

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques,
Commerciales et des Sciences de Gestion



وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محمد أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بعنوان:

محاضرات في مقياس احصاء 3

من إعداد:

العمرى الحاج

2025/2024

الصفحة	المحتويات
2	مقدمة
3	المحور الأول: التوزيعات الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المتقطعة والتقارب بينها
5	1. التوزيع المنتظم المتقطع
5	1.1. شروط استعمال التوزيع
5	2.1. قانون التوزيع الاحتمالي
5	3.1. دالة التوزيع التراكمي
7	2. توزيع برنولي
8	1.2. شروط استعمال التوزيع
8	2.2. قانون التوزيع الاحتمالي
8	3.2. دالة التوزيع التراكمي
9	3. توزيع ذي الحدين
9	1.3. شروط استعمال التوزيع
10	2.3. قانون التوزيع الاحتمالي
12	3.3. دالة التوزيع التراكمي
15	4. التوزيع الهندسي
15	1.4. الهدف من التوزيع الهندسي
15	2.4. قانون التوزيع الاحتمالي
16	3.4. دالة التوزيع التراكمي
17	5. التوزيع الهندسي الزائد أو التوزيع فوق الهندسي
17	1.5. الهدف من التوزيع الهندسي الزائد
17	2.5. دالة الكتلة الاحتمالية
19	3.5. التقريب إلى التوزيع الشائي

21	6.توزيع بواسون
21	6.1.دالة كتلة الاحتمال
21	6.2.دالة التوزيع التراكمي
23	6.3.التقريب للتوزيع الشئائي
25	تمارين المحور الأول
38	المحور الثاني: التوزيعات الاحتمالية للمتغيرة العشوائية المستمرة والتقريب بينها
40	1.التوزيع المنتظم المستمر
40	1.1.دالة الكثافة
40	1.2.دالة التوزيع التراكمي
41	2.التوزيع الطبيعي
41	1.2.قانون التوزيع الاحتمالي
42	2.2.دالة التوزيع التراكمي
47	2.3.تقريب بعض التوزيعات للتوزيع الطبيعي
49	3.توزيع قاما
51	4.توزيع بيتا
53	5.توزيع كاي مربع
53	1.5.دالة الكثافة الاحتمالية
54	2.5.دالة التوزيع التراكمي
58	6.توزيع ستودنت
58	1.6.دالة الكثافة الاحتمالية
60	2.6.دالة التوزيع التراكمي
61	7.توزيع فيشر
61	1.7.دالة الكثافة الاحتمالية
62	2.7.دالة التوزيع التراكمي

محاضرات في مقياس إحصاء 3

64	3.7. خواص التوزيع فيشر
66	تمارين المحور الثاني
78	المحور الثالث: المتغيرات العشوائية الثنائية
80	1. دالة الكتلة الاحتمالية
80	2. التوزيع الحدي
85	3. دالة التوزيع التراكمي
88	4. التوزيعات الاحتمالية الشرطية
91	تمارين المحور الثالث
95	قائمة المراجع
98	الجدول الإحصائية

الرقم	عنوان الشكل	الصفحة
1	التمثيل البياني لدالة كتلة الاحتمال ل $X \sim B(3, 0.85)$	12
2	التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي ل $X \sim B(3, 0.85)$	14
3	حساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع الهندسي المأند بواسطة EXCEL	19
4	حساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع البواصوني بواسطة EXCEL	22
5	التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي	42
6	التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي باستخدام "Excel"	43
7	التمثيل البياني للتوزيع المعياري	44
8	كيفية حساب الاحتمالات باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري $\phi(1.25)$	45
9	كيفية حساب الاحتمالات باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري $\phi(1.75)$	46
10	تقريب توزيع بواصون للتوزيع الطبيعي	49
11	التمثيل البياني لدالة قاما	50
12	التمثيل البياني لدالة بيتا	52
13	التمثيل البياني للتوزيع كاي مربع بدرجة حرية 2	54
14	التوزيع التراكمي للتوزيع كاي مربع باستخدام "Excel"	55
15	التوزيع التراكمي للتوزيع كاي مربع باستخدام الجدول الإحصائي	56
16	طريقة الاستفاء الخطي	58
17	حساب الاحتمال $P(\chi_{10}^2 \geq 3.5)$ بواسطة "Excel"	58
18	التمثيل البياني لدالة الكثافة لتوزيع ستودنت	59
19	حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع ستودنت باستعمال الجدول الإحصائي	61
20	حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع ستودنت باستعمال "Excel"	61
21	التمثيل البياني لتوزيع فيشر	63
22	حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع فيشر عن طريق الجداول الإحصائية	64
23	حساب المساحات الخاصة بتوزيع فيشر باستخدام "Excel"	65

محاضرات في مقياس إحصاء 3

66	حساب $f_{(0.85,9,20)}$ باستخدام "Excel"	24
68	التمثيل البياني ل $P(4 \leq X \leq 5)$	25
69	تمثيل الاحتمالات الخاصة بكاي مربع بيانبا	26
70	حساب $P(X > 2.678)$ بواسطة "Excel"	27
72	حساب الاحتمال $P(X \geq 100)$ بواسطة "Excel" $(X \sim B(300, 0.07))$	28
73	حساب الاحتمال $P(X \geq 10)$ بواسطة "Excel" $(X \sim p(\lambda = 12))$	29

الرقم	عنوان الجدول	الصفحة
1	جدول التوزيع الاحتمالي للتوزيع $X \sim B(3, 0.85)$	14
2	المقارنة بن التوزيع الثنائي والهندسي الزائد	20
3	أمثلة عن حساب الاحتمالات إذا لم يتوفر الشكل $(Z \leq \text{موجب عدد})$ P .	47
4	دالة الكثافة ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما ذو المعلمتين 3 و 4	51
5	دالة الكثافة ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيتا ذو المعلمتين 2 و 3	53
6	أمثلة عن حساب الاحتمالات إذا لم يتوفر الشكل $(\chi_n^2 \geq \text{موجب عدد})$ P .	57
7	جدول التوزيع الاحتمالي المشترك	82
8	جدول العينات الممكن سحبها وقيم المتغيرتين العشوائيتين	83
9	جدول التوزيع الاحتمالي المزدوج	84
10	التوزيعات الاحتمالية الحدية لكلا المتغيرتين العشوائيتين	84
11	جدول التوزيع التراكمي	87
12	جدول التوزيع التراكمي	88
13	جدول التوزيع الشرطي في حالة معلومية y_j	89
14	جدول التوزيع الشرطي في حالة معلومية x_i	90

يعتبر الامام بعلم الإحصاء بكل أنواعه ضروري وحتمي لكل طلبة الاقتصاد بمختلف تخصصاته، لأن مختلف هذه التخصصات تحتاج لإتقانها تراكم المكتسبات والمعارف الخاصة بعلم الإحصاء، خاصة لما يتعلق الامر بإنجاز الدراسات القياسية والدراسات الميدانية، وهذه المطبوعة فيها دروس مبسطة لمقياس الاحصاء 3.

إذن، هذه مطبوعة محاضرات في مقياس الإحصاء 3 موجهة لطلبة السنة الثانية في ميدان العلوم الاقتصادية، التجريبية وعلوم التسيير، وهي منجزة وفق البرنامج الوزاري للمقياس، حيث تضمنت ثلاثة محاور أساسية، الأول خاص بالتوزيعات الاحتمالية الشهيرة للمتغيرة العشوائية المتقطعة، والمحور الثاني مخصص للتوزيعات الاحتمالية الشهيرة للمتغيرة العشوائية المستمرة، وفي المحور الثالث والأخير سيكون الكلام عن المتغيرة العشوائية المزدوجة. هذه المطبوعة مدعمة بعدة أمثلة وتمارين محلولة ستساعد الطالب -الذي يفترض أنه اكتسب مقياسي احصاء 1 واحصاء 2- في فهم المقياس أكثر مع التنبيه إلى أننا سنتفادى البراهين والعلاقات المعقدة قدر الإمكان.

المحور الأول: التوزيعات

الاحتمالية للمتغيرة

العشوائية المتقطعة

والتقارب بينها

تمهيد

تعتبر التوزيعات الاحتمالية من المفاهيم المحورية في نظرية الاحتمالات، إذ تمثل الإطار الرياضي الذي يحدد الكيفية التي تتوزع بها احتمالات القيم المختلفة التي يمكن أن يتخذها المتغير العشوائي. فبلون التوزيع الاحتمالي، يبقى المتغير العشوائي مجرد توصيف شكلي لظاهرة عشوائية، في حين يسمح التوزيع الاحتمالي بتحليل سلوكه الكمي واستخلاص خصائصه الإحصائية.

وفي حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة، تكون القيم الممكنة التي يمكن أن يتخذها المتغير محدودة أو قابلة للعد، وهو ما يستدعي استخدام دالة الكتلة الاحتمالية (ودالة التوزيع التراكمي لحساب الاحتمالات المجمعة) بوصفها الأداة الأساسية لتوصيف هذا النوع من المتغيرات. وتحدد هذه الدالة احتمال تحقق كل قيمة ممكنة على حدة، مع الالتزام بالشروط الأساسية للتوزيع الاحتمالي، وعلى رأسها عدم سلبية الاحتمالات، ومساواة مجموعها للواحد الصحيح.

وتكتسب التوزيعات الاحتمالية للمتغيرات العشوائية المتقطعة أهمية بالغة في النمذجة الإحصائية للظواهر التي تتخذ طابعاً عددياً منفصلاً، مثل عدد الحوادث التي تكون بشكل منتظم (توزيع بواسون مثلاً)، أو عدد النجاحات في تجربة تحتل نتيجتين متناقضتين فقط (التوزيع البرنولي ومن ثم التوزيع الثنائي أو التوزيع الهندسي بحسب سياق التجربة). كما تمثل هذه التوزيعات الأساس النظري لتحليل العديد من التجارب العشوائية المتكررة، ولتفسير النتائج الناتجة عنها.

ولا يقتصر دور التوزيعات الاحتمالية المتقطعة على توصيف السلوك الاحتمالي للمتغير العشوائي، بل يمتد إلى استخلاص خصائصه الإحصائية الأساسية، مثل القيمة المتوقعة أو الأمل الرياضي، والتباين، والانحراف المعياري، التي تعتبر أدوات مركزية في التحليل الإحصائي والاستدلالي كما سنرى في مقياس إحصاء 4 في السداسي الثاني.

وعليه، فإن دراسة التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتقطع تمثل مدخلاً أساسياً لفهم آليات النمذجة الاحتمالية، وتمهيداً ضرورياً للتعامل مع التطبيقات الإحصائية المختلفة، سواء في البحث العلمي أو في المجالات التطبيقية المتعددة.

1. التوزيع المنتظم المتقطع

1.1. شروط استعمال التوزيع

هو عبلة عن تجربة تتضمن مجموعة من النتائج متساوية الاحتمال (علي عبد السلام العملي، علي حسين العجيلي، صفحة 309)، فعند رمي قطعة نقدية مونة فإنها تحتمل نتيجتين متساويتين في الحلوث، فالمتغيرة العشوائية هنا تمثل نوع الوجه المتحصل عليه ل هو الصورة واحتمال الحصول عليها هو 0.5 والنتيجة الثانية تمثل الحصول على الرقم باحتمال مساوي للنتيجة الأولى وهو 0.5.

إذن إذا كان لكل القيم الممكنة والمثلة للمتغيرة العشوائية نفس احتمال الظهور ففي هذه الحالة المتغيرة العشوائية تتبع التوزيع المنتظم المتقطع.

2.1. قانون التوزيع الاحتمالي

$$X \sim U(1 \dots n) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{if } x = 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ونكتب المتوسط والتباين كما يلي:

$$X \sim U(1 \dots n) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{n+1}{2} \\ V(X) = \frac{n^2-1}{12} \end{cases}$$

3.1. دالة التوزيع التراكمي

دالة التوزيع التراكمي مهمة جدا لحساب الاحتمالات المجمعة، وتكتب بكل بساطة كما يلي:

$$X \sim U(1 \dots n) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{x}{n} & \text{if } x = 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{if } x \geq n \end{cases}$$

مثال 1: نريد اختيار ممثل الفوج في قسم يحتوي 30 طالب مرقمة من 1-30. المطلوب

أولا- ماهي دالة الكتلة الاحتمالية وكذا دالة التوزيع التراكمي؟

ثانيا- أعد الإجابة على نفس السؤال إذا أردنا اختيار طالبين اثنين

الحل:

أولاً- دالة الكتلة الاحتمالية والتوزيع التراكمي في حالة اختيار طالب واحد

أ.دالة الكتلة الاحتمالية: القانون الاحتمالي المستخدم في هذا المثال هو المنتظم المتقطع بما أنه :

- لدينا 30 طالب مرقمة من 1 إلى 30 والمتغيرة العشوائية تمثل رقم الطالب المسحوب؛

- ولكل طالب نفس الاحتمال لكي يختار، هذا الاحتمال هو $p = \frac{1}{30} = 0.0333$

الآن نكتب دالة الكتلة الاحتمالية كما يلي:

$$X \sim U(1 \dots 30) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} \frac{1}{30} & \text{if } x = 1, 2, \dots, 30 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ب.دالة التوزيع التراكمي:

$$X \sim U(1 \dots 30) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{x}{30} & \text{if } x = 1, 2, \dots, 29 \\ 1 & \text{if } x \geq 30 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{1}{30} & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{30} & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \\ \frac{29}{30} & \text{if } 29 \leq x < 30 \\ 1 & \text{if } x \geq 30 \end{cases}$$

ثانيا- دالة الكتلة الاحتمالية والتوزيع التراكمي في حالة اختيار طالبين:

1- دالة الكتلة الاحتمالية

القانون الاحتمالي المستخدم في هذا الجزء الثاني هو أيضا المنتظم المتقطع بما أنه :

- لدينا " $C_n^2 = C_{30}^2 = \frac{30!}{28! \cdot 2!} = 435$ " ثنائية مرقمة من 1 إلى 435 والمتغيرة العشوائية تمثل رقم الشئائية المختلة أو المسحوبة؛

- ولكل ثنائية نفس الاحتمال لكي تختار، هذا الاحتمال هو $p = \frac{1}{435} = 0.0023$

الان نكتب دالة الكتلة الاحتمالية كما يلي:

$$X \sim U(1 \dots 30) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} 0.0023 & \text{if } x = 1, 2, \dots, 435 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ب. دالة التوزيع التراكمي تساوي:

$$X \sim U(1 \dots 30) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{x}{435} & \text{if } x = 1, 2, \dots, 434 \\ 1 & \text{if } x \geq 435 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } x < 1 \\ \frac{1}{435} & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{435} & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ \vdots & \\ \frac{434}{435} & \text{if } 434 \leq x < 435 \\ 1 & \text{if } x \geq 435 \end{cases}$$

2. توزيع برنولي

تعتبر التجربة البرنولية أصلاً وأساساً لأغلب التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، والتي ستأتي لاحقاً، ونعني بالتجربة البرنولية القيام بتجربة لمرة واحدة فقط والنتائج المحتملة لهذه التجربة تكون إما بالنجاح أو الفشل، أي تجربة مرة واحدة تحتل نتيجتين متناقضتين. وقد سُمي التوزيع باسم الرياضي السويسري جاك برنولي (1654-1705)

"Jack Bernoulli". (Christophe Hurlin, 2015, p. 187)

1.2. شروط استعمال التوزيع

إذن، الهدف من التوزيع البرنولي هو نجاح التجربة التي قمنا بها مرة واحدة فقط، هذا النجاح هو الذي تمثله المتغيرة العشوائية، وبالتالي يمكن تقديم شروط استخدام هذا التوزيع كما يلي (Douglas C. Montgomery, p. 81):

- 1- تجربة لمرة واحدة تحتمل نتيجتين متناقضتين، والمتغيرة العشوائية تمثل حالة النجاح؛
- 2- لا نكرر التجربة.

2.2. قانون التوزيع الاحتمالي

إذا كان لدينا متغيرة عشوائية متقطعة تتبع التوزيع البرنولي، فإن دالة كتلتها الاحتمالية ستكتب بدلالة احتمال نجاح التجربة كما يلي (Morris H. DeGroot, 2012, p. 276):

$$X \sim B(1, p) \Rightarrow P(X = x) = p^x(1 - p)^{1-x} \text{ if } x = 0, 1$$

وبما أنه توجد نتيجتين فقط لهذه التجربة التي أجريت لمرة واحدة فقط (مجموعة التعريف تتضمن فقط الصفر لحالة الفشل والواحد لحالة النجاح)، فيمكننا إعادة كتابة دالة كتلة الاحتمال كما يلي:

$$X \sim B(1, p) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} P(X = 0) = p^0(1 - p)^{1-0} = 1 - p & \text{if } x = 0 \\ P(X = 1) = p^1(1 - p)^{1-1} = p & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

كما أن متوسط وتباين المتغيرة العشوائية التي تتبع توزيع ذي الحدين يكتبان كما يلي:

$$X \sim B(1, p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = p \\ V(X) = p(1 - p) \end{cases}$$

3.2. دالة التوزيع التراكمي

بالرغم من أننا لا نحتاج لدالة التوزيع التراكمي هنا لأنه دوماً عندنا احتمالين فقط، إلا أننا سنتكلم عن هذه الدالة التي تكتب كما يلي:

$$X \sim B(1, p) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \sum_{x=0}^x P(X = x) = \sum_{x=0}^x p^x (1-p)^{1-x}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ 1-p & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

مثال 2: من تجرب سابقه نعلم بأن قناص "اسمه رامي" ينجح في إصابة الهدف باحتمال قدره 0.85. إذا أعطي لرامي فرصة واحدة لقنص الهدف، فما هي كل الاحتمالات الممكنة لإصابته للهدف؟

الحل: سنستعمل التوزيع البرنولي في هذا المثال، لأن:

1- لدينا تجربة تحتل نتيجتين متناقضتين (إما ينجح في إصابة الهدف=النجاح، وإما يفشل=الفشل)؛

2- التكرار غير مسموح به، التجربة لمرة واحدة فقط؛

إذا:

$$X \sim B(1, 0.85) \Rightarrow P(X = x)$$

$$= \begin{cases} P(X = 0) = 0.85^0 (1 - 0.85)^{1-0} = 0.15 & \text{if } x = 0 \\ P(X = 1) = 0.85^1 (1 - 0.85)^{1-1} = 0.85 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

يوجد فقط احتمالين ممكنين، إما لا ينجح رامي في إصابة الهدف وهنا x سنعوض بالمقدار 0، والاحتمال الآخر يمثل نجاح رامي في إصابة الهدف وهنا نعوض x بالمقدار 1.

3. توزيع ذي الحدين (التوزيع ثنائي الحد أو التوزيع الثنائي)

يسمى أيضا بالتوزيع الثنائي، ويعتبر من بين أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة، لأننا سنحتاجه في فهم مقياس احصاء⁴ لما يتعلق الأمر بدراسة النسبة في المجتمع أو العينة وهذا من خلال نظرية المعاينة والتقدير واختبار الفرضيات العلمية).

1.3. شروط استعمال التوزيع

الهدف من التوزيع الثنائي هو محاولة معرفة عدد مرات نجاح التجربة (البرنولية) الممثلة بالمتغيرة العشوائية بعد تكرار هذه التجربة لعدد ثابت ومحدد مسبقا، وبالتالي يمكن تقديم شروط استخدام هذا التوزيع من هذا التقديم كما يلي (Douglas C. Montgomery, p. 81) و (بوعبد الله صالح، 2005-2006):

3- تجربة برنولية، أي لدينا تجربة تحتل نتيجتين متناقضتين، والمتغيرة العشوائية تمثل حالة النجاح؛

4- تكرار التجربة لعدد ثابت ومحدد مسبقا وليكن n ؛

5- التجارب تكون بشكل مستقل؛

6- احتمال النجاح يبقى ثابتا دوما، وهذا يعني أن السحب سيكون دوما بالإرجاع أو في آن واحد

2.3. قانون التوزيع الاحتمالي

إذا كان لدينا متغيرة عشوائية متقطعة تتبع التوزيع الثنائي فإن دالة كتلتها الاحتمالية ستكتب بدلالة احتمال نجاح التجربة كما يلي (WEGNER, 2013, p. 126):

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, n \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

ملاحظة: مجموعة تعريف توزيع ذي الحدين تبدأ من الصفر، لأن التجربة تحتل فشل التجربة أيضا،

ويكمن ترجمتها رياضيا كما يلي:

" $P(X = 0)$ " معناه أنه وبعد القيام بعدد من المحاولات n لم نتحصل على أي نجاح.

كما أن متوسط وتباين المتغيرة العشوائية التي تتبع توزيع ذي الحدين يكتبان كما يلي:

$$X \sim B(n, p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = np \\ V(X) = np(1-p) \end{cases}$$

مثال 3 (نفس معطيات المثال 2): من تجارب سابقة نعلم بأن قناص "اسمه رامي" ينجح في إصابة الهدف

باحتمال قدره 0.85، إذا كان لدى رامي ثلاثة محاولات فما هي كل الاحتمالات الممكنة لإصابته للهدف؟

الحل:

سنستعمل التوزيع الثنائي في هذا المثال، لأن:

1. لدينا تجربة برنولية؛

2. عدد التكرارات ثابت ويسوي 3؛

3. احتمال النجاح ثابت مهما تكررت التجربة

إذا:

$$X \sim B(3, 0.85) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} C_3^x 0.85^x 0.15^{3-x} = 0, 1, 2, 3 \text{ هـ} & \text{if } x \\ 0 & \text{if otherwise} \end{cases}$$

أولاً. حساب احتمال عدم إصابة رامي للهدف:

نذهب لقانون التوزيع الاحتمالي ونعوض "x" بالقيمة 0 بكل بساطة، أي:

$$P(X = 0) = C_3^0 0.85^0 0.15^{3-0} = \frac{3!}{(3-0)! 0!} 0.85^0 0.15^3 = 0.0034$$

هذا يعني أن نسبة عدم إصابة رامي للهدف هي 0.3375 بالمئة

ثانياً. حساب احتمال إصابة رامي للهدف مرة واحدة :

نذهب لقانون التوزيع الاحتمالي ونعوض "x" هذه المرة بالقيمة 1، أي:

$$P(X = 1) = C_3^1 0.85^1 0.15^{3-1} = \frac{3!}{(3-1)! 1!} 0.85^1 0.15^2 = 0.0574$$

هذا معناه أن رامي سيصيب الهدف مرة واحدة فقط من أصل ثلاث محاولات بنسبة 5.74 بالمئة

ثالثاً. حساب احتمال إصابة رامي للهدف مرتين :

نذهب لقانون التوزيع الاحتمالي ونعوض "x" بالقيمة 2 بكل بساطة، أي:

$$P(X = 2) = C_3^2 0.85^2 0.15^{3-2} = \frac{3!}{(3-2)! 2!} 0.85^2 0.15^1 = 0.3251$$

هذا يعني أن رامي سيصيب الهدف مرتين من أصل ثلاث محاولات بنسبة 32.51 بالمئة

رابعاً. حساب احتمال إصابة رامي للهدف ثلاثة مرات :

نذهب لقانون التوزيع الاحتمالي ونعوض "x" بالقيمة 3 بكل بساطة، أي:

$$P(X = 3) = C_3^3 0.85^3 0.15^{3-3} = \frac{3!}{(3-3)! 3!} 0.85^3 0.15^0 = 0.6141$$

هذا يعني أن رامي سيصيب الهدف في كل محاولة بنسبة قدرها 61.41 بالمئة.

ملاحظة:

1- للتأكد من أن حل المثال تم بالطريقة الصحيحة، لا بد من أن مجموع كل الاحتمالات الممكنة يسوي للواحد

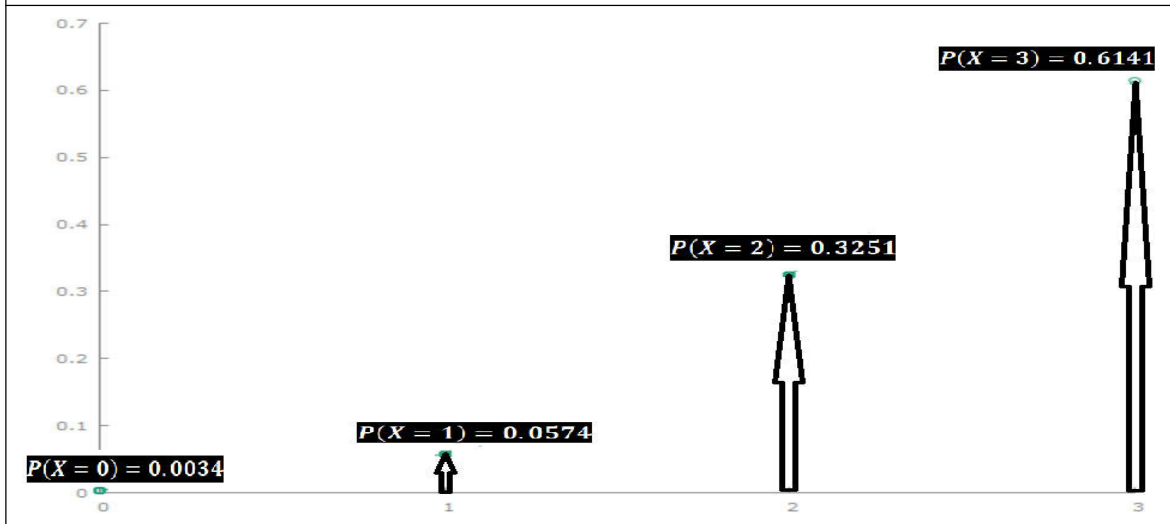
$$\sum_{x=0}^3 P(X = x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) \\ = 0.0034 + 0.0574 + 0.3251 + 0.6141 = 1$$

2- احتمال إصابةرامي للهدف أربع مرات تسوي مباشرة 0، لأن 4 لا تنتمي لمجموعة التعريف

$$P(X = 4) = 0$$

كما يمكن تمثيل دالة كتلة الاحتمال بيانيا كما يلي:

الشكل(1): التمثيل البياني لدالة كتلة الاحتمال لـ $X \sim B(3, 0.85)$



3.3. دالة التوزيع التراكمي

الهدف من فهم دالة التوزيع التراكمي هو استعمالها في حساب الاحتمالات إذا كانت تراكمية أي من الشكل " $P(X < x)$ " أو " $P(X \leq x)$ " أو " $P(X > x)$ " أو " $P(X \geq x)$ ". وعموما تكتب دالة التوزيع

التراكمي للمتغيرة العشوائية التي تتبع التوزيع الثنائي كما يلي:

$$\begin{aligned}
X \sim B(n, p) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) &= \sum_{x=0}^x P(X = x) = \sum_{x=0}^x C_n^x p^x (1-p)^{n-x} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \sum_{x=0}^{n-1} C_n^x p^x (1-p)^{n-x} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 1 & \text{if } x \geq n \end{cases}
\end{aligned}$$

مثال 4: بالرجوع للمثال رقم 1 الخاص بالقنص رامي، حيث المطلوب في هذه المرة هو إعطاء دالة التوزيع

التراكمي. ثم أحسب $P(X > 1)$

الحل:

أولاً-دالة التوزيع التراكمي:

$$\begin{aligned}
X \sim B(3, 0.85) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) &= \sum_{x=0}^x C_3^x 0.85^x 0.15^{3-x} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \sum_{x=0}^2 C_3^x p^x (1-p)^{n-x} & \text{if } x = 0, 1, 2 \\ 1 & \text{if } x \geq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

وبالتفصيل نكتب:

