(u, T_B) \leq \varepsilon$ .

### 3.7 L'algorithme numérique pour la réalisation du problème discret

Soit  $\varepsilon > 0$  donné . Supposons que le support contrôle  $\{u, T_B\}$  de départ ne vérifie pas l'optimalité et  $\varepsilon$ -optimalité .Pour cela on passe au changement du support contrôle :  $\{u, T_B\} \rightarrow \{\bar{u}, \bar{T}_B\}$  pour lequel  $\beta(\bar{u}, \bar{T}_B) \leq \beta(u, T_B)$ .

Cette itération est constitué de deux procédures :

1. Changement de commande  $u \rightarrow \bar{u}$  .
2. Changement de support  $T_B \rightarrow \bar{T}_B$  .

#### 3.7.1 Changement de commande

Soit  $\{u, T_B\}$  le support contrôle de départ et soit  $\bar{u}$  la nouvelle commande :

$$\bar{u}(t) = u(t) + \theta^0 l(t), t \in T_h \quad (3.17)$$

où  $l = (l(t), t \in T_H)$  est une direction admissible de changement de commande  $u$  ,  $\theta^0$  est le pas maximum le long de cette direction .

#### Construction de la direction admissible

Sur les ensembles hors base on pose  $\theta = 1$  et la direction sera construite de telle sorte que la nouvelle commande vérifie le critères d' optimalité.

$$l(t) = \begin{cases} f_* - u(t) & si \quad E(t) > 0; \\ f^* - u(t) & si \quad E(t) < 0, \quad t \in T_H; \\ 0, & si \quad E(t) = 0. \end{cases}$$

les valeurs de direction correspondantes aux ensembles du support seront calculées á partir de l'admissibilité de  $u$  et  $\bar{u}$  :

$$(l(t), t \in T_B) = P_B^{-1}.P_H.(l(T_H)).$$

#### Construction du pas maximum

Le pas sera calculé de telle sorte que  $\bar{u}$  vérifie les contraintes directes sur les ensembles de base :

$$f_* \leq \bar{u} \leq f^*, \quad t \in T_B.$$

c'est-á- dire

$$f_* \leq u(t) + \theta(t^0)l(t) \leq f^*, \quad t \in T_B.$$

où  $\theta(t^0) = \min_{t \in T_B} \theta(t) :$

$$\theta(t) = \begin{cases} \frac{f^* - u(t)}{l(t)} & si \quad l(t) > 0 \\ \frac{f_* - u(t)}{l(t)} & si \quad l(t) < 0 \\ +\infty & si \quad l(t) = 0, \end{cases} \quad t \in T_B.$$

$\theta^0 = \min\{1; \theta(t_0)\}$ . Calculons la valeur de suboptimalité du nouveau support contrôle  $\{\bar{u}, T_B\}$ , avec  $\bar{u}$  calculé en utilisant la relation (3.17) :

$$\beta(\bar{u}, T_B) = (1 - \theta^0)\beta(u, T_B).$$

Par conséquent

1. Si  $\theta^0 = 1$ , alors  $\bar{u}$  est une commande optimale.
2. Si  $\beta(\bar{u}, T_B) \leq \varepsilon$ , alors  $\bar{u}$  est une commande  $\varepsilon$ -optimale.
3. Si  $\beta(\bar{u}, T_B) > \varepsilon$ , alors on passe au changement du support.

### 3.7.2 Changement de support

De la procédure issue du changement de commande, nous avons  $\theta^0 = \theta(t^0), t^0 \in T_B$ ,  $\beta(\bar{u}, T_B) > \varepsilon$ . Alors le moment  $t^0$  doit sortir de la base et être remplacé par un autre moment qui va permettre de diminuer la mesure de la non-optimalité de support  $T_B$ ; cela se fait par le changement support,  $T_B \rightarrow \bar{T}_B$ .

Construisons la pseudo-commande  $(\tilde{u}(t), t \in T)$  comme suit :

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} f^* & si \quad E(t) > 0 \\ f_* & si \quad E(t) < 0 \\ \in [f_*, f^*] & si \quad E(t) = 0, \end{cases} \quad t \in T_H.$$

La première étape consiste à déterminer les variations du vecteur des potentiels  $\Delta y$ , par la résolution d'un système d'équation linéaire :

$$-d(t)\Delta y = \delta(t), \quad t \in T_B.$$

Où  $\delta(t) = \text{sign } \bar{u}(t^0)$  et  $\delta(t) = 0, t \in T_B/t^0$ . Notons que  $\delta(t), t \in T_h$  est la variation de la co-commande engendrée par les variations  $\Delta y$ ; elle définie par :

$$\delta(t) = -\Delta y' d(t), t \in T_H.$$

Le nouveau vecteur des estimations est donné par :

$$\bar{E}(t, \sigma) = E(t) + \sigma\delta(t), t \in T_h, \sigma \geq 0.$$

Ainsi, le problème dual de problème (3.6) - (3.8) est donné comme suit :

$$\begin{cases} L(\varsigma, v, w) = g\varsigma - \sum_{t \in T_h} v(t)f_*dt + \sum_{t \in T_h} w(t)f^*dt \rightarrow \min_{v, w} \\ \varsigma'd(t) - v(t) + w(t) = c(t), \\ v(t) \geq 0, w(t) \geq 0, \quad t \in T. \end{cases}$$

L'ensemble  $\varpi(\sigma) = (y(\sigma), v(t, \sigma), w(t, \sigma), t \in T_h)$  est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} y(\sigma) = y + \sigma \Delta y, & & \\ v(t, \sigma) = E(t, \sigma), w(t, \sigma) = 0 & \text{si} & E(t, \sigma) \geq 0 \\ v(t, \sigma) = 0, w(t, \sigma) = -E(t, \sigma) & \text{si} & E(t, \sigma) \leq 0, t \in T_h. \\ v(t^0, \sigma) = E(t^0, \sigma) = \sigma, w(t^0, \sigma) = 0 & \text{pour} & \sigma(t^0) = 1, (i.e l(t^0) < 0), \\ v(t^0, \sigma) = 0, w(t^0, \sigma) = -E(t^0, \sigma) = -\sigma & \text{pour} & \sigma(t^0) = -1 (i.e l(t^0) > 0) \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} L(\varpi(\sigma)) &= b' y(\sigma) - \sum_{t \in T_h} v(t, \sigma) f_* + \sum_{t \in T_h} w(t, \sigma) f^* \\ &= b' y(\sigma) - \sigma b' \Delta y - u(T_H) \Delta(T_H, \sigma) - \sigma u(T_H) \delta(T_H) \sigma \bar{u}(t^0) \delta(t^0) \\ &= L(\varpi) + \sigma (b' \Delta y - u(T_H) \delta(T_H) - \bar{u}(t^0) \delta(t^0)) \\ &= L(\varpi) + \sigma (b' \Delta y - u'(T_H) P'_H \Delta y - \bar{u}(t^0) \delta(t_0)) \\ &= L(\varpi) + \sigma ((b' - u'(T_H) P'_H) Q \delta(T_H - \bar{u}(t^0) \delta(t^0))) \\ &= L(\varpi) + \sigma (u'(T_B) \delta(T_H - \bar{u}(t^0) \delta(t^0))) \\ &= L(\varpi) + \sigma |\tilde{u}(t^0) - \bar{u}(t^0)| \end{aligned} \quad (3.18)$$

