الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Economiques,
Commerciales et des Sciences de Gestion

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم الإقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

مطبوعة بعنوان:

محاضرات في مقياس أساسيات بحوث العمليات

من إعداد:

دهيمي عمر

2025/2024

فهرس المحتويات

مقدمة:

يعد الإلمام بأساسيات بحوث العمليات أمرا ضروريا ومحوريا لكل طلبة الاقتصاد بمختلف تخصصاته، وذلك لما لهذا المقياس من دور عملي وتطبيقي في دعم اتخاذ القرار وحل المشكلات المتعلقة بتخصيص الموارد، تخطيط الإنتاج، تقليل التكاليف، وزيادة الكفاءة في مختلف أنشطة المؤسسات الاقتصادية.

حيث تقوم بحوث العمليات على استخدام النماذج الرياضية والمنهجيات العلمية في تحليل المشكلات الواقعية المعقدة، واقتراح حلول مثلى أو شبه مثلى لها، وبالتالي فإن إتقان هذا المقياس لا يتطلب فقط الفهم النظري للمفاهيم الأساسية، بل يحتاج أيضا إلى التدرب على تطبيقها باستخدام التمارين العملية والنماذج الرياضية.

هذه المطبوعة موجهة لطلبة السنة الثانية في ميدان العلوم الاقتصادية، التجارية وعلوم التسيير، وهي منجزة وفق البرنامج الوزاري لمقياس بحوث العمليات، وقد تم إعدادها بأسلوب مبسط ومرتب، لتشمل أهم المحاور الأساسية للمقياس، وهي:

المحور الأول: مدخل عام حول بحوث العمليات.

المحور الثاني: عموميات البرمجة الخطية.

المحور الثالث:طرق حل البرمجة الخطية– الطريقة البيانية

المحور الرابع:طرق حل البرمجة الخطية– طريقة السمبلكس

المحور الخامس:المسألة الثنائية

المحور السادس: برمجة الأعداد الصحيحة: طريقة القطع.

المحور السابع: مسائل النقل.

وقد دعمت هذه المطبوعة بعدد من الأمثلة التوضيحية والتمارين المحلولة، مما يسمح للطالب بفهم المحتوى بصورة تدريجية ومنهجية، وتجدر الإشارة إلى أن هذا العمل موجه للطالب الذي يفترض أنه اكتسب مقياسي الرياضيات والإحصاء في السنة الأولى، وسنركز فيه على الجانب العملي التطبيقي الذي يخدم الطالب في تخصصه الأكاديمي والمهني.

المحور الأول: مدخل عام حول بحوث العمليات

بعد الحرب العالمية الثانية أصبح من الضروري الاعتماد على أساليب كمية حديثة في اتخاذ القرارات، بعد أن أثبتت الأساليب التقليدية عدم نجاعتها، ومن أبرز هذه الأساليب ظهرت بحوث العمليات التي استخدمت لأول مرة في بريطانيا لتحسين استخدام الرادارات، وأثبتت فعاليتها في دعم القرار العسكري، مما أدى إلى توسع استخدامها لاحقا في مختلف المجالات خلال النصف الثاني من القرن العشرين.

وتعد بحوث العمليات فرعا مهما من العلوم الإدارية والرياضية، حيث توفر أدوات تحليل كمية دقيقة تساعد على فهم المشكلات المعقدة واتخاذ قرارات رشيدة مبنية على النمذجة الرياضية، وتستخدم في مجالات متعددة تشمل الإدارة، الاقتصاد، الهندسة، الصحة، النقل، والخدمات اللوجستية، وقد أصبحت مكونا أساسيا في المناهج الجامعية والبحوث الأكاديمية.

شهد هذا المجال تطورا كبيرا في السنوات الأخيرة، إذ أصبحت تقنياته التحليلية تستخدم على نطاق واسع لحل مشكلات تطبيقية مثل تعظيم الأرباح، تقليل التكاليف، وتحسين توزيع الموارد.

وتعتبر البرمجة الخطية من أبرز أدوات بحوث العمليات وأكثرها شيوعا، نظرا لقدرتها على تقديم حلول دقيقة لمشكلات تعتمد على بيانات واضحة، وتستخدم بشكل خاص في مجالات مثل الاقتصاد والإدارة والهندسة، ومن أهم تطبيقاتها مسائل النقل، التي تهدف إلى تحديد أفضل وسيلة لتوزيع الموارد أو المنتجات من عدة مصادر إلى جهات الطلب، بأقل تكلفة أو أعلى ربح أو أقصر زمن ممكن.

1-تعريف بحوث العمليات:

تعرف بحوث العمليات بأنها تطبيق الأساليب العلمية في دراسة المشكلات المعقدة التي تظهر عند إدارة وتوجيه الأنظمة الكبرى، سواء في القوى البشرية، أو المعدات، أو الموارد المالية والمادية، وذلك بهدف دعم متخذي القرار في وضع السياسات واتخاذ القرارات بطريقة منهجية وعلمية.

كما تعرف بأنها تطبيق لمجموعة من الأساليب العلمية بالاستعانة بمجموعة من الموارد المادية والبشرية، من خلال تطوير نظام يأخذ في الحسبان كل الصدف والمخاطر الممكن تلقيها في ذلك من أجل الوصول في الأخير إلى الحل الأمثل الذي يرضي المؤسسة.(Rama.m,2007,09)

وقد عرفتها الجمعية البريطانية لبحوث العمليات بأنها "استخدام المنهج العلمي في معالجة المشكلات المعقدة المرتبطة بإدارة الأنظمة الواسعة النطاق في مجالات الصناعة، والأعمال، والمؤسسات الحكومية، والدفاع، بما يساعد على اتخاذ قرارات فعالة مبنية على التحليل العلمي" (الفتال، 2008، صفحة 15).

أما الجمعية الأمريكية لبحوث العمليات فقد عرفتها بأنها "عملية التحديد العلمي للطريقة المثلى في تصميم وتشغيل الأنظمة البشرية والآلية، ضمن ظروف تتطلب توزيعا دقيقا وفعالا للموارد المحدودة" (**الفتال، 2008، صفحة 15**).

وتعد بحوث العمليات كذلك فرعا من فروع الرياضيات التطبيقية، يعنى بتحليل المشكلات واتخاذ القرارات المثلى من خلال بناء نماذج رياضية واستخدام تقنيات تحليلية، وتوظف هذه النماذج لتحسين أداء الأنظمة المعقدة التي تتطلب تخصيصا فعالا للموارد، واختيار البدائل الأنسب ضمن مجموعة من القيود والمتغيرات.

2-مجالات استخدام بحوث العمليات:

من أبرز مجالات استخدامها:(**بن مسعود نصر الدين، 2021، ص: 06**)

1.2-الإدارة والاقتصاد : تساهم بحوث العمليات في رفع كفاءة عمليات التخطيط، والإنتاج، والتوزيع، بالإضافة إلى تحليل التكاليف والعوائد، مما يساعد على ترشيد القرارات الإدارية والمالية.

2.2-الهندسة الصناعية: تستخدم في تصميم وتطوير أنظمة الإنتاج والتصنيع، وتشمل تطبيقاتها جدولة العمليات، وتوزيع الموارد، وتحسين الإنتاجية.

3.2-العلوم العسكرية: توظف في تنظيم وإدارة العمليات العسكرية من خلال تخصيص الموارد، وتحليل الخيارات الاستراتيجية، وتخطيط المهام بكفاءة عالية.

4.2-الخدمات اللوجستية والنقل: تسهم في تحسين شبكات النقل، وتخطيط وتنظيم المسارات، وإدارة المخزون، مما يضمن تقليل التكاليف وزيادة الفعالية.

5.2-الرعاية الصحية: تستخدم في تحسين جداول المواعيد الطبية، وتوزيع الموارد البشرية والمادية، وتعزيز كفاءة أداء المؤسسات الصحية.

6.2-الزراعة: تطبق في تخطيط الإنتاج الزراعي، وتوزيع الموارد الزراعية، وتحسين سلسلة التوريد لتحقيق استخدام أمثل للإمكانات المتاحة.

المحور الثاني: عموميات حول البرمجة الخطية

1-مفهوم البرمجة الخطية

تعد البرمجة الخطية من أبرز فروع بحوث العمليات وأكثرها استخداما، نظرا لكثرة تطبيقاتها في العديد من المجالات، وقد شهدت تطورا كبيرا بعد الحرب العالمية الثانية، خاصة مع ابتكار طريقة السمبلكس

(Simplex) من قِبل جورج دانتزين، التي شكلت نقلة نوعية في حل المشكلات الخطية لما تتميز به من دقة وكفاءة وسرعة.

وهي أسلوب رياضي يهدف إلى إيجاد الحل الأمثل لمشكلات تتسم بعلاقات خطية بين المتغيرات، ضمن مجموعة من القيود، مع توزيع الموارد المحدودة على الحاجات المتنافسة بطريقة تحقق أفضل نتيجة ممكنة. كما أنها لا تتطلب خلفية رياضية متقدمة، مما يجعلها من أبسط النماذج الرياضية وأكثرها انتشارا في معالجة المشكلات الصناعية والإدارية.

تستخدم البرمجة الخطية كأداة فعالة في دعم اتخاذ القرار، خصوصا في مجالات التخطيط والإدارة والرقابة على الموارد مثل الأموال، المواد، القوى العاملة، والآلات، بهدف تحقيق أقصى ربح أو أدنى تكلفة ممكنة.

وتتميز ببساطتها ووضوحها، ما يجعلها مناسبة لمختلف القطاعات، بما في ذلك الصناعي، الحكومي، والخدمي، كما ساهم تطور الحواسيب والبرمجيات المتخصصة في توسيع نطاق استخدامها بفعالية في العصر الحديث.

2-تطبيقات البرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية من أبرز الأدوات الكمية التي قدمتها بحوث العمليات، نظرا لقدرتها على معالجة مجالات كثيرة من المشكلات المتعلقة باتخاذ القرار في بيئة تتسم بتعدد البدائل وندرة الموارد، وتتمثل القيمة المضافة لهذا الأسلوب في تحويل المسائل الاقتصادية أو الإدارية المعقدة إلى نماذج رياضية قابلة للحل باستخدام طرق منهجية، ما يسمح باتخاذ قرارات موضوعية وفعالة، ويمكن إبراز أهم تطبيقاتها العملية في المؤسسات فيما يلي: **(ابراهيم موسى الفتاح، 2006، ص: 8-9)**

1.2-قرارات الإنتاج والتخطيط الصناعي:

تستخدم البرمجة الخطية في بناء نماذج لتحديد التشكيلة المثلى من المنتجات التي يمكن إنتاجها خلال فترة معينة، بحيث تعظم الأرباح أو تقلل التكاليف، مع مراعاة القيود المتعلقة بالموارد المتاحة، كالعمالة، المواد الأولية، الطاقة أو الزمن، وتظهر أهمية هذه النماذج بشكل خاص في الصناعات متعددة المنتجات التي تتطلب توازنا دقيقا في استغلال الموارد المحدودة.

2.2-نماذج المزيج الإنتاجي:

تؤدي البرمجة الخطية دورا هاما في مسائل "المزيج الأمثل"، حيث يتم تحديد الكيفية المثلى لخلط مدخلات مختلفة بنسب معينة لإنتاج منتج نهائي يتميز بمواصفات محددة، وذلك بأقل تكلفة ممكنة أو بأقصى جودة ممكنة، من أمثلة هذه التطبيقات: تركيب الأعلاف، صناعة الإسمنت، الصناعات الغذائية، وغيرها.

3.2-التعيين والتخصيص :

تعالج البرمجة الخطية مشكلات توزيع الموارد البشرية أو الآلات أو المشاريع على المهام المتاحة، بما يحقق أقصى كفاءة ممكنة، فمثلا يمكن استخدامها لتعيين الموظف الأنسب لكل وظيفة استنادا إلى الكفاءة، أو تخصيص الآلات لمهام الإنتاج استنادا على الإنتاجية أو الكلفة، وتعد هذه النماذج أساسا لما يعرف بمسائل التعيين والتخصيص التي تحظى بأهمية كبيرة في إدارة الموارد.

4.2-النقل والتوزيع:

تستخدم نماذج البرمجة الخطية كذلك في تحسين عمليات توزيع المنتجات أو المواد الخام من مواقع الإنتاج إلى مواقع الاستهلاك أو البيع، مع تقليل كلفة النقل الكلية، وتبرز هذه النماذج أكثر في ما يعرف بمسائل النقل، حيث تسهم في تحسين الأداء اللوجستي وتقليل الزمن والكلفة، لاسيما في سلاسل التوريد المعقدة.

5.2-مجالات التخطيط والدعم الاستراتيجي:

تتجاوز تطبيقات البرمجة الخطية الجانب التشغيلي لتصل إلى الأبعاد التخطيطية والاستراتيجية داخل المؤسسات، مثل:

- تخطيط الحملات الإشهارية والإعلانية ضمن ميزانية محدودة.
- تحديد مستويات المخزون المثلى لتقليل تكاليف التخزين دون الإخلال باستمرارية الإنتاج.
- اختيار المواقع الجغرافية المثلى لإقامة وحدات إنتاج أو فروع توزيع، بما يضمن أقصى تغطية سوقية بأقل تكلفة.

3-الشروط الأساسية لصياغة نموذج البرمجة الخطية:

تعتبر البرمجة الخطية أحد الأساليب الرياضية التي تستخدم لتوزيع الموارد المحدودة على الاستخدامات الممكنة بالشكل الذي يحقق أفضل نتيجة ممكنة، سواء كان الهدف تحقيق أقصى ربح أو أدنى تكلفة، وتستند هذه الطريقة إلى فكرتين أساسيتين هما: النشاط والبدائل، حيث يقصد بالنشاط الطريقة التي يمكن من خلالها تنفيذ عمل معين، بينما تشير البدائل إلى الوسائل المختلفة التي يمكن من خلالها تحقيق الهدف المرغوب فيه.

ولكي نتمكن من صياغة نموذج برمجة خطية قابل للتطبيق، يجب أن تتوفر في المشكلة أو المسألة الشروط التالية **(اليمين فالته،2006،ص:27)**:

- وجود هدف واحد محدد وواضح تسعى المنشأة إلى تحقيقه، كتعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف.

- احتواء المشكلة على عدة متغيرات قرار، تمثل المنتجات أو الأنشطة التي تسهم في تحقيق الهدف عند تحديد قيمها المثلى.
- وجود قيود تحد من حرية اتخاذ القرار، ناتجة عن الموارد المحدودة أو الشروط المرتبطة بطبيعة النشاط أو البيئة المحيطة.
- أن تكون متغيرات القرار مستمرة، أي يمكن أن تأخذ قيما كسرية، وليست مقيدة بالقيم الصحيحة فقط.
- ضرورة أن تكون العلاقات بين المتغيرات خطية في كل من دالة الهدف والقيود.
- توافر بيانات كمية دقيقة ومعروفة مسبقا، تستخدم في بناء النموذج وتمثيل المشكلة بشكل واضح.

4-صياغة نموذج البرمجة الخطية

تتمثل صياغة نموذج البرمجة الخطية في تحويل المسألة الواقعية إلى تمثيل رياضي من خلال استخراج مكوناته من المسألة.