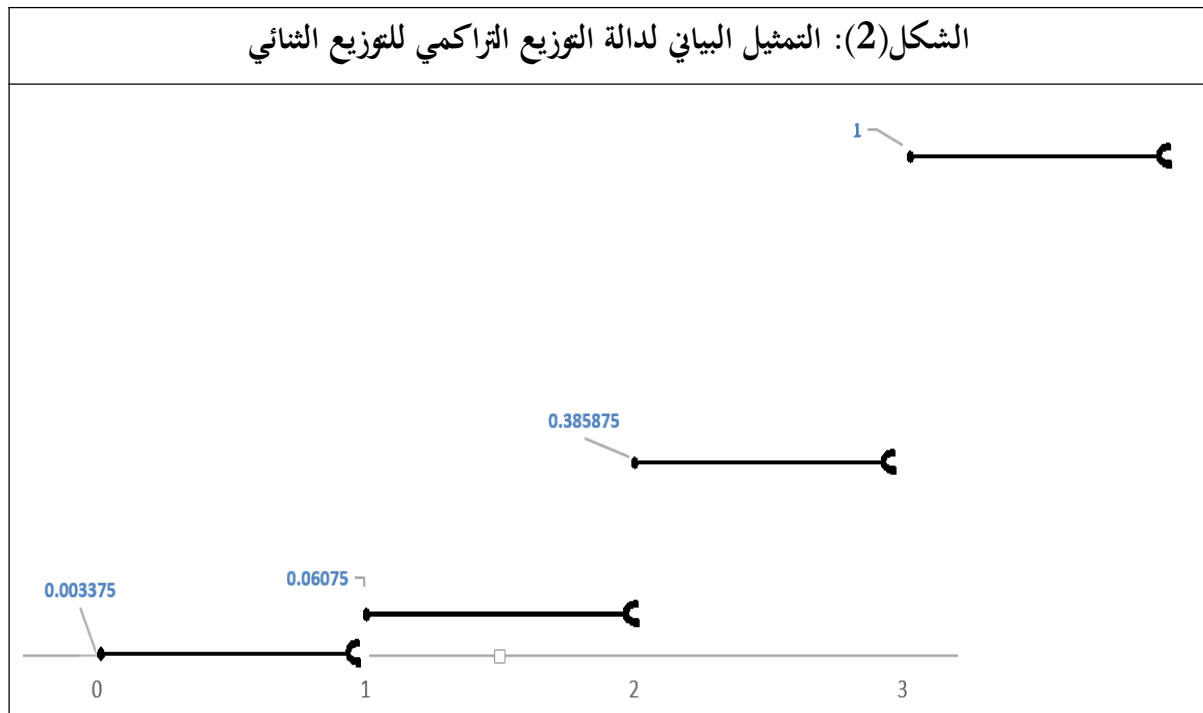
$$\begin{aligned}
F(x) &= P(X \leq x) \\
&= \begin{cases} P(x < 0) = 0 & \text{if } x < 0 \\ P(0 \leq x < 1) = P(x = 0) = 0.0034 & \text{if } 0 \leq x < 1 \\ P(1 \leq x < 2) = 0.0034 + P(x = 1) = 0.0034 + 0.0574 = 0.0608 & \text{if } 1 \leq x < 2 \\ P(2 \leq x < 3) = 0.0608 + P(x = 2) = 0.0608 + 0.3251 = 0.3859 & \text{if } 2 \leq x < 3 \\ P(x \geq 3) = 0.3859 + P(x = 3) = 0.3859 + 0.6141 = 1 & \text{if } x \geq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

وبالإمكان تنظيم هذه النتائج في الجدول الآتي:

الجدول (1): جدول التوزيع الاحتمالي للتوزيع $X \sim B(3, 0.85)$

قيمة الاحتمال	مجال مجموعة التعريف
0	$x < 0$
0.0034	$0 \leq x < 1$
0.0608	$1 \leq x < 2$
0.3859	$2 \leq x < 3$
1	$x \geq 3$

ويمكن تمثيل دالة التوزيع التراكمي بيانيا كما هو موضح في الشكل (2)



ثانياً- حساب $P(X > 1)$

القيم الأكبر من 1 هي 2 و 3، أي:

$$P(X > 1) = \sum_{x=2}^3 C_3^x 0.85^x 0.15^{3-x} = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.3251 + 0.6141 = 0.9392$$

كذلك يمكن حساب هذا الاحتمال باستعمال قانون الاحتمال العكسي لجعل المتراجحة أقل أو تسوي، أي:

$$P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - \sum_{x=0}^1 C_3^x 0.85^x 0.15^{3-x}$$

$$= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) = 1 - 0.0608 = 0.9393$$

ملاحظة: التوزيع برنولي هو حالة خاصة من التوزيع الثنائي لما يكون عدد التكرارات مرة واحدة، أي:

$$B(1, p) = Ber(p)$$

4. التوزيع الهندسي

1.4. الهدف من التوزيع الهندسي

التوزيع الهندسي يتشبه التوزيع الثنائي في كونه أيضا تجربة برنولية تكرر لأكثر من مرة واحتمال نجاح التجربة ثابت دوماً، ويختلف معه في كيفية التكرار وفي الهدف من التجربة ومن هنا يمكن تحديد شروط استعماله كما يلي:

- 1- تجربة برنولية، أي لدينا تجربة تحتمل نتيجتين متناقضتين، والمتغيرة العشوائية تمثل حالة النجاح؛
- 2- عدد التكرارات غير محدد مسبقاً؛ والهدف من التجربة هو استمرار التكرار إلى غاية الحصول على أول نجاح؛
- 3- احتمال النجاح يبقى ثابتاً دوماً، وهذا يعني أن السحب سيكون دوماً بالإرجاع.

2.4. قانون التوزيع الاحتمالي

إذا كان لدينا متغيرة عشوائية متقطعة تتبع التوزيع الهندسي فإن دالة كتلتها الاحتمالية ستكتب كما يلي:

$$X \sim G(p) \Rightarrow P(X = x) = p(1 - p)^{x-1} \text{ if } x = 1, 2, \dots, + \infty$$

ملاحظة: مجموعة تعريف التوزيع الهندسي لا تبدأ من الصفر، لأن عملية التكرار لا تتوقف إلى غاية الحصول على أول نجاح، (Mohammed A. Shayib, 2013, p. 90) وبالتالي ستبدأ مجموعة التعريف قطعاً من الواحد، ويكمن ترجمتها رياضياً كما يلي:

" $P(X = 1)$ " معناه ماهو احتمال أن نتحصل على أول نجاح من أول محاولة

" $P(X = 10)$ " معناه ماهو احتمال أن نتحصل على أول نجاح بعد تكرار التجربة عشرة مرات.

كما أن متوسط وتباين المتغيرة العشوائية التي تتبع التوزيع الهندسي يكتبان كما يلي:

$$X \sim G(p) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{1}{p} \\ V(X) = \frac{1-p}{p^2} \end{cases}$$

3.4. دالة التوزيع التراكمي

تكتب دالة التوزيع التراكمي لمتغيرة عشوائية تتبع التوزيع الهندسي كما يلي:

$$X \sim G(p) \Rightarrow F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - (1 - P)^x & x = 1; 2, \dots \\ 1 & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

مثال 5: بالرجوع لمثال القناص رامي، حيث قلنا أن احتمال اصابته للهدف هو ثابت ويسلوي لـ 0.85. في هذه التجربة يطلب منا حساب احتمال اصابته للهدف لأول مرة بعد المحاولة الثالثة، ثم على الأقل بعد المحاولة الثالثة.

الحل: سنستعمل التوزيع الهندسي في هذا المثال، لأن:

أ- لدينا تجربة برنولية؛

ب- التكرار يتوقف بعد الحصول على أول نجاح والذي يمثل هنا إصابة رامي للهدف؛

ت- احتمال النجاح ثابت مهما تكررت التجربة.

إذا:

$$X \sim G(0.85) \Rightarrow P(X = x) = 0.85 \cdot 0.15^{x-1} \text{ if } x = 1, 2, \dots, +\infty$$

أولاً. حساب احتمال إصابة رامي للهدف لأول مرة بعد المحاولة الثالثة :

نذهب لقانون التوزيع الاحتمالي ونعوض "x" بالقيمة 3 بكل بساطة، أي:

$$P(X = 3) = 0.85 * 0.15^{3-1} = 0.0191$$

هذا معان أن احتمال إصابة رامي للهدف لأول مرة بعد المحاولة الثالثة هو 0.0191.

كما يمكن تمثيل دالة كتلة الاحتمال بيانيا كما يلي:

ثانيا-احتمال إصابة رامي للهدف بعد المحاولة الثالثة على الأقل:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X = 1) - P(X = 2) \\ = 1 - 0.85 * 0.15^{1-1} - 0.85 * 0.15^{2-1} = 0.0225$$

أما إذا تم استخدام قانون دالة التوزيع التراكمي:

$$F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 - (1 - P)^x & x = 1; 2; \dots \\ 1 & x \rightarrow +\infty \end{cases}$$

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - (1 - 0.15^2) = 0.0225$$

5. التوزيع الهندسي الرائد أو التوزيع فوق الهندسي

على غرار التوزيع الثنائي، يعتبر التوزيع الهندسي الرائد مهم جدا وسنحتاجه بكثرة في السداسي الثاني في مقياس إحصاء 4 لما نتكلم عن توزيعات المعاينة للنسبة في حالة المجتمعات المحدودة.

1.5. الهدف من التوزيع الهندسي الرائد

كما أشرنا آنفا نحتاج لهذا التوزيع في مقياس إحصاء 4، ولكن قبل ذلك وفي -مقياس إحصاء 3- نضطر لاستعماله في حالة المجتمعات المحدودة التي تتضمن صنفين فقط ونكون مهتمين بمعرفة عدد الصنف الذي يتم دراسته -والذي يمثل المتغيرة العشوائية- في العينة المسحوبة. ولاستعمال هذا التوزيع لا بد من تحقق الشروط الآتية:

1- المجتمع المحدود يتضمن صنفين فقط، والمتغيرة العشوائية تمثل عدد أحد الصنفين المسحوب في العينة؛

2- ذكرنا في النقطة أ العينة، أي عدد التكرارات ثابت ومحدد مسبقا؛

3- لا يشترط ثبات احتمال النجاح من تكرار لآخر كون عملية السحب تتم بدون رجوع.

2.5. دالة الكتلة الاحتمالية

إذا كان لدينا:

1- X مجتمع محدود حجمه N

2- يتضمن صنفين، الصنف الأول وهو الذي سيتم دراسته حجمه K ، والصنف الثاني سيكون حجمه $N-K$ بالتأكيد؛

3- قمنا بسحب عينة عشوائية حجمها n بلون لرجاع من المجتمع المخلوط، حيث تمثل المتغيرة العشوائية عدد مرات سحب الصنف المراد دراسته والذي حجمه K . فإذا توفر كل هذا، يمكن عندئذ كتابة دالة الكتلة الاحتمالية كما يلي:

$$X \sim H(N, K, n) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_K^x C_{N-K}^{n-x}}{C_N^n} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, \min(K, n) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ملاحظة: مجموعة التعريف " $x = 0, 1, 2, \dots, \min(K, n)$ " هذه في حالة ما إذا كان " $K + n \leq N$ ". أما في حالة العكس، أي لما يكون " $K + n > N$ " فإن مجموعة التعريف تصبح " $x = \max(0, n + K - N) \text{ to } \min(K, n)$ ". (Douglas C. Montgomery).
(صفحة 93)

وللتوزيع الهندسي الرائد متوسط وتباين يساويان لـ:

$$X \sim H(N, K, n) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{K}{N}n \\ V(X) = \frac{N-n}{N-1} \frac{K}{N} \left(1 - \frac{K}{N}\right)n \end{cases}$$

بوضع " $p = \frac{K}{N}$ " والتي تمثل احتمال ظهور الصنف المدروس في المجتمع، أو نسبة الصنف المدروس في المجتمع - يمكن إعادة كتابة المتوسط والتباين كما يلي:

$$X \sim H(N, K, n) \xRightarrow{p=\frac{K}{N}} \begin{cases} E(X) = np \\ V(X) = \frac{N-n}{N-1} np(1-p) \end{cases}$$

مثال 6: مبلغ من المال مكون من 1000 ورقة متماثلة كلها من فئة 1000 دج، توجد 200 ورقة مزيفة تستطيع آلة العد الآتوماتيكية كشفها باحتمال 0.99. يطلب منا حساب احتمال العثور على ورقتين مزيفتين إذا تم عد 500 ورقة.

الحل: سنستعمل التوزيع الهندسي الزائد لأن:

1- المجتمع محدود حجمه $N=1000$ ويتضمن صنفين فقط هما: الأوراق المزيقة وحجمها $K=200$

وهي الصفة المدروسة، والصنف الثاني يمثل الأوراق السليمة.

2- العينة حجمها $n=500$ ، وهي مسحوبة بدون إرجاع (لا يعاد عد الورقة المسحوبة)، وبالتالي احتمال

نحاج الحصول على الأوراق المزيقة غير ثابت.

أولاً- دالة كتلة الاحتمال:

$$X \sim H(N, K, n) \xrightarrow{n+K < N} P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_{200}^x C_{1000-200}^{500-x}}{C_{1000}^{500}} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, 200 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{C_{200}^x C_{800}^{500-x}}{C_{1000}^{500}} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, 200 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ثانياً- حساب احتمال العثور على ورقتين مزيقتين إذا تم عد 500 ورقة.

$$P(X = 2) = \frac{C_{200}^2 C_{800}^{500-2}}{C_{1000}^{500}} = \frac{C_{200}^2 C_{800}^{498}}{C_{1000}^{500}} = 4.1725E-67$$

ملاحظة: لم يتم حساب الاحتمال يلويما كونه يستغرق وقتاً، لذا فقد تم حسابه بواسطة برنامج "EXCEL" كما هو مبين في الشكل (3)

الشكل (3): حساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع الهندسي الزائد بواسطة EXCEL				
f_x =LOI.HYPERGEOMETRIQUE(2;500;200;1000)				
B	C	D	E	
	4.1725E-67			

3.5. التقريب إلى التوزيع الثنائي

بالإمكان تقريب التوزيع الهندسي الزائد من التوزيع الثنائي في بعض الحالات التي يكون فيها $\frac{n}{N} \leq 0.05$ ،

أو (Douglas C. Montgomery، صفحة 131) $\frac{n}{N} < 0.1$ أو $\frac{N-n}{N-1} \approx 1$. ولكن هذا

الشروط (الشروط) ليس على الإطلاق، فالنتائج تبقى دوماً نسبية، وفي رأيي الشخصي أنه ما دمنا نستطيع حساب الاحتمالات بالتوزيع الهندسي الزائد فلا نقرب للتوزيع الثنائي، لأنه دوماً بعملية التقريب ستضيع لنا بعض المعلومات التي قد تكون مهمة. وعموماً نأخذ المثال الآتي ونغير من حجم المجتمع وحجم العينة ونحسب نفس الاحتمال بكلتا التوزيعين ونرى نتائج التقريب.

مثال 7: لدينا عدد من الآلات الإنتاجية حجمها N ، عدد من هذه الآلات حجمها NA ينتج قطع بها عيوب. تم سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها n . المطلوب: $P(X = 1)$

- إذا اعتبرنا أن المتغيرة العشوائية تمثل عدد الآلات

التي تنتج القطع المعيبة المسحوبة في العينة

- إذا اعتبرنا أن المجتمع المخلود به صنفين من الآلات

والهدف من التجربة هو دراسة الآلات التي تنتج القطع التي بها عيوب.

الحل :

نستعمل في المطلوب الأول التوزيع الثنائي

$$X \sim B\left(n, p = \frac{NA}{N}\right)$$

أما في المطلوب الثاني فنستعمل التوزيع فوق الهندسي

$$X \sim H(N, NA, n)$$

لحساب الاحتمال في المطلوبين نستعمل "Excel" والنتائج مبينة في الجدول (2)

الجدول (2): المقارنة بين التوزيع الثنائي والهندسي الزائد

التوزيع الهندسي الزائد	التوزيع الثنائي	N	NA	n	P=NA/N	n/N
0,67	0,44	3	2	2	0,6667	0,6667
0,47	0,42	10	3	2	0,3000	0,2000
0,34	0,32	20	4	2	0,2000	0,1000
0,29	0,28	30	5	2	0,1667	0,0667
0,26	0,26	40	6	2	0,1500	0,0500
0,25	0,24	50	7	2	0,1400	0,0400
0,24	0,23	60	8	2	0,1333	0,0333
0,23	0,22	70	9	2	0,1286	0,0286
0,22	0,22	80	10	2	0,1250	0,0250
0,20	0,20	100	11	2	0,1100	0,0200
0,18	0,18	120	12	2	0,1000	0,0167

نلاحظ من الجدول أنه وبداية من السطر الخامس (السطر المظلل) بدأت نتائج التوزيعين تتقارب، أي لما أصبح شرط $\frac{n}{N} \leq 0.05$ محقق.

ملاحظة: في بعض الكتب، يكون التقريب جيد إذا كان: $\frac{n}{N} \leq 0.1$. (Douglas C. Montgomery، صفحة 131)

6. توزيع بواسون

ربما لا نحتاج بكثرة لهذا التوزيع في مقياس إحصاء 4، ولكنه لا يقل أهمية عن التوزيعات السابقة، كونه يستعمل بكثرة في الظواهر المستقلة التي تحدث في مجال زمني ثابت وفق متوسط موجب ومعلوم، (ILLOWSKY, 2018, p. 266) كسلاسل الانتظار (في بحوث العمليات تدرس هذه الظاهرة) أو حوادث المرور كل يوم جمعة، أو زوار مكتب يريد معين بعد وقت محدد، كل هذه الظواهر يتم دراستها بدقة بواسطة توزيع بواسون، حيث نحتاج فقط لما يسمى "متوسط حدوث الظاهرة المعينة $\lambda > 0$ ".

1.6. دالة كتلة الاحتمال

نقول عن متغيرة عشوائية متقطعة -والتي تمثل عدد من الأحداث بمتوسط معلوم- أنها تتبع التوزيع البواسوني بمعلمة قدرها " λ " ونكتب:

$$X \sim p(\lambda) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda} \lambda^x}{x!} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومتوسط وتباين المتغيرة العشوائية التي تتبع توزيع بواسون يكتبان كما يلي:

$$X \sim p(\lambda) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} E(X) = \lambda \\ V(X) = \lambda \end{cases}$$

2.6. دالة التوزيع التراكمي

دالة التوزيع التراكمي لمتغيرة عشوائية تتبع التوزيع البواسوني تكتب كما يلي:

$$X \sim p(\lambda) \Rightarrow F(X) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < 0 \\ \sum_{i=0}^x \frac{e^{-\lambda} \lambda^i}{i!} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots \\ 1 & \text{if } x \rightarrow \infty \end{cases}$$

مثال 8: بالتجربة والملاحظة، يستقبل يوميا مكتب بريد معين خلال شهر رمضان 35 زبونا في المتوسط. يطلب منا حساب احتمال زيارة 85 زبون خلال الثلاث أيام الأخيرة من شهر رمضان.

الحل: سنستعمل توزيع بواسون بمعلمة موجبة قدرها $\lambda = 35$ ، وهي متوسط الزبائن في اليوم، لأنه لدينا مجموعة من الأحداث خلال ثلاثين يوم تحدث بانتظام بمتوسط قدره 35. ومنه نحسب الاحتمال بكل سهولة كما يلي:

لكن قبل ذلك وجب إعادة حساب معلمة التوزيع الجديدة، حيث :

$$\ddot{\lambda} = 35 * 3 = 105$$

$$X \sim p(105) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} \frac{e^{-105} 105^x}{x!} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

إذا:

$$P(X = 85) = \frac{e^{-105} 105^{85}}{85!} = 0.0056$$

في نفس المثال، إذا أردنا حساب احتمال زيارة المكتب على الأقل 25 زبون في اليوم. تكون الإجابة كما يلي:

$$X \sim p(105) \Rightarrow P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - \sum_{x=0}^{24} P(X = x) = 0.9676$$

وبسبب أننا سنحسب 25 احتمالا، وهذا كثير، فقد استعملنا "EXCEL" كما في الشكل (4)

الشكل (4): حساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع البواسوني عن طريق EXCEL					
f_x =1-LOI.POISSON(24;35;VRAI)					
B	C	D	E	F	
	0.9676				
			تدل على أن التوزيع تراكمي		

3.6. التقريب للتوزيع الثنائي

التوزيع البواسوني يمكن الحصول عليه انطلاقاً من التوزيع الثنائي، أي يتم تقريب التوزيع الثنائي للتوزيع البواسوني إذا كان عدد التكرارات كبير جداً واحتمال نجاح التجربة الممثل للمتغيرة العشوائية صغير جداً. وعموماً يمكن القول أن عملية التقريب تتم إذا توفرت ثلاثة شروط مهمة (Immediato، صفحة 3172):

1- حجم العينة كبير بما فيه الكفاية $n \geq 100$ ؛

2- احتمال نجاح التجربة صغير جداً $p \leq 0.01$ ، وهذا معناه أن: $np = np(1 - p)$ ؛

3- بما أن عدد التكرارات كبير جداً، وبما أن احتمال النجاح صغير جداً، فإن: $1 \leq np \leq 10$

إذا، بناءً على الشروط سالفة الذكر يمكن تقريب التوزيع الثنائي للتوزيع بواسون ذو المعلمة $\lambda = np$.

$$B(n, p) \xrightarrow[\substack{n \geq 100 \\ p \leq 0.01}]{p(np)} P(X = x) = \frac{e^{-np} np^x}{x!}$$

مثال 9: كتاب من 600 صفحة يحتوي على 5 أخطاء مطبعية (خطأ على الأكثر في صفحة) لا نعلم هي في أي صفحة، لأنها موزعة عشوائياً على الكتاب. ما هو احتمال أن الـ 120 صفحة الأولى للكتاب لا تحتوي على أي خطأ إذا علمنا أن احتمال الكشف عن الخطأ في أي صفحة هو 0.009.

الحل: سنستعمل التوزيع الثنائي في هذا المثال لأن:

1- الظاهرة الممثلة هنا، وهي الكشف عن الخطأ المطبعي في صفحة ما هي عبارة عن تجربة برنولية

باحتمال نجاح ثابت قدره $p = 0.009$ ؛

2- تكرار التجربة على 120 صفحة، أي $n=120$

ومنه الاحتمال يسلوي إلى:

$$X \sim B(120, 0.009) \rightarrow P(X = 0) = C_{120}^0 * 0.009^0 * 0.991^{120-0} = 0.3379$$

كان بالإمكان تقريب التوزيع الثنائي لتوزيع بواسون بما أن شروط التقريب متوفرة، وبالتالي يمكن كتابة:

$$B(120, 0.009) \xrightarrow[\substack{n > 100 \\ p < 0.01}]{p(120 * 0.009)} P(X = x) = \frac{e^{-1.08} 1.08^x}{x!}$$

إذا:

$$P(X = 0) = \frac{e^{-1.08} 1.08^0}{0!} = 0.3396$$

فالفرق بين النتيجةين هو 0.0017، وهو غير مؤثر في هذا المثال، لكنه ليس كذلك في الدراسات الحساسة مثل الدراسات الطبية والبيولوجية، فينبغي الحذر ولا نقوم بالتقريب إلا للضرورة القصوى.

تمارين المحور الاول:

تمرين 01:

نرمي قطعة نقدية متولزة n مرة. أحسب الاحتمال $P(X = 1)$ في الحالات الآتية:

أولاً. المتغيرة العشوائية X تمثل عدد مرات ظهور الوجه f و $n=1$

ثانياً. المتغيرة العشوائية X تمثل عدد مرات ظهور الوجه f و $n=2$

ثالثاً. المتغيرة العشوائية X تمثل النجاح في الحصول على الوجه f

رابعاً. المتغيرة العشوائية X تمثل عدد مرات ظهور الوجه f و $n=11$

حل التمرين 01:

أولاً. بما أن المتغيرة العشوائية تمثل عدد مرات الحصول على الوجه، واحتمال الحصول عليه ثابت (قطعة نقدية مترنة) ومساوي ل $p=0.5$ فإن التوزيع الاحتمال المستعمل هو التوزيع برنولي، ومنه نحسب الاحتمال كما يلي:

$$X \sim B(0.5) \rightarrow P(X = x) = \begin{cases} 0.5 & \text{if } x = 0 \\ 0.5 & \text{if } x = 1 \end{cases}$$

ومنه

$$P(X = 1) = 0.5$$

ثانياً. لدينا تجربة برنولية تكررت لمرة واحدة، واحتمال النجاح يبقى دوماً ثابتاً، لذا فإن التوزيع الاحتمالي المستعمل هو التوزيع الثنائي. ومنه نحسب الاحتمال كما يلي:

$$X \sim B(2, 0.5) \rightarrow P(X = x) = \begin{cases} C_2^x 0.5^x 0.5^{2-x} & \text{if } x = 0, 1, 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومنه:

$$P(X = 1) = C_2^1 0.5^1 0.5^{2-1} = 2 * 0.25 = 0.5$$

أي، احتمال الحصول على الوجه f من محاولتين هو 0.5.

لو أردنا حساب احتمال الحصول على الوجه مرتين؟ الحل:

$$P(X = 2) = C_2^2 0.5^2 0.5^{2-2} = 1 * 0.25 = 0.25$$

ثالثا. لدينا تجربة برنولية لكنها لن تتوقف إلا بعد النجاح في الحصول على الوجه، واحتمال النجاح يبقى دوما ثابت ومسلوي ل 0.5، لذا فإن التوزيع الاحتمال المستعمل هو التوزيع الهندسي. ومنه نحسب الاحتمال كما يلي:

$$X \sim G(0.5) \rightarrow P(X = x) = \begin{cases} 0.5 \cdot 0.5^{x-1} & \text{if } x = 1, 2, \dots, \infty \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومنه:

$$P(X = 1) = 0.5 \cdot 0.5^{1-1} = 0.5$$

أي، احتمال الحصول على الوجه f من المحاولة رقم 1 هو 0.5.

لو أردنا حساب احتمال الحصول على الوجه من المحاولة رقم 2؟ الحل:

$$P(X = 2) = 0.5 \cdot 0.5^{2-1} = 0.5 * 0.5 = 0.25$$

لو لم ننجح في الحصول على الوجه إلى بعد المحاولة رقم 20؟ الحل:

$$P(X = 20) = 0.5 \cdot 0.5^{20-1} = 0.5^{20}$$

رابعا. لدينا تجربة برنولية تكرر 11 مرة، واحتمال النجاح يبقى دوما ثابت، لذا فإن التوزيع الاحتمال المستعمل هو التوزيع الثنائي. ومنه نحسب الاحتمال كما يلي:

$$X \sim B(11, 0.5) \rightarrow P(X = x) = \begin{cases} C_{11}^x 0.5^x 0.5^{11-x} & \text{if } x = 0, 1, 2, \dots, 11 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ومنه:

$$P(X = 1) = C_{11}^1 0.5^1 0.5^{11-1} = 11 * 0.5 * 0.5^{11-1} = 0.005$$

أي، احتمال الحصول على الوجه f مرة واحدة من 11 محاولة هو 0.005.

تمرين 02:

لدينا : $X \sim B(5, 0.07)$. أحسب الاحتمالات:

$$P(0 < X \leq 5), P(0 \leq X \leq 5), P(X > 1), P(X \geq 1), P(X < 1), P(X \leq 1) \\ P(0 < X < 5), P(0 \leq X < 5)$$

حل التمرين 02:

أولاً. حساب $P(X \leq 1)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$X \sim B(5, 0.07) \Rightarrow F(x) = P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 C_5^x 0.07^x 0.97^{5-x} \\ = P(X = 0) + P(X = 1).$$

$$= C_5^0 0.07^0 0.97^{5-0} + C_5^1 0.07^1 0.97^{5-1} = 0.958$$

يمكن الحصول على هذه النتيجة مباشرة بواسطة "Excel" كما يلي:

نكتب في أي خانة المعادلة

$$=LOI.BINOMIALE(1;5;0.07;VRAI)$$

حيث VRAI تدل على أن الدالة هي دالة التوزيع التراكمي.