On pose :

$$\alpha = -|\tilde{u}(t^0) - \bar{u}(t^0)| < 0 \quad (3.19)$$

Selon (3.18), (3.19), la fonction dual  $L(\varpi(\sigma))$  diminue , jusqu' á ce que l'une de composantes de  $\delta(t)$ ,  $t \in T_H$  s' annule , et la valeur du pas maximal est égal á :

$$\sigma^0 = \min(\sigma_t^0)$$

Oú

$$\sigma_t^0 = \sigma(t_1) = \min \sigma(t), \quad t \in T_H.$$

Oú

$$\sigma(t) = \begin{cases} -E(t)/\delta(t), & \text{si} \quad E(t)\delta(t) < 0 \\ +\infty, & \text{si} \quad E(t)\delta(t) \geq 0, t \in T_H. \end{cases}$$

### Construction du nouveau support

Le nouveau support sera construit de la manière suivante :

$$\theta^0 = \theta_t^0, \quad \sigma^0 = \sigma(t_1).$$

Le nouveau support est

$$\bar{T}_B = T_B / \{t^0\} \cup \{t_1\}.$$

La valeur de suboptimalité  $\beta(\bar{u}, \bar{T}_B)$  du nouveau support contrôle est égale á :

$$\beta(\bar{u}, \bar{T}_B) = (1 - \theta^0)\beta(u, T_B) - \alpha\sigma^0.$$

Où

$$\alpha = |\tilde{u}(t^0) - \bar{u}(t^0)|, \quad si \quad \theta^0 = \theta(t_0).$$

- Si  $\beta(\bar{u}, \bar{T}_B) = 0$  alors la commande  $\bar{u}$  est optimale pour le problème (3.9)- (3.11)
- Si  $\beta(\bar{u}, \bar{T}_B) < \varepsilon$  alors la commande  $\bar{u}$  est  $\varepsilon$ -optimale pour le problème (3.9)- (3.11)
- Si  $\beta(\bar{u}, \bar{T}_B) > \varepsilon$  alors on passe á une nouvelle itération avec le support contrôle  $\{\bar{u}, \bar{T}_B\}$  ou á la procédure finale.

### 3.7.3 Procédure finale

En utilisant le support  $\bar{T}_B$ , on construit la quasi-commande  $\hat{u}(t)$ ,  $t \in T$ , en utilisant

$$\hat{u}(t) = \begin{cases} f_*, & si \quad E(t) > 0; \\ f^*, & si \quad E(t) < 0, t \in T_H; \end{cases}$$

Si

$$\int_0^{t^*} \varphi(t)\hat{u}(t)dt = g.$$

alors  $\hat{u}$  est une commande optimale, et si :

$$\int_0^{t^*} \varphi(t)\hat{u}(t)dt \neq g, \tag{3.20}$$

alors notons par  $T^0 = \{t_i, i = \overline{1, s}\}, s = |T_B|$ .

Ici  $t_i, i = \overline{1, s}$  sont les points isolés optimaux de la co-commande  $E(t) = 0$ ,  $t \in T$ ,  $t_0 = 0$ ,  $t_{s+1} = t^*$  Supposons que :

$$\dot{E}(t_i) \neq 0, \quad i = \overline{1, s}.$$

De (3.20), on déduit la construction de la fonction suivante :

$$f(\Theta) = \sum_{i=0}^s \left( \frac{f^* + f_*}{2} - \frac{f^* - f_*}{2} \text{sign} \dot{E}(t_i) \right) \int_{t_i}^{t_{i+1}} \varphi(t)dt - g,$$

$$\Theta^0 = (t_i, \quad i = \overline{1, s}).$$



du système de  $m - quations$  non linéaire

$$f(\Theta) = 0 \quad (3.21)$$

On résout ce système par la méthode de Newton en utilisant l'approximation initiale :

$$\Theta^{(0)} = (\bar{t}_i, \quad i = \overline{1, s}).$$

la  $(k + 1)^{me}$  approximation  $\Theta^{(k+1)}$  , á l'étape  $k + 1 \geq 1$  , est égale :

$$\Theta^{(k+1)} = \Theta^{(k)} + \Delta\Theta^{(k)}, \quad \Delta\Theta^{(k)} = -\frac{\partial f^{-1}(\Theta(k))}{\partial \Theta(k)} \cdot f(\Theta^{(k)}).$$

Où

$$\frac{\partial f(\Theta(k))}{\partial \Theta(k)} = (f_* - f^*) \text{sign} \dot{E}(t_i^{(k)}) \varphi(t_i^{(k)}), \quad i = \overline{1, s}.$$

Comme de  $P_B \neq 0$  on peut montrer facilement que

$$\det \frac{\partial f(\Theta^{(0)})}{\partial \Theta^{(0)}} \neq 0 \quad (3.22)$$

Pour chaque instant  $t_i \in T_B$ , il existe  $\mu > 0$  petit tel que  $\tilde{t}_i \in [t_i - \mu, t_i + \mu]$ ,  $i = \overline{1, s}$  , les matrices  $(\varphi(\tilde{t}_i), i = \overline{1, s})$  et  $\frac{\partial f(\Theta^{(k)})}{\partial \Theta^{(k)}}$  sont non dégénérés. Si les éléments  $t_i^{(k)}$  ,  $i = \overline{1, s}$ ,  $k = 1, 2, \dots$  sont au voisinage de  $\mu$ ,  $i = \overline{1, s}$ , le vecteur  $\Theta^{(k*)}$  est solution de l'équation (1.21) et assure que :

$$\|f\Theta^{(k*)}\| \leq \eta.$$

Pour  $\eta > 0$  donné. Donc, posons  $\Theta^0 = \Theta^{(k*)}$  . La commande suboptimale de problème (3.1)-(3.4) est calculé comme suit :

$$u^0(t) = \frac{f^* + f_*}{2} - \frac{f^* - f_*}{2} \text{sign} \dot{E}(t_i^0), \quad t \in [t_i^0, t_{i+1}^0[, \quad i = \overline{1, s}.$$

Si la méthode de Newton ne converge pas , on fait décroître le paramètre  $h > 0$  et on passe á une autre itération.