1.4-مكونات نموذج البرمجة الخطية:

يتكون نموذج البرمجة الخطية من مجموعة عناصر مترابطة ستخدم في تمثيل المشكلة أو المسألة رياضيا، بهدف الوصول إلى القرار الأمثل، وتتمثل هذه العناصر فيما يلي (**ابراهيم عبدالفتاح،2006،ص:05**):

- **دالة الهدف**: وهي المعادلة التي تعبر عن الهدف الأساسي من النموذج، سواء كان تعظيم الربح أو تقليل التكلفة، ويتم التعبير عنها رياضيا بدلالة متغيرات القرار.
- **متغيرات القرار** :تمثل الكميات التي يمكن التحكم بها، مثل عدد الوحدات المنتجة أو الموزعة، وهي التي يسعى لإيجاد قيمها المثلى بما يحقق الهدف.
- **القيود** :وهي المعادلات أو المتراجحات التي تعبر عن حدود الموارد أو الشروط المفروضة على المشكلة، مثل الطاقة الإنتاجية أو الميزانية المتاحة.
- **قيد عدم السالبية** : وهي التي تنص على أن قيم متغيرات القرار لا يمكن أن تكون سالبة، أي أن جميع المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أو تساوي صفر.

مثال(01):

تقوم شركة بإنتاج ثلاثة أنواع من الأجهزة الإلكترونية: هواتف ذكية، أجهزة لوحية، وحواسيب محمولة، تباع هذه المنتجات بـ 50000 دج، 75000 دج، 100000 دج على التوالي، ولإنتاج وحدة واحدة من كل

نوع من المنتجات الثلاثة ، تحتاج المؤسسة إلى استخدام اليد العاملة والمواد الأولية، والجدول التالي يوضح الاحتياجات اللازمة لذلك:

المنتج	تكلفة المواد الأولية لكل وحدة	تكلفة اليد العاملة لكل وحدة
هاتف ذكي	18000	10000
جهاز لوحي	25000	15000
حاسوب محمول	45000	20000

كما أن الشركة لا يمكن أن تنتج أكثر من 100 حاسوب محمول في الشهر، ويجب ألا يقل انتاج الهاتف الذكي عن 150 هاتف، وكذلك لا يقل عدد الوحدات المنتجة من الأجهزة اللوحية عن ثلث عدد الهواتف الذكية، إذا علمت أن الموارد المتوفرة للمواد الأولية هي 50 مليون دج، ولليد العاملة 30 مليون دج. قم بصياغة نموذج البرمجة الخطية الذي يمكن من تعظيم الربح الشهري.

الحل:

1- تحديد متغيرات القرار:

x_1: عدد الهواتف الذكية المنتجة شهريا.

x_2: عدد الأجهزة اللوحية المنتجة شهريا.

x_3: عدد الحواسيب المحمولة المنتجة شهريا.

2- تحديد دالة الهدف: تتمثل في تعظيم الإيراد الكلي، وذلك من خلال إنتاج الكمية المثلى من المنتجات الثلاثة، ويحتسب هذا الإيراد بجمع حاصل ضرب كل كمية منتجة من المنتجات الثلاثة في سعر الوحدة الواحدة، وبالتالي تعطى دالة الهدف على النحو التالي:

$$MAX(z) = 50000x_1 + 75000x_2 + 100000x_3$$

3- تحديد القيود:

- **قيود الموارد المتاحة**
- **قيد تكلفة المواد الأولية:**

$$18000x_1 + 25000x_2 + 45000x_3 \leq 50000000$$

- **قيد تكلفة اليد العاملة:**

$$10000x_1 + 15000x_2 + 20000x_3 \leq 30000000$$

- **قيود الإنتاج**
- **قيد الحد الأقصى لإنتاج الحواسيب المحمولة:**

$$x_3 \leq 100$$

- **قيد انتاج الهواتف الذكية:**

$$x_1 \geq 150$$

- **قيد انتاج الأجهزة اللوحية:**

$$x_2 \geq 1/3x_1$$

- **قيد عدم السالبية:**

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

وبالتالي البرنامج الخطي يعطى على النحو التالي:

$$\begin{gathered}
MAX(z) = 50000x_1 + 75000x_2 + 100000x_3 \\
s/c \\
18000x_1 + 25000x_2 + 45000x_3 \leq 50000000 \\
10000x_1 + 15000x_2 + 20000x_3 \leq 30000000 \\
x_3 \leq 100 \\
x_1 \geq 150 \\
x_2 \geq 1/3x_1 \\
x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{gathered}$$

مثال(02):

تسعى شركة نقل البضائع إلى تقليل تكاليف النقل اليومية، وذلك باستخدام ثلاث أنواع من الشاحنات، وهي: شاحنات صغيرة، شاحنات متوسطة، وشاحنات كبيرة، والجدول التالي يوضح المعطيات الخاصة بكل نوع من الشاحنات:

النوع	تكلفة التشغيل اليومية (دج)	القدرة الاستيعابية (طن)	عدد السائقين المطلوب
شاحنة صغيرة	20000	4	1
شاحنة متوسطة	30000	6	1
شاحنة كبيرة	45000	10	2

كما أن الشركة تحتاج إلى نقل 120طنا من البضائع يوميا، وتتوفر على ما لا يزيد عن 18 سائقا، ولا يمكن استخدام أكثر من 8 شاحنات كبيرة، وكذلك عدد الشاحنات الصغيرة المستخدمة يجب أن لا يقل عن نصف عدد الشاحنات المتوسطة.

المطلوب: صياغة المسألة في شكل نموذج برمجة خطية.

الحل:

1- تحديد متغيرات القرار:

x_1: عدد الشاحنات الصغيرة المستخدمة يوميا.

x_2: عدد الشاحنات المتوسطة المستخدمة يوميا.

x_3: عدد الشاحنات الكبيرة المستخدمة يوميا.

2- **تحديد دالة الهدف**: تتمثل في تقليل التكاليف اليومية لتشغيل الشاحنات، وبالتالي تعطى دالة الهدف على النحو التالي:

$$MIN(z) = 20000x_1 + 30000x_2 + 45000x_3$$

3- تحديد القيود:

- **قيد الحمولة المطلوبة**

$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 \geq 120$$

- **قيد عدد السائقين**

$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18$$

- **قيود عدد الشاحنات**

✓ **قيد عدد الشاحنات الكبيرة**:

$$x_3 \leq 8$$

✓ **قيد عدد الشاحنات الصغيرة والمتوسطة**:

$$x_1 \geq 1/2x_2$$

- **قيد عدم السالبية**:

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

ويكون البرنامج الخطي على الشكل التالي:

$$MIN(z) = 20000x_1 + 30000x_2 + 45000x_3$$
$$s/c$$
$$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 \geq 120$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 18$$
$$x_3 \leq 8$$
$$x_1 \geq 1/2x_2$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المحور الثالث: طرق حل نموذج البرمجة الخطية:

بعد صياغة المسألة في شكل نموذج رياضي، تأتي الخطوة التالية وهي حل هذا النموذج والوصول إلى الحل الأمثل للمسألة، ولحل نماذج البرمجة الخطية هناك عدة طرق معروفة، تختلف حسب تعقيد النموذج وحجمه، ويمكن تصنيفها إلى طريقتين رئيسيتين هما الطريقة البيانية، وطريقة السمبلكس.

1–الطريقة البيانية (Graphical Method)

1.1–تعريف الطريقة البيانية:

الطريقة البيانية هي إحدى الطرائق الأساسية لحل مسائل البرمجة الخطية، ويستخدم عندما يحتوي النموذج على متغيرين اثنين فقط، حيث تعطي فهما بصريا مباشرا لطبيعة منطقة الحلول الممكنة وطريقة الوصول إلى الحل الأمثل، مبدأ هذه الطريقة هو تمثيل القيود في المستوى الإحداثي، وتحديد منطقة الحلول الممكنة، أي النقاط التي تحقق جميع القيود، بعد ذلك يتم تحديد النقطة أو النقاط التي تعطي القيمة المثلى لدالة الهدف (سواء كانت أقصى ربح أو أدنى تكلفة) (**وليد البلك،2016،ص:55**).

2.1–خطوات الحل بالطريقة البيانية:

لاستخدام طريقة الحل البياني نتبع الخطوات التالية:

- صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة.
- تحويل كل المتراجحات إلى معادلات دون إحداث أي تغييرات.
- التمثيل البياني للقيود ودالة الهدف وإيجاد نقاط التقاطع ، أي تحديد ما يسمى بمنطقة الحلول الممكنة (هي المنطقة التي تضم مجموعة من النقاط حيث أن هذه النقاط تحقق كل قيود النموذج وتعطي قيمة لدالة الهدف).
- إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة، وذلك بحساب نقاط التقاطع بين المستقيمات الممثلة للقيود لتحديد رؤوس المنطقة وهي النقاط التي قد تمثل حلولا مثلى.

- تعويض قيم الإحداثيات في دالة الهدف واختيار أكبر قيمة إذا كان الهدف تعظيم وأقل قيمة إذا كان الهدف تدنئة.

مثال(01):

ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 40x_1 + 30x_2$$
$$s/c$$
$$2x_1 + x_2 \leq 10$$
$$x_1 + x_2 \leq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقة البيانية

الحل: لحل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة نتبع الخطوات السابقة:

1.صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة: المشكلة مصاغة على شكل برنامج خطي من نوع تعظيم.

2.تحويل كل المتراجحات إلى معادلات دون إحداث أي تغييرات وذلك لتسهيل التمثيل البياني:

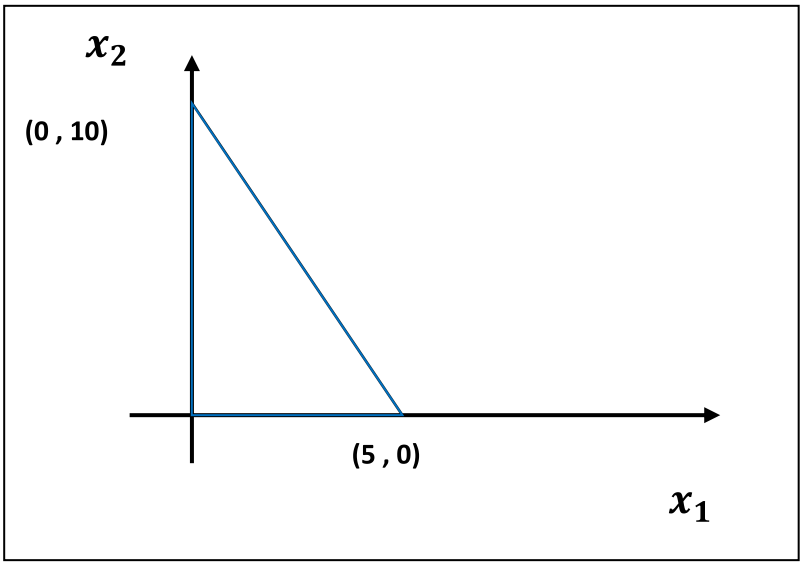
- **القيد الأول**: نحول القيد الأول إلى معادلة دون إضافة أي تعديل
$2x_1 + x_2 = 10$.....(1)
- **القيد الثاني**: نحول القيد الثاني إلى معادلة دون إضافة أي تعديل
$x_1 + x_2 = 8$.......(2)

3.التمثيل البياني للقيود

لتمثيل المعادلات السابقة بيانيا يكفي تحديد ثنائيتين والربط بينهما:

- المعادلة (1)

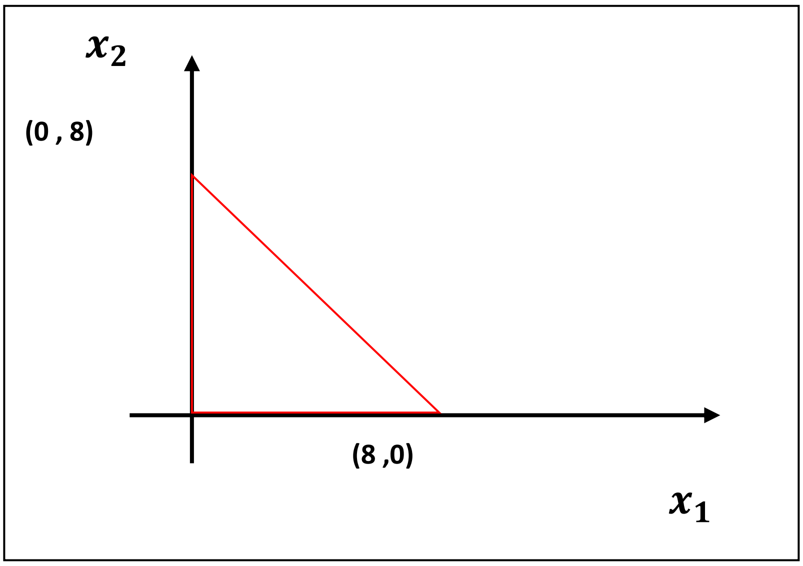
x_1	0	5
x_2	10	0



وبما أن المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (01) تكون على يسار الخط المستقيم .

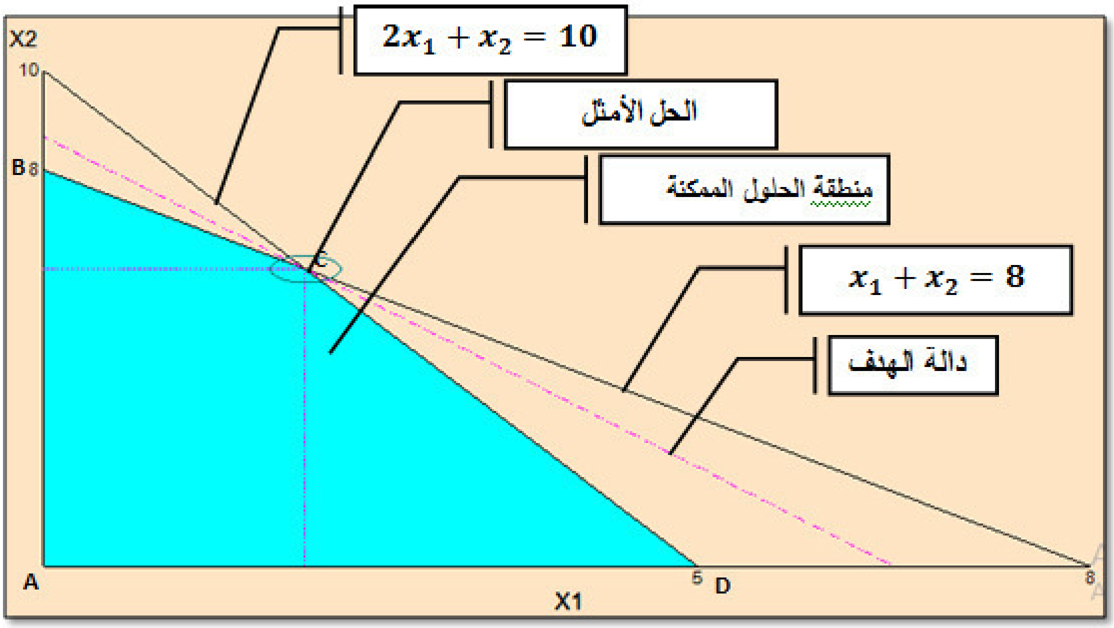
- المعادلة (2):

x_1	0	8
x_2	8	0



وبما أن المتراجحة من نوع أصغر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (02) تكون على يسار الخط المستقيم .

نمثل القيدين في نفس المستوي فنتحصل على التمثيل البياني التالي:



4.إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة: لدينا رؤوس منطقة الحلول الممكنة A ,B,C,D

- النقطة A تمثل المبدأ و احدثياتها هي: A(0,0)
- النقطة B احداثياتها هي: B(0,8)
- النقطة D احداثياتها هي: D(5,0)
- نحسب إحداثيتي النقطة C (نقطة تقاطع المستقيم الممثل للقيد الأول مع المستقيم الممثل للقيد الثاني) بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \ldots(1) \\ x_1 + x_2 = 8 \ldots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة الثانية في (1-) ونجمعها مع المعادلة الأولى (للتخلص x_2) ، فنحصل على:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10 \\ -x_1 - x_2 = -8 \end{cases}$$

فنحصل على:

$$x_1 = 2$$

وبالتعويض في أي معادلة نجد أن:

$$x_2 = 6$$

أي أن نقطة التقاطع C(2,6)

5.تعويض قيم الإحداثيات في دالة الهدف واختيار أكبر قيمة لأننا في حالة دالة هدف من نوع تعظيم.