ثانياً. حساب $P(X < 1)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$X \sim B(5, 0.07) \Rightarrow P(X < 1) = \sum_{x=0}^0 C_5^x 0.07^x 0.97^{5-x}$$

$$= P(X = 0) = C_5^0 0.07^0 0.93^{5-0} = 0.696$$

ثالثا. حساب $P(X \geq 1)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$X \sim B(5, 0.07) \Rightarrow P(X \geq 1) = \sum_{x=1}^5 C_5^x 0.07^x 0.93^{5-x}$$

$$\begin{aligned} &= P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 1 - P(X = 0) \\ &= 1 - C_5^0 0.07^0 0.93^{5-0} = 0.304 \end{aligned}$$

رابعا. حساب $P(X > 1)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$X \sim B(5, 0.07) \Rightarrow P(X > 1) = \sum_{x=2}^5 C_5^x 0.07^x 0.93^{5-x}$$

$$\begin{aligned} &= P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \\ &= 1 - C_5^0 0.07^0 0.93^{5-0} - C_5^1 0.07^1 0.93^{5-1} = 1 - 0.958 = 0.042 \end{aligned}$$

خامسا. حساب $P(0 \leq X \leq 5)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$X \sim B(5, 0.07) \Rightarrow P(0 \leq X \leq 5) = \sum_{x=0}^5 C_5^x 0.07^x 0.93^{5-x}$$

$$\begin{aligned} &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) \\ &= 1 \end{aligned}$$

سادسا. حساب $P(0 < X \leq 5)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$\begin{aligned}
X \sim B(5, 0.07) &\Rightarrow P(0 < X \leq 5) = \sum_{x=1}^5 C_5^x 0.07^x 0.97^{5-x} \\
&= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \\
&= 1 - C_5^0 0.07^0 0.97^{5-0} = 0.304
\end{aligned}$$

سابعاً. حساب $P(0 \leq X < 5)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$\begin{aligned}
X \sim B(5, 0.07) &\Rightarrow P(0 \leq X < 5) = \sum_{x=0}^4 C_5^x 0.07^x 0.97^{5-x} \\
&= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \\
&= 1 - C_5^5 0.07^5 0.97^{5-5} \simeq 1
\end{aligned}$$

ثامناً. حساب $P(0 < X < 5)$

من دالة التوزيع التراكمي. لدينا:

$$\begin{aligned}
X \sim B(5, 0.07) &\Rightarrow P(0 < X < 5) = \sum_{x=1}^4 C_5^x 0.07^x 0.97^{5-x} \\
&= P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = \\
&= 1 - C_5^0 0.07^0 0.97^{5-0} - C_5^5 0.07^5 0.97^{5-5} = 0.304
\end{aligned}$$

تمرين 03:

لتشكيل لجنة مكونة من 4 أشخاص من مجموع 20 ذكر وأنثى منهم 14 ذكور. إذا كانت المتغيرة العشوائية

تمثل عدد الإناث في العينة المسحوبة. المطلوب:

أولاً. ما هو احتمال أن نجد 3 إناث في اللجنة؟

ثانياً. أعد الإجابة عن نفس المطلوب في أولاً بفرض أن العدد الكلي 300 منهم 250 ذكور؟

حل التمرين 03:

أولاً. لدينا مجتمع مكون من صنفين والسحب بلون لرجاع، لذا سنستخدم التوزيع فوق الهندسي، أي:

$$X \sim G(20, 6, 4) \rightarrow P(X = x) = \begin{cases} \frac{C_6^x C_{14}^{4-x}}{C_{20}^4} & \text{if } x = 0, 1, 2, 3, 4 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

وحساب الاحتمال يكون بكل سهولة كما يلي:

$$X \sim G(20, 6, 4) \rightarrow P(X = 3) = \frac{C_6^3 C_{14}^{4-3}}{C_{20}^4} = 0.058$$

أي أن احتمال وجود 3 إناث في اللجنة هو 0.058.

ثانياً. يمكن حساب الاحتمال بواسطة دالة الكتلة للتوزيع فوق الهندسي، أي:

$$X \sim G(300, 50, 4) \rightarrow P(X = 3) = \frac{C_{50}^3 C_{250}^{4-3}}{C_{300}^4} = 0.015$$

كما يمكن حساب الاحتمال بعد التقريب للتوزيع الثنائي لأن $\frac{n}{N} = 0.01 < 0.05$

$$G(300, 50, 4) \xrightarrow{\frac{n}{N} < 0.05} B(4, 0.17)$$

حيث 0.17 هو الذي يمثل احتمال النجاح، وهو مساوي لنسبة الإناث في المجتمع، أي $p = \frac{50}{300}$

ومنه:

$$X \sim B(4, 0.17) \rightarrow P(X = 3) = C_4^3 0.17^3 0.83^{4-3} = 0.016$$

الفرق بين النتيجةين ضئيل جداً.

تمرين 04:

من التجارب السابقة نعرف أن متوسط حوادث المرور في اليوم هو 10 حوادث. نريد حساب احتمال وقوع

20 حادث في يوم ما؟ ثم ما هو احتمال وقوع 4 حوادث في ساعة؟

حل التمرين 04:

سنستعمل توزيع بواسون لأنه هو الذي يتعامل مع الحوادث أو الظواهر التي تحدث عبر الزمن بمتوسط منتظم.
إذا:

$$X \sim p(10) \rightarrow P(X = x) = \frac{e^{-10} 10^x}{x!} \text{ if } x = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

أولاً. حساب احتمال وقوع 20 حادث في يوم:

$$P(X = 20) = \frac{e^{-10} 10^{20}}{20!} = 0.002$$

هنالك احتمال ضعيف قدره 0.002 لوقوع 20 حادث في يوم معين.

ثانياً. حساب احتمال وقوع 4 حوادث في ساعة: قبل حساب الاحتمال لابد من حساب معلمة التوزيع الجديدة والممثلة لمتوسط الحوادث في ساعة. إذا:

ومنه:

$$\begin{array}{ccc} 10 & \leftarrow & 24 \text{ ساعة} \\ \lambda & \leftarrow & 1 \text{ ساعة} \end{array} \Rightarrow \lambda = \frac{10}{24} = 0.42$$

الآن نحسب الاحتمال كما يلي:

$$P(X = 4) = \frac{e^{-0.42} 0.42^4}{4!} = 0.001$$

تمرين 05:

في مسابقة للرماية، يوجد متسابق هدفه إصابة الهدف. نريد معرفة الآتي:

أولاً. ماهو احتمال اصابته للهدف إذا كانت لديه فرصة واحدة؟

ثانياً. ماهو احتمال اصابته للهدف في كل محاولة إذا كانت لديه فرصتين؟

ثالثاً. ماهو احتمال اصابته للهدف مرتين إذا كانت لديه ثلاثة محاولات؟

رابعاً. ماهو احتمال اصابته للهدف بعد المحاولة الخامسة إذا كان عدد المحاولات غير مسقف؟

حل التمرين 05:

الهدف من كل التجارب هو نجاح الرامي في إصابة الهدف، وبما أنه لم يتم ذكر احتمال النجاح فسنقره ب 0.5، أي قد ينجح في إصابة الهدف وقد يفشل، أي لدينا تجربة برنولية.

أولاً. احتمال اصابته للهدف إذا كانت لديه فرصة واحدة يتم بواسطة دالة الكتلة لتوزيع برنولي، وهذا الاحتمال هو 0.5.

ثانياً. احتمال اصابته للهدف في كل محاولة إذا كانت لديه فرصتين يتم بواسطة التوزيع الثنائي، لأنه لدينا تجربة برنولية تكررت مرتين والمتغيرة العشوائية تمثل عدد مرات النجاح في العينة، ونكتب:

$$X \sim B(2, 0.5) \rightarrow P(X = 2) = C_2^2 0.5^2 0.5^{2-2} = 0.250$$

ثالثاً. احتمال اصابته للهدف مرتين إذا كانت لديه ثلاثة محاولات يتم أيضاً بواسطة التوزيع الثنائي، ونكتب:

$$X \sim B(3, 0.5) \rightarrow P(X = 2) = C_3^2 0.5^2 0.5^{3-2} = 0.375$$

رابعاً. احتمال اصابته للهدف بعد المحاولة الخامسة إذا كان عدد المحاولات غير مسقف يتم بواسطة التوزيع الهندسي، لأنه لدينا تجربة برنولية وعدد التكرارات غير محدد، والهدف من التجربة هو التوقف بعد إصابة الهدف، ونكتب:

$$X \sim G(0.5) \rightarrow P(X = 5) = 0.5 \cdot 0.5^{5-1} = 0.03125$$

كان بالإمكان الإجابة عن المطلوب في أولاً باستعمال التوزيع الهندسي ونكتب:

$$X \sim G(0.5) \rightarrow P(X = 1) = 0.5 \cdot 0.5^{1-1} = 0.5$$

تمرين 06:

لدينا مترشحين اثنين، الأول يؤيده 40 بالمئة من المنتخبين، والثاني 60 بالمئة. نسحب عينة حجمها 400 منتخب. المطلوب: ماهو احتمال الحصول على 300 مؤيد للمرشح الأول إذا علمت أن عدد المنتخبين الكلي هو 5000.

حل التمرين 06:

سنستعمل التوزيع فوق الهندسي لأنه لدينا صنفين ونحن نهتم بنجاح التجربة في الصنف الأول (وأيضا المجتمع محدود) والسحب بدون إرجاع.

$$X \sim G(5000, 5000 * 0.4 = 2000, 400) \rightarrow P(X = 300) \\ = \frac{C_{2000}^{300} C_{3000}^{400-300}}{C_{5000}^{400}} = 0.00$$

تم حساب النتيجة بالإكسل، لأنه يدويا سيستغرق حلها وقتا. لم نقرب التوزيع للتوزيع الثنائي نظرا لأن شروط التقريب غير متوفرة، أي: $\frac{n}{N} > 0.05$

مثلا، لو كان العدد الكلي للمنتخبين 10000 فإنه يمكن التقريب للتوزيع الثنائي ونكتب:

$$G(10000, 4000, 400) \xrightarrow{\frac{n}{N} < 0.05} B(400, 0.4)$$

ويمكن تقريب هذا التوزيع الثنائي للتوزيع الطبيعي لأن شروط التقريب متوفرة أيضا (سنرى ذلك في المحور الثاني):

$$G(10000, 4000, 400) \xrightarrow{\frac{n}{N} < 0.05} B(400, 0.4) \xrightarrow[\substack{\text{و} \\ n(1-p) > 5}]{np > 5} N(np, np(1-p)) \\ = 160, np(1-p) = 96$$

ويمكن حساب الاحتمال:

$$P(X \leq 300) = 1 - \sum_{x=301}^{400} \frac{C_{4000}^x C_{6000}^{400-x}}{C_{10000}^{400}} = 1$$

وبالتقريب للتوزيع الثنائي:

$$P(X \leq 300) = 1 - \sum_{x=301}^{400} C_{400}^x 0.4^x 0.6^{400-x} = 1$$

وبالتقريب للتوزيع الطبيعي:

$$P(X \leq 300) = P(Z \leq \frac{300.5 - 160}{\sqrt{96}}) = 1$$

ماذا لو أردنا حساب احتمال ظهور مؤيد واحد على الأكثر للمرشح الأول في العينة؟ لدينا:

$$P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 \frac{C_{4000}^x C_{6000}^{400-x}}{C_{10000}^{400}} = 0$$

وبالتقريب للتوزيع الثنائي:

$$P(X \leq 1) = \sum_{x=0}^1 C_{400}^x 0.4^x 0.6^{400-x} = 0$$

وبالتقريب للتوزيع الطبيعي:

$$P(X \leq 1) = P(Z \leq \frac{1.5 - 160}{\sqrt{96}}) = 0$$

ماذا لو أردنا حساب احتمال ظهور 171 مؤيد على الأكثر للمرشح الأول في العينة؟ لدينا:

$$P(X \leq 171) = \sum_{x=0}^{171} \frac{C_{4000}^x C_{6000}^{400-x}}{C_{10000}^{400}} = 0.8843$$

وبالتقريب للتوزيع الثنائي:

$$P(X \leq 171) = \sum_{x=0}^{171} C_{400}^x 0.4^x 0.6^{400-x} = 0.8795$$

وبالتقريب للتوزيع الطبيعي:

$$P(X \leq 171) = P(Z \leq \frac{171.5 - 160}{\sqrt{96}}) = 0.8797$$

فالتائج الثلاثة تقترب من الاحتمال 0.88

تمرين 07:

إذا كان لدينا : $X \sim B(n, 0.09)$. ماهي قيمة المقدار n بحيث :

$$P(X = 0) = 0.69$$

حل التمرين 07:

لدينا:

$$X \sim B(n, 0.09) \Leftrightarrow P(X = 0) = C_n^0 0.09^0 0.91^n = 0.69$$

$$\Leftrightarrow 0.91^n = \frac{0.69}{C_n^0}$$

وبما أن:

$$C_n^0 = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1$$

إذا:

$$0.91^n = 0.69 \Leftrightarrow n = \frac{\log(0.69)}{\log(0.91)} = 4$$

تمرين 08:

لدينا طائر البغاء في قفص به خمسة أبواب منها أربعة أبواب وهمية وباب واحد حقيقي يمكن للطائر الخروج منه، علما أن الطائر لا يتعلم من التجارب السابقة .

1/ حدد قانون التوزيع الاحتمالي المناسب (المتغير العشوائي X نجاح الطائر في الخروج من القفص) ؟

2/ ماهو احتمال نجاح الطائر في الخروج من القفص في التجربة الرابعة ؟

3/ حدد قانون التوزيع الاحتمالي المناسب (المتغير العشوائي X يمثل عدد مرات نجاح الطائر في الخروج من

القفص بعد 5 محاولات) ثم أعد الإجابة عن السؤال 2؟

4/ هل نستطيع استخدام قوانين التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في السؤالين الأول والثالث إذا كان البغاء

يتعلم من تجاربه السابقة، علل لماذا؟

حل التمرين 08:

1/ لدينا تجربة برنولية والمتغيرة العشوائية تمثل النجاح في الخروج من القفص باحتمال نجاح ثابت (ثبات احتمال النجاح يعبر عنه بعدم تعلم البيغاء من التجارب السابقة، أي أنه في كل مرة يحاول الخروج بشكل عشوائي) وبالتالي التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع الهندسي الذي يكتب كما يلي:

$$X \sim G\left(p = \frac{1}{5} = 0.2\right) \Rightarrow P(X = x) = 0.2 * 0.8^{x-1} \text{ if } x = 1, 2, \dots$$

2/ حساب احتمال نجاح الطالب في الخروج من المحولة الرابعة، أي:

$$P(X = 4) = 0.2 * 0.8^{4-1} = 0.1024$$

3/ لدينا تجربة برنولية تكرر خمسة مرات والمتغيرة العشوائية تمثل عدد مرات النجاح في الخروج من القفص باحتمال نجاح ثابت (ثبات احتمال النجاح يعبر عنه بعدم تعلم البيغاء من التجارب السابقة، أي أنه في كل مرة يحاول الخروج بشكل عشوائي) وبالتالي التوزيع الاحتمالي المناسب هو التوزيع الهندسي الذي يكتب كما يلي:

$$X \sim B\left(5; p = \frac{1}{5} = 0.2\right) \Rightarrow P(X = x) = \begin{cases} C_5^x 0.2^x * 0.8^{5-x} & \text{if } x = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

الآن يمكن حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(X = 4) = C_5^4 0.2^4 * 0.8^{5-4} = 0.0064$$

4/ لا نستطيع استخدام قوانين التوزيعات الاحتمالية المستخدمة في السؤالين الأول والثالث إذا كان البيغاء يتعلم من تجاربه السابقة، لأنه في حالة تعلم البيغاء من تجاربه السابقة فإن احتمال نجاح البيغاء من القفص سيتغير وهذا شرط مهم لاستخدام التوزيع الثنائي والتوزيع الهندسي

تمرين 09:

في التمرين 8 إذا كان عدد الأبواب الوهمية غير معلوم، والطائر لا يتعلم من التجارب السابقة، ولرؤنا حساب احتمال نجاح الطائر في الخروج من القفص في التجربة الرابعة علما أن متوسط المتغيرة العشوائية يساوي 2.

حل التمرين 09:

من معطيات التمرين يتضح لنا أن المتغيرة العشوائية تتبع التوزيع الهندسي، غير أننا لا نعلم احتمال النجاح في الخروج من القفص لأن عدد الأبواب غير معلوم، ولكن يمكن حساب هذا الاحتمال بكل سهولة انطلاقا من الأمل الرياضي للمتغيرة العشوائية المعطى في التمرين، أي:

$$E(X) = \frac{1}{p} = 2 \Rightarrow p = 0.5$$

الآن يمكن حساب الاحتمال كما يلي:

$$X \sim G(0.5) \Rightarrow P(X = 4) = 0.5 * 0.5^{4-1} = 0.0256$$

ملاحظة: يمكن بكل سهولة استنتاج أن عدد الأبواب الوهمية هو باب واحد فقط

المحور الثاني: التوزيعات

الاحتمالية للمتغيرة

العشوائية المستمرة

والتقريب بينها

تمهيد

يكتسي هذا النوع من التوزيعات الاحتمالية أهمية خاصة في النمذجة الإحصائية، نظرا لقدرته على تمثيل عدد كبير من الظواهر الطبيعية والاقتصادية والاجتماعية التي تتسم بالاستمرارية، مثل الزمن، والقياسات الفيزيائية، والمتغيرات الاقتصادية الكلية. وغير ذلك.

ويوصف المتغير العشوائي المتصل من خلال دالة الكثافة الاحتمالية (في المتغيرة العشوائية سميناه بدالة الكتلة الاحتمالية)، التي تحدد كيفية توزيع الاحتمالات على مجال القيم الممكنة، مع احترام الشروط الأساسية للتوزيع الاحتمالي، وعلى رأسها تكاملها على المجال الكامل ليكون مساويا للواحد الصحيح. ومن خلال هذه الدالة، يمكن اشتقاق الخصائص الإحصائية الأساسية للمتغير، مثل القيمة المتوقعة والتباين، إلى جانب حساب الاحتمالات على فترات محددة بدلا من قيم منفردة، وهذا من خلال دالة التوزيع التراكمي والتي سيغني عنها استخدام الجداول الإحصائية كما سنرى بالتفصيل.

وتوجد عدة توزيعات احتمالية متصلة كل منها متلائم مع خصائص وسلوكيات مختلفة للظواهر العشوائية، مثل التوزيع المنتظم الذي يعتبر من أبسط هذه التوزيعات، إذ يفترض تساوي الاحتمالات على مجال محدد، مما يجعله مناسباً لتمثيل حالات عدم التحيز أو نقص المعلومات المسبقة. أما التوزيع الطبيعي، فيعتبر من أكثر التوزيعات أهمية وانتشاراً، نظراً لخواصه الرياضية المتميزة ودوره المحوري في نظرية النهاية المركزية، فضلاً عن استخدامه الواسع في التحليل الإحصائي والاستدلالي.

كما تبرز توزيعات أخرى ذات طابع استدلالي وتحليلي متقدم، مثل توزيع كاي مربع، الذي يرتبط بتحليل التباين وتقديره واختبار الفرضيات، وتوزيع ستودنت، الذي يستخدم أساساً في تقدير المتوسطات واختبارها في حالة عدم معرفة تباين المجتمع. ويضاف إلى ذلك توزيع فيشر، الذي يعد أداة مركزية في مقارنة التباينات وتحليل التباين المتعدد.

ومن جهة أخرى، تستخدم توزيعات أكثر مرونة مثل توزيع بيتا وتوزيع غاما لنمذجة متغيرات ذات مجالات محددة أو غير متناظرة، حيث يتميز كل منهما بقدرة عالية على التكيف مع أشكال مختلفة من التوزيعات وفقاً لمعلماتها. وتبرز أهمية هذه التوزيعات في التطبيقات الاقتصادية والبيولوجية والهندسية.

وعليه، فإن دراسة التوزيعات الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل، مع التركيز على أبرزها وخصائصها تشكل قاعدة نظرية لا غنى عنها في بناء نماذج الاستدلال الإحصائي واختبار الفرضيات وتفسير النتائج العلمية بدقة وموضوعية.

1. التوزيع المنتظم المستمر

يعتبر من بين أبسط التوزيعات الاحتمالية المستمرة ولا يستعمل في كثرة في الدراسات الإحصائية وخاصة في احصاء4.

1.1. دالة الكثافة

نقول عن متغيرة عشوائية مستمرة أنها تتبع التوزيع المنتظم إذا كانت دالة كثافتها الاحتمالية مكتوبة من الشكل:

$$X \sim U(a, b) \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{if } x \in [a, b] \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

ونكتب المتوسط والتباين كما يلي:

$$X \sim U(a, b) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{a+b}{2} \\ V(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \end{cases}$$

2.1. دالة التوزيع التراكمي

تعتبر دالة التوزيع التراكمي مهمة جدا في التوزيعات المستمرة، لأنه يتم بواسطتها حساب أي احتمال. وبالنسبة للتوزيع المنتظم فإن هذه الدالة تكتب كما يلي:

$$X \sim U(a, b) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x) \cdot dx =$$

$$\int_{-\infty}^x \frac{1}{b-a} \cdot dx = \int_a^x \frac{1}{b-a} \cdot dx = \frac{x-a}{b-a}$$

إذا:

$$X \sim U(a, b) \Rightarrow F(x) = P(X \leq x) = \frac{x-a}{b-a}$$

ونكتب بصفة عامة:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{if } a \leq x < b \\ 1 & \text{if } x \geq b \end{cases}$$

ملاحظة تعميم على كل المتغيرات العشوائية المتصلة: لا يوجد فرق بين الاحتمالات من الشكل (" $>$ ") أو (" $\geq$ ") و (" $<$ " أو " $\leq$ ") وهذا بخلاف المتغيرات العشوائية المتقطعة.

مثال 10: إذا كان لدينا متغيرة عشوائية تتبع التوزيع المنتظم المتصل على المجال $[1,2]$. المطلوب: ماهو

احتمال أن المتغيرة العشوائية أقل من 1.5

الحل:

$$X \sim U(1,2) \Rightarrow F(x) = P(X \leq 1.5) = \frac{1.5 - 1}{2 - 1} = 0.5$$

2. التوزيع الطبيعي

يعتبر من بين أهم التوزيعات الاحتمالية وأكثرها شهرة، حيث لا تكاد تخلو أي دراسة إحصائية منه، بالإضافة إلى أن أغلب التوزيعات الاحتمالية المستمرة مشتقة منه، سواء من خلال التقريب باستخدام نظرية النهاية المركزية أو مثل التوزيع كاي مربع وستودنت كما سنرى لاحقاً.

1.2. قانون التوزيع الاحتمالي

نقول عن متغيرة عشوائية مستمرة أنها تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط وتباين إذا كانت دالة كثافتها الاحتمالية مكتوبة من الشكل:

تدل على التوزيع الطبيعي، أول حرف من الكلمة Normal

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, x \in]-\infty, +\infty[$$

متوسط المتغيرة العشوائية

تباين المتغيرة العشوائية

ونكتب المتوسط والتباين كما يلي:

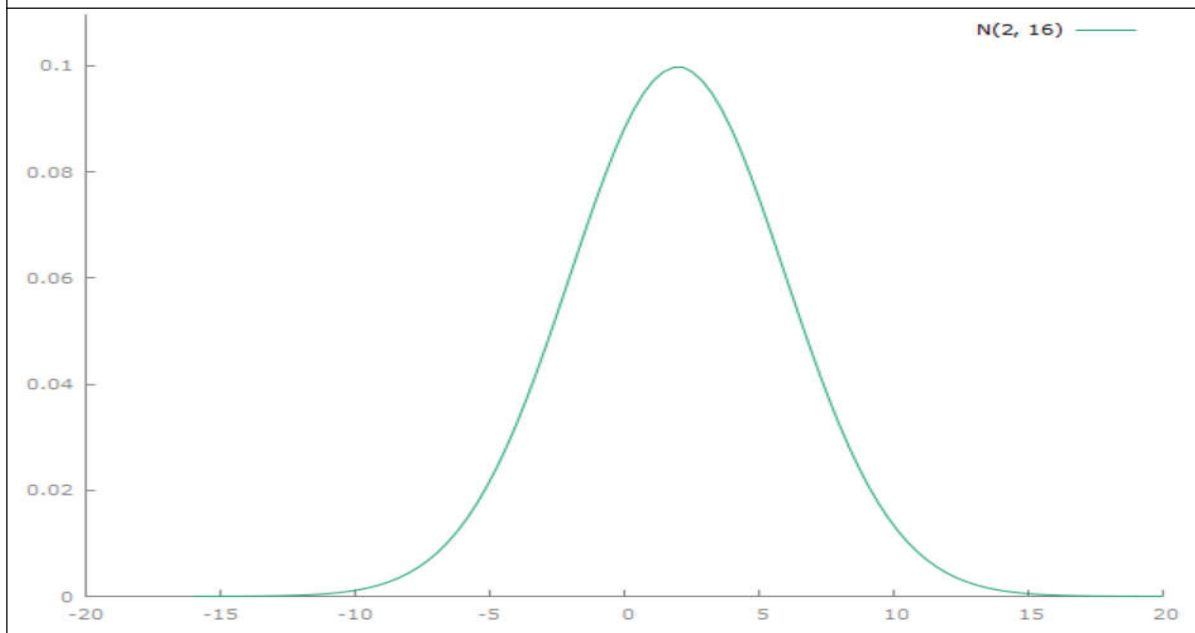
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \Rightarrow \begin{cases} E(X) = \mu \\ V(X) = \sigma^2 \end{cases}$$

ومن الضروري معرفة التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي الموضح في الشكل (5) لفهم كيفية حساب الاحتمالات الممثلة بالمساحات تحت هذا المنحني.

ملاحظة: إذا كان لدينا متغيرتين عشوائيتين مستقلتين فيما بينهما وتتبعان التوزيع الطبيعي فإنه:

$$\begin{cases} X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X + Y \sim N(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \\ X - Y \sim N(\mu_1 - \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2) \end{cases}$$

الشكل (5): التمثيل البياني للتوزيع الطبيعي ذو المتوسط 2 وتباين 16

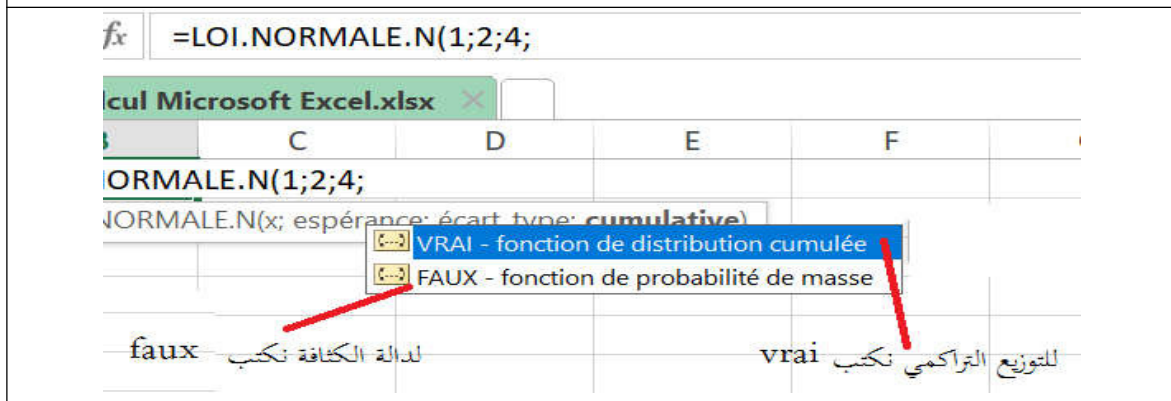


2.2. دالة التوزيع التراكمي

تعتبر دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي مهمة أيضاً، ولكنها وبخلاف التوزيع المنتظم لا يمكننا من حساب الاحتمال يدوياً كون التكامل في هذه الحال يصعب حله يدوياً. فما هو الحل؟ حل هذه المشكلة:

أولاً - إما نستعمل البرامج الإحصائية وأبسطها "excel" كما هو مبين في الشكل (6)

الشكل (6): التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي باستخدام "Excel"



ثانياً- نقوم بتحويل التوزيع الطبيعي للتوزيع المعياري:

لحساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع الطبيعي يدويا وبكل سهولة، يكفي تحويل التوزيع الطبيعي للتوزيع المعياري ثم استخدام الجدول الاحصائي لهذا الأخير كما سنبينه الآن بالتفصيل .