## Chapitre 4

# Exemple d'application

### 4.1 Position de Problème :

Considérons le système linéaire autonome au temps final  $t_f$  fixé et aux conditions initiales nulles :

$$\ddot{x}(0) = 0, \ddot{x}(0) = 0, x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0 \quad (4.1)$$

Supposons que le contrôle  $u(t)$ ,  $t \in [0; t_f]$  est bornée :  $|u(t)| \leq 1$ . Le critère est de type Mayer, avec une contrainte terminale donnée.

Soit le vecteur d'état  $x = (x_1, x_2, x_3)$  et en transformant le système (4.1), le problème est donné par :

$$(p) = \begin{cases} \text{Maximiser} & J(u(t_f) = x_2(t_f)) \\ \text{Sous les contraintes :} & \begin{aligned} & \dot{x}_1(t) = x_2(t), x_1(0) = 0 \\ & \dot{x}_2(t) = x_3(t), x_2(0) = 0 \\ & \dot{x}_3(t) = u(t), x_3(0) = 0 \\ & x_1(t_f) = 1 \\ & -1 \leq u(t) \leq 1, t \in [0, t_f] \\ & t_f > 0 : \text{fixe} \end{aligned} \end{cases}$$

Pour ce problème le système dynamique peut être écrit sous la forme :  $\dot{x} = Ax + Bu$  où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad c = (0 \quad 1 \quad 0) \quad , \quad H = (1 \quad 0 \quad 0) \text{ et } g = 1$$

### Étude de la contrôlabilité du système

Le système est linéaire et de plus les deux matrices  $A$  et  $B$  sont indépendantes de la variable de temps  $t$ , cela implique que le système linéaire est autonome. Par conséquent, la contrôlabilité du système est donnée par le rang de la matrice de Kalman qui est de la forme :

$$K = (B; AB; A^2B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le rang d'une matrice est donné par le nombre maximal de vecteurs lignes (ou colonnes) linéairement indépendants.

Les vecteurs lignes (ou colonnes) forment la matrice  $K$  sont linéairement dépendants si et seulement s'ils vérifient la relation suivante :

$$a_1 l_1 + a_2 l_2 + a_3 l_3 = 0_{\mathbb{R}^3} \quad (4.2)$$

où  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont des scalaires, non tous nuls et  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  sont les vecteurs colonnes forment la matrice  $K$ . D'après l'équation (4.2), on obtient le système suivant :

$$\begin{cases} a_1 0 + a_2 0 + a_3 1 = 0 \\ a_1 0 + a_2 1 + a_3 0 = 0 \\ a_1 1 + a_2 0 + a_3 0 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} a_3 = 0 \\ a_2 = 0 \\ a_1 = 0 \end{cases}$$

Les scalaires  $a_1$ ,  $a_2$  et  $a_3$  sont tous nuls, alors les trois vecteurs  $l_1$ ,  $l_2$  et  $l_3$  sont linéairement indépendants. Cela implique que le rang de la matrice  $K$  est égal à trois, i.e.  $\text{rang}(K) = 3$ , donc le système est contrôlable.

Autrement, le déterminant de la matrice  $K$  égal à  $-1$ , i.e.  $\det(K) = -1$ , ce qui implique  $\text{rang}(K) = 3$ . Alors le système est contrôlable.

## La discrétisation

Choisissons le nombre de discrétisation  $N = 4$  et le contrôle initial admissible, non dégénéré  $u_0$  bornée entre  $d_1 = -1$  et  $d_2 = 1$  :  $u_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ ,  $\varepsilon = 10^{-3}$ , et le pas  $h = \frac{t_f - 0}{N} = \frac{3}{4}$ . La solution du système dynamique de  $(P)$  à condition initiale nulle est donné e par :

$$x(t) = \int_0^t F(t)F^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau, \quad t \in T \quad (4.3)$$

où  $F(t)$  est la résolvante, solution du système :

$$\begin{cases} \dot{F}(t) = AF(t) \\ F(0) = I_3 \end{cases}$$

qui est égale à :

$$F(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad F(t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & -t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad F(t_f) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4,5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t \in T$$

En utilisant cette dernière solution, le problème initial  $(P)$  prend la forme suivante :

$$\begin{cases} J(u(t)) = \int_0^{t_f} C(t)u(t)dt \longrightarrow \max_u \\ \int_0^{t_f} \varphi(t)u(t) = g \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in [0, 3] \end{cases} \quad (4.4)$$

où :

$$C(t) = c' F(t_f)F(t)^{-1}B = -t + 3, \quad \text{et} \quad \varphi(t) = HF(t_f)F(t)^{-1}B = \frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2}$$

## Principe de discrétisation :

Posons  $\tau_j + 1 = \tau^j$ , avec  $\tau^j = \tau_j + h$ , ce qui implique :

$$T = [0, \frac{3}{4}[\cup[\frac{3}{4}, \frac{3}{2}] \cup [\frac{3}{2}, \frac{9}{4}[\cup[\frac{9}{4}, 3]$$

Calculons  $C_j$  et  $X_j$  :

$$C_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} C(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau^j} (-t + 3)dt, \quad j = 1; \dots; N.$$

$$X_j = \int_{\tau_j}^{\tau^j} \varphi(t)dt = \int_{\tau_j}^{\tau^j} (\frac{1}{2}t^2 - 3t + \frac{9}{2})dt, \quad j = 1; \dots; N.$$

En utilisant les dernières quantités, le problème (4.4) devient un problème de programmation linéaire suivant :

$$\begin{cases} J(u) = \frac{63}{32}u_1 + \frac{45}{32}u_2 + \frac{27}{32}u_3 + \frac{9}{32}u_4 \\ \frac{333}{128}u_1 + \frac{171}{128}u_2 + \frac{63}{128}u_3 + \frac{9}{128}u_4 \\ -1 \leq u_j \leq 1, \quad j = 1, 4 \end{cases} \quad (4.5)$$

où :  $A = [\frac{333}{128}, \frac{171}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}]$ ,  $c = [\frac{63}{32}, \frac{45}{32}, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}]$ ,  $b = 1$ ,  $d_1 = -1$ ,  $d_2 = 1$ .

Choisissons un ensemble des indices initiaux  $T_B = [2]$  et appliquons la méthode adaptée du *PPL* pour ce problème (4,5).

## 4.2 Application de la méthode adaptée

### Détermination d'un support-plan de départ

Choisissons le plan initial non dégénéré qui vérifie

la condition  $d_1 < x < d_2$ .  $u_0 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$  et le support initial  $T_B = 2$ .

Appliquons l'algorithme de la méthode adaptée décrite dans l'annexe (A).

Calculons la quantité  $Au = -\frac{27}{32} \neq 1$ , alors la solution initiale n'est pas admissible On ajoute des variables d'écarts.