نقاط رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$z = 40x_1 + 30x_2$
A (0 , 0)	40(0)+30(0)=0
B (0 , 8)	40(0)+30(8)=240
C (2 , 6)	40(2)+30(6)=260
D (5 , 0)	40(5)+30(0)=200

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة **C(2 , 6)** هي أكبر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة).

مثال(02): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

لحل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة نتبع الخطوات السابقة:

1.صياغة نموذج البرمجة الخطية للمشكلة: المشكلة مصاغة على شكل برنامج خطي من نوع تدنئة.

2.تحويل كل المتراجحات إلى معادلات دون إحداث أي تغييرات وذلك لتسهيل التمثيل البياني:

- **القيد الأول**: نحول القيد الأول إلى معادلة دون إضافة أي تعديل

$x_1 + 5x_2 = 10$.....(1)

- **القيد الثاني**: نحول القيد الثاني إلى معادلة دون إضافة أي تعديل

$x_1 + 2x_2 = 6$.......(2)

- **القيد الثالث**: نحول القيد الثالث إلى معادلة دون إضافة أي تعديل

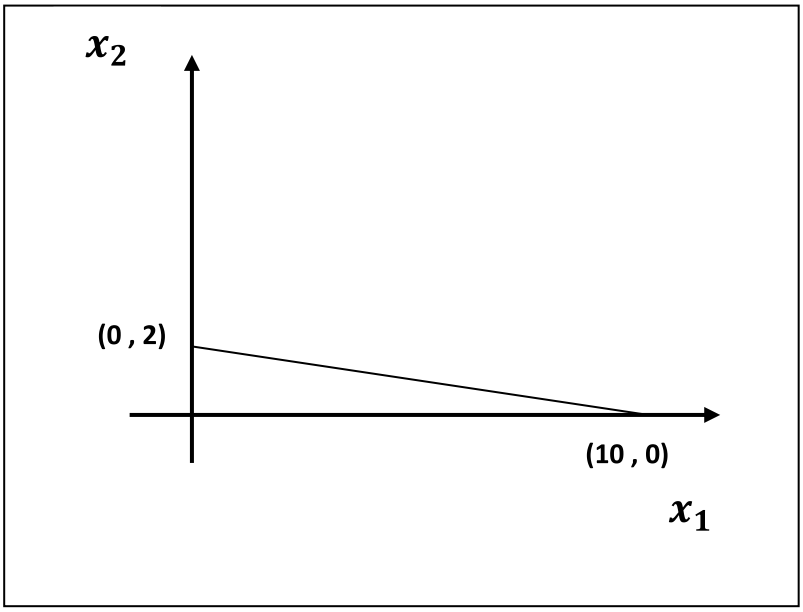
$2x_1 + 2x_2 = 8 \ldots\ldots(3)$

3. التمثيل البياني للقيود

لتمثيل المعادلات السابقة بيانيا يكفي تحديد ثنائيتين والربط بينهما:

- المعادلة (1)

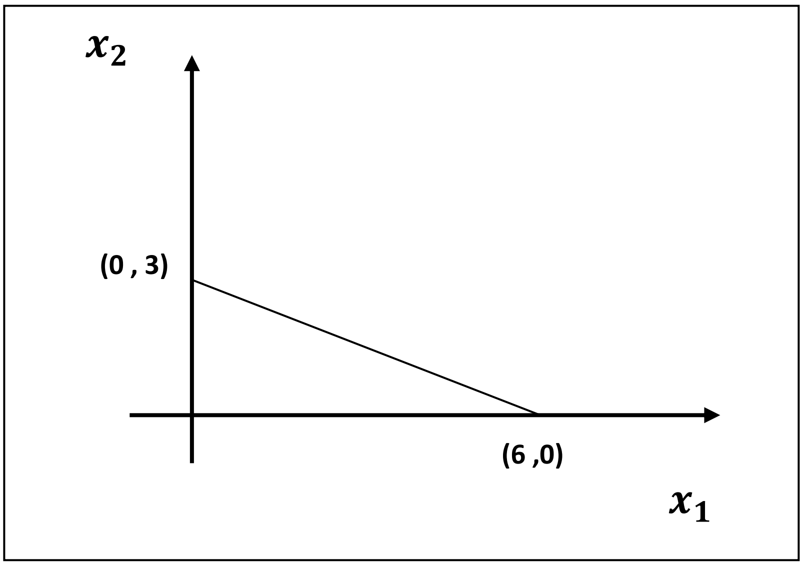
x_1	0	10
x_2	2	0



وبما أن المتراجحة من نوع أكبر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (01) تكون على يمين الخط المستقيم .

- المعادلة (2):

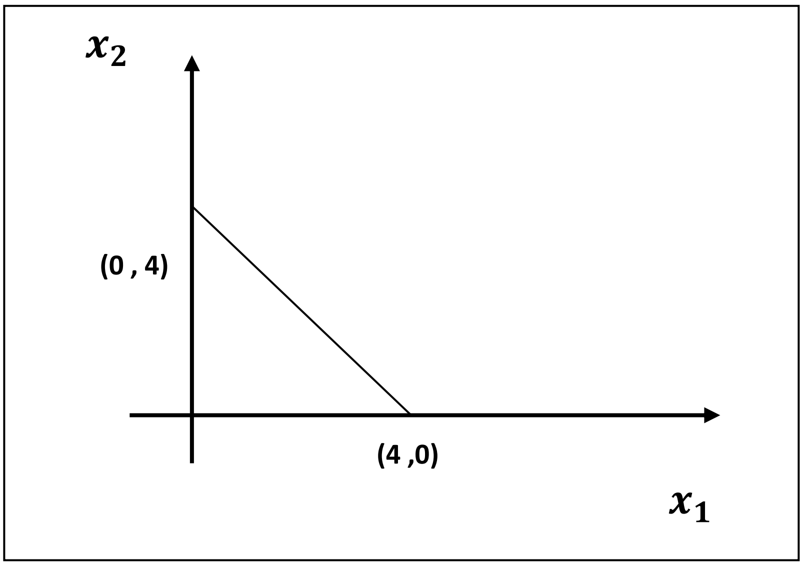
x_1	0	6
x_2	3	0



وبما أن المتراجحة من نوع أكبر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (02) تكون على يمين الخط المستقيم .

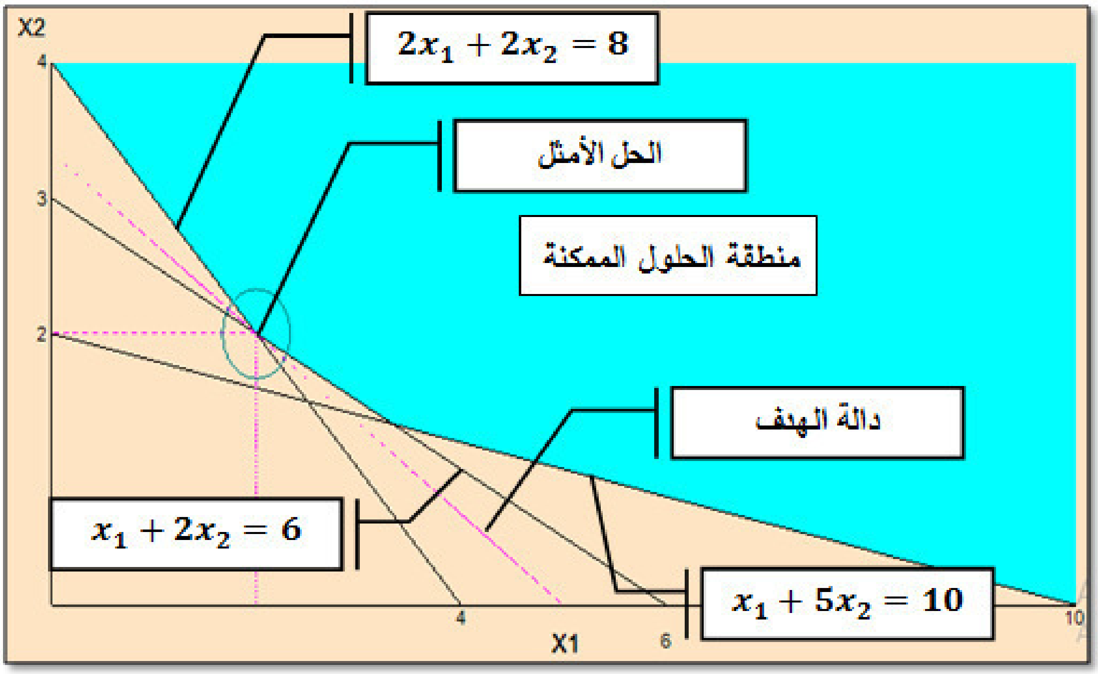
- المعادلة (3):

x_1	0	4
x_2	4	0



وبما أن المتراجحة من نوع أكبر أو يساوي فإن المساحة الممثلة المتراجحة (03) تكون على يمين الخط المستقيم .

نمثل القيود الثلاثة في نفس المستوي فنتحصل على التمثيل البياني التالي:



4.إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحلول الممكنة: لدينا رؤوس منطقة الحلول الممكنة A ,B,C,D

- النقطة A احداثياتها هي: A(0,4)
- النقطة D احداثياتها هي: D(0,10)
- نحسب إحداثيتي النقطة B (نقطة تقاطع المستقيم الممثل للقيد الثاني مع المستقيم الممثل للقيد الثالث) بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6 \dots (1) \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \dots (2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (1) في (1-) ونجمعها مع المعادلة (2) (للتخلص x_2) ، فنحصل على

$$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 = -6 \\ 2x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

فنحصل على:

$$x_1 = 2$$

وبالتعويض في أي معادلة نجد أن:

$$x_2 = 2$$

أي أن نقطة التقاطع B(2,2)

- نحسب إحداثيتي النقطة C (نقطة تقاطع المستقيم الممثل للقيد الأول مع المستقيم الممثل للقيد الثاني) بحل جملة المعادلتين التالية:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \ldots(1) \\ x_1 + 2x_2 = 6 \ldots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في (1-) ونجمعها مع المعادلة (1) (للتخلص x_1) ، فنحصل على

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 10 \\ -x_1 - 2x_2 = -6 \end{cases}$$

فنحصل على:

$$x_2 = 4/3$$

وبالتعويض في أي معادلة نجد أن:

$$x_1 = 10/3$$

أي أن نقطة التقاطع B(10/3,4/3)

5.تعويض قيم الإحداثيات في دالة الهدف واختيار أصغر قيمة لأننا في حالة دالة هدف من نوع تدنئة.

نقاط رؤوس منطقة الحلول الممكنة	$\boldsymbol{z = 2x_1 + 3x_2}$
A (0 , 4)	2(0)+3(4)=12
B (2 , 2)	2(2)+3(2)=10
C (10/3 , 4/3)	2(10/3)+3(4/3)=32/3
D (10 , 0)	2(10)+3(0)=20

نلاحظ أن قيمة دالة الهدف عند النقطة **(2 , 2)B** هي أصغر قيمة وهي تمثل الحل الأمثل (أفضل الحلول الممكنة) .

3.1-حالات خاصة للحل البياني لمشكلات البرمجة الخطية:

هناك حالات خاصة يمكن أن نلاحظها عند حل نموذج البرمجة الخطية بالطريقة البيانية والتي تعد حالات خاصة لحلول تلك النماذج وهي :

الحالة الأولى: وجود عدد غير نهائي من الحلول المثلى

قد يحدث أن يكون المستقيم الممثل لدالة الهدف موازيا لأحد أضلاع منطقة الحلول الممكنة، وفي هذه الحالة لا يمر فقط برأس واحد، بل يلامس ضلعا كاملا منها، وبما أن كل نقطة على هذا الضلع تحقق نفس قيمة دالة الهدف، فإن ذلك يعني وجود عدد لا نهائي من الحلول المثلى، وكلها تعطي نفس النتيجة من حيث الربح أو التكلفة.

مثال:

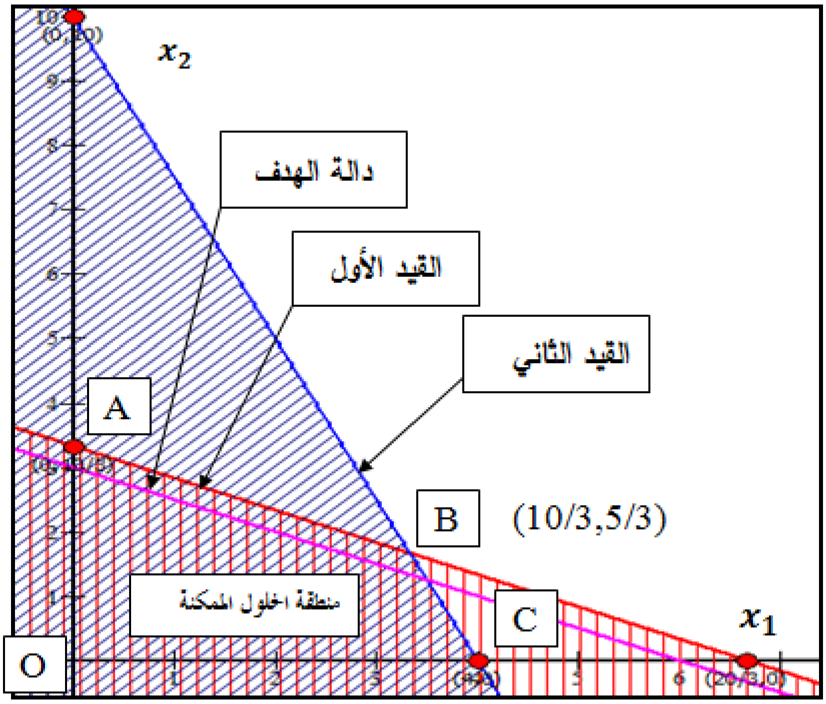
ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} Max(z) = 3x_1 + 6x_2 \\ s/c \\ 6x_1 + 12x_2 \leq 40 \\ 5x_1 + 2x_2 \leq 20 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

باتباع الخطوات السابقة نتوصل إلى التمثيل البياني التالي:



نلاحظ من الشكل أعلاه أن منطقة الحلول الممكنة هي المحددة بنقاط رؤوس المضلع الذي يمثل منطقة الحلول الممكنة (O , A , B , C) علما أن النقطة B هي نقطة تقاطع القيدين الأول والثاني وإحداثياتها

(10/3,5/3) تم الحصول على إحداثياتها بنفس الطريقة السابقة و لإيجاد الحل الأمثل نقوم بسحب المستقيم الممثل لدالة الهدف إلى اليمين(بما أننا في حالة تعظيم) بشكل موازي، وأقصى نقطة في منطقة الحلول الممكنة يمسها هذا المستقيم هي التي تمثل الحل الأمثل، وفي مثالنا هذا آخر نقاط يمسهم المستقيم هي كل النقاط التي تنتمي للقطعة المستقيمة AB الممثلة للقيد الأول والمحددة لمنطقة الحلول الممكنة من الأعلى، ومنه نقول هناك عدد غير منتهي من الحلول المثلى لهذا البرنامج الخطي.

ومن هذه الحلول النقطة **B** التي تنتمي للقطعة المستقيمة **AB** نعوض احداثياتها في دالة الهدف من أجل قيمة **Z** المثلى:

Z= 3*(10/3)+6*(5/3)=20

اذا قيمة **Z** المثلى هي **20** و أي نقطة من القطعة المستقيمة **AB** هي حل أمثلي وتعطي نفس القيمة لـ **Z**.