للتحول من التوزيع الطبيعي للتوزيع المعياري الذي متوسطه معلوم وتباينه يساوي 1 يكفي أن نطرح المتوسط من المتغيرة العشوائية X ونقسم الكل على الانحراف المعياري، أي:

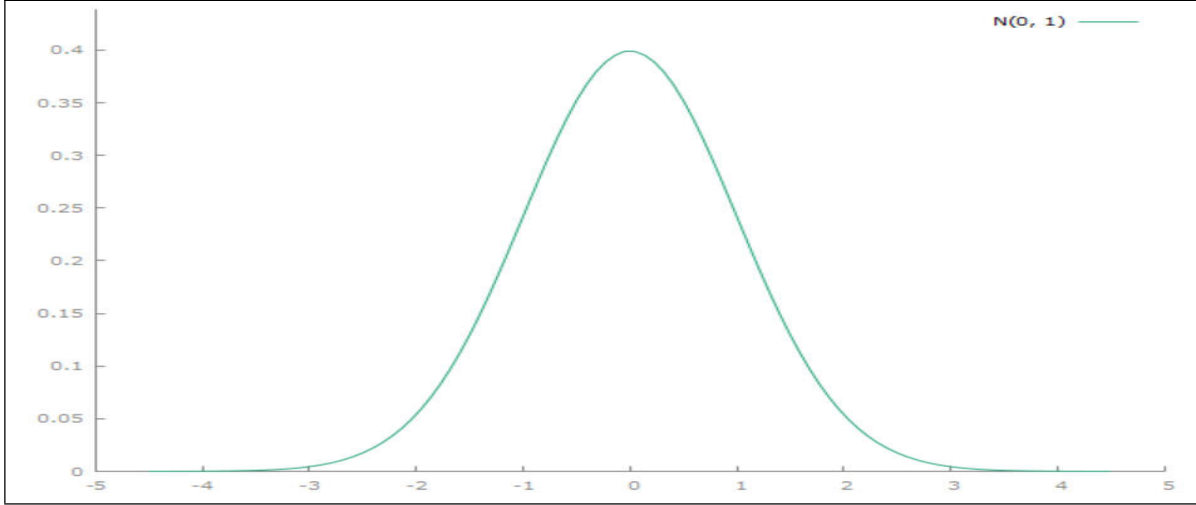
$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \xrightarrow{Z = \frac{X - \mu}{\sigma}} Z \sim N(0, 1)$$

المتغيرة العشوائية Z تمثل التوزيع المعياري، ودالة كثافتها الاحتمالية تكتب من الشكل الآتي:

$$Z \sim N(0, 1) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, x \in]-\infty, +\infty[$$

كما أن تمثيلها البياني موضح في الشكل (7)

الشكل (7): التمثيل البياني للتوزيع المعياري



السؤال المطروح الآن، كيف يتم حساب الاحتمالات باستخدام جدول التوزيع المعياري؟ لنأخذ المثال الآتي:

مثال 11: لدينا متغيرة عشوائية X تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 10 وتباين قدره 16. ما هو احتمال أن هذه المتغيرة العشوائية أقل من 15؟

الحل: بما أنه لا يمكن حساب الاحتمال مباشرة بالتوزيع الطبيعي فلا بد من تحويله للتوزيع المعياري، أي:

$$X \sim N(10, 16) \xrightarrow{Z = \frac{X-10}{4}} Z \sim N(0, 1)$$

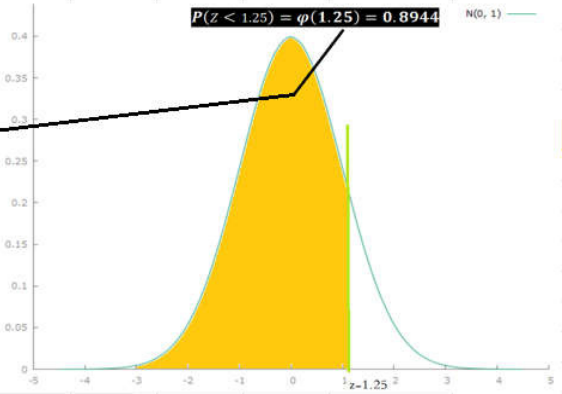
ومنه:

$$P(X < 15) = P\left(\frac{X - 10}{4} < \frac{15 - 10}{4}\right) = P(Z < 1.25) = \varphi(1.25) = 0.8944$$

الآن وباستخدام الجدول المعياري نحسب الاحتمال كما هو موضح في الشكل (8)

الشكل (8): كيفية حساب الاحتمالات باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري

z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09		
0	0.5000	0.5040	0.5080			0.5199						
0.1	0.5398	0.5438	0.5478			0.5596						
0.2	0.5793	0.5832	0.5871			0.5987						
0.3	0.6179	0.6217	0.6255			0.6368						
0.4	0.6554	0.6591	0.6628			0.6736						
0.5	0.6915	0.6950	0.6985			0.7088						
0.6	0.7257	0.7291	0.7324			0.7422						
0.7	0.7580	0.7611	0.7642			0.7734						
0.8	0.7881	0.7910	0.7939			0.8023						
0.9	0.8159	0.8186	0.8212			0.8289						
1	0.8413	0.8438	0.8461			0.8531						
1.1	0.8643	0.8665	0.8686			0.8749						
1.2	0.8849	0.8869	0.8888			0.8944						
1.3	0.9032	0.9049	0.9066			0.9115						
1.4	0.9192	0.9207	0.9222			0.9265						
1.5	0.9332	0.9345	0.9357			0.9394						
1.6	0.9452	0.9463	0.9474			0.9505						
1.7	0.9554	0.9564	0.9573			0.9599						
1.8	0.9641	0.9649	0.9656			0.9678						
1.9	0.9713	0.9719	0.9726			0.9744						
2	0.9772	0.9778	0.9783			0.9798						
2.1	0.9821	0.9826	0.9830			0.9842						
2.2	0.9861	0.9864	0.9868			0.9878						



حيث مجموع رقم من أول عمود وأول سطر تمثل Z ، والتقاطع ما بين هاذين الرقمين يمثل الاحتمال المطلوب، كما هو مبين في الشكل (8)، حيث:

$Z=1.25$ هي مجموع الرقم 1.2 من العمود الأول و الرقم 0.05 من السطر الأول.

مثال 12: إذا كان لدينا متغيرة عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 5 وتباين 4. أحسب الاحتمالات

الآتية: $P(X \leq 6)$ ، $P(X \leq 8)$

الحل: لحساب الاحتمالين باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري وجب تحويل المتغيرة العشوائية للتوزيع الطبيعي المعياري، أي:

$$X \xrightarrow{\frac{X-\mu}{\sigma}} Z$$

الآن نحسب الاحتمالين كما يلي:

الاحتمال الأول:

$$P(X \leq 6) = P\left(Z \leq \frac{6-5}{2}\right) = P(Z \leq 0.5) = \varphi(0.5) = 0.6915$$

كيف تم استعمال الجدول هنا؟ بكل بساطة نذهب للعمود الأول أين يوجد الرقم 0.5 وبالتقاطع مع 0.00 الموجودة في السطر الأول نجد الاحتمال 0.6915 كما هو مبين في الشكل (9)

الاحتمال الثاني:

$$P(X \leq 8.5) = P\left(Z \leq \frac{8.5 - 5}{2}\right) = P(Z \leq 1.75) = \varphi(1.75) = 0.9599$$

كيف تم استعمال الجدول هنا؟ نذهب للعمود الأول أي يوجد الرقم 1.7 وبالتقاطع مع 0.05 الموجودة في السطر الأول نجد الاحتمال 0.9599 كما هو مبين في الشكل (9)

الشكل (9): كيفية حساب الاحتمالات باستعمال جدول التوزيع الطبيعي المعياري $\varphi(1.75)$

الاحتمال الأول:					
z	0	0.01	0.02	0.03	0.04
0	0.5000	0.5040	0.5080		
0.1	0.5398	0.5438	0.5478		
0.2	0.5793	0.5832	0.5871		
0.3	0.6179	0.6217	0.6255		
0.4	0.6554	0.6591	0.6628		
0.5	0.6915	0.6950	0.6985		
0.6	0.7257	0.7291	0.7324		
0.7	0.7580	0.7611	0.7642		
0.8	0.7881	0.7910	0.7939		
0.9	0.8159	0.8186	0.8212		
1	0.8413	0.8438	0.8461		
1.1	0.8643	0.8665	0.8686		
1.2	0.8849	0.8869	0.8888		
1.3	0.9032	0.9049	0.9066		
1.4	0.9192	0.9207	0.9222		
1.5	0.9332	0.9345	0.9357		
1.6	0.9452	0.9463	0.9474		
1.7	0.9554	0.9564	0.9573		
1.8	0.9641	0.9649	0.9656		

الاحتمال الثاني:

z	0	0.01
0	0.5000	0.5040
0.1	0.5398	0.5438
0.2	0.5793	0.5832
0.3	0.6179	0.6217
0.4	0.6554	0.6591
0.5	0.6915	0.6950
0.6	0.7257	0.7291
0.7	0.7580	0.7611

ملاحظة: يستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري بطريقة مباشرة إذا كانت المتغيرة العشوائية Z أصغر أو أصغر أو تساوي من عدد موجب، أي الاحتمالات من الشكل: $P(Z \leq \text{عدد موجب})$. إذن التساؤل المطروح هنا كيف يتم حساب الاحتمالات في حالة لم يتوفر لدينا هذا الشرط؟ الحل مبين في الجدول (3)

الجدول (3) أمثلة عن حساب الاحتمالات إذا لم يتوفر الشكل $P(Z \leq \text{عدد موجب})$.
أولاً: الاحتمال من الشكل $P(Z \leq -1.75)$ يحسب كما يلي: $P(Z \leq -1.75) = P(Z \geq 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 0.0401$
ثانياً: الاحتمال من الشكل $P(Z \geq -1.75)$ يحسب كما يلي: $P(Z \geq -1.75) = P(Z \leq 1.75) = 0.9599$
ثالثاً: الاحتمال من الشكل $P(Z \geq 1.75)$ يحسب كما يلي: $P(Z \geq 1.75) = 1 - P(Z < 1.75) = 0.0401$
رابعاً: الاحتمال من الشكل $P(Z \leq -1.75)$ يحسب كما يلي: $P(-1.75 \leq Z \leq 1.75) = P(Z \leq 1.75) - P(Z \leq -1.75)$ $= P(Z \leq 1.75) - 1 + P(Z < 1.75) = 0.9199$

3.2. تقريب بعض التوزيعات للتوزيع الطبيعي

أ. تقريب التوزيع الثنائي للتوزيع الطبيعي: كما تم تقريب التوزيع الثنائي للتوزيع بواصون، كذلك يمكن تقريبه للتوزيع الطبيعي، ويكون التقريب جيد إذا توفر الشرطين (Douglas C. Montgomery، صفحة 129):

$$\begin{cases} np > 5 \\ n(1-p) > 5 \end{cases}$$

أو (Anderson, 2015, p. 364):

$$\begin{cases} np \geq 5 \\ n(1-p) \geq 5 \end{cases}$$

ومنه نكتب بناء على تحقق الشرطين سالف الذكر:

$$X \sim B(n, p) \xrightarrow{\begin{cases} np > 5 \\ n(1-p) > 5 \end{cases}} \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}} \sim N(0,1)$$

ولحساب الاحتمالات باستخدام التوزيع الطبيعي المعياري بعد ذلك لا، بد من إضافة معامل تصحيح الاستمرارية "continuity correction" المقترح من طرف ياتس، أي الانتقال من المتغيرة العشوائية

المتقطعة إلى المتغيرة العشوائية المستمرة يحتاج إلى تصحيح كما يلي (Douglas C. Montgomery، صفحة 129):

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

و

$$P(X \geq x) = P\left(Z \geq \frac{x - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

و

$$P(X = x) = P\left(\frac{x - np - 0.5}{\sqrt{np(1-p)}} \leq Z \leq \frac{x - np + 0.5}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$$

ب. تقريب توزيع بواصون للتوزيع الطبيعي: إذا كانت معلمة التوزيع بواصون $\lambda > 5$ (أو أكبر من 20).
(Vincent Giard, 2003, p. 144) فإنه يتم تقريبه للتوزيع الطبيعي، وذلك وفق ما يلي:

$$X \sim p(\lambda) \xrightarrow{\lambda > 5} \frac{X - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \sim N(0,1)$$

وبتصحيح الاستمرارية نحسب الاحتمالات كما يلي (Douglas C. Montgomery، صفحة 131):

$$P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

و

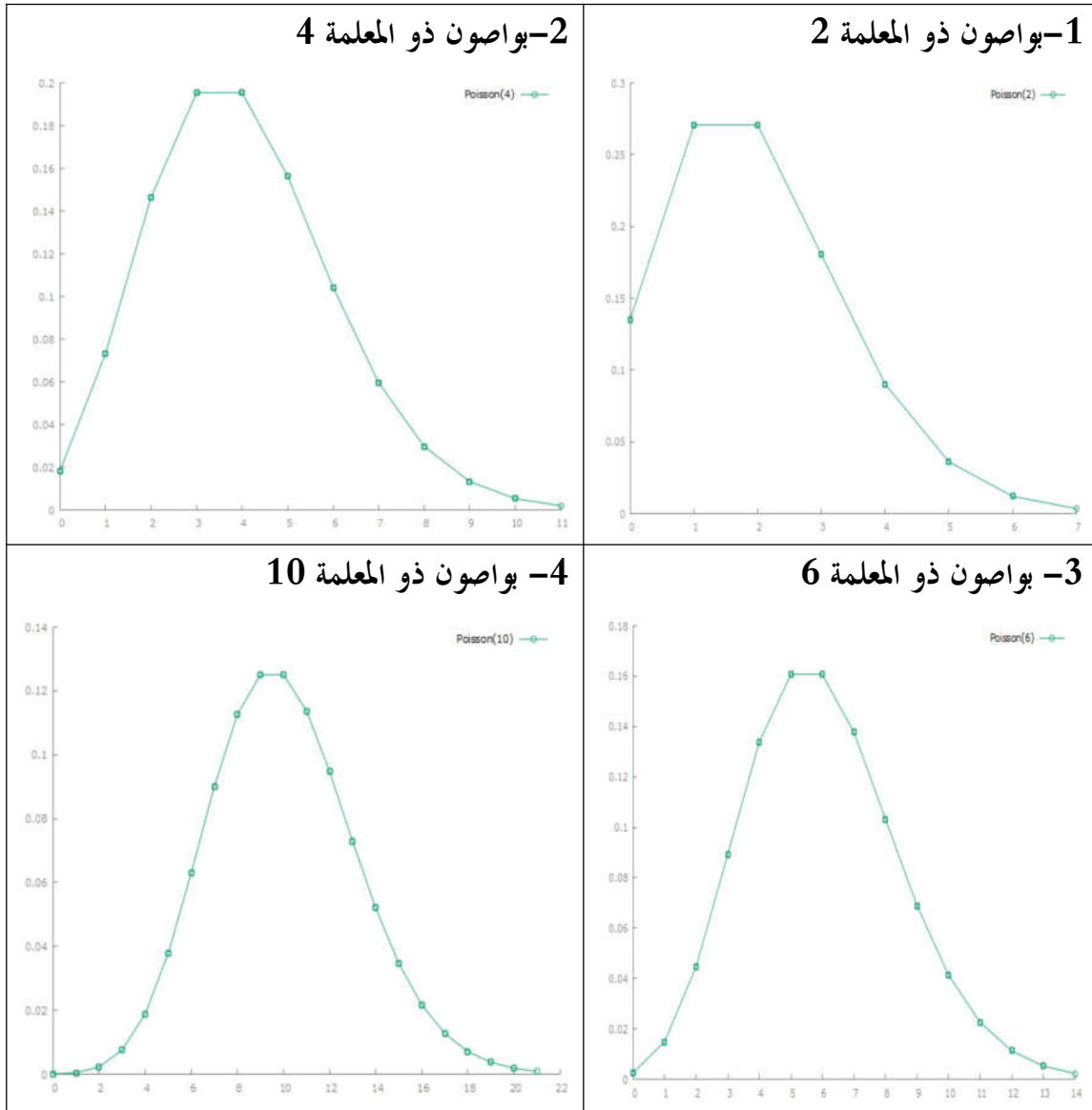
$$P(X \geq x) = P\left(Z \geq \frac{x - \lambda - 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

و

$$P(X = x) = P\left(\frac{x - \lambda - 0.5}{\sqrt{\lambda}} \leq Z \leq \frac{x - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

يمكن ملاحظة أن التقريب الجيد يبدأ لما معلمة توزيع بواصون تكون أكبر من 5 كما أشرنا سابقاً كما يبينه الشكل (10)

الشكل (10): تقريب توزيع بواسون للتوزيع الطبيعي



3. توزيع قاما

لا يستعمل بكثرة في الدراسات الإحصائية، ولكنه مهم جدا لأنه يشتق منه التوزيع كاي مربع وتوزيع ستودنت وفيشر. ونقول أن المتغيرة العشوائية المستمرة X تتبع توزيع قاما ذو المعلمتين الموجبتين λ (وتسمى scale) و r (تسمى shape) (Douglas C. Montgomery، صفحة 140) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$X \sim \Gamma(\lambda, r) \Leftrightarrow f(x) = \frac{\lambda^r x^{r-1} e^{-\lambda x}}{\Gamma(r)} \quad ; \quad x > 0$$

حيث $\Gamma(r)$ تسمى دالة قاما وتسوي إلى:

$$\Gamma(r) = \int_0^{+\infty} x^{r-1} e^{-x} dx \quad ; \quad r > 0 \quad ; \quad x \in R$$

كما تسوي دالة قاما إلى:

$$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1), \quad r > 1$$

وهناك حالات خاصة لدالة قاما هي:

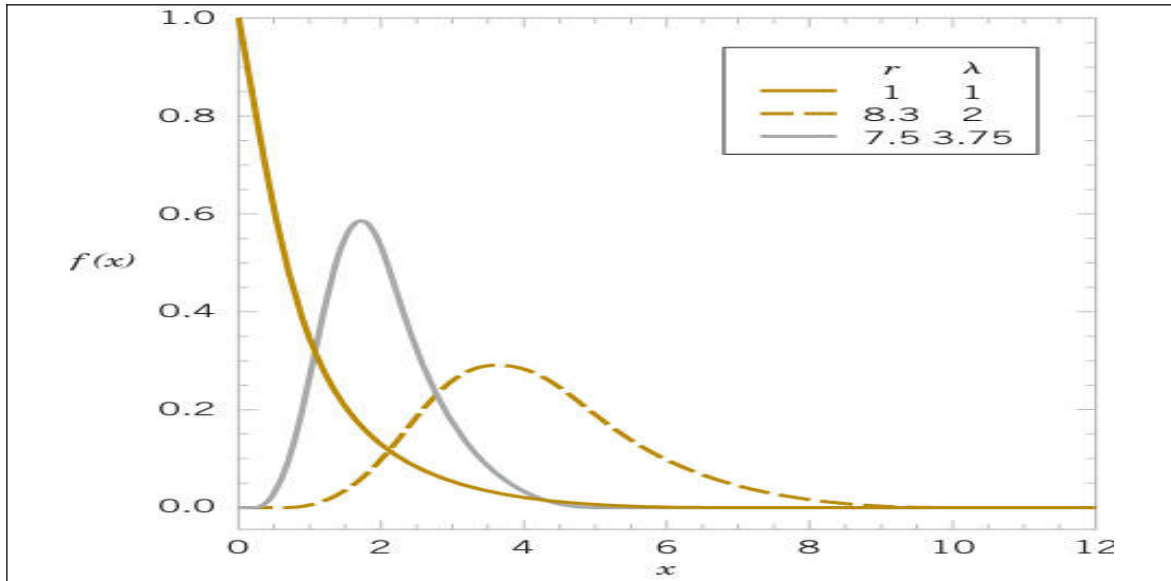
أمثلة	خواص قاما وبعض الحالات الخاصة
/	$\Gamma(1) = 1$
/	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$
$\Gamma(2) = (2-1)\Gamma(2-1) = 1 * \Gamma(1) = 1$	$\Gamma(r) = (r-1)\Gamma(r-1), \quad r > 0$
$\Gamma(2) = \Gamma(1+1) = 1 * \Gamma(1) = 1$	$\Gamma(r+1) = r\Gamma(r), \quad r > 0$
$\Gamma(3) = \Gamma(2+1) = 2! = 2$	$\Gamma(n+1) = n!, \quad n \in N$
$\Gamma(3) = (3-1) = 2! = 2$	$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in N$
$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \left(\frac{5}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{5}{2}-1\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-1\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}-1\right) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \end{aligned}$	$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

كما أن متوسط وتباين المتغيرة العشوائية التي تتبع توزيع قاما يكتبان كما يلي:

$$X \sim \Gamma_{(\lambda, r)} \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{r}{\lambda} \\ V(X) = \frac{r}{\lambda^2} \end{cases}$$

كما أن التمثيل البياني لدالة الكثافة لتوزيع قاما هو:

الشكل(11): التمثيل البياني لدالة قاما. (Douglas C. Montgomery، صفحة 141)



على غرار التوزيعات الاحتمالية الأخرى يمكن حساب دالة الكثافة أو دالة التوزيع التراكمي (أو العكسي) باستخدام "Excel" كما هو مبين في الجدول (4)

الجدول (4): دالة الكثافة ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع قاما ذو المعلمتين 3 و 4

=LOI.GAMMA(9;3;4;FAUX) <table><tr><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>0.06669795</td><td></td></tr></table>	C	D	0.06669795		دالة الكثافة الاحتمالية $X \sim \Gamma_{(3,4)} \Leftrightarrow f(9)$		
C	D						
0.06669795							
=LOI.GAMMA(9;3;4;VRAI) <table><tr><td>C</td><td>D</td></tr><tr><td>0.39066073</td><td></td></tr></table>	C	D	0.39066073		دالة التوزيع التراكمي $F(x)$ $X \sim \Gamma_{(3,4)} \Leftrightarrow P(X \leq 9)$		
C	D						
0.39066073							
=LOI.GAMMA.INVERSE(0.39066073;3;4) <table><tr><td>C</td><td>D</td><td>E</td></tr><tr><td>9.0000000</td><td></td><td></td></tr></table>	C	D	E	9.0000000			دالة التوزيع التراكمي العكسية $F^{-1}(x)$ $X \sim \Gamma_{(3,4)} \Leftrightarrow P(X \leq x) = 0.39066$
C	D	E					
9.0000000							

4. توزيع بيتا

نقول أن المتغيرة العشوائية المستمرة X تتبع توزيع بيتا ذو المعلمتين الموجبتين α و β (تسميان shape) (Douglas C. Montgomery، صفحة 148) إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية تكتب من الشكل:

$$X \sim \text{Beta}_{(\alpha, \beta)} \Leftrightarrow f(x) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} \quad ; \quad x \in [0,1]$$

حيث Γ تسمى دالة قاما و يمكن تعريف دالة بيتا الرياضية كما يلي:

$$B_{(\alpha,\beta)} = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

وهناك حالات خاصة لدالة بيتا هي:

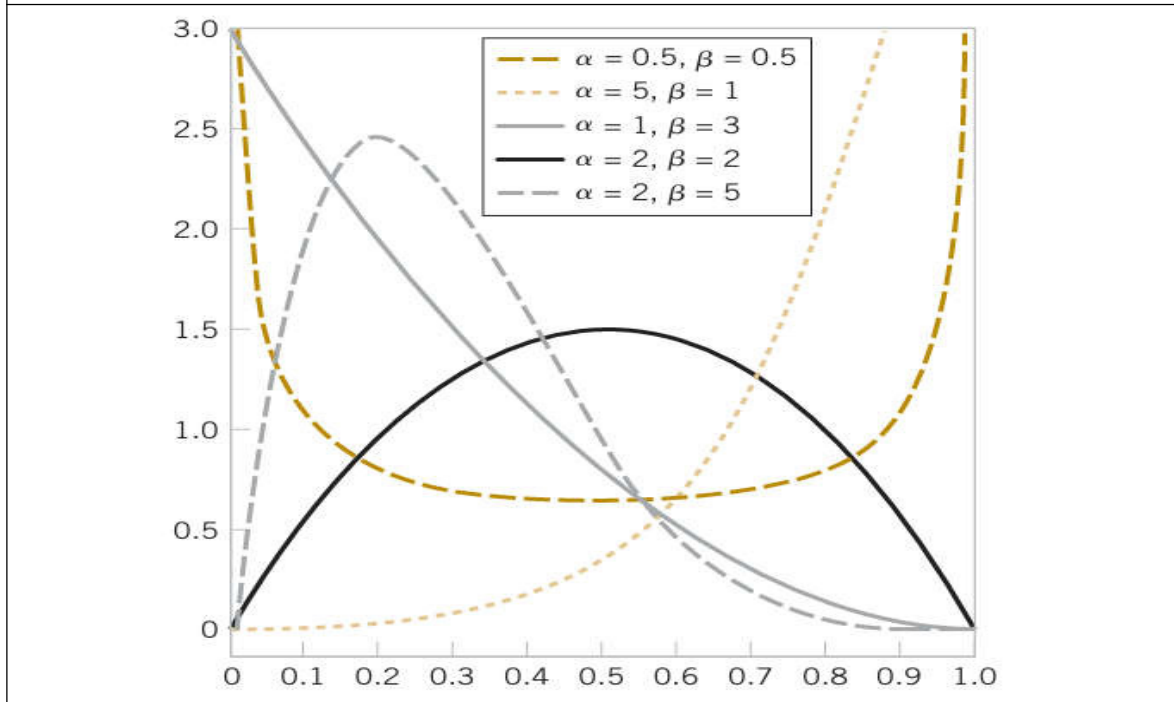
أمثلة	خواص بيتا وبعض الحالات الخاصة
$B_{(1,2)} = \frac{\Gamma(1)\Gamma(2)}{\Gamma(1+2)} = \frac{\Gamma(2)\Gamma(1)}{\Gamma(2+1)} = B_{(2,1)}$ $= \frac{1}{2}$	$B_{(\alpha,\beta)} = B_{(\beta,\alpha)}$
$B_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{\sqrt{\pi}\sqrt{\pi}}{1} = \pi$	$B_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})} = \frac{1}{\pi}$

كما أن متوسط وتباين المتغيرة العشوائية التي تتبع توزيع بيتا يكتبان ما يلي:

$$X \sim \text{Beta}_{(\alpha,\beta)} \Leftrightarrow \begin{cases} E(X) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \\ V(X) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} \end{cases}$$

كما أن التمثيل البياني لدالة الكثافة لتوزيع بيتا هو:

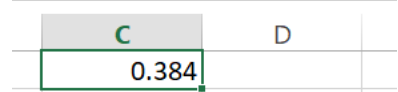
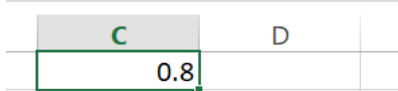
الشكل (12): التمثيل البياني لدالة بيتا. (Douglas C. Montgomery، صفحة 149)



على غرار التوزيعات الاحتمالية الأخرى يمكن حساب دالة الكثافة أو دالة التوزيع التراكمي (أو العكسي)

باستخدام "Excel" كما هو مبين في الجدول (5)

الجدول(5): دالة الكثافة ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع بيتا ذو المعلمتين 2 و 3

$=\text{LOI.BETA.N}(0.8;2;3;\text{FAUX};0;1)$ 	دالة الكثافة الاحتمالية $X \sim \text{Beta}_{(2,3)} \Leftrightarrow f(0.8)$
$=\text{LOI.BETA}(0.8;2;3;0;1)$ 	دالة التوزيع التراكمي $F(0.8)$ $X \sim \text{Beta}_{(2,3)} \Leftrightarrow P(X \leq 0.8)$
$=\text{BETA.INVERSE}(0.9728;2;3;0;1)$ 	دالة التوزيع التراكمي العكسية $F^{-1}(x)$ $X \sim \text{Beta}_{(2,3)} \Leftrightarrow P(X \leq x) = 0.9728$