Ce qui implique :

1. L'ensemble des indices du support  $T_B = 2$ .
2. L'ensemble des indices du hors-support  $T_H = [1; 3; 4; 5]$ .
3. La matrice du support est  $A_B = \frac{171}{128}$ .
4. La matrice du hors-support est  $A_H = [\frac{333}{128}, \frac{171}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}]$
5. Le coût du support  $C_B = \frac{45}{32}$
6. Le coût du hors-support  $C_H = [\frac{63}{32}, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}, -1000]$ .
7. Le déterminant de la matrice du support est  $\det(A_B) = \frac{171}{128}$ .
8. L'inverse de matrice du support est  $A_B^{-1} = \frac{171}{128}$ .

Calculons :

1. Le vecteur des potentiels  $y' = \frac{20}{19}$

2. Le vecteur des estimations  $E = [\frac{117}{152}, -\frac{99}{304}, -\frac{63}{304}, \frac{19020}{19}]$ .
3. Le plan  $u = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{59}{32}]$
4. La valeur de suboptimalité est  $\beta(u; T_B) = \frac{561387}{304}$ .

**Test :**

$\beta(u; T_B) > \varepsilon$ , alors on passe au changement de plan. ( $u \rightsquigarrow \bar{u}$ )

**Déterminer le vecteur  $l(t)$  :**

1. Le vecteur de direction  $l(T_H) = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{59}{32}]$ .
2. Le vecteur de direction  $l(T_B) = \frac{607}{342}$

Calculons :

1. Le pas admissible maximal  $\theta^0 : \theta^0 = \min(1, \frac{171}{607}) = \frac{171}{607}$ . Ce qui implique :  $T_0 = 2$ .
2. Le nouveau plan  $\bar{u} = [-\frac{389}{607}, 1, -\frac{47}{607}, \frac{389}{607}, \frac{6431}{4856}]$ .
3. La valeur de suboptimalité pour le nouveau plan  $\beta(\bar{u}, T_B) = \frac{61191183}{46132}$

**Test :**

$\beta(\bar{u}; T_B) > \varepsilon$ , alors on passe au changement du support. ( $T_B \rightsquigarrow \bar{T}_B$ )

Calculons

1. Le vecteur  $\tau : \tau(T_B) = -1$  et  $\tau(T_H) = [-\frac{37}{19}, -\frac{7}{19}, -\frac{1}{19}, -\frac{128}{171}]$ .
2. Le pas dual  $\sigma : \sigma_{t_1} = \max_{t \in T_H} (0.3952, 1337.3437, \infty, \infty)$  Alors :  $t_1 = 1$

Par conséquence :

1. L'ensemble des indices du nouveau support  $\bar{T}_B = 1$
2. L'ensemble des indices du nouveau hors-support  $\bar{T}_H = [2, 3, 4, 5]$
3. La matrice du nouveau support est  $A_{\bar{B}} = \frac{333}{128}$
4. La matrice du nouveau hors-support est  $A_{\bar{H}} = [\frac{171}{128}, \frac{63}{128}, \frac{9}{128}, 1]$
5. Le coût du nouveau support  $C_{\bar{B}} = \frac{63}{32}$
6. Le coût du nouveau hors-support  $C_{\bar{H}} = [\frac{45}{32}, \frac{27}{32}, \frac{9}{32}, -1000]$ .
7. Le déterminant de la matrice du nouveau support est  $\det(A_{\bar{B}}) = \frac{333}{128}$ .
8. L'inverse de matrice du support est  $A_{\bar{B}}^{-1} = \frac{128}{333}$ .
9. Le nouveau vecteur des potentiels  $\bar{y}' = \frac{28}{37}$
10. Le nouveau vecteur des estimations  $\bar{E} = [-\frac{117}{296}, -\frac{279}{592}, -\frac{135}{592}, \frac{37028}{37}]$ .

11. Le nouveau plan  $\tilde{u} = [-\frac{389}{607}, 1, -\frac{47}{607}, \frac{389}{607}, \frac{6431}{4856}]$
12. La valeur de suboptimalité est  $\beta(\bar{u}; \bar{T}_B) = \frac{29779127}{22459}$ .

**Test :**

$\beta(\bar{u}; \bar{T}_B) > \varepsilon$ , alors on passe au changement du plan. ( $\bar{u} \rightsquigarrow \tilde{u}$ )

**Déterminer le vecteur  $l(t)$**

1. Le nouveau vecteur de direction  $l(\bar{T}_H) = [0, \frac{654}{607}, \frac{218}{607}, -\frac{6431}{4856}]$ .
2. Le nouveau vecteur de direction  $l(\bar{T}_B) = \frac{59732}{202131}$

Calculons :

1. Le nouveau pas admissible maximal  $\bar{\theta}^0 : \theta^0 = \min(1, \frac{82917}{14933}) = 1$ . Ce qui implique :  $T_1 = 2$ .
2. Le nouveau plan  $\tilde{u} = [-\frac{115}{333}, 1, 1, 1, 0]$ .
3. La valeur de suboptimalité pour le nouveau plan  $\beta(\tilde{u}, \bar{T}_B) = 0$

**Test**

$\beta(\tilde{u}, \bar{T}_B) = 0$ , alors le support-plan  $\{\tilde{u}, \bar{T}_B\}$  est optimal :

1. Le solution optimale est  $u^0 = [-0.3453, 1, 1, 1]$  et  $T_B^0 = 1$
2. La valeur optimale de la fonction du critère est  $J(u) = 1.8514$ .

**Procédure finale :**

En utilisant  $T_B^0$ , on construit  $\tau_B$ , tel que :  $\tau_B = \{\tau_j, j \in T_B^0\} = \frac{3}{4}$ . Le support  $\tau_B$  permet de calculer  $\phi_B = \frac{81}{32}$ ,  $\phi_B^{-1} = \frac{32}{81}$ ,  $C_B = \frac{9}{4}$ , et de construire  $y' = C_B \phi_B^{-1} = \frac{8}{9}$ , et ainsi  $E(t) = -\psi'(t)B = \frac{4}{9}t^2 - \frac{5}{9}t + 1$  où :

1.  $\phi_B \in \mathbb{R}^{m \times m}$  la matrice dont les colonnes sont définies par  $(\phi_B)_j = \varphi(\tau_j)$ ,  $j = 1, \dots, m$ .
2.  $C_B \in \mathbb{R}^{1 \times m}$  égale à  $(C_B)_j = C(\tau_j)$ .
3.  $\psi(t)$  est la solution du système conjugué :

$$\begin{cases} \dot{\psi} = -A' \psi \\ \psi(t_f) = c - H' y \end{cases}$$

La solution  $\psi(t)$  est donnée par :

$$\psi'(t) = (c' - y' H) F(t_f) (F(t))^{-1}$$

Construisons la quasi-commande  $w(t), t \in T$  :

$$w(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } E(t) > 0 \\ 1 & \text{si } E(t) < 0, \quad t \in [0, 3] \end{cases} \quad (4.6)$$