الحالة الثانية: عدم وجود حل

في بعض الأحيان تكون القيود متناقضة، أي لا توجد أي نقطة يمكن أن تحقق جميع القيود في آن واحد، في هذه الحالة لا يمكن تحديد منطقة حلول ممكنة على الإطلاق وبالتالي لا يوجد حل للمسألة.

مثال :

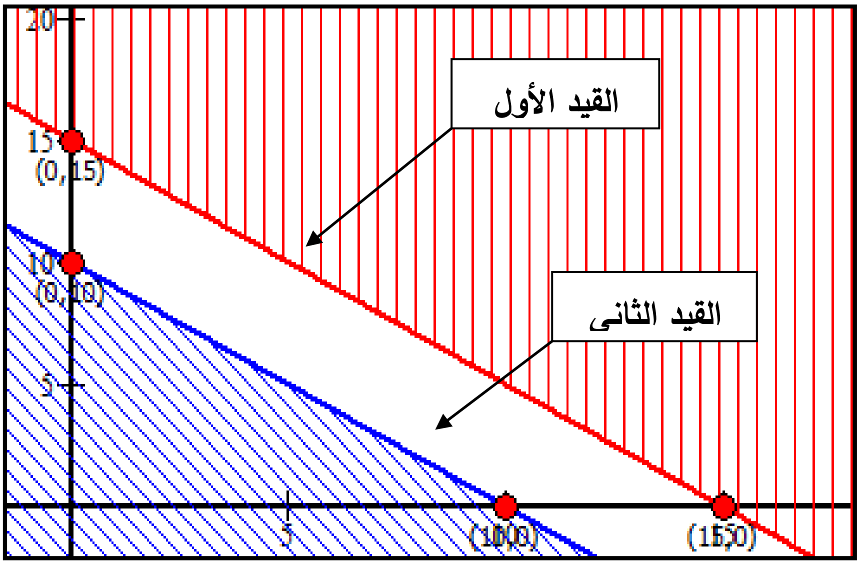
ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$
\begin{gathered}
Max(z) = 5x_1 + 2x_2 \\
s/c \\
x_1 + x_2 \geq 15 \\
x_1 + x_2 \leq 10 \\
x_1, x_2 \geq 0
\end{gathered}
$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل باستخدام الطريقة البيانية.

الحل:

نرسم القيدين و المستقيم الممثل لدالة الهدف :



نلاحظ من الشكل أعلاه أن لاتوجد منطقة مشتركة بين القيدين وبالتالي ليس هناك منطقة حلول ممكنة مقبولة (أي لاتوجد حلول ممكنة لهذا النموذج).

الحالة الثالثة: الحل غير المحدود

قد تكون منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من جهة معينة، أي تمتد إلى ما لا نهاية، ويكون اتجاه التحسين (الزيادة أو النقصان في دالة الهدف) أيضا في نفس الاتجاه، في مثل هذه الحالة يمكن أن تزداد أو تنقص قيمة دالة الهدف بلا حدود، وبالتالي نقول إن المسألة ليس لها حل أمثل محدود بل حلها غير محدود.

مثال:

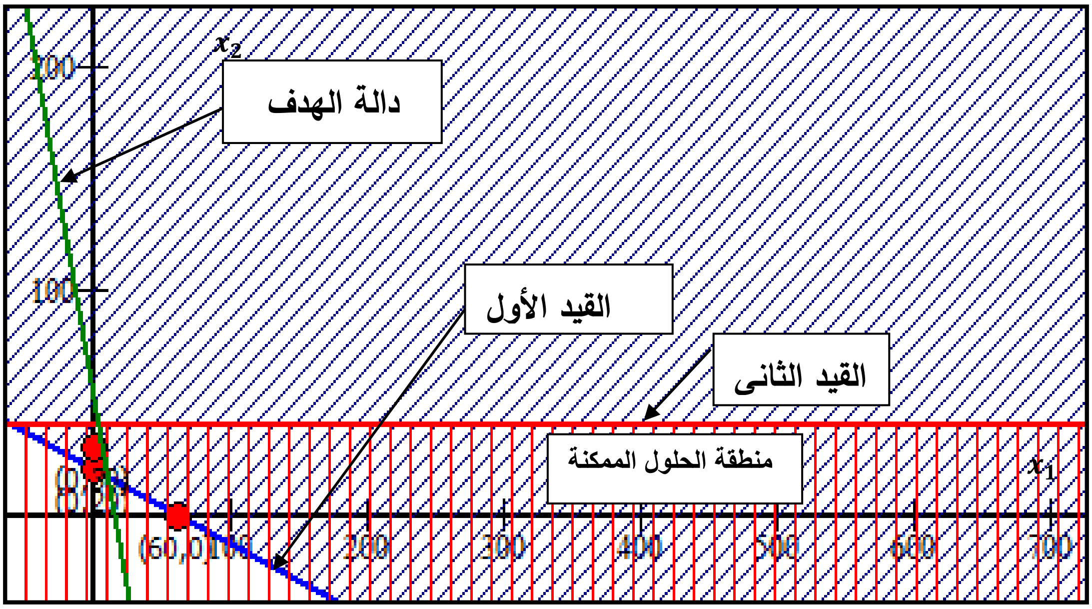
ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$Max(z) = 7x_1 + 20x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 3x_2 \geq 60$$
$$x_2 \leq 40$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستعمال الطريقة البيانية.

الحل:

نرسم القيدين الأول والثاني ونحدد منطقة الحلول الممكنة بنفس الخطوات السابقة:



نلاحظ من الشكل أعلاه أن منطقة الحلول الممكنة (المنطقة المشتركة بين القيدين) غير محدودة أي مفتوحة، وعليه ليس للمشكلة حل أمثل، حيث كلما اتجهنا يمينا نحصل على حل يعطي قيمة أعلى لدالة الهدف .

2-طريقة السمبلكس(Simplex)

تعتبر الطريقة البيانية وسيلة بسيطة ومباشرة لحل بعض مسائل البرمجة الخطية، إلا أن نطاق استخدامها محدود جدا، حيث أنه لا يمكن تطبيقها إلا على المسائل التي تحتوي على متغيرين اثنين فقط، وبمجرد أن تتجاوز المسألة هذا العدد من المتغيرات، أو تزداد تعقيدا نتيجة زيادة عدد القيود، تصبح الطريقة البيانية غير فعالة، وتفقد القدرة على تقديم حلول عملية، وهنا تبرز الحاجة إلى استخدام طرق أكثر تطورا ومرونة، قادرة على التعامل مع مشكلات أكثر تعقيدا وبعدد كبير جدا من المتغيرات والقيود.

من بين هذه الطرق هناك طريقة السمبلكس (Simplex Algorithm) التي تعتبر من أبرز وأنجع الأدوات الرياضية المستخدمة في مجال البرمجة الخطية، وتمثل خوارزمية السمبلكس تطورا كبيرا في أساليب الحل، حيث تم تطويرها لتكون أداة منهجية وعملية تمكن من الوصول إلى الحل الأمثل للمسائل بنوعيها سواء تعظيم أو تقليل دالة الهدف، مع الأخذ بعين الاعتبار جميع القيود الخطية ، وقد شهدت هذه الطريقة انتشارا واسعا بفضل قدرتها العالية على التعامل مع مشكلات حقيقية ومعقدة في مختلف الميادين التطبيقية، فهي تستخدم على نطاق واسع في المؤسسات الحكومية والخاصة، وتشمل مجالات متنوعة مثل الإدارة الصناعية، التخطيط المالي، إدارة سلاسل الإمداد، تخصيص الموارد، التجارة، النقل، وغيرها من القطاعات التي تتطلب اتخاذ قرارات مثلى بناء على بيانات ومعطيات محددة.

1.2-خصائص طريقة السمبلكس:

تتميز طريقة السمبلكس بخاصيتين رئيسيتين تميزها عن بقية الطرق وهي:

➢ **التدرج المنهجي نحو الحل الأمثل:**

تعتمد خوارزمية السمبلكس على سلسلة من العمليات التكرارية الدقيقة، تعرف باسم التكرارات (Iterations) ، وفي كل تكرار يتم التوصل إلى حل جديد قابل للتنفيذ، أي أنه يحقق جميع القيود المفروضة، ويكون أفضل من الحل السابق من حيث قيمة دالة الهدف، سواء كانت نوعها تعظيم الأرباح أو تقليل التكاليف، وتستمر هذه العملية التكرارية وفق قواعد رياضية محكمة حتى يتم الوصول إلى الحل النهائي الذي يعتبر الحل الأمثل، وهو الحل الذي لا يمكن تحسينه أكثر ضمن مجموعة القيود المفروضة.

➢ **توفير بيانات كمية دقيقة لدعم اتخاذ القرار:**

لا تقتصر طريقة السمبلكس على إعطاء مجموعة من القيم للمتغيرات في كل خطوة، بل ترفق كل حل يتم الوصول إليه بقيمة محددة لدالة الهدف يرمز لها بـ Z ، وهذا يسمح لمتخذ القرار بمتابعة تطور الحل وتحليل النتائج بشكل مستمر خلال مختلف مراحل الحل، كما يتيح هذا التتبع إمكانية تقييم الأثر الفعلي لكل خطوة على النتيجة النهائية، مما يعزز من فاعلية الطريقة كمعين موثوق لاتخاذ قرارات مبنية على أسس علمية دقيقة.

من خلال ما سبق نستنتج أن طريقة السمبلكس أداة متكاملة وعملية لحل مسائل البرمجة الخطية، تتوفر فيها الدقة والمرونة مما يجعلها من أبرز الوسائل المستخدمة في بحوث العمليات واتخاذ القرار.

2.2- صيغ البرمجة الخطية:

هناك عدة أشكال من البرمجة الخطية وهي كالتالي: (**محمد كعبور، 2004، ص:51**)

1.2.2-الصيغة القانونية (Canonical Form) للبرنامج الخطي:

نميز نوعين من صيغ البرامج الخطية القانونية وهي حسب نوع دالة الهدف:

- **حالة التعظيم (MAX)**: تكون الصيغة القانونية في حالة التعظيم كما يلي:
  - ✓ دالة الهدف تكون في حالة تعظيم (MAX).
  - ✓ جميع القيود تكون من نوع أصغر أو يساوي ($\leq$) عددا ثابتا موجبا.
  - ✓ جميع المتغيرات موجبة.

$$\begin{cases} MAX(z) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s/c \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad i = 1,2......m \\ x_j \geq 0 \quad j = 1,2........n \end{cases}$$

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3$$
$$s/c$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 18$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

هذا البرنامج من نوع دالة الهدف تعظيم (MAX) وكل القيود من نوع أصغر أو يساوي عددا موجبا، كما أن كل المتغيرات موجبة، وبالتالي فإن هذا البرنامج مكتوب في صيغته القانونية.

- **حالة التخفيض(التدنئة)** (MIN) : تكون الصيغة القانونية في حالة التدنئة كما يلي:
  - ✓ دالة الهدف تكون في حالة تدنئة (MIN).
  - ✓ جميع القيود تكون من نوع أكبر أو يساوي (≥)عددا ثابتا موجبا.
  - ✓ جميع المتغيرات موجبة.

$$\begin{cases} MIN(z) = \sum_{i=1}^{n} c_j x_j \\ s/c \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad i = 1,2......m \\ x_j \geq 0 \qquad j = 1,2.....n \end{cases}$$

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي من نوع تدنئة (MIN):

$$MIN(z) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

هذا البرنامج من نوع دالة الهدف تدنئة (MIN) وكل القيود من نوع أكبر أو يساوي عددا موجبا، كما أن كل المتغيرات موجبة، وبالتالي فإن هذا البرنامج مكتوب في صيغته القانونية.

2.2.2- الصيغة المختلطة:(Mixed Form)

تعد الصيغة المختلطة من أكثر الصيغ شيوعا عند نمذجة مشكلات البرمجة الخطية في شكلها الأولي، حيث يمكن أن تكون دالة الهدف من نوع تعظيم أو تقليل، وتكون القيود متنوعة حيث تشمل ما يلي:

- قيود من نوع أصغر من أو يساوي($\leq$) .
- قيود من نوع "أكبر من أو يساوي($\geq$) .
- قيود مساواة (=) .

وتسمى "مختلطة" عندما تتضمن نوعين مختلفين على الأقل من هذه القيود، أو الأنواع الثلاثة معا، وتستخدم هذه الصيغة كنقطة انطلاق قبل تحويل البرنامج إلى صيغ أخرى أكثر ملائمة لطرق الحل التحليلية مثل خوارزمية السمبلكس.

مثال: ليكن البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 60x_1 + 40x_2$$
$$s/c$$
$$18x_1 + 10x_2 \geq 180$$
$$5x_1 + 8x_2 \leq 158$$
$$4x_1 + 9x_3 \geq 110$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

هذا البرنامج من نوع دالة الهدف تدنئة (MIN) ويحتوي على قيدين من نوع أكبر أو يساوي، وقيد من نوع أصغر أو يساوي، كما أن كل المتغيرات موجبة، وبالتالي فإن هذا البرنامج مكتوب في صيغته القانونية.

3.2.2-**الصيغة النموذجية (الشكل القياسي Standard Form)** :

تعتبر الصيغة القياسية والتي يطلق عليها أيضا "الصيغة النموذجية"، من الأشكال الأساسية في البرمجة الخطية، إذ لا يمكن تطبيق خوارزمية السمبلكس لحل أي برنامج خطي ما لم يتم تحويله أولا إلى هذه الصيغة.

وتتميز الصيغة القياسية بمجموعة من الخصائص البنيوية تجعلها ملائمة للحل التحليلي، وتتمثل فيما يلي (EVIK.JAQUET-LAGREZ , 1998, p :22)

- تكون دالة الهدف إما من نوع تعظيم أو تخفيض.
- تكون جميع القيود في البرنامج الخطي مكتوبة على شكل معادلات(=) ، مما يستلزم أحيانا إدخال متغيرات إضافية مثل متغيرات العجز أو الفائض أو المتغيرات الاصطناعية (المتغيرات الإصطناعية (Artificial Variables): هي متغيرات تضاف بشكل مؤقت إلى نموذج البرمجة الخطية عند وجود قيود من نوع "أكبر من أو يساوي" (≤) أو مساواة (=)، وذلك لتحويل القيود إلى الشكل المناسب لطريقة السمبلكس، وتزال لاحقا في مراحل السمبلكس) لتحويل القيود التي تكون على شكل متباينات (≤ أو ≥) إلى مساواة.
- تكون جميع المتغيرات، بما في ذلك المتغيرات الأصلية والمضافة، مقيدة بأن تكون غير سالبة.

إن تحويل البرنامج الخطي إلى هذه الصيغة يعد خطوة أساسية للحصول على الحل الأساسي الأولي الذي تعتمد عليه خوارزمية السمبلكس في انطلاقتها نحو إيجاد الحل الأمثل.

ويتم تحويل البرنامج الخطي إلى الشكل القياسي كما يلي:

- إذا كان القيد من نوع أكبر أو يساوي

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i$$

فإننا نطرح متغير موجب يسمى متغير الفائض (s_i) للطرف الأيسر للقيد ، و يصبح القيد كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{s}_i = \boldsymbol{b}_i$$

نلاحظ أن معامل متغير الفائض إشارته سالبة وهذا ما يجعلنا لا نحصل على مصفوفة أحادية في معاملات القيود، لذا نستعين بمتغيرات أخرى تسمى المتغيرات الإصطناعية يرمز لها بالرمز A، ويفترض أن تكون قيمتها معدومة ومعاملها يساوي +1، فهي متغيرات مساعدة للحصول على الحل الأساسي الأولي، كما أن معاملاتها في دالة الهدف يرمز لها بالرمز M وتكون كبيرة جدا بإشارة سالبة إذا كانت دالة الهدف من نوع تعظيم (MAX)، وبإشارة موجبة إذا كانت دالة الهدف من نوع تدنئة (MIN).