في بعض الحالات الخاصة يمكن أن يتطابق توزيع بيتا مع بعض التوزيعات الاحتمالية الأخرى، مثل التوزيع المنتظم المستمر، وذلك عندما يسوي المعلمتين 1، أي:

$$\alpha = \beta = 1 \Leftrightarrow \text{Beta}_{(1,1)} \approx U(0,1)$$

5. توزيع كاي مربع

يعتبر من بين التوزيعات الاحتمالية المهمة أيضا ويستعمل أيضا بكثرة في الدراسات الإحصائية. وتوزيع كاي مربع هو توزيع مشتق من التوزيع الطبيعي المعياري، حيث إذا كان لدينا مجموعة من المتغيرات العشوائية المستقلة فيما بينها والتي تتبع كله التوزيع الطبيعي المعياري فإن (Lecoutre, 2008, p. 39):

$$\begin{cases} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{cases} \sim N(0,1) \rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \sim \chi_n^2$$

رمز التوزيع كاي مربع

تسمى درجة الحرية

فعليه، نقول أن مجموع مربع n متغيرة عشوائية مستقلة تتبع التوزيع الطبيعي المعياري هو توزيع كاي مربع بدرجة حرية قلرها n

1.5. دالة الكثافة الاحتمالية

نقول عن متغيرة عشوائية أنها تتبع توزيع كاي مربع بدرجة حرية n إذا كانت دالة كثافتها الاحتمالية مكتوبة من الشكل:

$$X \sim \chi_n^2 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & \text{if } x > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

حيث Γ تمثل دالة قاما. ونكتب المتوسط والتباين كما يلي:

$$X \sim \chi_n^2 \Rightarrow \begin{cases} E(X) = n \\ V(X) = 2n \end{cases}$$

ويمكن ملاحظة أن دالة الكثافة لهذا التوزيع هي حالة خاصة من توزيع قاما لما:

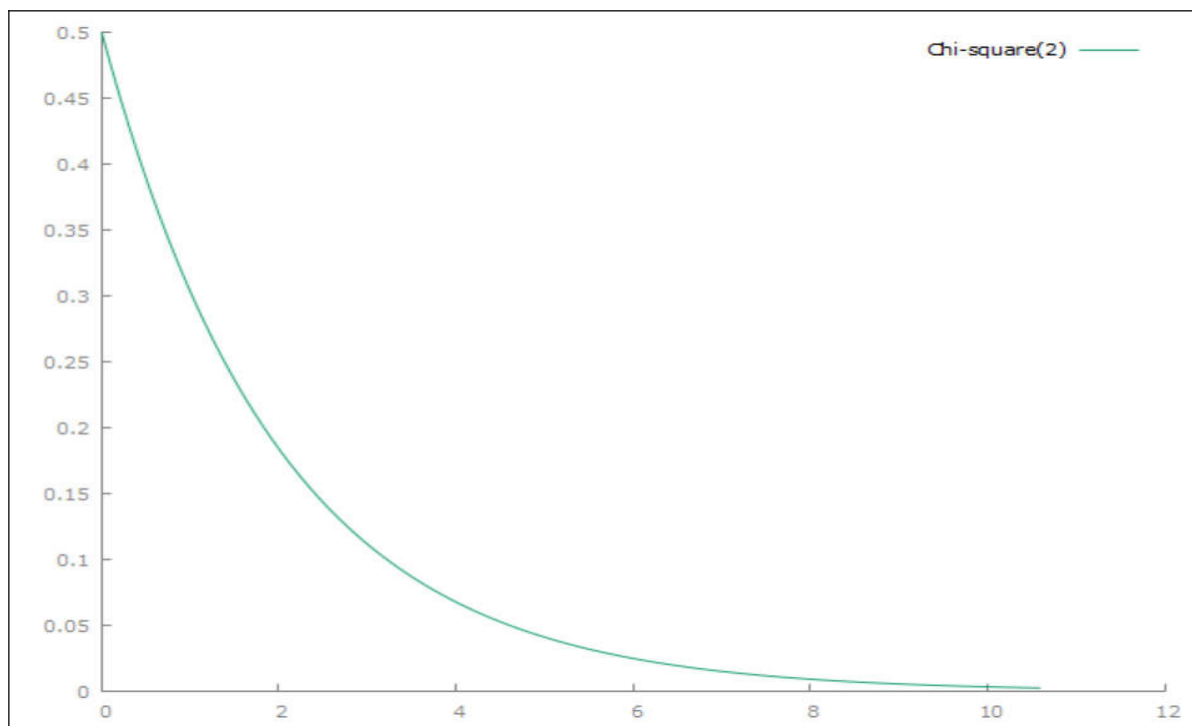
$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ r = \frac{n}{2}, n \in N^* \end{cases} \Leftrightarrow \Gamma_{(\frac{1}{2}, \frac{n}{2})} \approx \chi_n^2$$

فمثلا:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ r = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Gamma_{(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})} \approx \chi_3^2$$

والتمثيل البياني للتوزيع كاي مربع موضح في الشكل (13) لفهم كيفية حساب الاحتمالات الممثلة بالمساحات تحت هذا المنحني.

الشكل (13): التمثيل البياني للتوزيع كاي مربع بدرجة حرية 2



2.5. دالة التوزيع التراكمي

على غرار التوزيع الطبيعي، لحساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع كاي مربع نستعمل دالة التوزيع التراكمي الممثلة بالعلاقة الآتية:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(x)dx = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^x e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} dx$$

ولكن حل هذا التكامل هو صعب، ولهذا نستعمل إما البرامج الإحصائية مثل "Excel" أو نستعمل الجدول الإحصائي الخاص بالتوزيع كاي مربع. وللفهم أكثر نحاول حساب الاحتمال الآتي: $P(\chi_7^2 \geq 16.01)$

أولاً- استعمال "Excel" كما هو مبين في الشكل (14)

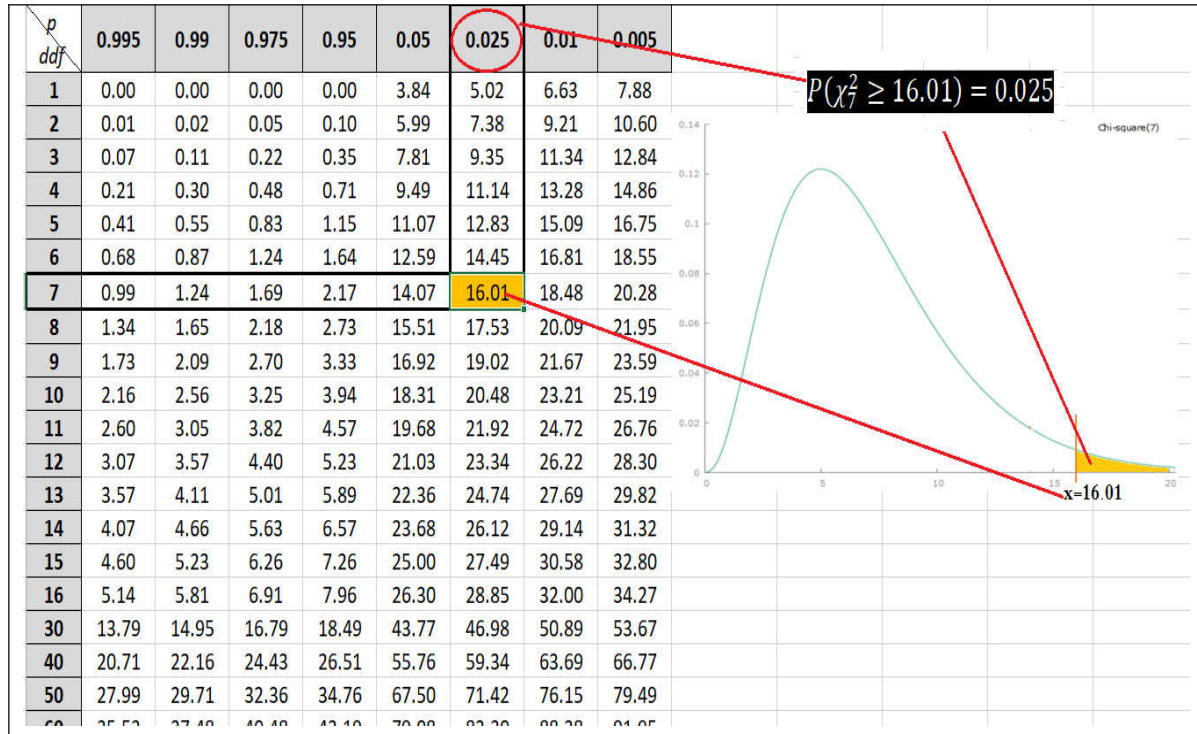
الشكل (14): التوزيع التراكمي للتوزيع كاي مربع باستخدام "Excel"				
✕ ✓ <i>f_x</i> =LOI.KHIDEUX.DROITE(16.01;7)				
	B	C	D	E
	0.025			

ثانياً- استعمال الجدول الإحصائي:

لحساب الاحتمالات الخاصة بالتوزيع كاي مربع يلوييا وبكل سهولة، نستخدم الجدول الاحصائي لهذا الأخير كما هو مبين في الشكل (12)، وهذا بشرط أن تكون المساحة على اليمين، أي المتغيرة العشوائية أكبر من العدد الموجب. فبتحديد السطر السابع الذي يمثل درجة الحرية، ثم الانتقال يمينا إلى غاية الحصول على العدد 16.01 ثم بالانتقال إلى الأعلى (في نفس عمود الرقم 16,01) سنتحصل على الاحتمال 0.025 الموجود في السطر الأول. إذا:

$$P(\chi_7^2 \geq 16.01) = 0.025$$

الشكل (15): التوزيع التراكمي للتوزيع كاي مربع باستخدام الجدول الإحصائي



ملاحظة: التوزيع كاي مربع معرف على الأعداد الموجبة فقط، والجدول الاحصائي كما أشرنا يستخدم بطريقة مباشرة إذا كانت المتغيرة العشوائية أكبر ، أو أكبر أو تسوي من عدد موجب -المساحة على اليمين- أي الاحتمالات من الشكل: $P(\chi_n^2 \geq \text{عدد موجب})$. إذا التساؤل المطروح هنا كيف يتم حساب الاحتمالات في حالة لم يتوفر لدينا هذا الشرط؟ الحل مبين في الجدول (6)

الجدول (6) أمثلة عن حساب الاحتمالات إذا لم يتوفر الشكل $P(\chi_n^2 \geq \text{عدد موجب})$.
أولاً: الاحتمال من الشكل $P(\chi_7^2 \leq 16.01)$ يحسب كما يلي: $P(\chi_7^2 \leq 16.01) = 1 - P(\chi_7^2 > 16.01) = 1 - 0.025 = 0.975$
ثانياً: الاحتمال من الشكل $P(\chi_7^2 \leq -16.01)$ و $P(\chi_7^2 \geq -16.01)$ يساويان الصفر مباشرة لأنهما خارج مجال التعريف.
ثالثاً: الاحتمال من الشكل $P(a \leq \chi_n^2 \leq b)$ حيث $a, b \geq 0$ يحسب كما يلي: $P(a \leq \chi_n^2 \leq b) = P(\chi_n^2 \leq b) - P(\chi_n^2 \leq a) = P(\chi_n^2 > a) - P(\chi_n^2 > b)$

ملاحظة: ماذا لو لم نجد القيمة $\chi^2_{\alpha,n}$ أو درجة الحرية بالضبط داخل جدول توزيع كاي مربع؟ في هذه الحالة يتم استخدام طريقة الاستفاء الخطي.

مثال 13: إذا كانت لدينا متغيرة عشوائية X تتبع التوزيع كاي مربع فاحسب الاحتمالات الآتية:

$$P(\chi^2_{10} \leq 3.5), P(\chi^2_{10} \geq 3.5) \quad P(\chi^2_{10} \geq 3.5)$$

بما أن 3.5 غير موجودة بالضبط في السطر 10 (سطر درجة الحرية 10) فينبغي استعمال طريقة الاستفاء الخطي لإيجاد قيمة تقريبية للاحتمال المطلوب.

3.5 يتم حصرها بين أقرب قيمة لها من اليسار وأقرب قيمة من اليمين ثم بالإسقاط العمودي لهذين القيمتين نتحصل على احتماليهما كما هو مبين في الشكل (13) ثم بكل سهولة نكتب:

$$\frac{3.5 - 3.25}{3.5 - 3.94} = \frac{P(\chi^2_{10} \geq 3.5) - 0.975}{P(\chi^2_{10} \geq 3.5) - 0.95}$$

$$\Leftrightarrow P(\chi^2_{10} \geq 3.5) = 0.966$$

حيث 3.25 هي القيمة الأقرب من اليسار ل 3.5 واحتمالها يساوي 0.975. والقيمة 3.94 هي الأقرب ل 3.5 من اليمين واحتمالها هو 0.95.

الشكل (16): طريقة الاستفاء الخطي

	p ddf	0.995	0.99	0.975	0.95
10					
11	1	0.00	0.00	0.00	0.00
12	2	0.01	0.02	0.05	0.10
13	3	0.07	0.11	0.22	0.35
14	4	0.21	0.30	0.48	0.71
15	5	0.41	0.55	0.83	1.15
16	6	0.68	0.87	1.24	1.64
17	7	0.99	1.24	1.69	2.17
18	8	1.34	1.65	2.18	2.73
19	9	1.73	2.09	2.70	3.33
20	10	2.16	2.56	3.25	3.94

كان بالإمكان حساب الاحتمال مباشرة ب "Excel" كما هو مبين في الشكل (17) . أو يمكن أخذ المتوسط الحسابي لاحتمال القيمتين القريبتين من اليسار واليمين، أي:

$$P(\chi_{10}^2 \geq 3.5) = \frac{0.975 + 0.95}{2} = 0.962$$

الشكل (17): حساب الاحتمال $P(\chi_{10}^2 \geq 3.5)$ بواسطة "Excel"

A1		✕ ✓ <i>f_x</i>		=LOI.KHIDEUX.DROITE(3.5;10)			
	A	B	C	D	E	F	
1	0.967						

6. توزيع ستودنت

تقريباً كل الاختبارات الإحصائية المعلمية يستعمل فيها توزيع ستودنت (فهو يعوض التوزيع الطبيعي مثلاً في نظرية المعاينة للمتوسط في حالة ما إذا كان تباين المجتمع مجهول)، وهذا التوزيع هو مشتق من التوزيع الطبيعي المعياري والتوزيع كاي مربع، حيث إذا كان لدينا متغيرتين عشوائيتين مستقلتين فيما بينهما الأولى تتبع التوزيع الطبيعي المعياري والثانية تتبع توزيع كاي تربيع فإن:

$$\begin{cases} X \sim N(0,1) \\ Y \sim \chi_{(n)}^2 \end{cases} \rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{\frac{Y}{n}}} \sim t_{(n)}$$

1.6. دالة الكثافة الاحتمالية

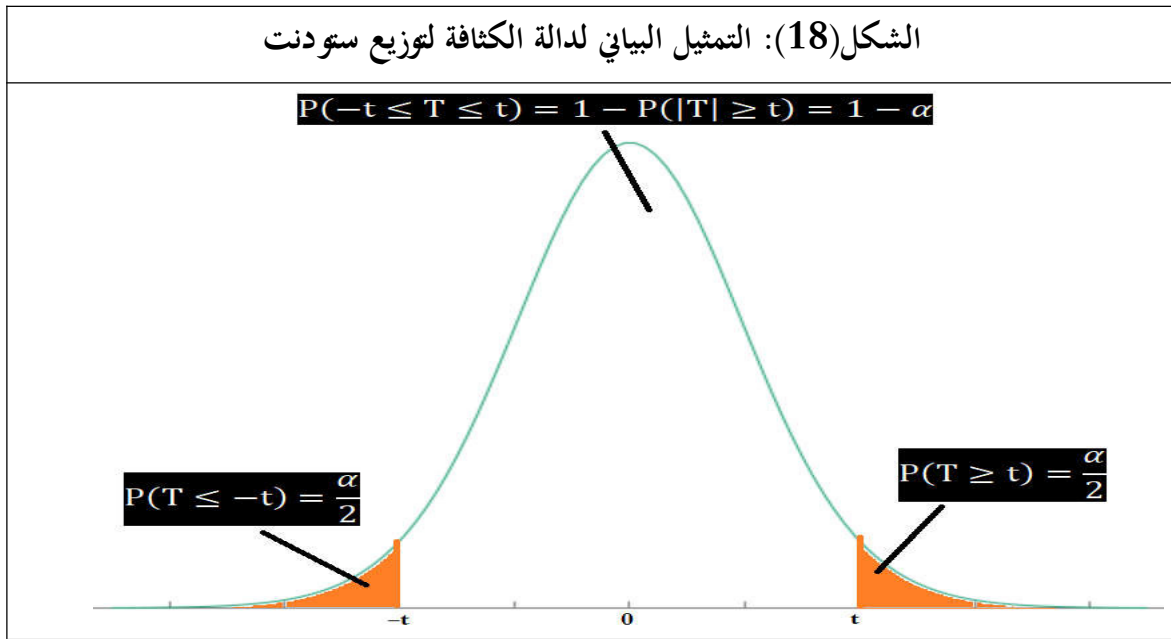
نقول عن متغيرة عشوائية T أنها تتبع توزيع ستودنت ونكتب $T \sim t_{(n)}$ إذا كانت دالة كثافتها تكتب من الشكل:

$$T \sim t_{(n)} \rightarrow f(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad t \in \mathcal{R}$$

حيث Γ : دالة توزيع قاما. ونكتب المتوسط والتباين كما يلي:

$$T \sim t_{(n)} \Rightarrow \begin{cases} E(T) = 0 \\ V(T) = \frac{n}{n-2} \end{cases}$$

والتمثيل البياني لدالة الكثافة لتوزيع ستودنت موضحة في الشكل (18)



ملاحظات:

أولاً- من الشكل يمكن ملاحظة أن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لستودنت يشابه مع التوزيع الطبيعي المعياري إلى حد كبير، وفي الحقيقة قد يتطابقان إذا كانت درجة الحرية لتوزيع ستودنت كبيرة بما فيه الكفاية (احصائياً إذا كانت أكبر أو تساوي من 30).

ثانياً- المنحنى متناظر بالنسبة لمحور الترتيب، وهذا معناه أن:

$$P(T \leq -t) = P(T \geq t) = \frac{\alpha}{2}$$

$$P(|T| \geq t) = 1 - P(-t \leq T \leq t) = 2P(T \geq t)$$

2.6. دالة التوزيع التراكمي

من الملاحظة الثانية المقدمة آنفا، يمكن القول أن حساب الاحتمالات في توزيع ستودنت باستخدام الجلول الإحصائي تتم بطريقتين، **الطريقة الأولى** تتم عبر حساب المساحة تحت يمين المنحى (وتسمى بستودنت أحادي الجانب من اليمين)، **والطريقة الثانية** تتم بحساب المساحة تحت جانبي المنحى (وتسمى بستودنت ثنائي الجانب). إذا لحساب أي احتمال خاص بالمتغيرة العشوائية التي تتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية n نكتب:

$$P(|T| \geq t) = 1 - P(-t \leq T \leq t) = 2P(T \geq t)$$

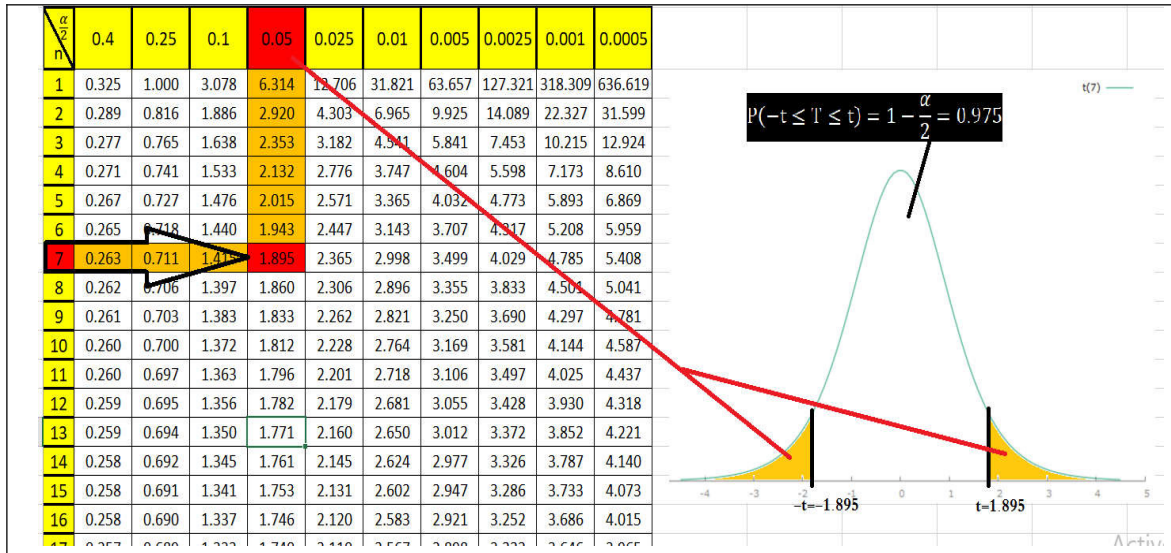
ولحساب هذا الاحتمال يلوي باستخدام جلول توزيع ستودنت كما أشرنا سابقا وفق ما يلي:

أولا- إذا كان الاحتمال المراد حسابه هو المساحة على اليمين أي: $P(T \geq t)$ نذهب إلى العمود الأول لتحديد درجة الحرية n ثم نمشي أفقيا باتجاه اليمين للبحث عن المقدار t ، وبعد تحديد هذا الأخير وبالإسقاط إلى أعلى نحدد قيمة الاحتمال الموجودة في أول سطر (السطر ممثل ب $\frac{\alpha}{2}$).

ثانيا- إذا كان الاحتمال المراد حسابه هو المساحة على جانبي المنحى أي: $P(|T| \geq t)$ فإننا نتبع نفس الخطوات المقدمة في (أولا) ثم نضرب النتيجة المتحصل عليها في 2.

ثالثا- إذا كان الاحتمال المراد حسابه هو المساحة وسط المنحى أي: $P(-t \leq T \leq t)$ فإننا نتبع نفس الخطوات المقدمة في (أولا) ثم نقسم النتيجة المتحصل عليها على 2 ونطرحها من 1. وكل هذه الحالات موضحة في الشكل (19) الخاص بستودنت بدرجة حرية 7.

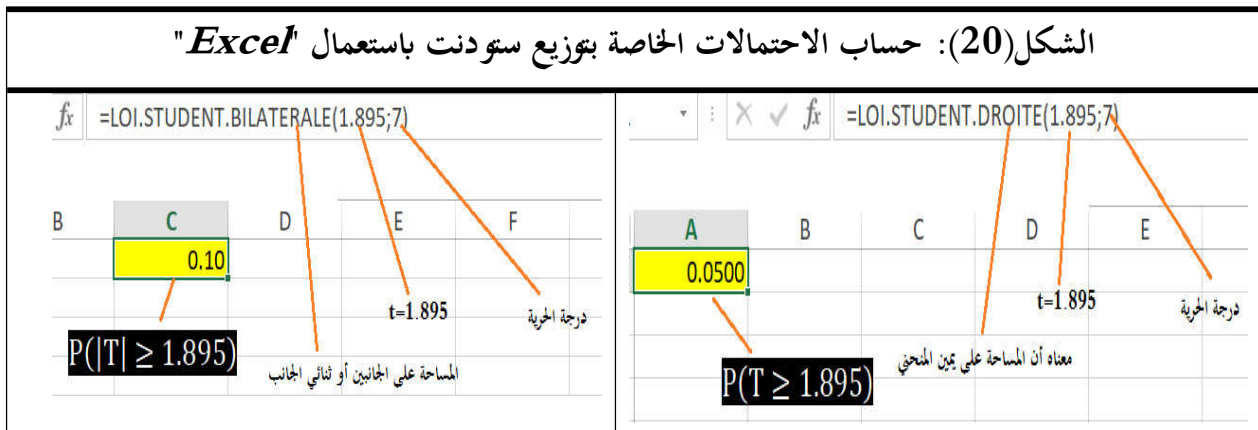
الشكل (19): حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع ستودنت باستعمال الجلول الإحصائي



إذا من الشكل(19):

$$\left\{ \begin{array}{l} P(T \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n}) = P(T \geq 1.895) = P(T \leq -1.895) = 0.05 \\ P(|T| \geq t_{\frac{\alpha}{2}, n}) = P(|T| \geq 1.895) = 2 * P(T \geq 1.895) = 2 * 0.05 = 0.10 \\ P(-t_{\frac{\alpha}{2}, n} \leq T \leq t_{\frac{\alpha}{2}, n}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.05}{2} = 0.975 \end{array} \right.$$

ملاحظة: يمكن حساب الاحتمالات سالفة الذكر انطلاقاً من "Excel" كما هو مبين في الشكل(20):



7. توزيع فيشر

يعتبر توزيع فيشر آخر توزيع احتمالي مستمر نتكلم عنه في هذا المحور، وهو لا يقل أهمية عن باقي التوزيعات، فهو يستعمل بكثرة في الاختبارات الإحصائية بمختلف أنواعها، وتوزيع فيشر يشتق من التوزيع كاي مربع،

حيث

إذا كان لدينا متغيرتين عشوائيتين مستقلتين تتبعان التوزيع كاي مربع بدرجة حرية n و m على التوالي فإن:

$$\begin{cases} X \sim \chi_n^2 \\ Y \sim \chi_m^2 \end{cases} \rightarrow F = \frac{X/m}{Y/n} \sim F_{(m,n)}$$

الأولى $X: (X_1, X_2, \dots, X_n)$ والثانية $Y: (Y_1, Y_2, \dots, Y_m)$

1.7. دالة الكثافة الاحتمالية

نقول عن متغيرة عشوائية F أنها تتبع توزيع فيشر ونكتب $F \sim F_{(m,n)}$ إذا كانت دالة كثافتها الاحتمالية تكتب من الشكل:

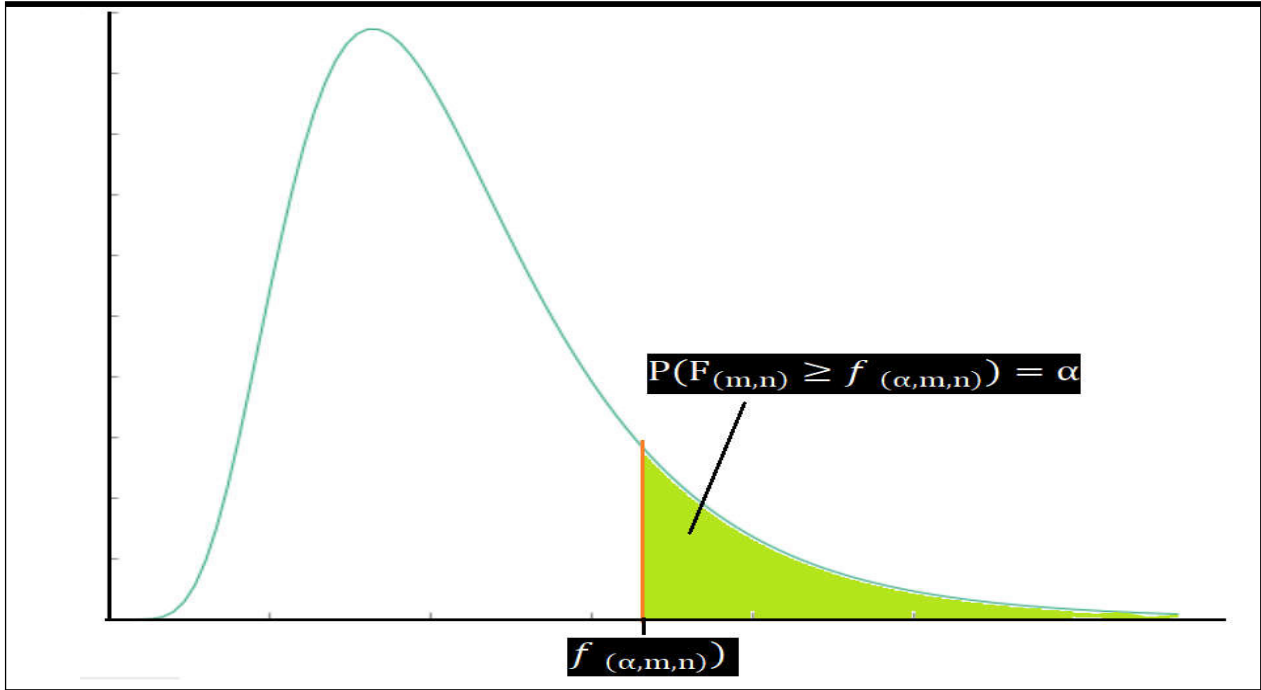
$$F \sim F_{(m,n)} \rightarrow f(t) = \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{t^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1 + \frac{m}{n}t\right)^{\frac{(m+n)}{2}}} & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$