Calculons  $\chi(t_f)$  la trajectoire correspondante à  $w(t)$  :

$$\chi(3) = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \sum_{j=0}^N F(\tau)^{-1} B u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} -0,7031 \\ 0,5625 \\ 1,5000 \end{pmatrix}$$

$H\chi(3) = -0,7031 \neq 1$ , alors on construit le vecteur  $\lambda(\tau_B)$  :

$$\lambda(\tau_B) = \phi_B^{-1}(g - H\chi(t_f)) = \frac{8}{9}(1 - (-0,7031)) = 0,6728.$$

Par conséquent,  $\|\lambda(\tau_B)\| = 0,6728 > \mu$  alors on change  $\tau_B$  en  $\bar{\tau}_B$  par la méthode duale ( $\mu = 0,2$ , paramètre de la méthode).

### Méthode duale :

soit  $t^\circ \in \tau_B$  tel que  $\lambda(t^\circ) = \max(|\lambda(\tau_B)|) = 0,6728$ , ce qui implique  $t^\circ = \frac{3}{4}$ . Le changement du support  $\tau_B$  à  $\bar{\tau}_B$  consiste à changer le co-contrôle  $E(t) = \frac{4}{9}t^2 - \frac{5}{9}t + 1$  à  $\bar{E}(t) = E(t) + \sigma(t)\delta(t)$ ,  $t \in T$ . Pour cela cherchons la fonction :

$$\sigma(t) = \begin{cases} \frac{-E(t)}{\delta(t)} & \text{si } E(t)\delta(t) < 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (4.7)$$

avec  $\delta(t) = -\text{sign}(\lambda)\phi_B^{-1}\psi(t) = -\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}$ . Construisons l'ensemble :

$$T_g(\sigma) = \{t \in [0, 3], \sigma(t) < \sigma\}$$

Nous avons  $E(t)\delta(t) < 0$  sur l'intervalle  $[0, t_c]$ , ce qui implique

$$\sigma(t) = \frac{-\frac{4}{9}t^2 + \frac{5}{9}t - 1}{-\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}} < \sigma \quad (4.8)$$

La résolution de l'inégalité (4.8) revient à résoudre cette égalité :

$$-\frac{4}{9}(1 - \frac{4}{9}\sigma)t^2 + \frac{1}{3}(5 + \frac{32}{9}\sigma)t - (1 + \frac{16}{9}\sigma)\sigma = 0$$

Les racines de cette dernière équation sont :

$$t_1 = 3 \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{3(16\sigma - 9)}{4(4\sigma - 9)}$$

Par conséquent :

$$T_g(\sigma) = t \in [0, \frac{3(16\sigma - 9)}{4(4\sigma - 9)}]$$

et ainsi :

$$\alpha(\sigma) = -|\lambda(t^\circ)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\sigma)} |\delta(t)| dt$$

$$\alpha(\sigma) = -0,6728 + (1 - (-1)) \int_0^{\frac{3(16\sigma - 9)}{4(4\sigma - 9)}} |-\frac{16}{81}t^2 + \frac{32}{27}t - \frac{16}{9}| dt$$

D'où :

$$\alpha(\sigma) = \frac{2(7472\sigma^3 - 50436\sigma^2 + 113481\sigma - 40824)}{81(4\sigma - 9)^3}$$

Delà :  $\sigma_1 = 0,4403$ ,  $\sigma_2 = 3,1549 + 1,5673i$ ,  $\sigma_3 = 3,1549 - 1,5673i$ .

Nous calculons  $t_*$  à partir de l'équation  $E(t_*) + \sigma\delta(t_*) = 0$  tel que  $\delta(t_*) \neq 0$ , et qui implique :

$$\frac{4}{9}t_*^2 - \frac{5}{3}t_* + 1 + \sigma_1(-\frac{16}{81}t_*^2 + \frac{32}{27}t_* - \frac{16}{9}) = 0 \quad (4.9)$$

La solution de l'équation (4.9) est :

$$t_1 = \frac{3666}{18097} \quad \text{et} \quad t_2 = 3$$

Puisque  $\delta(t_2) = 0$ , alors  $t_* = 0,2026$  Le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\tau_B \setminus t^\circ) \cup t_* = 0,2026$$

Ce nouveau support permet de recalculer  $\phi(\bar{\tau}_B) = 3,9127$ ,  $\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0,2555$ ,  $C(\bar{\tau}_B) = 2,7974$  et ainsi de reconstruire  $y' = C(\bar{\tau}_B)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0,7149$  et  $\bar{E}(t) = -\psi'(B) = 0,3574t^2 - 1,1448t + 0,2172$  Reconstruisons la quasi-commande  $w(t), t \in T$  :

$$w(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \bar{E}(t) > 0 \\ 1 & \text{si } \bar{E}(t) < 0, \quad t \in [0, 3] \end{cases} \quad (4.10)$$

Calculons  $\chi(t_f)$

$$\chi(3) = \int_{\bar{\tau}_j}^{\bar{\tau}^j} \sum_{j=0}^N F(\tau)^{-1} B u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 2,7968 \\ 3,3253 \\ 2,5947 \end{pmatrix}$$

$H\chi(3) = 2,7968 \neq 1$ , alors on construit le vecteur  $\lambda(\bar{\tau}_B)$  :

$$\lambda(\bar{\tau}_B) = \phi(\bar{\tau}_B)^{-1}(g - H\chi(t_f)) = 0,2555(1 - 2,7968) = -0,4592.$$

Par conséquent,  $\|\lambda(\bar{\tau}_B)\| = 0,4592 > \mu$  alors on change  $\bar{\tau}_B$  en  $\bar{\bar{\tau}}_B$  par la méthode duale.