- إذا القيد من نوع أصغر أو يساوي

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i$$

فإننا نضيف متغير موجب(s_i) ويسمى متغير العجز إلى الطرف الأيسر للقيد، و يصبح القيد كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + s_i = b_i$$

- إذا كان القيد من نوع مساواة

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$$

فإننا نضيف متغير اصطناعي(A_i) إلى الطرف الأيسر للقيد، من أجل الحصول على المصفوفة الأحادية، و يصبح القيد كما يلي :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + A_i = b_i$$

إذن نستطيع كتابة البرنامج الخطي على شكل مساواة كما يلي :

$$\begin{cases} opt(z) = CX \\ s/c \\ AX = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الخطي الموافق يحتوي على m قيد و n+m متغير .

(n:متغير أصلي و m: متغير وهمي)

مثال(01): ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3$$
$$s/c$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 18$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 10$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: كتابة البرنامج في صيغته النموذجية (القياسية).

الحل:

الخطوة الأولى: كتابة كل القيود على شكل مساواة (=)

يتم تحويل القيود إلى شكل معادلات بإضافة متغيرات العجز (Slack Variables) إلى الطرف الأيسر للمتراجحات لأن كل القيود من نوع (≤)، كما يلي:

- القيد الأول: بما أن القيد من نوع أصغر أو يساوي نضيف متغير العجز s_1 إلى الطرف الأيسر من القيد

$$2x_1 + x_2 + x_3 \leq 12$$

يصبح:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 12$$

وهكذا نفعل مع باقي القيود بما أن كلها من نوع أصغر أو يساوي فتصبح القيود على الشكل التالي:

$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 12$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 18$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + s_3 = 10$$

الخطوة الثانية: إضافة متغيرات العجز في دالة الهدف بمعامل صفر على النحو التالي:

$$MAX(z) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

الخطوة الثالثة: يجب أن تكون جميع المتغيرات، الأصلية والمضافة غير سالبة

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

ويكون البرنامج على الشكل القياسي على النحو التالي:

$$MAX(z) = 4x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$
$$s/c$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 + s_1 = 12$$
$$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + s_2 = 18$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + s_3 = 10$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

كما يجب أن تضاف متغيرات العجز بالشكل الذي يضمن الحصول على مصفوفة أحادية في معاملات القيود كما في مثالنا هذا:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
2	1	1	1	0	0
1	3	2	0	1	0
1	1	2	0	0	1

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحل الأساسي الأولي وهي الخطوة الأولى لإيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس.

مثال (02): ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: كتابة البرنامج في صيغته النموذجية (القياسية).

الحل:

الخطوة الأولى: كتابة كل القيود على شكل مساواة (=)

يتم تحويل القيود إلى شكل معادلات بطرح متغيرات الفوائض (Surplus Variables) إلى الطرف الأيسر للمتراجحات، ونضيف متغيرات وهمية (Artificial Variable) لأن كل القيود من نوع (≥)، كما يلي:

- القيد الأول: بما أن القيد من نوع أكبر أو يساوي نطرح متغير الفائض S_1 من الطرف الأيسر من القيد وإضافة متغير اصطناعي A_1

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$

يصبح:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 + A_1 = 10$$

وهكذا نفعل مع باقي القيود بما أن كلها من نوع أكبر أو يساوي فتصبح القيود على النحو التالي:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 + A_1 = 10$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 + A_2 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - s_3 + A_3 = 12$$

الخطوة الثانية: إضافة متغيرات الفائض في دالة الهدف بمعامل صفر والمتغيرات الاصطناعية بمعامل M على النحو التالي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

الخطوة الثالثة: يجب أن تكون جميع المتغيرات، الأصلية والمضافة غير سالبة

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

ويكون البرنامج على الشكل القياسي على النحو التالي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - s_1 + A_1 = 10$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 - s_2 + A_2 = 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 - s_3 + A_3 = 12$$
$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

كما يجب أن تضاف المتغيرات الاصطناعية بالشكل الذي يضمن الحصول على مصفوفة أحادية في معاملات القيود كما في مثالنا هذا:

x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
1	2	1	−1	0	0	1	0	0
3	1	2	0	−1	0	0	1	0
2	1	1	0	0	−1	0	0	1

تسمى هذه المصفوفة بمصفوفة الحل الأساسي الأولي وهي الخطوة الأولى لإيجاد الحل الأمثل بطريقة السمبلكس.

3–حل برنامج خطي من نوع تعظيم (MAX) في صيغته القانونية:

للوصول إلى الحل الأمثل في مسائل البرمجة الخطية من نوع تعظيم (Max) في صيغته القانونية باستخدام طريقة السمبلكس، نتبع سلسلة منظمة من الخطوات كما يلي: (**سهيلة عبد الله سعيد، 2007، ص: 112**)

الخطوة الأولى: وضع المشكلة في شكل برنامج خطي.

تبدأ الخطوة الأولى بصياغة نموذج رياضي واضح للمشكلة بحيث يتم تحديد:

- دالة الهدف (تعظيم الأرباح).
- مجموعة من القيود (الموارد، الوقت، ساعات العمل...).
- قيد عدم السالبية.

الخطوة الثانية: كتابة البرنامج على الشكل القياسي.

الخطوة الثالثة: إعداد جدول السمبلكس الأولي (Initial Simplex Tableau)

تجمع كل المعطيات في جدول أولي يتضمن:

- معاملات دالة الهدف.
- معاملات المتغيرات في القيود.
- حدود القيود (الطرف الأيمن).
- قيم المتغيرات الأساسية (Basic Variables) .
- كما يتم إدراج قيم دالة الهدف والربح الصافي ($\Delta_j = c_j - z_j$) لتحديد متى يجب التوقف.

ويكون هذا الجدول على النحو التالي: (Azouliat Dassonville, 1983, p :78)

T_1										
C_j			c_1	c_2	………	c_n	0	0	………	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	………	x_n	s_1	s_2	………	s_m
0	s_1	b_1	a_{11}	a_{12}	………	a_{1n}	1	0	………	0
0	s_2	b_2	a_{21}	a_{22}	………	a_{2n}	0	1	………	0
. .	. .	. .	. .	. .	………	. .	. .	. .	………	. .
0	s_i	b_i	a_{i1}	a_{i2}	………	a_{in}	0	0	………	0
. .	. .	. .	. .	. .	………	. .	0	0	………	0
0	s_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	………	a_{mn}	0	0	………	1
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	………	0	0	0	………	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			c_1	c_2	………	c_n	0	0	………	0

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف.

a_{ij}: معاملات المتغيرات في القيود.

X_B: متغيرات الأساس (القاعدة) المقابلة للمصفوفة الأحادية.

C_B: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف.

Z_j: المساهمة الكلية لمتغير غير أساسي في دالة الهدف ويحسب بالعلاقة التالية:

$$Z_j = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t a_{ij}$$

Δ_j: مقدار التحسين الصافي في قيمة دالة الهدف عند إدخال المتغير x_j إلى القاعدة، ويحسب بطرح معامل دالة الهدف C_j من Z_j.

Z: تمثل قيمة دالة الهدف وتحسب بالعلاقة $Z = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t b_i$

الخطوة الرابعة: تحديد المتغير الداخل إلى الأساس(القاعدة) (Entering Variable)

يتم في هذه الخطوة فحص سطر الربح الصافي ($\Delta_j = c_j - z_j$) وتحديد المتغير ذو أكبر قيمة موجبة لأننا

في حالة دالة هدف من نوع تعظيم(MAX)، هذا المتغير هو الذي سيدخل مع متغيرات الأساس (القاعدة) لأنه يؤدي إلى أكبر تحسن في قيمة دالة الهدف، ونسمي العمود التابع لهذا المتغير بالعمود المحوري.

الخطوة الخامسة: تحديد المتغير الخارج من القاعدة (Leaving Variable)

يتم تحديد المتغير الذي سيخرج من الأساس (القاعدة) باستخدام نسبة الاختبار(Ratio Test) ، وهي:

$$a_{ij} > 0 \text{ مع } \theta_i = \frac{b_i}{a^*_{ij}}$$

حيث:

b_i: هو الطرف الأيمن للقيد.

a_{ij}: هو عنصر العمود المقابل للمتغير الداخل.

يتم اختيار أصغر مقدار موجب لـ $\frac{b_i}{a^*_{ij}}$ ويحدد السطر الذي سيغادر منه المتغير الأساسي.

ونسمي السطر التابع لهذا المتغير بالسطر المحوري، والعنصر الذي يحدد تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري يسمى العنصر المحوري.

الخطوة السادسة: تحديث الجدول (Pivot Operation)

يتم إجراء العمليات الحسابية لتحديث جدول السمبلكس على النحو التالي:

- نحول عنصر المحور (Pivot Element) إلى 1، بقسمة جميع قيم السطر المحوري على العنصر المحوري.
- ثم نحول باقي عناصر العمود إلى 0 .
- ونحدث جميع القيم الأخرى في الجدول بناء باستخدام العلاقة التالية:

العنصر الجديد=العنصر القديم -[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

- حساب قيم صف Z_j وقيم $\Delta_j = C_j - Z_j$.

بعد إنجاز الجدول الجديد نلاحظ أن قيمة Z=0 ازدادت إلى قيمة أكبر وهذه الزيادة أتت عن طريق زيادة وحدة واحدة من المتغير الداخل.

يتم الحصول على الحل الأمثل عندما تكون جميع قيم $\Delta_j = C_j - Z_j$ مساوية الصفر أو سالبة وهذا يعنى تحقيق الحل الأمثل، أما إذا كان هناك قيمة موجبة فيجب إعادة خطوة تحسين الحل.

مثال: شركة تنتج 3 منتجات x_1, x_2, x_3 ، وتسعى إلى تعظيم أرباحها، كما أنه هناك ثلاثة قيود للإنتاج كما في البرنامج الخطي التالي :

$$MAX(z) = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3$$
$$s/c$$
$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي من خلال إيجاد التوليفة المثلى من كميات الإنتاج من المنتجات الثلاثة لتحقيق أقصى ربح ممكن باستخدام طريقة السمبلكس.

الحل:

لدينا البرنامج الخطي في هذا المثال من نوع تعظيم مكتوب في صيغته القانونية، وبالتالي لحله نتبع الخطوات المذكورة سابقا:

الخطوة الأولى: وضع المشكلة في شكل برنامج خطي.

اذا البرنامج الخطي من نوع تعظيم وأيضا صيغة هذا البرنامج هي صيغة قانونية فهو يحتوي على:

- دالة الهدف (تعظيم الأرباح).

$$MAX(z) = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3$$

- ثلاثة قيود كلها من نوع أصغر أو يساوي

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90$$

- قيد عدم السالبية.

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

الخطوة الثانية: كتابة البرنامج على الشكل القياسي.

بما أن جميع القيود من نوع أصغر أو يساوي فإننا نضيف لها متغيرات الفجوة S_i لجعلها على شكل مساواة، ونضيف هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل صفر، كما أن هذه المتغيرات موجبة، فيصبح لدينا الشكل القياسي على النحو التالي:

$$MAX(z) = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$$

$$s/c$$

$$2x_1 + 4x_2 + 3x_3 + s_1 = 100$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + s_2 = 80$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 + s_3 = 90$$

$$x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3 \geq 0$$

الخطوة الثالثة: إعداد جدول السمبلكس الأولي (Initial Simplex Tableau)

نقوم بنقل المعطيات الموجودة في الشكل القياسي إلى الجدول الأول، وهو جدول الحل الأساسي الأولي على النحو التالي:

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	100	2	4	3	1	0	0
0	s_2	80	1	2	3	0	1	0
0	s_3	90	3	1	2	0	0	1
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			40	50	60	0	0	0

C_j: معاملات المتغيرات في دالة الهدف وهي **0 , 0 , 0 , 60 , 50 , 40**

b_i: الطرف الأيمن للقيود وهي:

$$\begin{matrix} 100 \\ 80 \\ 90 \end{matrix}$$

a_{ij}: معاملات المتغيرات في القيود وهي:

$$\begin{matrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{matrix}$$

X_B: متغيرات الأساس (القاعدة) المقابلة للمصفوفة الأحادية.

s_1

s_2

s_3

$\boldsymbol{C_B}$: معاملات متغيرات الأساس في دالة الهدف وهي كلها أصفار

0

0

0

قيم $\boldsymbol{Z_j}$: تحسب بالعلاقة $Z_j = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t a_{ij}$

$$Z_1 = 2 * 0 + 1 * 0 + 3 * 0 = 0$$

$$Z_2 = 4 * 0 + 2 * 0 + 1 * 0 = 0$$

$$Z_3 = 3 * 0 + 3 * 0 + 2 * 0 = 0$$

$$Z_4 = 1 * 0 + 0 * 0 + 0 * 0 = 0$$

$$Z_5 = 0 * 0 + 1 * 0 + 0 * 0 = 0$$

$$Z_6 = 0 * 0 + 0 * 0 + 1 * 0 = 0$$

قيم Δ_j تحسب بطرح قيم C_j من Z_j :

$$\Delta_1 = c_1 - z_1 = 40 - 0 = 40$$

$$\Delta_2 = c_2 - z_2 = 50 - 0 = 50$$

$$\Delta_3 = c_3 - z_3 = 60 - 0 = 60$$

$$\Delta_4 = c_4 - z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = c_5 - z_5 = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_6 = c_6 - z_6 = 0 - 0 = 0$$

وبالنسبة لقيمة دالة الهدف $\boldsymbol{Z}$ تحسب بالعلاقة $Z = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t b_i$

$$Z = 100 * 0 + 80 * 0 + 90 * 0 = 0$$

نقوم باستخراج الحل الأساسي الأولي وهي قيم المتغيرات التي تشكل متغيرات الأساس أو القاعدة X_B (هذه المتغيرات هي التي تقابل المصفوفة الأحادية)، وفي هذا الجدول الأول المتغيرات التي تقابل المصفوفة الأحادية هي متغيرات الفجوة $\mathbf{s_1, s_2, s_3}$ (عادة ما تكون متغيرات القاعدة في جدول الحل الأساسي الأولي هي

متغيرات الفجوة أو المتغيرات الاصطناعية)، وقيم هذه المتغيرات هي قيم الطرف الأيمن من القيود المقابلة له في العمود b_i وهي على النحو التالي:

$$s_1 = 100, s_2 = 80, s_3 = 90$$

أما باقي المتغيرات غير الداخلة في الأساس فقيمها تكون معدومة.

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

نلاحظ أنه توجد **<u>قيم موجبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$</u>** (لأننا في حالة دالة هدف من نوع MAX) فإن الحل ليس أمثل، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الثاني باتباع خوارزمية السمبلكس.

الخطوة الرابعة: تحديد المتغير الداخل إلى الأساس(القاعدة) (Entering Variable)

من خلال سطر ($\Delta_j = c_j - z_j$) نجد القيم 0 , 0 , 0 , 60 , 50 , 40 ، وبما أننا حالة دالة هدف من نوع تعظيم(MAX)، نختار أكبر قيمة موجبة وهي 60، والتي تقابل المتغير x_3، وعليه هذا المتغير هو الذي سيدخل مع متغيرات الأساس (القاعدة) لأنه يؤدي إلى أكبر تحسن في قيمة دالة الهدف، ونسمي العمود التابع لهذا المتغير بالعمود المحوري.