حيث t هو تحقق المتغيرة العشوائية F ، و Γ هو دالة قاما. ولتوزيع فيشر متوسط وتباين يكتبان كما يلي :

$$F \sim F_{(m,n)} \Rightarrow \begin{cases} E(F) = \frac{n}{n-2} \\ V(F) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)} \end{cases}$$

أما التمثيل البياني لتوزيع فيشر فهو مبين في الشكل (21)

الشكل (21): التمثيل البياني لتوزيع فيشر



2.7. دالة التوزيع التراكمي

لحساب المساحة تحت منحنى توزيع فيشر والمبينة في الشكل (20) نتبع نفس المنهج المتبع في توزيع كاي مربع وستودنت، حيث إما نستعمل الجداول الإحصائية، أو بواسطة برنامج "Excel"

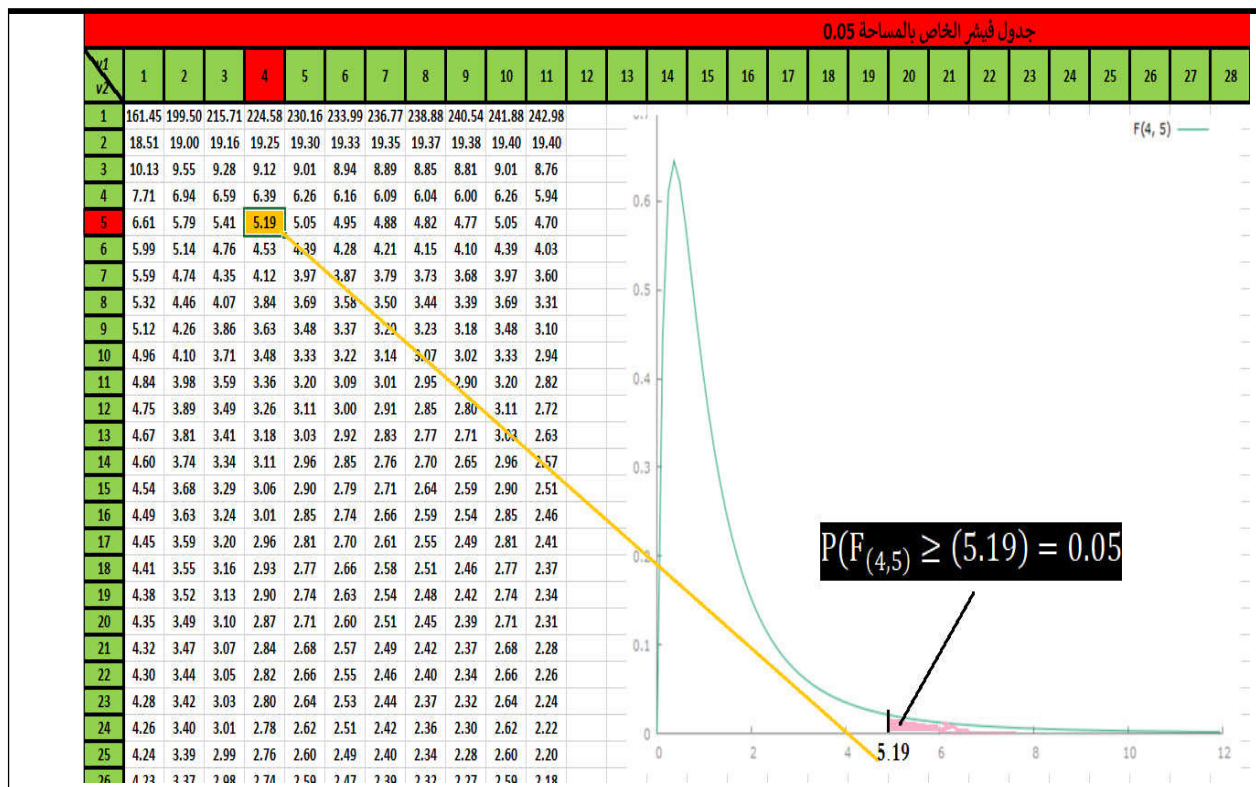
أولاً- استعمال الجداول الإحصائية: بخلاف التوزيعات المستمرة سالفة الذكر، فإن توزيع فيشر له عدة جداول إحصائية مرتبطة بالاحتمال أو المساحة (توجد ثلاثة جداول مشهورة: هي الخاصة بالاحتمالات 0.01، 0.05، و0.10)، أي أن لكل مساحة جدول يتكون من سطر يحتوي على درجات الحرية m وعمود يحتوي على درجات الحرية n وما داخل الجدول يمثل القيم $f_{(\alpha, m, n)}$. إذن الاحتمال $P(F_{(m, n)} \geq f_{(\alpha, m, n)})$ يسوي للقيمة α الموافقة للجدول الذي وجدت فيه القيمة $f_{(\alpha, m, n)}$.

مثال 14: أحسب الاحتمال $P(F_{(4, 5)} \geq 5.19)$

الحل: تم البحث في الجداول الإحصائية لتوزيع فيشر (5.19 يجب أن تكون نتاج تقاطع العمود الرابع مع السطر الخامس) ووُجد أن القيمة 5.19 هي في جدول فيشر الموافق للاحتمال 0.05 كما يبينه الشكل (22). ومنه:

$$P(F_{(4, 5)} \geq (5.19) = 0.05$$

الشكل (22): حساب الاحتمالات الخاصة بتوزيع فيشر عن طريق الجداول الإحصائية



فلو ننظر للجدول الخاص بالمساحة 0.01 نجد أن القيمة نتاج تقاطع العمود الرابع والسطر الخامس هي $f_{(0.01,4,5)} = 11.39$ أي أنه:

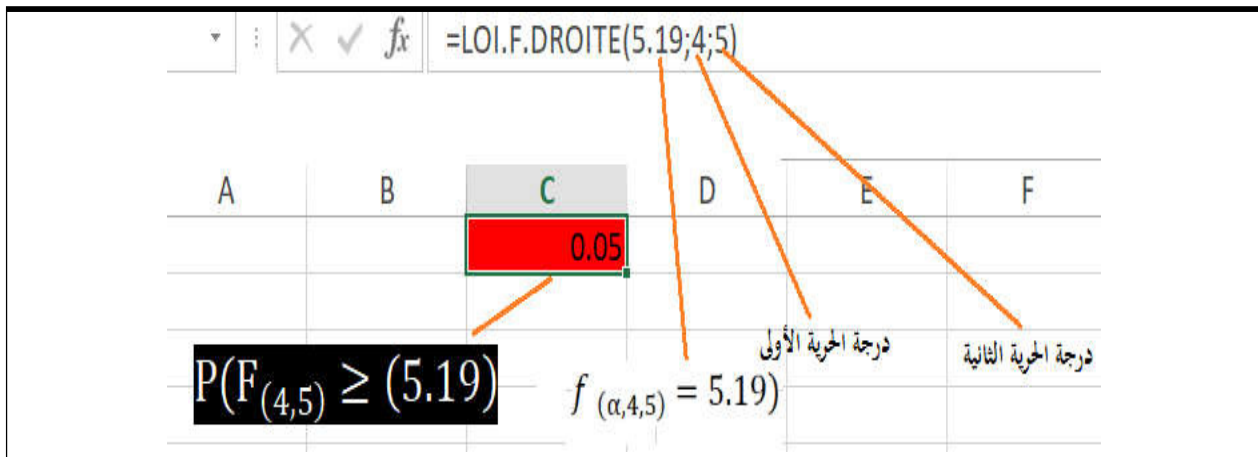
$$P(F_{(4,5)} \geq 11.39) = 0.01$$

ولو ننظر للجدول الخاص بالمساحة 0.10 نجد أن القيمة نتاج تقاطع العمود الرابع والسطر الخامس هي $f_{(0.10,4,5)} = 3.52$ أي أنه:

$$P(F_{(4,5)} \geq 3.52) = 0.10$$

ثانيا- كما يمكن حساب المساحات الخاصة بتوزيع فيشر باستخدام اكسل بكل سهولة كما هو مبين في الشكل(23)

الشكل(23): حساب المساحات الخاصة بتوزيع فيشر باستخدام "Excel"



3.7. خواص التوزيع فيشر

بما أننا سنستعمل ثلاثة جداول إحصائية فقط (وهي المشهورة والموجودة في الكتب والبرامج الإحصائية) وهي الموافقة للمساحات $\alpha = 0,01$ و $\alpha = 0,05$ و $\alpha = 0,1$ فباقي المساحات قد تستنتج مباشرة بالاحتمال العكسي.

في حالة عدم توفر قيم خاصة بـ α يتم إستخدام القاعدة التالية مع التنبه للقلب بين درجتي الحرية (علاء الدين القبانجي، حسام حمامة كمرجي، 2011-2012، صفحة 202):

$$f_{(\alpha,m,n)} = \frac{1}{f_{(1-\alpha,n,m)}} = f_{(1-\alpha,n,m)}^{-1}$$

كانت درجة حرية أولى فأصبحت الثانية
كانت α
كانت درجة حرية ثانية فأصبحت الأولى

$$f_{(\alpha,m,n)} = \frac{1}{f_{(1-\alpha,n,m)}} = f_{(1-\alpha,n,m)}^{-1}$$

مثال 15: أحسب $f_{(0.85,9,20)}$ و $f_{(0.90,9,20)}$

الحل:

أولاً- حساب $f_{(0.90,9,20)}$

$$f_{(0.90,9,20)} = \frac{1}{f_{(0.10,20,9)}} = \frac{1}{2.298} = 0.435$$

ثانياً- حساب $f_{(0.85,9,20)}$

بما أنه لا يوجد جدول خاص بالمساحتين 0.85 و 0.15 فإنه يتم استخدام "Excel" كما يبينه الشكل (24)

الشكل (24): حساب $f_{(0.85,9,20)}$ باستخدام "Excel"				
✕ ✓ fx =INVERSE.LOI.F.DROITE(0.85;9;20)				
	B	C	D	E
	0.510			

أي: $f_{(0.85,9,20)} = 0.510$

تمارين المحور الثاني:

تمرين 1: أحسب الاحتمال $P(X \leq 1)$ حيث $X \sim U_{(-2,3)}$

حل التمرين 1:

المتغيرة العشوائية تتبع التوزيع المنتظم المستمر، وحساب الاحتمال المطلوب يتم وفق مايلي:

$$X \sim U_{(-2,3)} \rightarrow P(X \leq 1) = \int_{-2}^1 \frac{1}{5} dx = \frac{1}{5}(1) - \frac{1}{5}(-2) \\ = \frac{3}{5}$$

تمرين 2: يفترض أن متغيرة عشوائية X تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط μ وتباين 9. المطلوب:
أولا. ماهي قيمة المتوسط علما أن:

$$P(X \leq 5) = 0.6306$$

ثانيا. بعد تحديد قيمة المتوسط أحسب الاحتمال $P(4 \leq X \leq 5)$ ومثله بيانيا

حل التمرين 2:

أولا. قيمة المتوسط:

لدينا:

$$P(X \leq 5) = 0.6306$$

يجب التحول من التوزيع الطبيعي للتوزيع المعياري أي:

$$P(X \leq 5) = 0.6306 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{5 - \mu}{3}\right) = 0.6306$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{5 - \mu}{3}\right) = 0.6306$$

الآن من جدول التوزيع المعياري نجد أن الاحتمال 0.6306 هو المقابل للقيمة 0.33، أي:

$$\frac{5 - \mu}{3} = 0.33$$

$$\Leftrightarrow \mu \approx 4$$

أي: $X \sim N(4,9)$

ثانيا. حساب الاحتمال $P(4 \leq X \leq 5)$:

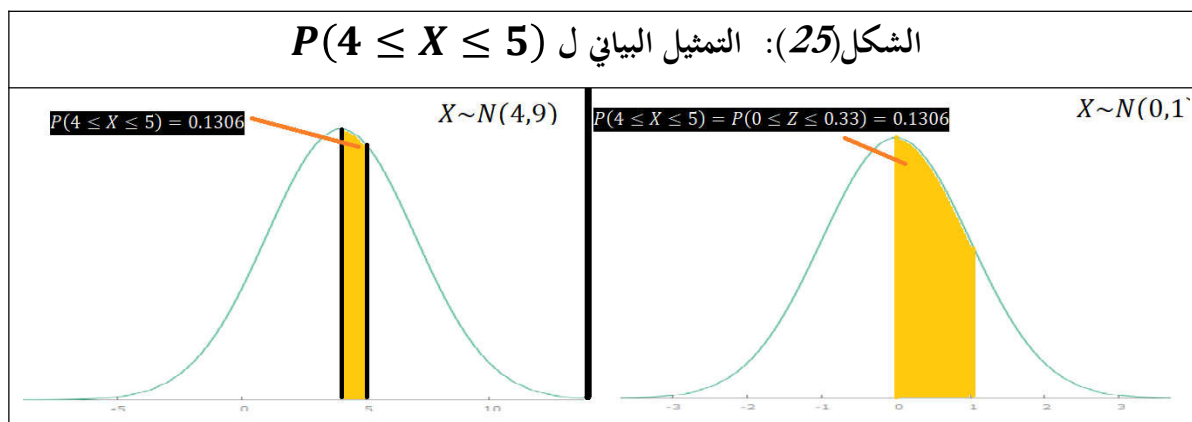
لدينا:

$$P(4 \leq X \leq 5) = P(0 \leq Z \leq 0.33) \\ = P(Z \leq 0.33) - P(Z \leq 0)$$

من جدول التوزيع المعياري، نجد:

$$P(Z \leq 0.33) - P(Z \leq 0) = 0.6306 - 0.5 = 0.1306$$

تمثيل الاحتمال بيانيا: المساحتين على المنحنيين متساويتين، حيث المساحة على منحنى التوزيع الطبيعي حسبته بواسطة "Excel" والمساحة على منحنى التوزيع المعياري حسبته انطلاقا من جدول التوزيع المعياري.



تمرين 3: لدينا ثلاثة متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي، حيث:

$$W \sim N(6, 5), Y \sim N(3, 4), X \sim N(4, 9)$$

المطلوب:

أولا. أحسب متوسط وتباين $X+Y+W$ ، ثم $X-Y$

ثانيا. كيف يمكن اشتقاق التوزيع كاي تربيع بدرجة حرية 3 من هذه المتغيرات العشوائية

ثالثا. أحسب الاحتمال $P(\chi_3^2 \leq 1)$ ثم مثله بيانيا.

حل التمرين 3:

أولا. أحسب متوسط وتباين $X+Y+W$ ، ثم $X-Y$

$$X + Y + W \sim N(6 + 3 + 4, 5 + 4 + 9)$$

$$\sim N(13, 18) \rightarrow \begin{cases} E(X + Y + W) = 13 \\ V(X + Y + W) = 18 \end{cases}$$

وبالنسبة $X-Y$ لدينا:

$$X - Y \sim N(6 - 3, 5 + 4)$$

$$\sim N(3, 9) \rightarrow \begin{cases} E(X - Y) = 3 \\ V(X - Y) = 9 \end{cases}$$

ثانيا. اشتقاق التوزيع كاي تربيع بدرجة حرية 3 من المتغيرات العشوائية W, Y, X : لدينا:

$$\begin{cases} X \sim N(6, 5) \rightarrow Z_1 \sim N(0, 1) \\ Y \sim N(3, 4) \rightarrow Z_2 \sim N(0, 1) \\ W \sim N(4, 9) \rightarrow Z_3 \sim N(0, 1) \end{cases} \rightarrow Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 \sim \chi_3^2$$

أي أن مجموع مربعات ثلاثة متغيرات عشوائية تتبع التوزيع الطبيعي المعياري هي كاي مربع بدرجة حرية 3
ثالثا. حساب الاحتمال $P(\chi_3^2 \leq 1.87)$ ثم تمثيله بيانيا.

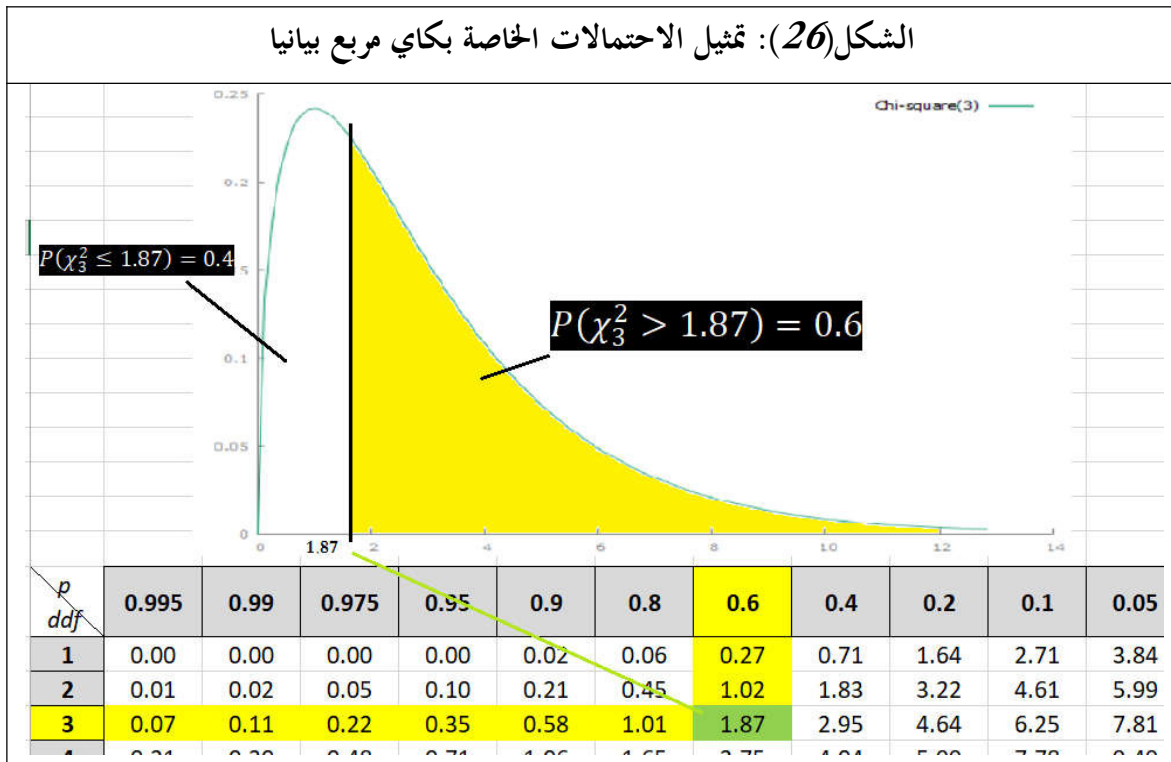
لاستخدام جدول التوزيع كاي مربع لابد من استعمال الاحتمال العكسي (للحصول على متراجعة من الشكل أكبر والعدد موجب)، أي:

$$P(\chi_3^2 \leq 1.87) = 1 - P(\chi_3^2 > 1.87)$$

من جدول التوزيع كاي مربع ومن سطر درجات الحرية نختار رقم 3 ثم نتجه أفقيا ونبحث عن الرقم 1.87، وبما أنه موجود بالضبط وبالإسقاط العمودي لأعلى نتحصل على قيمة الاحتمال الموجودة في السطر الأول والمساوية ل 0.6. إذا نكتب:

$$P(\chi_3^2 \leq 1.87) = 1 - P(\chi_3^2 > 1.87) = 1 - 0.6 = 0.4$$

تمثيل الاحتمال بيانيا: يمكن تمثيل الاحتمال بيانيا كما هول موضح في الشكل(26)



تمرين 4:

إذا كانت لدينا متغيرة عشوائية X تتبع توزيع ستودنت بدرجة حرية n فأحسب الاحتمالات الآتية:

أولا. $P(X \leq 1.812)$ في حالة $n=10$

ثانيا. في حالة $n=50$ ماهي قيمة المقدار c حيث:

$$P(|X| > c) = 0.01$$

حل التمرين 4:

أولا. قبل استخدام الجدول الإحصائي لا بد من استعمال الاحتمال العكسي، أي:

$$P(X \leq 1.812) = 1 - P(X > 1.812) = 1 - 0.05 = 0.95$$

حيث من جدول ستودنت ومن السطر 10 نذهب للقيمة 1.812 وبالإسقاط إلى أعلى نتحصل على الاحتمال 0.05

ثانيا. نقوم بتحويل ستودنت ثنائي الجانب إلى ستودنت أحادي الجانب من أجل استخدام الجدول الإحصائي، أي:

$$P(|X| > c) = 2P(X > c) = 0.01 \Leftrightarrow P(X > c) = 0.005$$

الآن من الجدول الإحصائي وبالتقاطع بين السطر 50 والعمود 0.005 نتحصل على:

$$c = 2.678$$

أي:

$$P(|X| > 2.678) = 0.01$$

كان بالإمكان إيجاد القيمة c مباشرة باستعمال "Excel" كما هو مبين في الشكل (27)

الشكل (27): حساب $P(X > 2.678)$ بواسطة "Excel"	
=LOI.STUDENT.INVERSE(0.01;50)	
2.67779327	

كذلك إذا كان لدينا جدول توزيع ستودنت ثنائي الجانب فإنه يتم استعماله مباشرة.

تمرين 5: إذا كانت لدينا متغيرة عشوائية تتبع توزيع فيشر. أحسب:

$$P(F_{(4,9)} \geq 6.42) \text{ أولا.}$$

$$P(F_{(4,9)} \geq 3.63) \text{ ثانيا.}$$

$$P(F_{(4,9)} \geq 2.69) \text{ ثالثا.}$$

$$f_{(0.90,9,4)} \text{ رابعا.}$$

حل التمرين 5:

أولاً. لحساب الاحتمال $P(F_{(4,9)} \geq 6.42)$ نبحث عن الرقم 6.42 بالتقاطع بين السطر التاسع والعمود الرابع في جداول فيشر الثلاثة (0.01, 0.05, 0.10). والفحص في الجداول الثلاثة نجد:

$$P(F_{(4,9)} \geq 6.42) = 0.01$$

ثانياً. لحساب الاحتمال $P(F_{(4,9)} \geq 3.63)$ نبحث عن الرقم 3.63 بالتقاطع بين السطر التاسع والعمود الرابع في جداول فيشر الثلاثة (0.01, 0.05, 0.10). والفحص في الجداول الثلاثة نجد:

$$P(F_{(4,9)} \geq 3.63) = 0.05$$

ثالثاً. لحساب الاحتمال $P(F_{(4,9)} \geq 2.69)$ نبحث عن الرقم 2.69 بالتقاطع بين السطر التاسع والعمود الرابع في جداول فيشر الثلاثة (0.01, 0.05, 0.10). والفحص في الجداول الثلاثة نجد:

$$P(F_{(4,9)} \geq 2.69) = 0.10$$

رابعاً. بما أن المساحة 0.9 غير موجودة في جداول فيشر، في حين المساحة $1 - 0.9 = 0.10$ موجودة، وبالتالي يمكن تطبيق خواص التوزيع فيشر كما يلي:

$$f_{(0.90,9,4)} = \frac{1}{f_{(1-0.90,4,9)}} = \frac{1}{f_{(0.10,4,9)}} = \frac{1}{2.69} = 0.37$$

حيث $f_{(0.10,4,9)}$ تستخرج من جدول فيشر ذو المساحة 0.10 بالتقاطع بين السطر التاسع والعمود الرابع، أي:

$$P(F_{(4,9)} \geq f_{(0.10,4,9)}) = 0.10 \Leftrightarrow P(F_{(4,9)} \geq f_{(0.10,4,9)} = 2.69) = 0.10$$

تمرين 6:

إذا كانت لدينا متغيرة عشوائية X تمثل تجربة برنولية مكررة 300 مرة باحتمال نجاح ثابت قدره 0.07 فاحسب:

$$P(X \geq 100)$$

حل التمرين 6:

بما أن X عبارة عن تجربة برنولية مكررة ل 300 مرة فهي تتبع التوزيع الثنائي، أي:

$$X \sim B(300, 0.07)$$

إذا يمكن حساب الاحتمال على النحو الآتي:

$$P(X \geq 100) = \sum_{x=100}^{300} P(X \geq x) = 1 - \sum_{x=0}^{99} P(X < x)$$

نلاحظ أنه بكلا الطريقتين سنحسب عدد كبير من الاحتمالات وهذا أمر سيكلفنا وقتا وجهدا، لذا أفضل طريقة هي التقريب للتوزيع الطبيعي المعياري بما أن شروط التقريب متوفرة، أي:

$$X \sim B(300, 0.07) \xrightarrow{\begin{cases} np=21 > 5 \\ n(1-p)=279 > 5 \end{cases}} \frac{X - 21}{\sqrt{21(1 - 0.07)}} \sim N(0, 1)$$

إذا:

$$P(X \geq 100) = P\left(Z \geq \frac{100 - 21}{4.42}\right) = 1 - P(Z < 17.88) = 0$$

كان بالإمكان حساب الاحتمال مباشرة بواسطة "Excel" كما هو مبين في الشكل (28)

الشكل (28): حساب الاحتمال $P(X \geq 100)$ بواسطة "Excel" ($X \sim B(300, 0.07)$)	
f_x	=1-LOI.BINOMIALE(100;300;0.07;VRAI)
	0

تمرين 7:

من أجل مراقبة جودة قطع غيار معينة يتم معاينة بعض القطع واكتشاف المعيبة منها، عملية المعاينة تكون باحتساب عدد القطع المعيبة في كل 5 دقائق. بعد 8 ساعات وجد أن متوسط القطع المعيبة في 5 دقائق هو 2.