### Méthode duale :

soit  $t^\circ \in \bar{\tau}_B$  tel que  $\lambda(t^\circ) = \max(|\lambda(\bar{\tau}_B)|) = 0,4592$ , ce qui implique  $t^\circ = 0,2026$ . Le changement du support  $\bar{\tau}_B$  à  $\bar{\bar{\tau}}_B$  consiste à changer le co-contrôle  $\bar{E}(t) = 0,3574t^2 - 1,1448t + 0,2172$  à  $\bar{\bar{E}}(t) = \bar{E}(t) + \bar{\sigma}(t)\bar{\delta}(t), t \in T$  Pour cela cherchons la fonction :

$$\bar{\sigma}(t) = \begin{cases} -\frac{\bar{E}(t)}{\bar{\delta}(t)} & \text{si } \bar{E}(t)\bar{\delta}(t) < 0 \\ 0 & \text{si non} \end{cases} \quad (4.11)$$

avec  $\bar{\delta}(t) = -\text{sign}(\lambda)\phi(\tau_B)^{-1}\psi(t) = 0,1277t^2 - 0,7667t + 1,1501$ . Reconstruisons l'ensemble :

$$T_g(\sigma) = \{t \in [0, 3], \sigma(t) < \sigma\}$$

Nous avons  $\bar{E}(t)\bar{\delta}(t) < 0$  sur l'intervalle  $[t_c, t_f]$ , ce qui implique

$$\bar{\sigma}(t) = -\frac{\bar{E}(t)}{\bar{\delta}(t)} = \frac{0,3574t^2 - 1,1448t + 0,2172}{0,1277t^2 - 0,7667t + 1,1501} < s \quad (4.12)$$

Par conséquent :



$$T_g(\sigma) = t \in [0, 2026, \frac{(4, 8901s + 9, 3888)}{0, 61347s + 0, 2193}]$$

et ainsi :

$$\alpha(\sigma) = -|\lambda(t^\circ)| + (d_2 - d_1) \int_{T_g(\sigma)} |\delta(t)| dt$$

$$\alpha(\sigma) = 0, 4592 + (1 - (-1)) \int_{0, 2026}^{\frac{(4, 8901s + 9, 3888)}{0, 61347s + 0, 2193}} |0, 1277t_2 - 0, 7667t + 1, 1501| dt$$

D'où :

$$\alpha(\sigma) = \frac{(6, 0882\sigma^3 - 51, 0937\sigma^2 + 142, 9289\sigma - 43, 5418)10^{48}}{16300543533549461s + 45598946227126272}$$

Delà :  $\sigma_1 = 0, 2764$ ,  $\sigma_2 = -4, 3342 - 2, 6620i$ ,  $\sigma_3 = -4, 3342 + 2, 6620i$ .

Nous calculons  $t_*$  à partir de l'équation  $E(t_*) + \sigma\delta(t_*) = 0$  ce qui implique  $t_* = 0, 4541$

Alors Le nouveau support est :

$$\bar{\tau}_B = (\bar{\tau}_B \setminus t^\circ) \cup t_* = 0, 4541$$

Ce nouveau support permet de recalculer  $\phi(\bar{\tau}_B) = 3, 2406$ ,  $\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0, 3085$ ,  $C(\bar{\tau}_B) = 2, 5458$  et ainsi de reconstruire  $y' = C(\bar{\tau}_B)\phi(\bar{\tau}_B)^{-1} = 0, 7856$  et  $\bar{E}(t) = -\psi'(B) = 0, 3928t^2 - 13568t + 0, 5352$   
Reconstruisons la quasi-commande  $w(t), t \in T$  :

$$w(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } \bar{E}(t) > 0 \\ 1 & \text{si } \bar{E}(t) < 0, \quad t \in [0, 3] \end{cases} \quad (4.13)$$

Calculons  $\chi(t_f)$

$$\chi(3) = \int_{\tau_j}^{\tau_j} \sum_{j=0}^N F(\tau)^{-1} B u(\tau) d\tau = \begin{pmatrix} 1, 0000 \\ 1, 9812 \\ 2, 0916 \end{pmatrix}$$

$H\chi(3) = 1$ , alors  $w(t)$  est le contrôle optimal

1. Le support optimal  $\tau_B = 0, 454178315170256 \approx 0, 4542$
2. La valeur optimale de la fonction du critère est  $J_c(u) = 1, 9812$ .
3. La valeur optimale de la fonction du critère est  $J_d(u) = 1, 8513$ .

## Annexe A

# Résolution d'un PPL à variable bornée par la méthode adaptée

### Position de problème

Considérons le problème classique de la programmation linéaire suivant :

$$\text{Maximiser } J_d(x) = c'x \quad (\text{A.1})$$

$$\text{Sous les contraintes : } Ax = b \quad (\text{A.2})$$

$$d_1 \leq x \leq d_2 \quad (\text{A.3})$$

ou :

- $J(u)$  est le critère de qualité, ou bien le coût,
- $x, c, d_1, d_2$  sont des  $n$  – vecteurs réels,
- $b$  est un  $m$  – vecteur réel,
- $A = A[I; J]$  est une  $m \times n$ -matrice,
- $I = \{1, \dots, m\}$  : l'ensemble des indices des lignes de la matrice  $A$
- $J = \{1, \dots, n\}$  : l'ensemble des indices des colonnes de la matrice  $A$ ,  
avec le  $\text{rang}(A) = m \leq n$ ,
- $c'$  est le transposé du vecteur  $c$

Notons par  $M$  la région réalisable(admissible) :

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, d_1 \leq x \leq d_2\}$$

### A.1 Méthode de résolution

La méthode adaptée a été développée par R.Gabassov et F.M.Kirrillov durant les années 70-80. Cette méthode est une méthode itérative , à chaque itération de l'algorithme le transfert  $\{x, J_B\} \rightsquigarrow \{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  est exécuté d'un support-plan à un autre tel que :

$$\beta(x, J_B) \leq \beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$$

$\beta(x, J_B)$  est appelée valeur de suboptimalité de support cotrôle  $\{x, J_B\}$ .

En d'autre termes une itération de la méthode adaptée est basée sur la décroissance de la valeur du suboptimalité . Cette itération est constituée de deux procédures :

1. La procédure de la transformation  $x \rightsquigarrow \bar{x}$  qui diminue l'écart de non optimalité du plan .
2. La procédure de la transformation  $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$  qui diminue l'écart de non optimalité du support .

### A.1.1 Changement de plan

Soit  $\{x, J_B\}$  un support-plan non dégénéré et  $\varepsilon \geq 0$  donné, tel que :

$$\beta(x, J_B) > \varepsilon$$

Le nouveau plan  $\bar{x}$  sera construit de la manière suivante :

$$\bar{x} = x + \theta l,$$

où  $l$  est la direction admissible,  $\theta$  (un réel positif) est le pas admissible maximal le long de la direction  $l$ , tel que  $J(\bar{x}) \geq J(x)$  .

Le vecteur de la direction  $l = (l(J_B), l(J_H))$  est construit comme suit :

Sur  $J_H$  on pose  $\theta = 1$  et

$$l_J = \begin{cases} d_{1j} - x_j & si & E_j > 0, \\ d_{2j} - x_j & si & E_j < 0 \\ 0 & si & E_j = 0, j \in J_H \end{cases} \quad (A.4)$$

et  $l(J_B) = -A_B^{-1} A_H l(J_H)$  pour avoir  $A\bar{x} = b$  .