المتغير الذي سيدخل مع متغيرات القاعدة

العمود المحوري

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	100	2	4	3	1	0	0
0	s_2	80	1	2	3	0	1	0
0	s_3	90	3	1	2	0	0	1
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			40	50	60	0	0	0

أكبر قيمة موجبة

الخطوة الخامسة: تحديد المتغير الخارج من القاعدة (Leaving Variable)

نقوم بحساب النسبة θ_i باستخدام العلاقة $\theta_i = \frac{b_i}{a_{ij}^*}$ على النحو التالي:

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a_{13}^*} = \frac{100}{3}$$

$$\theta_2 = \frac{b_1}{a_{23}^*} = \frac{80}{3}$$

$$\theta_3 = \frac{b_1}{a_{33}^*} = \frac{90}{2} = 45$$

يتم اختيار أصغر مقدار موجب لـ $\frac{b_i}{a_{ij}^*}$ وهي القيمة $\frac{\mathbf{80}}{\mathbf{3}}$ وهي المقابلة للسطر الثاني ، وبالتالي المتغير الذي سيخرج من الأساس هو $\boldsymbol{s_2}$ ونستبدله بالمتغير الداخل للأساس وهو $\boldsymbol{x_3}$.

نسمي السطر التابع لهذا المتغير بالسطر المحوري، والعنصر الذي يحدد تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري يسمى العنصر المحوري وهو **3**.

العمود المحوري

المتغير الذي سيدخل مع متغيرات القاعدة

C_j			40	50	60	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
0	s_1	100	2	4	3	1	0	0	100/3
0	s_2	80	1	2	3	0	1	0	80/3
0	s_3	90	3	1	2	0	0	1	45
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0	0	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			40	50	60	0	0	0	

المتغير الذي سيخرج من متغيرات القاعدة

العنصر المحوري

أصغر قيمة للنسبة θ_i

الخطوة السادسة: تحديث الجدول (Pivot Operation)

يتم إجراء العمليات الحسابية لتحديث جدول السمبلكس على النحو التالي:

- نحول عنصر المحور (Pivot Element) إلى 1، بقسمة جميع قيم السطر المحوري على العنصر المحوري 3، فيتشكل لنا السطر المعدل التالي:

80/3	**1/3**	**2/3**	**1**	**0**	**1/3**	**0**

- ثم نحول باقي عناصر العمود إلى 0 ، فيتشكل لنا العمود التالي:

0

1

0

- ونحدث جميع القيم الأخرى في الجدول بناء باستخدام العلاقة التالية:

العنصر الجديد=العنصر القديم –[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

مثلا السطر الأول بدءا من قيمة b_1 إلى غاية آخر متغير في الجدول يتم حسابه كالآتي:

السطر الأول	حساب القيم	السطر الثالث	حساب القيم
b_1	100–[(80*3)/3]=20	b_3	90–[(80*2)/3]=110/3
a_{11}	2–[(1*3)/3]=1	a_{31}	3–[(1*2)/3]=7/3
a_{12}	4–[(2*3)/3]=2	a_{32}	1–[(2*2)/3]=–1/3
a_{14}	1–[(0*3)/3]=1	a_{34}	0–[(0*2)/3]=0
a_{15}	0–[(1*3)/3]=–1	a_{35}	0–[(1*2)/3]=–2/3
a_{16}	0–[(0*3)/3]=0	a_{36}	1–[(0*2)/3]=1

فنتحصل على الجدول التالي:

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	20	1	2	0	1	−1	0
60	x_3	80/3	1/3	2/3	1	0	1/3	0
0	s_3	110/3	7/3	−1/3	0	0	−2/3	1
Z_j		$Z^* =$						
$\Delta_j = c_j - z_j$								

نكمل الجدول ونحسب السطرين المتبقيين وقيمة Z.

- حساب قيم سطر Z_j باستخدام العلاقة $Z_j = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t a_{ij}$

$$Z_1 = 1 * 0 + 1/3 * 60 + 7/3 * 0 = 20$$

$$Z_2 = 2 * 0 + 2/3 * 60 - 1/3 * 0 = 40$$

$$Z_3 = 0 * 0 + 1 * 60 + 0 * 0 = 60$$

$$Z_4 = 1 * 0 + 0 * 60 + 0 * 0 = 0$$

$$Z_5 = -1 * 0 + 1/3 * 60 - 2/3 * 0 = 20$$

$$Z_6 = 0 * 0 + 0 * 60 + 1 * 0 = 0$$

- حساب قيم $\Delta_j = C_j - Z_j$:

$$\Delta_1 = c_1 - z_1 = 40 - 20 = 20$$

$$\Delta_2 = c_2 - z_2 = 50 - 40 = 10$$

$$\Delta_3 = c_3 - z_3 = 60 - 60 = 0$$

$$\Delta_4 = c_4 - z_4 = 0 - 0 = 0$$

$$\Delta_5 = c_5 - z_5 = 0 - 20 = -20$$

$$\Delta_6 = c_6 - z_6 = 0 - 0 = 0$$

- حساب قيمة $\boldsymbol{Z}$ باستخدام العلاقة $\boldsymbol{Z = \sum_{i=1}^{m} C_B{}^t b_i}$

$$Z = 20 * 0 + 80/3 * 60 + 110/3 * 0 = 1600$$

لنتحصل على الجدول الثاني :

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	20	1	2	0	1	–1	0
60	x_3	80/3	1/3	2/3	1	0	1/3	0
0	s_3	110/3	7/3	–1/3	0	0	–2/3	1
Z_j		$Z^* = 1600$	20	40	60	0	20	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			20	10	0	0	–20	0

نستخرج الحل من هذا الجدول كما فعلنا سابقا، وهو:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = \frac{80}{3}, s_1 = 20, s_2 = 0, s_3 = \frac{110}{3},$$

$$Z = 1600$$

نلاحظ أنه لا تزال توجد **قيم موجبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$** فإن الحل ليس أمثلا (لأننا في حالة دالة هدف من نوع MAX)، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الثالث باتباع خوارزمية السمبلكس، وذلك انطلاقا من الخطوة الرابعة.

▪ تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:

C_j			40	50	60	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
0	s_1	20	1	2	0	1	−1	0	20
60	x_3	80/3	1/3	2/3	1	0	1/3	0	80
0	s_3	110/3	7/3	−1/3	0	0	−2/3	1	110/7
Z_j		$Z^* = 1600$	20	40	60	0	20	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			20	10	0	0	−20	0	

من خلال الجدول وبعد اتباع نفس الخطوات السابقة، فإن المتغير الداخل للقاعدة أو الأساس هو المتغير x_1 والمتغير الخارج من الأساس هو المتغير s_3، ولإيجاد الجدول الجديد نتبع نفس الإجراءات السابقة فنتحصل على الجدول الثالث التالي:

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
0	s_1	30/7	0	15/7	0	1	−5/7	−3/7
60	x_3	150/7	0	5/7	1	0	3/7	−1/7
40	x_1	110/7	1	−1/7	0	0	−2/7	3/7
Z_j		$Z^* = 13400/7$	40	260/7	60	0	100/7	60/7
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	90/7	0	0	−100/7	−60/7

نستخرج الحل من هذا الجدول كما فعلنا سابقا، وهو:

$$x_1 = 110/7, x_2 = 0, x_3 = \frac{150}{7}, s_1 = 30/7, s_2 = 0, s_3 = 0,$$

$$Z = 13400/7$$

بما أنه توجد **قيمة موجبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$** فإن الحل ليس أمثل، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الرابع باتباع خوارزمية السمبلكس.

▪ تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:

C_j			40	50	60	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
0	s_1	30/7	0	15/7	0	1	−5/7	−3/7	2
60	x_3	150/7	0	5/7	1	0	3/7	−1/7	30
40	x_1	110/7	1	−1/7	0	0	−2/7	3/7	/
Z_j		$Z^* = 13400/7$	40	260/7	60	0	100/7	60/7	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	90/7	0	0	−100/7	−60/7	

من خلال الجدول وبعد إتباع نفس الخطوات السابقة، فإن المتغير الداخل للقاعدة أو الأساس هو المتغير x_2 والمتغير الخارج من الأساس هو المتغير s_1 (لاحظ أنه عند حساب النسبة $\theta_i = \frac{b_i}{a_{ij}^*}$ لم نأخذ القيمة $a_{32} = -1/7$ بعين الاعتبار لأنها سالبة) ، ولإيجاد الجدول الجديد نتبع نفس الإجراءات السابقة فنتحصل على الجدول الرابع التالي:

الجدول الرابع

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
50	x_2	2	0	1	0	7/15	−1/3	−1/5
60	x_3	20	0	0	1	−1/3	2/3	0
40	x_1	16	1	0	0	1/5	−1/3	2/5
Z_j		$Z^* = 1940$	40	50	60	6	10	6
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	−6	−10	−6

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ سالبة أو معدومة وبالتالي الجدول الجديد هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1 = 16, x_2 = 2, x_3 = 20, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0,$$
$$Z = 1940$$

4–حل برنامج خطي من نوع تخفيض MIN في صيغته القانونية

لحل البرنامج الخطي من نوع تخفيض MIN في صيغة قانونية هناك عدة طرق، سنتطرق إلى طريقتين هما طريقة M الكبيرة، وطريقة المرحلتين.

1.4–طريقة M الكبيرة (Big M Method)

تعد طريقة M الكبيرة إحدى التقنيات المعتمدة لتطبيق خوارزمية السمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على قيود مساواة أو قيود من نوع أكبر من أو يساوي $\geq$ ، في مثل هذه القيود لا يكون من الممكن تحويلها مباشرة إلى معادلات تحتوي فقط على متغيرات فائض فقط (المصفوفة الأحادية غير متوفرة)، ولذلك نلجأ إلى إدخال متغيرات اصطناعية (Artificial Variables) لتكوين قاعدة ابتدائية قابلة للمعالجة بطريقة السمبلكس.

و بما أن هذه المتغيرات الاصطناعية لا تمثل متغيرات حقيقية في المسألة الأصلية، فإن هدف طريقة M هو التخلص منها في الحل النهائي.

وتتمثل خطوات تطبيق طريقة M الكبيرة فيما يلي:

1. إضافة المتغيرات الاصطناعية إلى القيود التي لا تسمح بوجود حل أساسي أولي.
2. تعديل دالة الهدف بإضافة معاملات موجبة كبيرة جدا (M) لمتغيرات الاصطناعية (يتم ادخالها بإشارة سالبة في حالة دالة الهدف من نوع MAX وبإشارة موجبة إذا كانت من نوع MIN)، بهدف إخراجها من الحل النهائي
3. تطبيق خوارزمية السمبلكس بنفس خطواتها ، مع التركيز على إخراج المتغيرات الاصطناعية من الحل تدريجيا.
4. التحقق من الحل النهائي للتأكد من عدم وجود المتغيرات الاصطناعية فيه، وأنه يمثل الحل الأمثل للمشكلة الأصلية.

ملاحظة: المتغير الاصطناعي الذي يتم خروجه من الأساس يتم إلغاء التعامل به في مصفوفة المعاملات.

مثال: ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 2x_1 + 3x_2$$

$$s/c$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة **M** الكبيرة.

لدينا البرنامج الخطي في هذا المثال من نوع تخفيض (تدنئة) مكتوب في صيغته القانونية، وبالتالي لحله نتبع الخطوات المذكورة سابقا:

الخطوة الأولى: وضع المشكلة في شكل برنامج خطي.

اذا البرنامج الخطي من نوع تدنئة وأيضا صيغة هذا البرنامج هي صيغة قانونية فهو يحتوي على:

- دالة الهدف (تدنئة).

$$MIN(z) = 2x_1 + 3x_2$$

- ثلاثة قيود كلها من نوع أصغر أو يساوي

$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$

- قيد عدم السالبية.

$$x_1, x_2 \geq 0$$

الخطوة الثانية: كتابة البرنامج على الشكل القياسي.

بما أن جميع القيود من نوع أكبر أو يساوي فإننا نطرح لها متغيرات الفائض S_i لجعلها على شكل مساواة، ونضيف هذه المتغيرات في دالة الهدف بمعامل صفر، كما أن هذه المتغيرات موجبة، وكذلك نضيف متغيرات اصطناعية من أجل الحصول على المصفوفة الأحادية، فيصبح لدينا الشكل القياسي على النحو التالي:

$$MAX(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + MA_1 + MA_2 + MA_3$$

$$s/c$$

$$x_1 + 5x_2 - s_1 + A_1 = 10$$

$$x_1 + 2x_2 - s_2 + A_2 = 6$$

$$2x_1 + 2x_2 - s_3 + A_3 = 8$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

الخطوة الثالثة: إعداد جدول السمبلكس الأولي (Initial Simplex Tableau)

نقوم بنقل المعطيات الموجودة في الشكل القياسي إلى الجدول الأول، وهو جدول الحل الأساسي الأولي على النحو التالي:

C_j			2	3	0	0	0	M	M	M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
M	A_1	10	1	5	-1	0	0	1	0	0
M	A_2	6	1	2	0	-1	0	0	1	0
M	A_3	8	2	2	0	0	-1	0	0	1
Z_j		$Z^* = 24M$	4M	9M	-M	-M	-M	M	M	M
$\Delta_j = c_j - z_j$			2-4M	3-9M	M	M	M	0	0	0

نقوم باستخراج الحل الأساسي الأولي وهي قيم المتغيرات التي تشكل متغيرات الأساس أو القاعدة X_B (هذه المتغيرات هي التي تقابل المصفوفة الأحادية)، وفي هذا الجدول الأول المتغيرات التي تقابل المصفوفة الأحادية هي متغيرات الفجوة $\mathbf{A_1, A_2, A_3}$ (عادة ما تكون متغيرات القاعدة في جدول الحل الأساسي الأولي هي متغيرات الفجوة أو المتغيرات الاصطناعية)، وقيم هذه المتغيرات هي قيم الطرف الأيمن من القيود المقابلة له في العمود b_i وهي على النحو التالي:

$$A_1 = 10, A_2 = 6, A_3 = 8$$

أما باقي المتغيرات غير الداخلة في الأساس فقيمها تكون معدومة.

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$$

قيمة Z:

$$Z = 10 * M + 6 * M + 8 * M = 24M$$

نلاحظ أنه توجد <u>**قيم سالبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$**</u> (لأننا في حالة دالة هدف من نوع MIN) فإن الحل ليس أمثل، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الثاني باتباع خوارزمية السمبلكس.

الخطوة الرابعة: تحديد المتغير الداخل إلى الأساس(القاعدة) (Entering Variable)

من خلال سطر ($\Delta_j = c_j - z_j$) نجد القيم 0 ,0 , 0 , M , M , M , 3-9M , 2-M ، وبما أننا حالة دالة هدف من نوع تدنئة (MIN)، نختار أكبر معامل لـ M بإشارة سالبة وهي 9-، والتي تقابل المتغير x_2، وعليه هذا المتغير هو الذي سيدخل مع متغيرات الأساس (القاعدة) لأنه يؤدي إلى أكبر تحسن في قيمة دالة الهدف، ونسمي العمود التابع لهذا المتغير بالعمود المحوري.

المتغير الذي سيدخل مع متغيرات القاعدة

العمود المحوري

C_j			2	3	0	0	0	M	M	M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
M	A_1	10	1	5	-1	0	0	1	0	0
M	A_2	6	1	2	0	-1	0	0	1	0
M	A_3	8	2	2	0	0	-1	0	0	1
Z_j		$Z^* = 0$	4M	9M	-M	-M	-M	M	M	M
$\Delta_j = c_j - z_j$			2-4M	3-9M	M	M	M	0	0	0

أكبر قيمة بإشارة سالبة

الخطوة الخامسة: تحديد المتغير الخارج من القاعدة (Leaving Variable)

نقوم بحساب النسبة θ_i باستخدام العلاقة $\theta_i = \frac{b_i}{a^*_{ij}}$ على النحو التالي:

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a^*_{13}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\theta_2 = \frac{b_1}{a^*_{23}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\theta_3 = \frac{b_1}{a^*_{33}} = \frac{8}{2} = 4$$

يتم اختيار أصغر مقدار موجب لـ $\frac{b_i}{a_{ij}^*}$ وهي القيمة **2** وهي المقابلة للسطر الأول ، وبالتالي المتغير الذي سيخرج من الأساس هو A_1 ونستبدله بالمتغير الداخل للأساس وهو x_2.