المطلوب: ما هو احتمال وجود 10 قطع معيبة على الأكثر في النصف ساعة الأولى من عملية المعاينة؟

حل التمرين 7:

سيتم استخدام توزيع بواسون لأنه لدينا ظواهر تحدث عبر الزمن بشكل منتظم، أي:

$$X \sim p(\lambda = 2) \rightarrow P(X = x) = \frac{e^{-2} 2^x}{x!}$$

ولحساب احتمال الحصول على 5 قطع معينة في نصف ساعة، ينبغي حساب متوسط القطع المعينة في النصف ساعة الأولى والذي بعملية ثلاثية سيسلوي $\lambda = \frac{30 \times 2}{5} = 12$ ، ومنه:

$$P(X = x) = \frac{e^{-12} 12^x}{x!}$$

والاحتمال يحسب:

$$P(X \leq 10) = \sum_{x=0}^{10} \frac{e^{-12} 12^x}{x!}$$

$$= \frac{e^{-12} 12^0}{0!} + \frac{e^{-12} 12^1}{1!} + \dots + \frac{e^{-12} 12^{10}}{10!} = 0.347$$

النتيجة كان يمكن الحصول عليها بواسطة "Excel" كما في الشكل (29)

الشكل (29): حساب الاحتمال $P(X \geq 10)$ بواسطة "Excel" ($X \sim p(\lambda = 12)$)	
f_x	=LOI.POISSON(10;12;VRAI)
	0.347229418

يمكن أيضا حساب الاحتمال بعد التقريب للتوزيع الطبيعي بما أن $\lambda > 5$ وهو شرط كافٍ للحصول على تقريب جيد، ومع استعمال معامل ياتس، لدينا:

$$X \sim p(\lambda) \xrightarrow{\lambda > 5} \frac{X - \lambda + 0.5}{\sqrt{\lambda}} = \frac{X - 12 + 0.5}{3.46} \sim N(0,1)$$

ومنه الاحتمال يحسب:

$$P(X \leq 10) = P\left(Z \leq \frac{10.5 - 12}{3.46}\right)$$

$$P(Z \leq -0.43) = 1 - P(Z < 0.43) = 0.333$$

تمرين 8: إذا كانت لدينا متغيرة عشوائية X تتبع توزيع قاما $\Gamma(\lambda, r)$ فاحسب مايلي:

ثانيا. $P(X \leq 1.2)$ حيث $X \sim \Gamma(2,3)$

ثالثا. كم تسلوي قيم (λ, r) إذا أردنا الحصول على كاي مربع بدرجة حرية 5 ثم أوجد قيمة X بحيث

$$P(X \leq x) = 0.672$$

حل التمرين 8:

أولا. حساب $\Gamma(5.5)$ ، $\Gamma(5)$

$$\Gamma(5) = 4! = 4 * 3 * 2 = 24$$

$$\Gamma(5.5) = \Gamma\left(\frac{13}{2} - 1\right) = \frac{13}{2} \Gamma\left(\frac{13}{2}\right)$$

$$\Gamma(5.5) = 4.5 \Gamma(4.5) = 4.5 * 3.5 \Gamma(3.5) = 4.5 * 3.5 * 2.5 \Gamma(2.5)$$

$$= 4.5 * 3.5 * 2.5 * 1.5 \Gamma(1.5)$$

$$= 4.5 * 3.5 * 2.5 * 1.5 * 0.5 \Gamma(0.5)$$

$$= 4.5 * 3.5 * 2.5 * 1.5 * 0.5 \sqrt{\pi} = \frac{945}{16} \sqrt{\pi}$$

كان باستطاعتنا حساب قيمة الدالة مباشرة ب "Excel" كما يلي:

$$\Gamma(5.5) = \text{GAMMA}(5.5) = 52.34$$

ثانيا. $X \sim \Gamma_{(2,3)}$ حيث $P(X \leq 1.2)$

بما أن هدف المطبوعة التبسيط وفهم المقياس بلون براهين، نستعمل "Excel" مباشرة لنجد:

$$P(X \leq 1.2) = \text{LOI.GAMMA}(1.2; 2; 3; \text{VRAI}) = 0.061$$

$$X \sim \Gamma_{(\lambda, r)} \Leftrightarrow \int_0^{1.2} \frac{2^3 x^2 e^{-2x}}{2} dx = 4 \int_0^{1.2} x^2 e^{-2x} . dx$$

$$= 4 \int_0^{1.2} x^2 e^{-2x} . dx = -2x^2 e^{-2x} - 2x e^{-2x} - e^{-2x}$$

ثالثا. كم تسلوي قيم (λ, r) إذا أردنا الحصول على كاي مربع بدرجة حرية 5

للحصول على توزيع كاي مربع بدرجة حرية 5 انطلاقا من توزيع قاما لا بد من:

$$\begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \\ r = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \Gamma\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right) \approx \chi_5^2$$

الآن، وباستعمال "Excel" نكتب:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 0.672 \Leftrightarrow x \\ &= \text{LOI.GAMMA.INVERSE}(2.5; 0.5; 0.672) = 1.2 \end{aligned}$$

تمرين 9:

أولا. ماهي قيم معلمتي توزيع بيتا إذا علمت أن:

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{3} \\ V(X) = \frac{2}{63} \end{cases}$$

ثانيا. بعد تحديد معلمتي التوزيع أحسب $P(X \leq 0.89)$

حل التمرين 9:

أولا. تحديد معلمتي توزيع بيتا. لدينا:

$$\begin{cases} E(X) = \frac{1}{3} \\ V(X) = \frac{2}{63} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\alpha + \beta} = \frac{1}{3} \dots\dots\dots 1 \\ \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)} = \frac{2}{63} \dots\dots\dots 2 \end{cases}$$

من المعادلة 1 نستخرج قيمة β ونعوضها في المعادلة 2 لنجد:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha 2\alpha}{(3\alpha)^2(3\alpha + 1)} &= \frac{2}{63} \Leftrightarrow 63\alpha^2 = 9\alpha^2(3\alpha + 1) \\ \Leftrightarrow \alpha^2(63 - 27\alpha - 9) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha^2(-27\alpha + 54) &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\alpha = \frac{54}{27} = 2\right) \end{aligned}$$

وبالتعويض في المعادلة 1 نجد:

$$\beta = 2\alpha = 4$$

إذا:

$$X \sim \text{Beta}_{(2,4)}$$

ثانيا. حساب $P(X \leq 0.89)$ بواسطة "Excel"

$$P(X \leq 0.89) = \text{LOI.BETA}(1; 0; 4; 2; 0.89) = 0.9993$$

تمرين 10:

إذا علمت أن الإنفاق اليومي للطالب على المستلزمات الدراسية يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط 80 دج و تباين قدره 9 دج

المطلوب :

1/ التحويل الى التوزيع الطبيعي المعياري؟

2/ احسب الاحتمالات التالية :

احتمال أن لا يزيد الإنفاق اليومي للطالب عن 67 دج ؟

احتمال أن يكون الإنفاق اليومي محصور بين 70 و 90 دج ؟

احتمال أن يكون الإنفاق اليومي أكبر من 90 دج ؟

3/ حدد قيمة الإنفاق اليومي للطالب إذا علمت أن :

$$P(X \leq x) = 0.9515$$

حل التمرين 10:

1/ للتحويل إلى التوزيع المعياري نكتب:

$$X \sim N(80, 9) \rightarrow Z = \frac{X - 80}{3} \sim N(0, 1)$$

2/ حساب الاحتمالات:

$$P(X \leq 67) = P\left(Z \leq \frac{67 - 80}{3}\right) = P(Z \leq -4.33) = 0$$

معناه، احتمال أن لا يزيد الإنفاق اليومي للطالب عن 67 دج يسوي 0

$$\begin{aligned}
P(70 \leq X \leq 90) &= P\left(\frac{70 - 80}{3} \leq Z \leq \frac{90 - 80}{3}\right) \\
&= P(-3.33 \leq Z \leq 3.33) \\
&= P(Z \leq 3.33) - P(Z \leq -3.33) \\
&= 2P(Z \leq 3.33) - 1 = 2 * 0.9995 - 1 = 0.9991
\end{aligned}$$

معناه، احتمال أن يكون الإنفاق اليومي محصور بين 70 و 90 دج هو 0.9991

$$\begin{aligned}
(X > 90) &= P\left(Z > \frac{90 - 80}{3}\right) = P(Z > 3.33) = 1 - P(Z \leq 3.33) \\
&= 1 - 0.9995 = 0.0005
\end{aligned}$$

أي أن احتمال أن يكون الإنفاق اليومي أكبر من 90 دج هو 0.0005.

3/ حدد قيمة الإنفاق اليومي للطالب

انطلاقاً من المعلومات المتاحة يمكن كتابة الآتي:

$$P(X \leq x) = 0.9515 \Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{x - 80}{3}\right) = 0.9515$$

من جدول التوزيع المعياري نعلم بأن القيمة 0.9515 هي احتمال مقابل للقيمة 1.66، أي أن:

$$\frac{x - 80}{3} = 1.66 \Leftrightarrow x = 84.98$$

كان بالإمكان استخراج القيمة مباشرة بواسطة برنامج إكسل كما هو مبين في الجدول الشكل الآتي

1	:	  	<code>=LOI.NORMALE.INVERSE.N(0.9515;80;3)</code>			
	A	B	C	D	E	
	84.98					

ملاحظة: في السؤال الأخير ينبغي التنبيه متى نستخدم الجدول الإحصائي للتوزيع المعياري مباشرة وبطريقة

عكسية، حيث متراجحة الاحتمال يجب أن تكون من النوع أصغر، أو أصغر أو تسوي وقيمة الاحتمال أكبر

من 0.5. فمثلاً ما ذا لو كان السؤال من هذا الشكل $P(X \geq x) = 0.9515$

الحل:

لدينا:

$$P(X \geq x) = 0.9515 \Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{x - 80}{3}\right) = 0.9515$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(Z < \frac{x - 80}{3}\right) = 0.9515$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z < \frac{x - 80}{3}\right) = 1 - 0.9515 = 0.0485$$

نلاحظ من الشكل النهائي للاحتمال أن المتراجحة من النوع أصغر ولكن قيمة الاحتمال أقل من 0.05 وهذا

لا يسمح لنا باستعمال الجدول الاحصائي للتوزيع المعياري مباشرة، فما هو الحل؟

الحل يكمن في أننا في حالة الأعداد السالبة أو أن المقدار x سيكون سالبا، ولإيجاده نكتب الآتي:

$$P\left(Z < \frac{x - 80}{3}\right) = 0.0485 \Leftrightarrow P\left(Z > -\frac{x - 80}{3}\right) = 0.0485$$

$$\Leftrightarrow 1 - P\left(Z \leq -\frac{x - 80}{3}\right) = 0.0485$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq -\frac{x - 80}{3}\right) = 1 - 0.0485$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq -\frac{x - 80}{3}\right) = 0.9515$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 80}{3} = -1.66$$

$$\Leftrightarrow x = 75.02$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجادها مباشرة باستخدام إكسل كما هو مبين في الشكل الآتي:

A1	:	f_x	=LOI.NORMALE.INVERSE.N(0.0485;80;3)			
	A	B	C	D	E	
1	75.02					

المحور الثالث: المتغيرات

العشوائية المتقطعة

الثنائية

تمهيد:

لا يقتصر التحليل الإحصائي في كثير من التطبيقات العلمية والاقتصادية على دراسة متغير عشوائي واحد، بل يتطلب في الغالب تحليل أكثر من متغير في الوقت نفسه، وهو ما يقود إلى مفهوم المتغيرات العشوائية المزدوجة بوصفه إطاراً رياضياً لدراسة الظواهر العشوائية متعددة الأبعاد.

وتُعرَّف المتغيرات العشوائية المزوجة باعتبارها زوجاً مرتباً من المتغيرات العشوائية يُمثَّل عادةً بـ (X, Y) ، حيث يسمح هذا التمثيل بدراسة التوزيع الاحتمالي المشترك للمتغيرين وتحليل طبيعة العلاقة الاحتمالية بينهما. وتكتسب هذه المتغيرات أهمية بالغة في النمذجة الإحصائية، خاصة عند تحليل الترابط والتبعية بين المتغيرات، وهي مسألة محورية في مجالات متعددة مثل الاقتصاد، والعلوم الاجتماعية، والهندسة، والعلوم الطبيعية.

وبحسب طبيعة القيم التي يمكن أن يتخذها كل من المتغيرين، تنقسم المتغيرات العشوائية المزوجة إلى متغيرات مزوجة منفصلة ومتغيرات مزوجة متصلة. ويترتب على هذا التقسيم اختلاف جوهري في أسلوب التوصيف الرياضي، سواء من حيث دوال الكتلة الاحتمالية المشتركة في الحالة المنفصلة أو دوال الكثافة الاحتمالية المشتركة في الحالة المتصلة.

ولا يكتمل توصيف المتغيرات العشوائية المزوجة دون دراسة خصائصها الإحصائية، التي تُعد أدوات أساسية لفهم سلوكها الاحتمالي. وتشمل هذه الخصائص القيم المتوقعة، والتباينات، والتغاير، ومعامل الارتباط، التي تتيح قياس درجة الاعتماد أو الاستقلال بين المتغيرين، كما تمثل الأساس النظري لعدد كبير من النماذج والأساليب الإحصائية المتقدمة. وعليه، فإن دراسة المتغيرات العشوائية المزوجة المنفصلة والمتصلة وخواصها تمثل مدخلاً ضرورياً لفهم التحليل الاحتمالي متعدد المتغيرات، وتمهيداً لاستخدام أدوات إحصائية أكثر تعقيداً في البحث العلمي والتطبيقي.

1. دالة الكتلة الاحتمالية

على عكس المحورين الأول والثاني، في هذا المحور نجد بعض الظواهر تتداخل بين متغيرتين عشوائيتين، لذلك ينبغي علينا المعرفة الجيدة لكيفية التعامل معها. فمثلاً دراسة أوزان الأطفال بالمولودة مع النظام الغذائي المتبع،

أو دراسة الاستهلاك العائلي مقارنة مع الدخل المتاح وهكذا. فإذا كان لدينا متغيرتين عشوائيتين متقطعتين تحدثان في نفس الوقت، فإن دالة الكتلة الاحتمالية تكتب من الشكل (Miah, 2016), (p. 89) :

$$P(x_i, y_j) = P(X = x_i, Y = y_j)$$

هذه الدالة ينبغي أن تتوفر فيها شرطين:

$$\begin{cases} P(x, y) \geq 0 \forall x, y \\ \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) = 1 \end{cases}$$

الشرط الأول والثاني معناه أن كل الاحتمالات الممكنة أكبر أو تساوي الصفر، ومجموعها يساوي 1

2. التوزيع الثنائي الحدي

لتشكيل جدول التوزيع الاحتمالي الثنائي لا بد أولاً من معرفة كيفية حساب الاحتمالات الحدية، أي الاحتمالات الخاصة بكل متغيرة عشوائية على حدة. إذا بكل بساطة يمكن حساب الاحتمالات الحدية للمتغيرة الأولى والثانية وفق ما يلي:

$$\begin{aligned} P(x_i) &= \sum_{j=1}^m P(X = x_i, Y = y_j) \\ P(y_j) &= \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_j) \end{aligned}$$

حيث i تمثل قيمة ما للمتغيرة العشوائية X وعددها n . و j هي قيم المتغيرة العشوائية Y وعددها m .

مثال: إذا كان لدينا متغيرتين عشوائيتين X و Y . القيم العددية الممكنة للمتغيرة الأولى 2 وللمتغيرة الثانية 3. إذن الاحتمال الحدي الأول للمتغيرة العشوائية X يكتب من الشكل:

$$\begin{aligned} P(x_1) &= \sum_{j=1}^3 P(X = x_1, Y = y_j) \\ &= P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_1, Y = y_2) \\ &\quad + P(X = x_1, Y = y_3) \end{aligned}$$

والاحتمال الحدي الأول للمتغيرة Y يكتب من الشكل:

$$\begin{aligned}
P(y_1) &= \sum_{i=1}^2 P(X = x_i, Y = y_1) \\
&= P(X = x_1, Y = y_1) + P(X = x_2, Y = y_1) \\
&\quad + P(X = x_3, Y = y_1)
\end{aligned}$$

ويمكن كتابة كل الاحتمالات الحدية مع الاحتمالات الخاصة بدالة كتلة الاحتمال في ما يسمى بجدول التوزيع الاحتمالي الثنائي كما هو مبين في الجدول (7)

الجدول (7): جدول التوزيع الاحتمالي المشترك

Y \ X	y_1	y_2	$\dots$	y_m	المجموع
x_1	$P(x_1, y_1) = P(X = x_1, Y = y_1)$	$P(x_1, y_2)$	$\dots$	$P(x_1, y_m)$	$P(x_1)$
x_2	$P(x_2, y_1)$	$P(x_2, y_2)$	$\dots$	$P(x_2, y_m)$	$P(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	$P(x_n, y_1)$	$P(x_n, y_2)$	$\dots$	$P(x_n, y_m)$	$P(x_n)$
المجموع	$P(y_1) = \sum_{i=1}^n P(X = x_i, Y = y_1)$	$P(y_2)$	$\dots$	$P(y_m)$	$\sum_{i=1}^n P(x_i) = \sum_{j=1}^m P(y_j)$ $= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m P(x_i, y_j) = 1$

كما أن التوقع الرياضي والتباين يحسبان كما يلي:

أولاً. التوقع الرياضي:

$$\left\{ \begin{aligned}
E(X) &= \sum_i \sum_j x_i P(x_i, y_j) = \sum_i x_i P(x_i) \\
E(Y) &= \sum_i \sum_j y_j P(x_i, y_j) = \sum_j y_j P(y_j) \\
E(XY) &= \sum_i \sum_j x_i y_j P(x_i, y_j)
\end{aligned} \right.$$

ثانياً. التباين:

$$\left\{ \begin{array}{l} V(X) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))^2 P(x_i, y_j) \\ \text{و} \\ V(Y) = \sum_i \sum_j (y_i - E(Y))^2 P(x_i, y_j) \end{array} \right.$$

ثالثا. التباين المشترك:

$$\begin{aligned} Coc(X, Y) &= \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_i - E(Y)) P(x_i, y_j) \\ &= E(XY) - E(X)E(Y) \end{aligned}$$

مثال: نسحب كرتين بلون لرجاع من كيس به 4 كريات مرقمة كما يلي 8 10 13 17، حيث نعرف المتغيرتين العشوائيتين X التي تمثل القيمة المطلقة لفرق العددين الفرديين للعينة المسحوبة، و Y تمثل الرقم الأصغر نتيجة الفرق الأكبر من 5. المطلوب: كون جدول التوزيع الاحتمالي الثنائي.

الحل:

لتكوين جدول التوزيع الاحتمالي المزوج لا بد في الأول من إعطاء كل الحالات الممكنة للمتغيرتين العشوائيتين.

الجدول(8): جدول العينات الممكن سحبها وقيم المتغيرتين العشوائيتين

العينات الممكن سحبها	القيم الممكنة للمتغيرة العشوائية X	القيم الممكنة للمتغيرة العشوائية Y
{8,10}	0	0
{8,13}	5	0
{8,17}	9	8
{10,13}	3	0
{10,17}	7	10
{13,17}	4	0

بعد الحصول على قيم المتغيرتين العشوائيتين نكون جدول التوزيع الاحتمالي المزوج بكل سهولة.

الجدول(9): جدول التوزيع الاحتمالي المزوج

$i \backslash y_j$	$y_1 = 0$	$y_2 = 8$	$y_3 = 10$	$y_4 = 13$	المجموع
$x_1 = 0$	$P(0,0) = 1/6$	$P(0,8) = 0$	$P(0,10) = 0$	$P(0,13) = 0$	$P(x_1) = \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{6}$
$x_2 = 3$	$P(3,0) = 1/6$	$P(3,8) = 0$	$P(3,10) = 0$	$P(3,13) = 0$	$P(x_2) = \frac{1}{6}$
$x_3 = 4$	$P(4,0) = 1/6$	$P(4,8) = 0$	$P(4,10) = 0$	$P(4,13) = 0$	$P(x_3) = \frac{1}{6}$
$x_4 = 5$	$P(5,0) = 1/6$	$P(5,8) = 0$	$P(5,10) = 0$	$P(5,13) = 0$	$P(x_4) = \frac{1}{6}$
$x_5 = 7$	$P(7,0) = 0$	$P(7,8) = 0$	$P(7,10) = 1/6$	$P(7,13) = 0$	$P(x_5) = \frac{1}{6}$
$x_6 = 9$	$P(9,0) = 0$	$P(9,8) = 1/6$	$P(9,10) = 0$	$P(9,13) = 0$	$P(x_6) = \frac{1}{6}$
المجموع	$P(y_1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{2}{3}$	$P(y_2) = \frac{1}{6}$	$P(y_3) = \frac{1}{6}$	$P(y_4) = 0$	$\sum_{i=1}^6 P(x_i) = \sum_{j=1}^4 P(y_j) = \sum_{i=1}^6 \sum_{j=1}^4 P(x_i, y_j) = 1$

ملاحظة: تم إعطاء الاحتمالات المزوجة بناء على أن كل العينات الممكن سحبها لها نفس احتمال الحلو

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{C_4^2}$$

من خلال جدول التوزيع الاحتمالي المزوج يمكن استنتاج جدول التوزيعين الحدين للمتغيرتين العشوائيتين بكل سهولة.

الجدول(10): التوزيعات الاحتمالية الحدية لكلا المتغيرتين العشوائيتين

y_j	$P(y_j)$	x_i	$P(x_i)$
$y_1 = 0$	$P(y_1) = \frac{2}{3}$	$x_1 = 0$	$P(x_1) = \frac{1}{6}$
$y_2 = 8$	$P(y_2) = \frac{1}{6}$	$x_2 = 3$	$P(x_2) = \frac{1}{6}$
$y_3 = 10$	$P(y_3) = \frac{1}{6}$	$x_3 = 4$	$P(x_3) = \frac{1}{6}$
$y_4 = 13$	$P(y_4) = 0$	$x_4 = 5$	$P(x_4) = \frac{1}{6}$
المجموع	$\sum_{j=1}^4 P(y_j) = 1$	$x_5 = 7$	$P(x_5) = \frac{1}{6}$

	$x_6 = 9$	$P(x_6) = \frac{1}{6}$
	المجموع	$\sum_{i=1}^6 P(x_i) = 1$

ثالثا. لحساب التباين المشترك نحسب أولا التوقع الرياضي.

$$\left\{ \begin{array}{l} E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 0 * \frac{1}{6} + 3 * \frac{1}{6} + 4 * \frac{1}{6} + 5 * \frac{1}{6} + 7 * \frac{1}{6} + 9 * \frac{1}{6} = \frac{14}{3} \\ E(Y) = \sum_j y_j P(y_j) = 0 * \frac{2}{3} + 8 * \frac{1}{6} + 10 * \frac{1}{6} + 13 * 0 = 3 \\ E(XY) = \frac{71}{3} \end{array} \right.$$

الآن نحسب التباين:

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_i \sum_j (x_i - E(X))^2 P(x_i, y_j) \\ &= (0 - \frac{14}{3})^2 * \frac{1}{6} + (3 - \frac{14}{3})^2 * \frac{1}{6} + (4 - \frac{14}{3})^2 * \frac{1}{6} \\ &\quad + (5 - \frac{14}{3})^2 * \frac{1}{6} + (7 - \frac{14}{3})^2 * \frac{1}{6} + (9 - \frac{14}{3})^2 * \frac{1}{6} \\ &= \frac{222}{27} \end{aligned}$$

وبالنسبة ل Y

$$\begin{aligned} V(y) &= \sum_j \sum_i (y_j - E(Y))^2 P(x_i, y_j) \\ &= (0 - 3)^2 * \frac{2}{3} + (8 - 3)^2 * \frac{1}{6} + (10 - 3)^2 * \frac{1}{6} \\ &\quad + (13 - 3)^2 * 0 = \frac{55}{3} \end{aligned}$$

الآن يمكن حساب التباين المشترك:

$$Coc(X, Y) = \sum_i \sum_j (x_i - E(X))(y_i - E(Y)) P(x_i, y_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \left(0 - \frac{14}{3}\right)(0 - 3) * \frac{1}{6} + \left(0 - \frac{14}{3}\right)(8 - 3) * 0 \\
&\quad + \left(0 - \frac{14}{3}\right)(10 - 3) * 0 + \left(0 - \frac{14}{3}\right)(13 - 3) * 0 + \\
&\left(3 - \frac{14}{3}\right)(0 - 3) * \frac{1}{6} + \left(3 - \frac{14}{3}\right)(8 - 3) * 0 + \left(3 - \frac{14}{3}\right)(10 - 3) \\
&\quad * 0 + \left(3 - \frac{14}{3}\right)(13 - 3) * 0 + \\
&\left(4 - \frac{14}{3}\right)(0 - 3) * \frac{1}{6} + \left(4 - \frac{14}{3}\right)(8 - 3) * 0 + \left(4 - \frac{14}{3}\right)(10 - 3) \\
&\quad * 0 + \left(4 - \frac{14}{3}\right)(13 - 3) * 0 + \\
&\left(5 - \frac{14}{3}\right)(0 - 3) * \frac{1}{6} + \left(5 - \frac{14}{3}\right)(8 - 3) * 0 + \left(5 - \frac{14}{3}\right)(10 - 3) \\
&\quad * 0 + \left(5 - \frac{14}{3}\right)(13 - 3) * 0 + \\
&\left(7 - \frac{14}{3}\right)(0 - 3) * 0 + \left(7 - \frac{14}{3}\right)(8 - 3) * 0 + \left(7 - \frac{14}{3}\right)(10 - 3) \\
&\quad * \frac{1}{6} + \left(7 - \frac{14}{3}\right)(13 - 3) * 0 + \\
&\quad \left(9 - \frac{14}{3}\right)(0 - 3) * 0 + \left(9 - \frac{14}{3}\right)(8 - 3) * \frac{1}{6} \\
&\quad + \left(9 - \frac{14}{3}\right)(10 - 3) * 0 + \left(9 - \frac{14}{3}\right)(13 - 3) * 0 = \frac{29}{3}
\end{aligned}$$

أو يمكن حسابه كما يلي:

$$Coc(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{71}{3} - \frac{14}{3} * 3 = \frac{29}{3}$$

3. دالة التوزيع التراكمي

كما أشرنا في كل توزيع لا بد من معرفة التوزيع التراكمي من أجل حساب بعض الاحتمالات التجميعية،

وعموما تكتب دالة التوزيع التراكمي للمتغيرات العشوائية الثنائية كما يلي:

$$F(x_i, y_j) = P(X \leq x_i, Y \leq y_j) = \sum_{X \leq x_i} \sum_{Y \leq y_j} P(X = x_i, Y = y_i)$$

$$= \sum_{X \leq x_i} \sum_{Y \leq y_j} P(x_i, y_i)$$

مثال: بالرجوع للمثال السابق، أحسب الاحتمالات الآتية: $P(X < 3, Y \leq 10)$ ، $F(x_3, y_2)$

الحل:

أولاً. حساب $F(x_3, y_2)$

$$F(x_3, y_2) = F(4, 8) = \sum_{X \leq x_3} \sum_{Y \leq y_2} P(x_i, y_i) = P(x_1, y_1) + P(x_1, y_2) + P(x_2, y_1) + P(x_2, y_2) + P(x_3, y_1) + P(x_3, y_2)$$

الآن ومن الجدول () يمكن حساب الاحتمالين بكل سهولة كما يلي:

$$\begin{aligned} F(x_3, y_2) = F(4, 8) &= \sum_{X \leq x_3} \sum_{Y \leq y_2} P(x_i, y_i) \\ &= P(0, 0) + P(0, 8) + P(3, 0) + P(3, 8) + P(4, 0) \\ &+ P(4, 8) = \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

ثانياً. $P(X < 3, Y \leq 10)$

$$P(X < 3, Y \leq 10) = P(0, 0) + P(0, 8) + P(0, 10) = \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{6}$$

يمكن بنفس الطريقة تشكيل جدول التوزيع التراكمي كما يلي:

الجدول (11): جدول التوزيع التراكمي

$i \backslash j$	$y_1 < 0$	$0 \leq y_2 < 8$	$8 \leq y_3 < 10$	$10 \leq y_4 < 13$	$y_4 \geq 13$
$x_1 < 0$	$P(X < 0, Y < 0) = 0$	0	0	0	0
$0 \leq x_2 < 3$	0	$F(0, 0) = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{6}$
$3 \leq x_3 < 4$	0	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6} + 0 + 0 = \frac{1}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + 0 + \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0 = \frac{1}{3}$

$4 \leq x_4 < 5$	0	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ $= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0$ $= \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 = \frac{1}{2}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $= \frac{1}{2}$
$5 \leq x_5 < 7$	0	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ $+ \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + \frac{1}{6} + 0 = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $= \frac{2}{3}$
$7 \leq x_6 < 9$	0	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ $+ \frac{1}{6} + 0$ $= \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $= \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + 0$ $+ 0 + \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6} + 0$ $= \frac{5}{6}$
$x_6 \geq 9$	0	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$ $+ \frac{1}{6} + 0$ $+ 0 = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6}$ $+ 0 + 0 + 0$ $+ 0 + \frac{1}{6} + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 = 1$	$\frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ \frac{1}{6} + 0 + 0 + 0$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6} + 0$ $+ 0 + 0 + \frac{1}{6} + 0$ $+ 0 + \frac{1}{6} + 0 = 1$

يمكن إعادة تنظيم الجدول كما يلي:

الجدول (12): جدول التوزيع التراكمي

$i \backslash y_j$	$y_1 < 0$	$0 \leq y_2 < 8$	$8 \leq y_3 < 10$	$10 \leq y_4 < 13$	$y_4 \geq 13$
$x_1 < 0$	0	0	0	0	0
$0 \leq x_2 < 3$	0	1/6	1/6	1/6	1/6
$3 \leq x_3 < 4$	0	1/3	1/3	1/3	1/3
$4 \leq x_4 < 5$	0	1/2	1/2	1/2	1/2
$5 \leq x_5 < 7$	0	2/3	2/3	2/3	2/3