Pour que  $\bar{x}$  vérifie  $d_1 \leq \bar{x} \leq d_2$ , il faut calculer le pas admissible maximal le long de la direction  $l$  qu'est calculé de la manière suivante :

$$\theta_J = \begin{cases} \frac{d_{1j} - x_j}{l_j} & si & l_j > 0, \\ \frac{d_{2j} - x_j}{l_j} & si & l_j < 0, \\ \infty & si & l_j = 0, j \in J_B \end{cases} \quad (A.5)$$

D'où :

$$\theta_{j_0} = \min\{\theta_j\}, \text{ pour } j \in J_B$$

et le pas maximal sera :

$$\theta^0 = \min\{1, \theta_{j_0}\}$$

Delà, le nouveau plan sera  $\bar{x} = x + \theta^0 l$  et la valeur de suboptimalité pour le nouveau plan sera :

$$\begin{aligned}
\beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{j \in J_H^+} E_j(\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(\bar{x}_j - d_{2j}), \\
&= \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j + \theta^0, l_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j + \theta^0, l_j - d_{2j}), \\
&= \sum_{j \in J_H^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} E_j(x_j - d_{2j}) + \theta^0 \left( \sum_{j \in J_H^+} E_j l_j + \sum_{j \in J_H^-} E_j l_j \right).
\end{aligned}$$

et on obtient :

$$\beta(\bar{x}, J_B) = \beta(x, J_B) - \theta^0 \beta(x, J_B), = (1 - \theta^0) \beta(x, J_B).$$

De cette dernière expression , on conclut :

1. Si  $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$  , alors  $\{\bar{x}, J_B\}$  est optimal.
2. Si  $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$  , alors  $\{\bar{x}, J_B\}$  est  $\varepsilon$ -optimal .
3. Si  $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$  alors on passe au changement du support  $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$  .

### A.1.2 changement du support

Le changement du support de  $J_B$  vers  $\bar{J}_B$  consiste à changer le vecteur de potentiel  $y$  vers  $\bar{y}$ , ce qui implique de changer le vecteur d'estimation  $E$  à  $\bar{E}$  de telle sorte que :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \beta(\bar{x}, J_B),$$

Pour cela posons :

$$\bar{E}(J) = E(J) + \sigma^0 \tau(J), \tag{A.6}$$

$$\bar{y}(I) = y(I) + \sigma^0 \tau(I), \tag{A.7}$$

où  $\tau$  est la direction de diminution de la fonction duale ,  $\sigma^0$  le pas maximal le long de cette direction .

Calcul de  $\tau$  et  $\sigma^0$  :

En utilisant la définition de  $E$  et  $y$  , on obtient :

$$\bar{E} = \bar{y}A - c' = (y' + \sigma^0 \tau'(I))A - c' = E' + \sigma^0 \tau'(I)A,$$

Delà :  $\tau'(J) = \tau'(I)A(I, J)$  ce qui implique :  $\tau'(J_B) = \tau'(I)A(I, J_B)$  , donc :  $\tau'(I) = \tau'(J_B)A_B^{-1}$  , ce qui donne :

$$\tau'(J_H) = \tau'(J_B)A_B^{-1}A(I, J),$$

La procédure de changement de plan consiste à chercher l'indice  $j_0 \in J_B$  qui va sortir de la base , par contre la procédure de changement du support consiste à chercher l'indice  $j_1 \in J_H$  qui va entrer dans la base à la place de  $j_0$  Pour cela posons :

$$\tau_J = \begin{cases} 1 & si & x_{j_0} = d_{1j_0}, \\ -1 & si & x_{j_0} = d_{2j_0}, \\ 0 & si & j \in J_B \setminus j_0, \end{cases} \tag{A.8}$$

Le pas dual est donné par :

$$\sigma_0 = \min_{j \in J_H} \{\sigma_j\},$$

où

$$\sigma_J = \begin{cases} \frac{-E_j}{\tau_j} & \text{si } E_j \tau_j < 0, \\ 0 & \text{si } E_j = 0, x_j \neq d_{1j}, \tau_j > 0, \text{ ou } E_j = 0, x_j \neq d_{2j}, \tau_j < 0, \\ \infty & \text{sinon,} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

◇ Le calcul de  $\sigma_0$  satisfait  $\bar{E}_j E_j \geq 0, \forall j \in J$ ,

◇  $\bar{E}(j_1) = 0$

Cherchons  $j_1$  tel que  $\sigma_{j_1} = \sigma^0$

Le nouveau support est :  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$ .

On peut facilement calculer la quantité  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B)$  qui est égale à :

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = \sum_{j \in J_H^+} \bar{E}_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \bar{E}_j (\bar{x}_j - d_{2j})$$

Où  $\bar{J}_H^+ = \{j \in \bar{J}_H, \bar{E}_j \geq 0\}$ ,  $\bar{J}_H^- = \{j \in \bar{J}_H, \bar{E}_j < 0\}$

On obtient :

$$\begin{aligned} \beta(\bar{x}, J_B) &= \sum_{j \in J_H^+} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \Delta_j (\bar{x}_j - d_{2j}) + \sigma_0 \left( \sum_{j \in J_H^+} \tau_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j (\bar{x}_j - d_{2j}) \right) \\ &= (1 - \theta^0) \beta(x, J_B) + \sigma_0 \left( \sum_{j \in J_H^+} \tau_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j (\bar{x}_j - d_{2j}) \right). \end{aligned}$$

Nous avons :  $A\bar{x} = Ax + \theta_0 Al$ , ce qui implique :  $Al = 0$ .

Par conséquent :  $\tau l = 0$  puisque  $\tau'(J) = \tau'(I)A$ , de plus par construction toutes les composantes de  $\tau'(J_B)$  sont nulles sauf à l'indice  $j_0$ .

Posons :

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \sum_{j \in J_H^+} \tau_j (\bar{x}_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j (\bar{x}_j - d_{2j}), \\ &= \sum_{j \in J_H^+} \tau_j (x_j + \theta^0 l_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j (x_j + \theta^0 l_j - d_{2j}), \\ &= \sum_{j \in J_H^+} \tau_j (x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j (x_j - d_{2j}) + \theta_0 \left( \sum_{j \in J_H^+} \tau_j \cdot l_j + \sum_{j \in J_H^-} \tau_j \cdot l_j \right) \end{aligned}$$

On déduit :

$$\alpha_0 = -(1 - \theta^0) \sum_{j \in J} \tau_j \cdot l_j = -(1 - \theta^0) \tau_{j_0} \cdot l_{j_0}$$

$$\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = -(1 - \theta^0) \beta(x, J_B) - \sigma_0 |\alpha_0|$$

De cette dernière expression, on conclut :

1. Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$ , alors  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  est optimal.
2. Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$ , alors  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  est  $\varepsilon$ -optimal.
3. Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$ , alors on passe au changement du plan  $\bar{x} \rightsquigarrow \bar{\bar{x}}$ .