نسمي السطر التابع لهذا المتغير بالسطر المحوري، والعنصر الذي يحدد تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري يسمى العنصر المحوري وهو **5**.

ملاحظة: المتغير الاصطناعي A_1 الذي خرج من القاعدة يتم حذفه في الجدول اللاحق كما ذكرنا سابقا.

المتغير الذي سيدخل مع متغيرات القاعدة

العمود المحوري

العنصر المحوري

C_j			2	3	0	0	0	M	M	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
M	A_1	10	1	5	-1	0	0	1	0	0	2
M	A_2	6	1	2	0	-1	0	0	1	0	3
M	A_3	8	2	2	0	0	-1	0	0	1	4
Z_j		$Z^* = 0$	4M	9M	-M	-M	-M	M	M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			2-4M	3-9M	M	M	M	0	0	0	

المتغير الذي سيخرج من متغيرات القاعدة

أكبر قيمة بإشارة سالبة

أصغر قيمة للنسبة θ_i

الخطوة السادسة: تحديث الجدول (Pivot Operation)

يتم إجراء العمليات الحسابية لتحديث جدول السمبلكس على النحو التالي:

- نحول عنصر المحور (Pivot Element) إلى 1، بقسمة جميع قيم السطر المحوري على العنصر المحوري 5، فيتشكل لنا السطر المعدل التالي:

2 1/5 1 -1/5 0 0 0 0

- ثم نحول باقي عناصر العمود إلى 0 ، فيتشكل لنا العمود التالي:

1
0
0

- ونحدث جميع القيم الأخرى في الجدول بناء باستخدام العلاقة التالية:

العنصر الجديد=العنصر القديم –[(العنصر المقابل في الصف المحوري*العنصر المقابل في العمود المحوري)/العنصر المحوري]

مثلا نحسب السطر الثاني كما هو موضح في الجدول التالي:

السطر الأول	حساب القيم	السطر الثالث	حساب القيم
b_2	6-[(10*2)/5]=2	b_3	8-[(10*2)/5]=110/3
a_{21}	1-[(1*2)/5]=5/3	a_{31}	2-[(1*2)/5]=8/5
a_{23}	0-[(-1*2)/5]=2/5	a_{33}	0-[(-1*2)/5]= 2/5
a_{24}	-1-[(0*2)/5]=-1	a_{34}	0-[(0*2)/5]=0
a_{25}	0-[(0*2)/5]=0	a_{35}	-1-[(0*2)/5]=-1
a_{26}	1-[(0*2)/5]=1	a_{36}	0-[(0*2)/5]=0
a_{27}	0-[(0*2)/5]=0	a_{37}	1-[(0*2)/5]=1

فنتحصل على الجدول التالي:

C_j			2	3	0	0	0	M	M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	A_3
3	x_2	2	1/5	1	−1/5	0	0	0	0
M	A_2	2	3/5	0	2/5	−1	0	1	0
M	A_3	4	8/5	0	2/5	0	−1	0	1
Z_j		$Z^* =$	3/5+11/5M	3	−3/5+4/5M	−M	−M	M	M
$\Delta_j = c_j - z_j$			7/5−11/5M	0	3/5−4/5M	M	M	0	0

نكمل الجدول ونحسب السطرين المتبقيين وقيمة Z.

- حساب قيم سطر Z_j باستخدام العلاقة $Z_j = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t a_{ij}$

$$Z_1 = 1/5 * 3 + 3/5 * M + 8/5 * M = 3/5 + \frac{11}{5}\text{M}$$

$$Z_2 = 1 * 3 + 0 * M + 0 * M = 3$$

$$Z_3 = -1/5 * 3 + 2/5 * M + 2/5 * M = -3/5 + \frac{4}{5}\mathrm{M}$$

$$Z_4 = 0 * 3 - 1 * M + 0 * M = -M$$

$$Z_5 = 0 * 3 + 0 * M - 1 * M = -M$$

$$Z_6 = 0 * 3 + 1 * M + 0 * M = M$$

$$Z_7 = 0 * 3 + 0 * M + 1 * M = M$$

- حساب قيم $\Delta_j = \mathrm{C_j} - \mathrm{Z_j}$:

$$\Delta_1 = c_1 - z_1 = 2 - (\frac{3}{5} - \frac{11}{5}\mathrm{M}) = \frac{7}{5} - \frac{11}{5}\mathrm{M}$$

$$\Delta_2 = c_2 - z_2 = 3 - 3 = 0$$

$$\Delta_3 = c_3 - z_3 = 0 - (-\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{M}) = \frac{3}{5} - \frac{4}{5}\mathrm{M}$$

$$\Delta_4 = c_4 - z_4 = 0 - (-M) = M$$

$$\Delta_5 = c_5 - z_5 = 0 - (-M) = M$$

$$\Delta_6 = c_6 - z_6 = M - M = 0$$

$$\Delta_7 = c_7 - z_7 = M - M = 0$$

- حساب قيمة $\boldsymbol{Z}$ باستخدام العلاقة $Z = \sum_{i=1}^{m} {C_B}^t b_i$

$$Z = 2 * 3 + 2 * M + 4 * M = 6 + 6M$$

لنتحصل على الجدول الثاني :

C_j			2	3	0	0	0	M	M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	A_3
3	x_2	2	1/5	1	–1/5	0	0	0	0
M	A_2	2	3/5	0	2/5	–1	0	1	0
M	A_3	4	8/5	0	2/5	0	–1	0	1
Z_j		$Z^* = 6 + 6M$	3/5+11/5M	3	–3/5+4/5M	–M	–M	M	M
$\Delta_j = c_j - z_j$			7/5–11/5M	0	3/5–4/5M	M	M	0	0

نستخرج الحل من هذا الجدول كما فعلنا سابقا، وهو:

$$x_1 = 0, x_2 = 2, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, A_2 = 2, A_3 = 4$$

$$Z = 6 + 6M$$

نلاحظ أنه توجد **قيم سالبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$** ، وكذلك توجد متغيرات اصطناعية لم تخرج من الحل، فإن الحل ليس أمثل، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الثالث باتباع خوارزمية السمبلكس، وذلك انطلاقا من الخطوة الرابعة.

- **تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:**

C_j			2	3	0	0	0	M	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	A_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
3	x_2	2	1/5	1	−1/5	0	0	0	0	10
M	A_2	2	3/5	0	2/5	−1	0	1	0	10/3
M	A_3	4	8/5	0	2/5	0	−1	0	1	2
Z_j		$Z^* = 6 + 6M$	3/5+11/5M	3	−3/5+4/5M	−M	−M	M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			7/5−11/5M	0	3/5−4/5M	M	M	0	0	

من خلال الجدول وبعد اتباع نفس الخطوات السابقة، فإن المتغير الداخل للقاعدة أو الأساس هو المتغير x_1 والمتغير الخارج من الأساس هو المتغير A_3 (هذا المتغير نحذفه من الجدول اللاحق)، ولإيجاد الجدول الجديد نتبع نفس الإجراءات السابقة فنتحصل على الجدول الثالث التالي:

C_j			2	3	0	0	0	M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2
3	x_2	3/2	0	1	−1/4	0	1/8	0
M	A_2	1/2	0	0	1/4	−1	3/8	1
2	x_1	5/2	1	0	1/4	0	−5/8	0
Z_j		$Z^* = 19/2 + 1/2M$	2	3	−1/4+1/4M	−M	−7/8+3/8M	M
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	1/4−1/4M	M	7/8−3/8M	0

نستخرج الحل من هذا الجدول كما فعلنا سابقا، وهو:

$$x_1 = 5/2, x_2 = 3/2, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, A_2 = 1/2$$

$$Z = \frac{19}{2} + \frac{1}{2}M$$

نلاحظ أنه توجد **قيم سالبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$** ، وكذلك توجد متغيرات اصطناعية لم تخرج من الحل، فإن الحل ليس أمثل، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الرابع باتباع خوارزمية السمبلكس.

- **تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:**

C_j			2	3	0	0	0	M	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
3	x_2	3/2	0	1	−1/4	0	1/8	0	12
M	A_2	1/2	0	0	1/4	−1	3/8	1	1/2
2	x_1	5/2	1	0	1/4	0	−5/8	0	/
Z_j		$Z^* = 19/2 + 1/2M$	2	3	−1/4+1/4M	−M	−7/8+3/8M	M	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	1/4−1/4M	M	7/8−3/8M	0	

من خلال الجدول وبعد إتباع نفس الخطوات السابقة، فإن المتغير الداخل للقاعدة أو الأساس هو المتغير s_3 والمتغير الخارج من الأساس هو المتغير A_2 (هذا المتغير يحذف من الجدول اللاحق) ، ولإيجاد الجدول الجديد نتبع نفس الإجراءات السابقة، فنتحصل على الجدول الرابع التالي:

الجدول الرابع

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
3	x_2	4/3	0	1	−1/3	1/3	0
0	s_3	4/3	0	0	2/3	−8/3	1
2	x_1	10/3	1	0	2/3	−5/3	0
Z_j		$Z^* = 32/3$	2	3	1/3	−7/3	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	−1/3	7/3	0

الحل هو:

$$x_1 = 10/3, x_2 = 4/3, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 4/3$$

$$Z = 32/3$$

نلاحظ من خلال الجدول أن كل المتغيرات الاصطناعية قد خرجت من الحل، ولكن توجد قيمة سالبة في سطر $C_j - Z_j$ وبالتالي هذا الحل ليس أمثلا، وسنقوم بتحسينه.

- **تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:**

C_j			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
3	x_2	4/3	0	1	−1/3	1/3	0	/
0	s_3	4/3	0	0	2/3	−8/3	1	2
2	x_1	10/3	1	0	2/3	−5/3	0	5
Z_j		$Z^* = 32/3$	2	3	1/3	−7/3	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	−1/3	7/3	0	

وباتباع نفس الخطوات السابقة نتحصل على الجدول الخامس التالي:

الجدول الخامس:

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
3	x_2	2	0	1	0	−1	1/2
0	s_1	2	0	0	1	−4	3/2
2	x_1	2	1	0	0	1	−1
Z_j		$Z^* = 10$	2	3	0	−1	−1/2
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	1	1/2

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبالتالي الجدول الجديد هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 20, s_1 = 2, s_2 = 0, s_3 = 0,$$

$$Z = 10$$

2.4–طريقة المرحلتين(Méthode des deux phases)

تعد طريقة المرحلتين أبسط نسبيا من طريقة M الكبيرة في الوصول إلى الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية، حيث تتيح هذه الطريقة التحقق أولا من إمكانية وجود حل ممكن قبل محاولة إيجاد الحل الأمثل،

وتتمثل الفكرة الأساسية للطريقة في التحقق من وجود حل مبدئي قابل للتطبيق عبر مرحلة أولى، ثم الانتقال إلى حل المسألة الأصلية في المرحلة الثانية في حال تم التوصل إلى هذا الحل، وتتميز هذه الطريقة عن طريقة M الكبيرة بعدم استخدام الثابت الكبير M، وتعتمد بدلا من ذلك على مرحلتين متتابعتين، كما يلي:

المرحلة الأولى:

- تحويل النموذج من الصيغة القانونية إلى الصيغة القياسية، وذلك بإضافة المتغيرات الاصطناعية $\boldsymbol{A}_{\mathbf{i}}$ إلى القيود التي تستدعي ذلك (القيود من النوع = أو ≥)
- صياغة دالة هدف مؤقتة جديدة تهدف إلى تصغير مجموع المتغيرات الاصطناعية فقط، ويتم ذلك بوضع المعاملات المرتبطة بـ $\boldsymbol{A}_{\mathbf{i}}$ مساوية لـ 1 اذا كانت دالة الهدف من نوع MIN و −1 إذا كانت من نوع MAX، بينما تعطى باقي المتغيرات معاملات تساوي صفرا.
- تطبيق خوارزمية السمبلكس التقليدية على دالة الهدف المؤقتة حتى الوصول إلى القيمة المثلى:
  - إذا كانت قيمة دالة الهدف الجديدة $Z = 0$، فهذا يعني أنه تم التوصل إلى حل ابتدائي ممكن، ويمكن الانتقال إلى المرحلة الثانية.
  - أما إذا كانت $Z \neq 0$، فهذا يعني أن المسألة الأصلية لا تقبل حلولا، أي أنها غير ممكنة.

المرحلة الثانية:

- يتم استخدام آخر جدول ناتج من المرحلة الأولى كنقطة انطلاق للمرحلة الثانية، مع استبدال دالة الهدف المؤقتة بالدالة الأصلية للمسألة.
- بعد ذلك، تطبق خطوات خوارزمية السمبلكس مرة أخرى انطلاقا من هذا الجدول، إلى حين الوصول إلى الحل الأمثل للبرنامج الخطي الأصلي.

مثال:

لدينا المثال السابق التالي:

$$MIN(z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

المطلوب: حل البرنامج الخطي باستخدام طريقة المرحلتين.

الحل:

- **المرحلة الأولى:**

1- كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

$$MAX(z) = 2x_1 + 3x_2 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3 + A_1 + A_2 + A_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 5x_2 - s_1 + A_1 = 10$$
$$x_1 + 2x_2 - s_2 + A_2 = 6$$
$$2x_1 + 2x_2 - s_3 + A_3 = 8$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, s_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$$

2- ندخل البيانات لجدول السمبلكس وذلك بوضع جميع معاملات المتغيرات في دالة الهدف معدومة ماعدا المتغيرات الاصطناعية فتكون معاملاتها مساوية للواحد كما هو مبين في الجدول التالي:

الجدول الأول

C_j			0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
1	A_1	10	1	5	−1	0	0	1	0	0
1	A_2	6	1	2	0	−1	0	0	1	0
1	A_3	8	2	2	0	0	−1	0	0	1
Z_j		$Z^* = 24$	4	9	−1	−1	−1	1	1	1
$\Delta_j = c_j - z_j$			−4	−9	1	1	1	0	0	0

نقوم باستخراج الحل الأساسي الأولي وهي قيم المتغيرات التي تشكل متغيرات الأساس أو القاعدة X_B (هذه المتغيرات هي التي تقابل المصفوفة الأحادية)، وفي هذا الجدول الأول المتغيرات التي تقابل المصفوفة الأحادية هي متغيرات الفجوة A_1, A_2, A_3 (عادة ما تكون متغيرات القاعدة في جدول الحل الأساسي الأولي هي متغيرات الفجوة أو المتغيرات الاصطناعية)، وقيم هذه المتغيرات هي قيم الطرف الأيمن من القيود المقابلة له في العمود b_i وهي على النحو التالي:

$$A_1 = 10, A_2 = 6, A_3 = 8$$

أما باقي المتغيرات غير الداخلة في الأساس فقيمها تكون معدومة.

$$x_1 = 0, x_2 = 0, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0$$

قيمة Z:

$$Z = 10 * 1 + 6 * 1 + 8 * 1 = 24$$

نلاحظ أنه توجد **قيم سالبة في سطر** $\Delta_j = c_j - z_j$، وكذلك وجود متغيرا ت اصطناعية في الحل، فإن الحل ليس أمثل، وسنقوم بتحسينه وبالتالي ننتقل إلى الجدول الثاني باتباع خوارزمية السمبلكس.