$7 \leq x_6 < 9$	0	2/3	2/3	5/6	5/6
$x_6 \geq 9$	0	2/3	5/6	1	1

4. التوزيعات الاحتمالية الشرطية

التوزيعات الاحتمالية الشرطية تكون لما يشترط علينا أخذ قيم إما المتغيرة الأولى أو الثانية في الحسبان، وبصفة عامة يمكن حسابها كما يلي:

$$\left\{ \begin{array}{l} P(X = x_i / Y = y_j) = P(x_i / y_j) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(y_j)}, \quad i = 1 \text{ to } n \text{ and } j = 1 \text{ to } m \\ \text{and} \\ P(Y = y_j / X = x_i) = P(y_j / x_i) = \frac{P(x_i, y_j)}{P(x_i)}, \quad i = 1 \text{ to } n \text{ and } j = 1 \text{ to } m \end{array} \right.$$

وبالمجموع لمعطيات المثال أعلاه يمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي الشرطي في حالة معلومية y_j كما هو مبين في الجدول (13)

الجدول (13): جدول التوزيع الشرطي في حالة معلومية y_j

$x_i \backslash y_j$	$y_1 = 0$	$y_2 = 8$	$y_3 = 10$	$y_4 = 13$ لا يمكن حساب الاحتمالات الشرطية هنا
$x_1 = 0$	$P(0/0) = \frac{1/6}{2/3} = \frac{1}{4}$	$P(0/8) = 0$	$P(0/10) = 0$	/
$x_2 = 3$	$P(3/0) = \frac{1}{4}$	$P(3/8) = 0$	$P(3/10) = 0$	/
$x_3 = 4$	$P(4/0) = \frac{1}{4}$	$P(4/8) = 0$	$P(4/10) = 0$	/
$x_4 = 5$	$P(5/0) = \frac{1}{4}$	$P(5/8) = 0$	$P(5/10) = 0$	/
$x_5 = 7$	$P(7/0) = 0$	$P(7/8) = 0$	$P(7/10) = \frac{1}{4}$	/
$x_6 = 9$	$P(9/0) = 0$	$P(9/8) = 1$	$P(9/10) = 0$	/
المجموع	$P(y_1) = 1$	$P(y_2) = 1$	$P(y_3) = 1$	/

ويمكن تكوين جدول التوزيع الاحتمالي الشرطي في حالة معلومية x_i بنفس الطريقة كما هو مبين في الجدول (14)

الجدول (14): جدول التوزيع الشرطي في حالة معلومية x_i

$i \backslash y_j$	$y_1 = 0$	$y_2 = 8$	$y_3 = 10$	$y_4 = 13$	المجموع
$x_1 = 0$	$P(0/0) = 1$	$P(8/0) = 0$	$P(10/0) = 0$	$P(13/0) = 0$	$P(y_j/x_1) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$
$x_2 = 3$	$P(0/3) = 1$	$P(8/3) = 0$	$P(10/3) = 0$	$P(13/3) = 0$	$P(y_j/x_2) = 1$
$x_3 = 4$	$P(0/4) = 1$	$P(8/4) = 0$	$P(10/4) = 0$	$P(13/4) = 0$	$P(y_j/x_3) = 1$
$x_4 = 5$	$P(0/5) = 1$	$P(8/5) = 0$	$P(10/5) = 0$	$P(13/5) = 0$	$P(y_j/x_4) = 1$
$x_5 = 7$	$P(0/7) = 0$	$P(8/7) = 0$	$P(10/7) = 1$	$P(13/7) = 0$	$P(y_j/x_5) = 1$
$x_6 = 9$	$P(9,0) = 0$	$P(9,8) = 1/6$	$P(9,10) = 0$	$P(9,13) = 0$	$P(y_j/x_6) = 1$

تمارين المحور الثالث

تمرين 1: بناء على ما هو متاح في الجدول الآتي:

أولاً. أحسب الاحتمالات الآتية:

$P(X \leq 2)$	$P(X > 2, Y > 1)$	$P(X \leq 2, Y \leq 1)$	$P(X < 2, Y < 1)$
---------------	-------------------	-------------------------	-------------------

ثانياً. أحسب $P(X/Y = 1)$

ثالثاً. أحسب التباين المشترك

x_i	y_j	$P(x_i, y_j)$
1	0	0.3
2	1	0.25
3	2	0.45

حل التمرين 1: قبل حساب ما هو مطلب نعيد كتابة جدول التوزيع الاحتمالي المشترك ما يلي:

	0	1	2	$P(x_i)$
1	0.3	0	0	0.3
2	0	0.25	0	0.25
3	0	0	0.45	0.45
$P(y_j)$	0.3	0.25	0.45	1

أولاً. حساب الاحتمالات المطلوبة:

$$P(X < 2, Y < 1) = 0.3$$

$$P(X \leq 2, Y \leq 1) = 0.3 + 0 + 0 + 0.25 = 0.55$$

$$P(X > 2, Y > 1) = 0.45$$

أيضاً يمكن حساب هذا الاحتمالي كما يلي:

$$P(X > 2, Y > 1) = 1 - P(X \leq 2, Y \leq 1) = 1 - 0.55 = 0.45$$

$$P(X < 2) = 0.3$$

$$P(X \leq 2) = 0.3 + 0.25 = 0.55$$

ثانياً. حساب $P(X/Y = 1)$

$$P(X/Y = 1) = \begin{cases} P\left(X = \frac{1}{Y} = 1\right) = \frac{P(X = 1, Y = 1)}{P(Y = 1)} = 0 \\ P(X = 2/Y = 1) = \frac{P(X = 2, Y = 1)}{P(Y = 1)} = 1 \\ P(X = 3/Y = 1) = \frac{P(X = 3, Y = 1)}{P(Y = 1)} = 0 \end{cases}$$

ثالثاً. حساب التباين المشترك: قبل حساب التباين المشترك نحسب التوقع للمتغيرتين كما يلي

$$E(X) = \sum_i x_i P(x_i) = 1 * 0.3 + 2 * 0.25 + 3 * 0.45 = 2.15$$

$$E(Y) = \sum_j y_j P(y_j) = 0 * 0.3 + 1 * 0.25 + 2 * 0.45 = 1.15$$

$$E(XY) = 2 * 1 * 0.25 + 3 * 2 * 0.45 = 3.2$$

إذا التباين المشترك يسوي:

$$Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 3.2 - 2.15 * 1.15 = 0.7275$$

تمرين 2: إذا كانت لدينا دالة الكتلة الاحتمالية المزوجة من الشكل:

$$\begin{cases} P(x_i, y_j) = \frac{\alpha}{x_i y_j} & i = 1, 2 \text{ and } j = 1, 2, 3 \\ x_i = i, y_j = i + j \end{cases}$$

المطلوب:

أولاً. ماهو قيمة المقدار α حتى تكون الدالة عبارة عن كتلة احتمال مزوج

ثانياً. أحسب الاحتمالات الآتية:

$P(Y \leq 2)$	$P(X > 1, Y > 1)$	$P(X \leq 2, Y \leq 1)$	$P(X < 2, Y < 2)$
---------------	-------------------	-------------------------	-------------------

ثالثاً. أحسب $P(Y/X = 1)$

حل التمرين 2:

أولاً. نقول عن الدالة أنها دالة كتلة احتمال مشترك إذا تحقق:

$$\begin{cases} P(x_i, y_j) \geq 0 \forall x_i, y_j \\ \sum_i \sum_j P(x_i, y_j) = 1 \end{cases}$$

	1	2	3	$P(x_i)$
1	$\frac{\alpha}{1}$	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{3}$	
2	$\frac{\alpha}{2}$	$\frac{\alpha}{4}$	$\frac{\alpha}{6}$	
$P(y_j)$				1

$$\sum_i \sum_j P(x_i, y_j) = 1 \Leftrightarrow \frac{\alpha}{1} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{3} + \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} + \frac{\alpha}{6} = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha \frac{33}{12} = 1$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{12}{33} = 0.36$$

يمكن الآن إعادة كتابة جدول التوزيع الاحتمالي المشترك ما يلي:

	1	2	3	$P(x_i)$
1	0.36	0.18	0.12	0.66
2	0.18	0.09	0.06	0.33
$P(y_j)$	0.54	0.27	0.18	1

ثانياً. حساب الاحتمالات الآتية:

$P(Y \leq 2)$	$P(X > 1, Y > 1)$	$P(X \leq 2, Y \leq 1)$	$P(X < 2, Y < 2)$
---------------	-------------------	-------------------------	-------------------

$$P(X < 2, Y < 2) = P(1,1) = 0.36$$

$$P(X \leq 2, Y \leq 1) = P(1,1) + P(2,1) = 0.36 + 0.18 = 0.54$$

$$P(X > 1, Y > 1) = P(2,2) + P(2,3) = 0.09 + 0.06 = 0.15$$

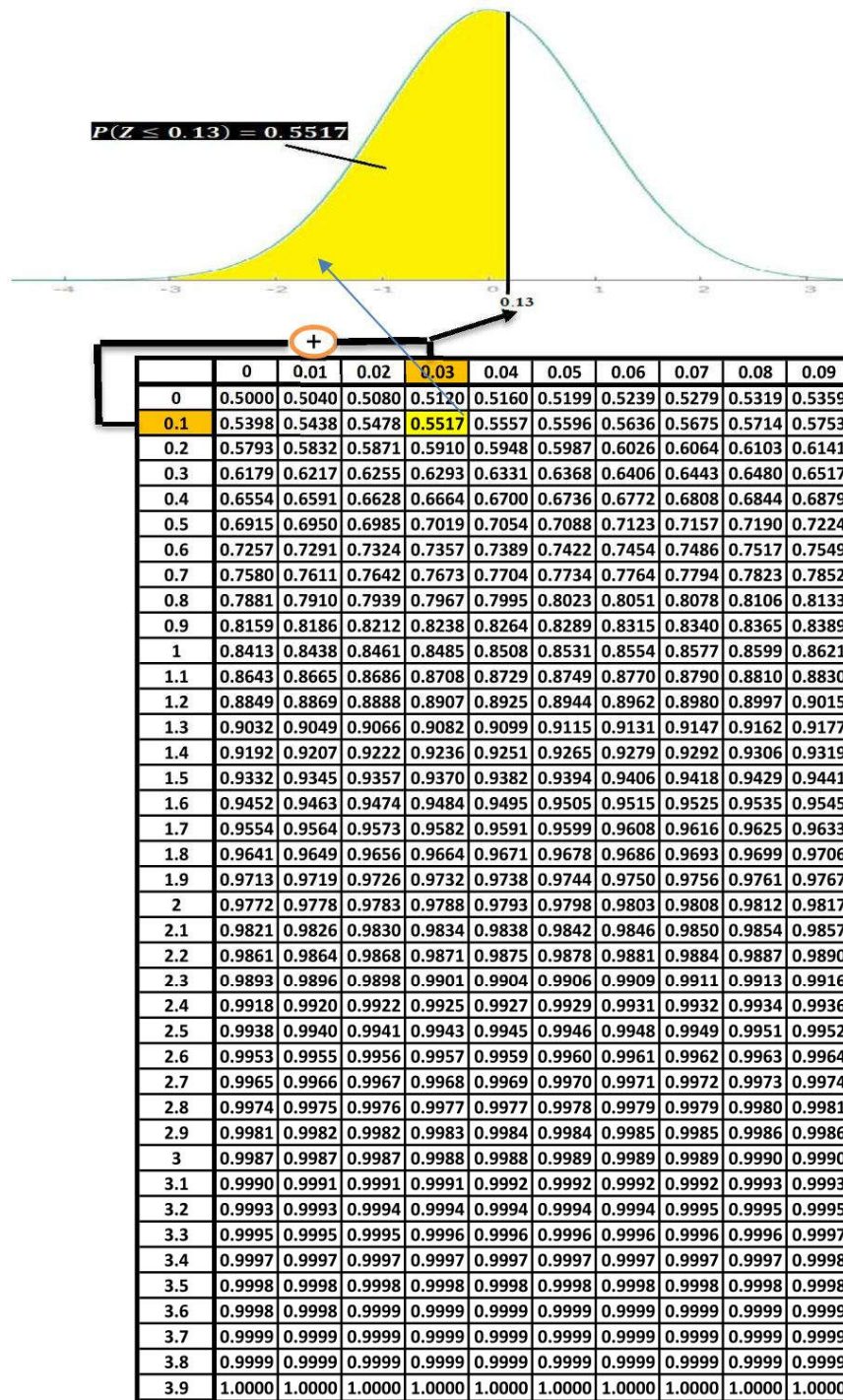
$$P(Y \leq 2) = P(y_1) + P(y_2) = \mathbf{0.54} + \mathbf{0.09} = \mathbf{0.63}$$

ثالثاً. حساب $P(Y/X = 1)$

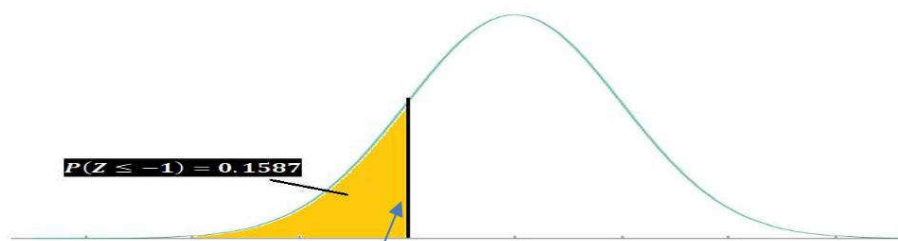
$$P(Y/X = 1) = \begin{cases} P(Y = 1/X = 1) = \frac{P(Y = 1, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{0.36}{0.66} = 0.55 \\ P(Y = 2/X = 1) = \frac{P(Y = 2, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{0.18}{0.66} = 0.28 \\ P(Y = 3/X = 1) = \frac{P(Y = 1, X = 1)}{P(X = 1)} = \frac{0.12}{0.66} = 0.18 \end{cases}$$

الجداول الإحصائية

جدول التوزيع الطبيعي المعياري للقيم الموجبة:

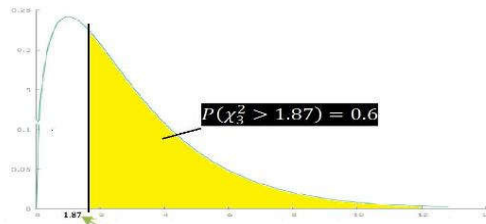


جدول التوزيع الطبيعي المعياري للقيم السالبة:

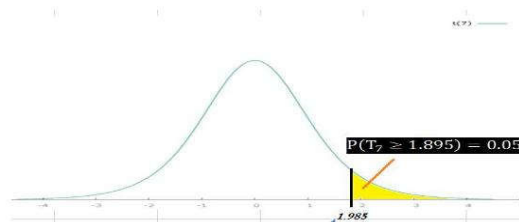


	0	-0.01	-0.02	-0.03	-0.04	-0.05	-0.06	-0.07	-0.08	-0.09
0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
-0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
-0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
-0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
-0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
-0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
-0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
-0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
-0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
-0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
-1	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
-1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
-1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
-1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
-1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
-1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
-1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
-1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
-1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
-1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
-2	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
-2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
-2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
-2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
-2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
-2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
-2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
-2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
-2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
-2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
-3	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
-3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
-3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
-3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
-3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
-3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
-3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
-3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

جدول التوزيع كاي مربع:



$\frac{p}{df}$	0.995	0.99	0.975	0.95	0.9	0.8	0.6	0.4	0.2	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005
1	0.00	0.00	0.00	0.00	0.02	0.06	0.27	0.71	1.64	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	0.01	0.02	0.05	0.10	0.21	0.45	1.02	1.83	3.22	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	0.07	0.11	0.22	0.35	0.58	1.01	1.87	2.95	4.64	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	0.21	0.30	0.48	0.71	1.06	1.65	2.75	4.04	5.99	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	0.41	0.55	0.83	1.15	1.61	2.34	3.66	5.13	7.29	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	0.68	0.87	1.24	1.64	2.20	3.07	4.57	6.21	8.56	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55
7	0.99	1.24	1.69	2.17	2.83	3.82	5.49	7.28	9.80	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	4.59	6.42	8.35	11.03	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.38	7.36	9.41	12.24	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.18	8.30	10.47	13.44	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	6.99	9.24	11.53	14.63	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	7.81	10.18	12.58	15.81	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	8.63	11.13	13.64	16.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	9.47	12.08	14.69	18.15	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	10.31	13.03	15.73	19.31	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.15	13.98	16.78	20.47	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	12.00	14.94	17.82	21.61	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.86	12.86	15.89	18.87	22.76	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	13.72	16.85	19.91	23.90	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	14.58	17.81	20.95	25.04	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	15.44	18.77	21.99	26.17	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	16.31	19.73	23.03	27.30	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	17.19	20.69	24.07	28.43	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	18.06	21.65	25.11	29.55	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	18.94	22.62	26.14	30.68	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	19.82	23.58	27.18	31.79	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	20.70	24.54	28.21	32.91	36.74	40.11	43.19	46.96	49.64
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	21.59	25.51	29.25	34.03	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	22.48	26.48	30.28	35.14	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	23.36	27.44	31.32	36.25	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	24.26	28.41	32.35	37.36	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	25.15	29.38	33.38	38.47	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	26.04	30.34	34.41	39.57	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	26.94	31.31	35.44	40.68	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	27.84	32.28	36.47	41.78	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	28.73	33.25	37.50	42.88	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	29.64	34.22	38.53	43.98	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	30.54	35.19	39.56	45.08	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	31.44	36.16	40.59	46.17	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	32.34	37.13	41.62	47.27	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
41	21.42	22.91	25.21	27.33	29.91	33.25	38.11	42.65	48.36	52.95	56.94	60.56	64.95	68.05
42	22.14	23.65	26.00	28.14	30.77	34.16	39.08	43.68	49.46	54.09	58.12	61.78	66.21	69.34
43	22.86	24.40	26.79	28.96	31.63	35.07	40.05	44.71	50.55	55.23	59.30	62.99	67.46	70.62
44	23.58	25.15	27.57	29.79	32.49	35.97	41.02	45.73	51.64	56.37	60.48	64.20	68.71	71.89
45	24.31	25.90	28.37	30.61	33.35	36.88	42.00	46.76	52.73	57.51	61.66	65.41	69.96	73.17
46	25.04	26.66	29.16	31.44	34.22	37.80	42.97	47.79	53.82	58.64	62.83	66.62	71.20	74.44
47	25.77	27.42	29.96	32.27	35.08	38.71	43.94	48.81	54.91	59.77	64.00	67.82	72.44	75.70
48	26.51	28.18	30.75	33.10	35.95	39.62	44.92	49.84	55.99	60.91	65.17	69.02	73.68	76.97
49	27.25	28.94	31.55	33.93	36.82	40.53	45.89	50.87	57.08	62.04	66.34	70.22	74.92	78.23
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	41.45	46.86	51.89	58.16	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
51	28.73	30.48	33.16	35.60	38.56	42.36	47.84	52.92	59.25	64.30	68.67	72.62	77.39	80.75
52	29.48	31.25	33.97	36.44	39.43	43.28	48.81	53.94	60.33	65.42	69.83	73.81	78.62	82.00
53	30.23	32.02	34.78	37.28	40.31	44.20	49.79	54.97	61.41	66.55	70.99	75.00	79.84	83.25
54	30.98	32.79	35.59	38.12	41.18	45.12	50.76	55.99	62.50	67.67	72.15	76.19	81.07	84.50
55	31.73	33.57	36.40	38.96	42.06	46.04	51.74	57.02	63.58	68.80	73.31	77.38	82.29	85.75
56	32.49	34.35	37.21	39.80	42.94	46.96	52.71	58.04	64.66	69.92	74.47	78.57	83.51	86.99
57	33.25	35.13	38.03	40.65	43.82	47.88	53.69	59.06	65.74	71.04	75.62	79.75	84.73	88.24
58	34.01	35.91	38.84	41.49	44.70	48.80	54.67	60.09	66.82	72.16	76.78	80.94	85.95	89.48
59	34.77	36.70	39.66	42.34	45.58	49.72	55.64	61.11	67.89	73.28	77.93	82.12	87.17	90.72
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	50.64	56.62	62.13	68.97	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	59.90	66.40	72.36	79.71	85.53	90.53	95.02	100.43	104.21
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	69.21	76.19	82.57	90.41	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	78.56	85.99	92.76	101.05	107.57	113.15	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	87.95	95.81	102.95	111.67	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17



α dof	0.5	0.45	0.4	0.25	0.1	0.05	0.025	0.01	0.005	0.0025	0.001	0.0005
1	0	0.15838	0.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.321	318.309	636.619
2	0	0.14213	0.289	0.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3	0	0.13666	0.277	0.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4	0	0.13383	0.271	0.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0	0.13218	0.267	0.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0	0.13108	0.265	0.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0	0.13029	0.263	0.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0	0.12971	0.262	0.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0	0.12925	0.261	0.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0	0.12889	0.260	0.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0	0.12859	0.260	0.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0	0.12835	0.259	0.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0	0.12814	0.259	0.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0	0.12796	0.258	0.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0	0.12781	0.258	0.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0	0.12767	0.258	0.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0	0.12755	0.257	0.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0	0.12745	0.257	0.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0	0.12735	0.257	0.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0	0.12727	0.257	0.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0	0.12719	0.257	0.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0	0.12712	0.256	0.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0	0.12706	0.256	0.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.768
24	0	0.127	0.256	0.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0	0.12694	0.256	0.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0	0.12689	0.256	0.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0	0.12685	0.256	0.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0	0.12681	0.256	0.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0	0.12677	0.256	0.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0	0.12673	0.256	0.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
31	0	0.1267	0.256	0.682	1.309	1.696	2.040	2.453	2.744	3.022	3.375	3.633
32	0	0.12666	0.255	0.682	1.309	1.694	2.037	2.449	2.738	3.015	3.365	3.622
33	0	0.12663	0.255	0.682	1.308	1.692	2.035	2.445	2.733	3.008	3.356	3.611
34	0	0.1266	0.255	0.682	1.307	1.691	2.032	2.441	2.728	3.002	3.348	3.601
35	0	0.12658	0.255	0.682	1.306	1.690	2.030	2.438	2.724	2.996	3.340	3.591
36	0	0.12655	0.255	0.681	1.306	1.688	2.028	2.434	2.719	2.990	3.333	3.582
37	0	0.12653	0.255	0.681	1.305	1.687	2.026	2.431	2.715	2.985	3.326	3.574
38	0	0.1265	0.255	0.681	1.304	1.686	2.024	2.429	2.712	2.980	3.319	3.566
39	0	0.12648	0.255	0.681	1.304	1.685	2.023	2.426	2.708	2.976	3.313	3.558
40	0	0.12646	0.255	0.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
41	0	0.12644	0.255	0.681	1.303	1.683	2.020	2.421	2.701	2.967	3.301	3.544
42	0	0.12642	0.255	0.680	1.302	1.682	2.018	2.418	2.698	2.963	3.296	3.538
43	0	0.12641	0.255	0.680	1.302	1.681	2.017	2.416	2.695	2.959	3.291	3.532
44	0	0.12639	0.255	0.680	1.301	1.680	2.015	2.414	2.692	2.956	3.286	3.526
45	0	0.12637	0.255	0.680	1.301	1.679	2.014	2.412	2.690	2.952	3.281	3.520
46	0	0.12636	0.255	0.680	1.300	1.679	2.013	2.410	2.687	2.949	3.277	3.515
47	0	0.12634	0.255	0.680	1.300	1.678	2.012	2.408	2.685	2.946	3.273	3.510
48	0	0.12633	0.255	0.680	1.299	1.677	2.011	2.407	2.682	2.943	3.269	3.505
49	0	0.12631	0.255	0.680	1.299	1.677	2.010	2.405	2.680	2.940	3.265	3.500
50	0	0.1263	0.255	0.679	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
51	0	0.12629	0.255	0.679	1.298	1.675	2.008	2.402	2.676	2.934	3.258	3.492
52	0	0.12628	0.255	0.679	1.298	1.675	2.007	2.400	2.674	2.932	3.255	3.488
53	0	0.12626	0.255	0.679	1.298	1.674	2.006	2.399	2.672	2.929	3.251	3.484
54	0	0.12625	0.255	0.679	1.297	1.674	2.005	2.397	2.670	2.927	3.248	3.480
55	0	0.12624	0.255	0.679	1.297	1.673	2.004	2.396	2.668	2.925	3.245	3.476
56	0	0.12623	0.255	0.679	1.297	1.673	2.003	2.395	2.667	2.923	3.242	3.473
57	0	0.12622	0.255	0.679	1.297	1.672	2.002	2.394	2.665	2.920	3.239	3.470
58	0	0.12621	0.255	0.679	1.296	1.672	2.002	2.392	2.663	2.918	3.237	3.466
59	0	0.1262	0.254	0.679	1.296	1.671	2.001	2.391	2.662	2.916	3.234	3.463
60	0	0.12619	0.254	0.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
70	0	0.12612	0.254	0.678	1.294	1.667	1.994	2.381	2.648	2.899	3.211	3.435
80	0	0.12606	0.254	0.678	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
90	0	0.12602	0.254	0.677	1.291	1.662	1.987	2.368	2.632	2.878	3.183	3.402
100	0	0.12598	0.254	0.677	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390

$\alpha = 0.01$ جدول التوزيع فيشر عند

جدول التوزيع فيشر عند $\alpha = 0.05$

جدول التوزيع فيشر عند $\alpha = 0.10$

[illegible]

قائمة المراجع:

- A. e. (2015). *Statistiques pour l'économie et la gestion* (éd. 5). (C. Borsenberger, Trad.) Louvain-La-Neuve : DeBoeck.
- Christophe Hurlin, V. M. (2015). *statistique et probabilités en économie-gestion*. Paris: Dunod.
- Douglas C. Montgomery, G. C. (s.d.). *Applied Statistics and Probability for Engineers* (éd. 6). Wiley.
- I. B. (2018). *Introductory Statistics*. Texas 77005: OpenStax.
- Immediato, H. (s.d.). plus de 1000 exercices entièrement résolus.
Récupéré sur <https://www.fichier-pdf.fr/2016/07/01/maths-monde-site-immediato/>
- Lecoutre, J.-P. (2008). *Statistique et probabilités* (éd. 4). Paris: Dunod.
- M. A. (2016). *Applied Statistics for Social and Management Sciences*. Bangkok: Springer.
- Mohammed A. Shayib. (2013). *Applied Statistics* (1 ed.). bookboon.com.
- Morris H. DeGroot, M. J. (2012). *Probability and Statistics* (éd. 4). Addison-Wesley.
- Vincent Giard. (2003). *Statistique appliquée à la gestion* (éd. 8). Paris: Economica.

WEGNER, T. (2013). *Applied Business Statistics Methods and Excel-based Applications* (éd. 3). South Africa: Juta and Company Ltd.

بوعبد الله صالح. (2005-2006). محاضرات الاحصاء الرياضي.

علاء الدين القبانجي، حسام حمادة كموجي. (2011-2012). الاحتمال والاحصاء. (جامعة دمشق،

المحرر) تم الاسترداد من -[https://www.noor-](https://www.noor-book.com/book/internal_download/41178b7e82d80703a79bbb892c6f241a2bd6d3bb/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba)

[book.com/book/internal_download/41178b7e82d80703a79bbb](https://www.noor-book.com/book/internal_download/41178b7e82d80703a79bbb892c6f241a2bd6d3bb/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba)

[892c6f241a2bd6d3bb/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba](https://www.noor-book.com/book/internal_download/41178b7e82d80703a79bbb892c6f241a2bd6d3bb/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba)

علي عبد السلام العملي، علي حسين العجيلي. (بلا تاريخ). الاحصاء والاحتمالات النظرية والتطبيق. دار

الحكمة. تم الاسترداد من -[https://www.noor-](https://www.noor-book.com/book/internal_download/05e2fd6305b4fADF1fa10f3617fb8b0beacea109/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba)

[book.com/book/internal_download/05e2fd6305b4fADF1fa10f36](https://www.noor-book.com/book/internal_download/05e2fd6305b4fADF1fa10f3617fb8b0beacea109/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba)

[17fb8b0beacea109/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba](https://www.noor-book.com/book/internal_download/05e2fd6305b4fADF1fa10f3617fb8b0beacea109/3/d12137bfad8235a1c297437f6519a6ba)