### A.1.3 Itération de l'algorithme

1. Soit  $\{x, J_B\}$  un support plan de départ.
2. Calculer :
  - a.  $y' = c'(J_B)A_{B^{-1}}$  .
  - b.  $E' = y'A - c$  .
  - c.  $\beta(x, J_B) = \sum_{j \in J_B^+} E_j(x_j - d_{1j}) + \sum_{j \in J_B^-} E_j(x_j - d_{2j})$ .
    - ▷ si  $\beta(x, J_B) = 0$  , alors  $\{x, J_B\}$  est optimal, Stop .
    - ▷ si  $\beta(x, J_B) \leq \varepsilon$  , alors  $\{x, J_B\}$  est  $\varepsilon$ -optimal, Stop .
    - ▷ si  $\beta(x, J_B) > \varepsilon$  , Aller à 3.
3. Changement de plan  $x \rightsquigarrow \bar{x}$ 
  - ★ Déterminer le vecteur  $l(J)$ .
  - ★ Calculer le vecteur  $\bar{x}(J)$ .
  - ★ Calculer la quantité  $\beta(\bar{x}, J_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B)$  .
    - ▷ Si  $\beta(\bar{x}, J_B) = 0$  , alors  $\{\bar{x}, J_B\}$  est optimal, Stop .
    - ▷ Si  $\beta(\bar{x}, J_B) \leq \varepsilon$  , alors  $\{\bar{x}, J_B\}$  est  $\varepsilon$ - optimal, Stop .
    - ▷ Si  $\beta(\bar{x}, J_B) > \varepsilon$  , Aller à 4 .
4. Changement du support  $J_B \rightsquigarrow \bar{J}_B$ 
  - d. Calculer le vecteur  $\tau$  .
  - e. Calculer  $\sigma_{j_1} = \min_{j \in J_H} \{\sigma_j\}$  .
  - f. Le nouveau support est :  $\bar{J}_B = (J_B \setminus j_0) \cup j_1$  .
  - g. Calculer la quantité  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = (1 - \theta^0)\beta(x, J_B) - \sigma_0|\alpha_0|$  .
    - ▷ Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) = 0$  , alors  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  est optimal, Stop .
    - ▷ Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) \leq \varepsilon$  , alors  $\{\bar{x}, \bar{J}_B\}$  est  $\varepsilon$ - optimal, Stop .
    - ▷ Si  $\beta(\bar{x}, \bar{J}_B) > \varepsilon$  , Aller à 2 .

La méthode adaptée permet de donner la solution optimale au bout de deux itération et en temps réel . Par contre, la méthode qui consiste à introduire directement des variables d'écart (la commande linprog sous Matlab), donne une solution au bout cinq itérations et en temps plus grand .

# Conclusion générale :

Dans ce mémoire, nous avons étudié la résolution d'un problème de contrôle optimal. Notre but était de trouver une meilleure condition initiale et une commande optimale qui pouvait nous ramener de l'état initial  $x_0 \in X_0$  vers l'état final décrit par l'équation  $Hx(t^*) = g$ .

Pour sa résolution, on a utilisé deux approches :

- La méthode adaptée .
- La méthode de discrétisation couplée à la procédure finale.

La méthode adaptée est constituée de trois procédures : le changement de commande, le changement de support et la procédure finale.

En exploitant cette méthode, on a proposé une méthode originale qui est un couplage entre la méthode de discrétisation et la procédure finale. Le but de la méthode de discrétisation est d'approcher le support optimal. par la suite en utilisant ce support et on a effectué une résolution appelée procédure finale basée sur la méthode de Newton .

Ce domaine de recherche offre de nombreuses perspectives qu'elles soient théoriques ou pratiques :

\* En théorie, il est intéressant d'appliquer ces algorithmes à des problèmes de contrôle optimal linéaire, stochastique, feedback ...

\* En pratique, différents problèmes que soit en économie, en agriculture, en automatique, ... , peuvent être modélisés par des problèmes de contrôle optimal et résolus par les méthodes proposées .

# Bibliographie

- [1] B. Oukacha,  
*Résolution de problème de controle optimal*. These de Doctorat en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.
- [2] B. Brahmi and M.O. Bibi.  
Dual support method for solving convex quadratic programs. Optimisation, 2010
- [3] C. Lobry et T. Sari,  
*Introduction à la théorie du controle*. CIMPA, Tlemcen, 2003.
- [4] C. Evans,  
*An introduction to mathematical optimal control theory*. Département de Mathématiques, Université de Californie, Berkeley
- [5] D.oudja .  
*Principe du maximum et méthode de tir*
- [6] E.Trélat ,  
*Contrôle optimal Théorie et application* Vuibert, Collection "Mathématique Concrètes", 2005.
- [7] E.Trélat ,  
*Commande optimal* . Notes du cours A08, 2007/2008
- [8] E.Trélat,  
*Théorie du controle et application en aéronautique*. Université d'Orléans, UFR Sciences Fédération Denis Poisson, Labo. MAPMO, UMR 6628, Route de Chartres, BP 6759, 45067 Orléans Cedex 2, France.
- [9] F. Rezki,  
*Résolution d'un problème terminal de controle optimal d'un système dynamique linéaire avec une trajectoire discontinue*. Mémoire de Magistère en recherche opérationnelle, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2006.
- [10] G. Wanner and E. Hairer.  
*Solving ordinary differential equations II*, volume 1. Springer-Verlag, Berlin, 1991
- [11] H. K. Khalil,  
*Nonlinear Systems*. Prentice Hall, 1996.
- [12] J. Macki, A. Stauss,  
*Introduction to optimal control theory*. Springer verlag (second printing), 1995.
- [13] K. Messaoudene.  
*Optimisation d'un système ique linéaire avec une trajectoire discontinue*. Thèse de magister, l'université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2007.
- [14] K.louadj  
*these de doctorat*
- [15] M. Aidene , I. L. Vorb?ev et B. Oukacha,  
*Algorithm for solving a linear Optimal Control Probnlem with Minimax Performance Index*.



Journal of Computational mathematics and Mathematical physics. Vol. 45, N 10, pp.1756-1765,2005.

- [16] o.oukacha ,  
these de doctorat , Méthode directe d'optimisation de problèmes de contrôle
- [17] Nenik Nijmeijer, Arjan Van Der Schaft,  
Nonlinear Dynamical Control Systems. Springer-Verlag New York Inc. 1990.
- [18] R. Gabassov,  
Adaptive method of linear programming. Preprint of the University of Karlsruhe. Institute of Statistics and Mathematics. Karlsruhe, Germany. 1993.
- [19] R. Gabasov and F.M. Kirillova.  
Adaptive method of solving linear programming problems. Preprints Series of University of Karlsruhe, Institute for Statistics and Mathematics, 1994.