- **تحديد المتغير الداخل إلى الأساس(القاعدة) (Entering Variable)**

من خلال سطر ($\Delta_j = c_j - z_j$) نجد القيم 0 ,0 , 0 , 1 , 1 , 1 , 9− , 4− ، وبما أننا حالة دالة هدف من نوع تدنئة (MIN)، نختار أكبر قيمة بإشارة سالبة وهي −9، والتي تقابل المتغير x_2، وعليه هذا المتغير هو الذي سيدخل مع متغيرات الأساس (القاعدة)، ونسمي العمود التابع لهذا المتغير بالعمود المحوري.

C_j			0	0	0	0	0	1	1	1
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3
1	A_1	10	1	5	−1	0	0	1	0	0
1	A_2	6	1	2	0	−1	0	0	1	0
1	A_3	8	2	2	0	0	−1	0	0	1
Z_j		$Z^* = 24$	4	9	−1	−1	−1	1	1	1
$\Delta_j = c_j - z_j$			−4	−9	1	1	1	0	0	0

- **تحديد المتغير الخارج من القاعدة (Leaving Variable)**

نقوم بحساب النسبة θ_i باستخدام العلاقة $\theta_i = \frac{b_i}{a^*_{ij}}$ على النحو التالي:

$$\theta_1 = \frac{b_1}{a^*_{13}} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\theta_2 = \frac{b_1}{a^*_{23}} = \frac{6}{2} = 3$$

$$\theta_3 = \frac{b_1}{a^*_{33}} = \frac{8}{2} = 4$$

يتم اختيار أصغر مقدار موجب لـ $\frac{b_i}{a^*_{ij}}$ وهي القيمة **2** وهي المقابلة للسطر الأول ، وبالتالي المتغير الذي سيخرج من الأساس هو A_1 ونستبدله بالمتغير الداخل للأساس وهو x_2.

نسمي السطر التابع لهذا المتغير بالسطر المحوري، والعنصر الذي يحدد تقاطع العمود المحوري مع السطر المحوري يسمى العنصر المحوري وهو **5**.

ملاحظة: المتغير الاصطناعي A_1 الذي خرج من القاعدة يتم حذفه في الجدول اللاحق كما ذكرنا سابقا.

C_j			0	0	0	0	0	1	1	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_1	A_2	A_3	$\frac{b_i}{a^*_{ij}}$
1	A_1	10	1	5	−1	0	0	1	0	0	2
1	A_2	6	1	2	0	−1	0	0	1	0	3
1	A_3	8	2	2	0	0	−1	0	0	1	4
Z_j		$Z^* = 24$	4	9	−1	−1	−1	1	1	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			−4	−9	1	1	1	0	0	0	

وبتطبيق نفس الخطوات السابقة نتحصل على الجدول الثاني التالي:

الجدول الثاني

C_j			0	0	0	0	0	1	1
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	A_3
0	x_2	2	1/5	1	−1/5	0	0	0	0
1	A_2	2	3/5	0	2/5	−1	0	1	0
1	A_3	4	8/5	0	2/5	0	−1	0	1
Z_j		$Z^* = 6$	11/5	0	4/5	−1	−1	1	1
$\Delta_j = c_j - z_j$			−11/5	0	−4/5	1	1	0	0

نستخرج الحل من هذا الجدول كما فعلنا سابقا، وهو:

$$x_1 = 0, \mathrm{x}_2 = 2, \mathrm{s}_1 = 0, \mathrm{s}_2 = 0, \mathrm{s}_3 = 0, \mathrm{A}_2 = 2, \mathrm{A}_3 = 4$$

$$\mathrm{Z} = 6$$

نلاحظ أنه توجد **قيم سالبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$** ، وكذلك توجد متغيرات اصطناعية لم تخرج من الحل، فإننا نواصل الحل باتباع خوارزمية السمبلكس، وبالتالي ننتقل إلى الجدول الرابع .

- **تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:**

C_j			0	0	0	0	0	1	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	A_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
0	x_2	2	1/5	1	−1/5	0	0	0	0	10
1	A_2	2	3/5	0	2/5	−1	0	1	0	10/3
1	A_3	4	8/5	0	2/5	0	−1	0	1	2
Z_j		$Z^* = 6$	11/5	0	4/5	−1	−1	1	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			−11/5	0	−4/5	1	1	0	0	

من خلال الجدول وبعد اتباع نفس الخطوات السابقة، فإن المتغير الداخل للقاعدة أو الأساس هو المتغير x_1 والمتغير الخارج من الأساس هو المتغير A_3 (هذا المتغير نحذفه من الجدول اللاحق)، ولإيجاد الجدول الجديد نتبع نفس الإجراءات السابقة فنتحصل على الجدول الثالث التالي:

الجدول الثالث

C_j			0	0	0	0	0	1
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2
0	x_2	3/2	0	1	−1/4	0	1/8	0
1	A_2	1/2	0	0	1/4	−1	3/8	1
0	x_1	5/2	1	0	1/4	0	−5/8	0
Z_j		$Z^* = 1/2$	0	0	1/4	−1	3/8	1
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	−1/4	1	−3/8	0

نستخرج الحل من هذا الجدول كما فعلنا سابقا، وهو:

$$x_1 = 5/2, x_2 = 3/2, s_1 = 0, s_2 = 0, s_3 = 0, A_2 = 1/2$$

$$Z = 1/2$$

نلاحظ أنه توجد **قيم سالبة في سطر $\Delta_j = c_j - z_j$** ، وكذلك توجد متغيرات اصطناعية لم تخرج من الحل، فإننا نواصل الحل باتباع خوارزمية السمبلكس، وبالتالي ننتقل إلى الجدول الرابع .

- **تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:**

C_j			2	3	0	0	0	1	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	A_2	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
3	x_2	3/2	0	1	−1/4	0	1/8	0	12
1	A_2	1/2	0	0	1/4	−1	3/8	1	1/2
2	x_1	5/2	1	0	1/4	0	−5/8	0	/
Z_j		$Z^* = 1/2$	0	0	1/4	−1	3/8	1	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	−1/4	1	−3/8	0	

من خلال الجدول وبعد إتباع نفس الخطوات السابقة، فإن المتغير الداخل للقاعدة أو الأساس هو المتغير S_3 والمتغير الخارج من الأساس هو المتغير A_2 (هذا المتغير يحذف من الجدول اللاحق) ، ولإيجاد الجدول الجديد نتبع نفس الإجراءات السابقة، فنتحصل على الجدول الرابع التالي:

الجدول الرابع

C_j			0	0	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	x_2	4/3	0	1	−1/3	1/3	0
0	s_3	4/3	0	0	2/3	−8/3	1
0	x_1	10/3	1	0	2/3	−5/3	0
Z_j		$Z^* = 0$	0	0	0	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	0	0

الحل هو:

$$x_1 = 10/3, \mathrm{x}_2 = 4/3, \mathrm{s}_1 = 0, \mathrm{s}_2 = 0, \mathrm{s}_3 = 4/3$$

$$\mathrm{Z} = 0$$

نلاحظ من خلال الجدول أن كل المتغيرات الاصطناعية قد خرجت من الحل، ووصلنا إلى $Z = 0$ وبالتالي ننتقل إلى المرحلة الثانية.

المرحلة الثانية: نأخذ الجدول الأخير للمرحلة الأولى كأول جدول للمرحلة الثانية مع إدخال معاملات دالة الهدف للبرنامج الخطي، وكذلك نحسب باقي قيم الجدول بنفس الطريقة التي كونا بها جدول الحل الأساسي الأولي، ثم نطبق بعدها طريقة السمبلكس حتى نصل إلى الحل الأمثل، ومنه نحصل على الجدول التالي:

الجدول الرابع

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
3	x_2	4/3	0	1	−1/3	1/3	0
0	s_3	4/3	0	0	2/3	−8/3	1
2	x_1	10/3	1	0	2/3	−5/3	0
Z_j		$Z^* = 32/3$	2	3	1/3	−7/3	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	−1/3	7/3	0

الحل هو:

$$x_1 = 10/3, \mathrm{x}_2 = 4/3, \mathrm{s}_1 = 0, \mathrm{s}_2 = 0, \mathrm{s}_3 = 4/3$$

$$\mathrm{Z} = 32/3$$

نلاحظ من خلال الجدول أنه توجد قيمة سالبة في سطر $C_j - Z_j$ وبالتالي هذا الحل ليس أمثلا، وسنقوم بتحسينه.

- **تحديد المتغير الداخل للأساس والمتغير الداخل للأساس والعنصر المحوري:**

C_j			2	3	0	0	0	
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	$\frac{b_i}{a_{ij}^*}$
3	x_2	4/3	0	1	−1/3	1/3	0	/
0	s_3	4/3	0	0	2/3	−8/3	1	2
2	x_1	10/3	1	0	2/3	−5/3	0	5
Z_j		$Z^* = 32/3$	2	3	1/3	−7/3	0	
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	−1/3	7/3	0	

وباتباع نفس الخطوات السابقة نتحصل على الجدول الخامس التالي:

الجدول الخامس:

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
3	x_2	2	0	1	0	−1	1/2
0	s_1	2	0	0	1	−4	3/2
2	x_1	2	1	0	0	1	−1
Z_j		$Z^* = 10$	2	3	0	−1	−1/2
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	1	1/2

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبالتالي الجدول الجديد هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1 = 2, x_2 = 2, x_3 = 20, s_1 = 2, s_2 = 0, s_3 = 0,$$
$$Z = 10$$

وهو نفس الحل المتوصل إليه بطريقة M الكبيرة، ونلاحظ أيضا أن هذه الطريقة أبسط في حساباتها من طريقة M الكبيرة.

3.4–حل برنامج خطي من نوع MIN مكتوب في صيغة مختلطة:

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MIN(z) = 12x_1 + 8x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 \leq 20$$
$$3x_1 + x_2 = 24$$
$$4x_1 + 2x_2 \geq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1– كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

- في هذا المثال بالنسبة للقيد الأول نضيف له متغير فرق فقط لأن إشارته أصغر أو يساوي.
- القيد الثاني عبارة عن مساواة نضيف له متغير اصطناعي من أجل الحصول على المصفوفة الأحادية في معاملات القيود.
- القيد الثالث نطرح منه متغير فائض وأيضا نضيف له متغير إصطناعي .

فنحصل على الشكل القياسي التالي:

$$MIN(z) = 12x_1 + 8x_2 + 0s_1 + 0s_2 + MA_1 + MA_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + s_1 = 20$$
$$3x_1 + x_2 + A_1 = 24$$
$$4x_1 + 2x_2 - s_2 + A_2 = 30$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

2- نقوم بنقل البيانات إلى جدول السمبلكس كما يلي:

C_j			12	8	0	0	M	M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2
0	s_1	20	1	2	1	0	0	0
M	A_1	24	3	1	0	0	1	0
M	A_2	30	4	2	0	–1	0	1
Z_j		$Z^* = 54M$	7M	3M	0	–M	M	M
$\Delta_j = c_j - z_j$			12–7M	8–3M	0	M	0	0

وباستخدام طريقة M الكبيرة أو طريقة المرحلتين نتحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

C_j			12	8	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
0	s_1	12	0	5/3	1	0
0	s_2	2	0	–2/3	0	1
12	x_1	8	1	1/3	0	0
Z_j		$Z^* = 96$	12	4	0	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	4	0	0

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$ موجبة أو معدومة وبالتالي هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1 = 8, x_2 = 0, s_1 = 12, s_2 = 2, Z = 96$$

4.4–حل برنامج خطي من نوع MAX مكتوب في صيغة مختلطة:

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 10x_1 + 6x_2$$

$$s/c$$

$$2x_1 + x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 3x_2 = 16$$

$$2x_1 + 4x_2 \geq 20$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

3- كتابة البرنامج الخطي على الشكل القياسي:

- في هذا المثال بالنسبة للقيد الأول نضيف له متغير فرق فقط لأن إشارته أصغر أو يساوي.
- القيد الثاني عبارة عن مساواة نضيف له متغير اصطناعي من أجل الحصول على المصفوفة الأحادية في معاملات القيود.
- القيد الثالث نطرح منه متغير فائض وأيضا نضيف له متغير إصطناعي .

فنحصل على الشكل القياسي التالي:

$$MIN(z) = 10x_1 + 6x_2 + 0s_1 + 0s_2 - MA_1 - MA_2$$
$$s/c$$
$$2x_1 + x_2 + s_1 = 12$$
$$x_1 + 3x_2 + A_1 = 16$$
$$2x_1 + 4x_2 - s_2 + A_2 = 20$$
$$x_1, x_2, s_1, s_2, A_1, A_2 \geq 0$$

4- نقوم بنقل البيانات إلى جدول السمبلكس كما يلي:

C_j			10	6	0	0	–M	–M
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	A_1	A_2
0	s_1	12	2	1	1	0	0	0
–M	A_1	16	1	3	0	0	1	0
–M	A_2	20	2	4	0	–1	0	1
Z_j		$Z^* = -36M$	–3M	–7M	0	M	–M	–M
$\Delta_j = c_j - z_j$			10+3M	6+7M	0	–M	0	0

وباستخدام طريقة M الكبيرة أو طريقة المرحلتين نتحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

C_j			10	6	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2
10	x_1	4	1	0	3/5	0
0	s_2	4	0	0	2/5	1
6	x_2	4	0	1	–1/5	0
Z_j		Z^* =64	10	6	24/5	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	–24/5	0

نلاحظ من خلال الجدول أن كل قيم $C_j - Z_j$سالبة أو معدومة وبالتالي هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل، والحل الأمثل هو:

$$x_1 = 4, x_2 = 4, s_1 = 0, s_2 = 4, Z = 64$$

5-بعض الحالات الخاصة في البرمجة الخطية:

- **حالة التفكك (التفسخ)**:يقصد بمشكلة التفسخ أنه في أحد مراحل الحل قبل الجدول النهائي نواجه مشكلة تكرار نفس الحلول والعودة إليها دون الوصول إلى الحل الأمثل، وقد ننتقل من حل متفكك إلى آخر دون تحسين الحل، وتحدث هذه الحالة إذا كان أحد متغيرات الأساس معدوما.
- **حالة تعادل قيم السطر الأخير $C_j - Z_j$**: عند تعادل القيم في السطر الأخير سواء في حالة MAX أو حالة MIN والتي من شأنها تحديد المتغير الذي يدخل للأساس، في هذه الحالة نختار المتغير الذي يدخل للأساس حسب القاعدتين التاليتين:
  - إذا كان التعادل بين متغير أصلي ومتغير إضافي يتم اختيار المتغير الأصلي (الأساسي) لكي يدخل لمتغيرات الأساس.
  - إذا كان التعادل بين متغيرين أصليين، أو متغيرين اضافيين يتم إختيار المتغير الذي له أكبر تأثير في دالة الهدف (المتغير الذي له أكبر معامل في دالة الهدف في حالة MAX والمتغير الذي له أصغر معامل في دالة الهدف في حالة MIN).
- **حالة وجود حلول بديلة**: تظهر هذه الحالة في جدول السمبلكس إذا كانت قيمة السطر الأخير $C_j - Z_j$ لمتغير أو أكثر من المتغيرات غير الأساسية معدومة، بحيث أن ادخالها إلى الأساس لا يؤثر في قيمة دالة الهدف.
- **حالة عدم وجود حلول**: تظهر هذه الحالة عند الوصول للحل الأمثل في جدول السمبلكس في حين نجد متغير اصطناعي أو أكثر في الحل الأساس وله قيمة.
- **حالة المشكلة غير محدودة**: تظهر هذه الحالة عند تحديد المتغير الخارج من الأساس، حيث عند قسمة قيم bi على قيم العمود المحوري تكون جميع القيم سالبة أو معدومة.

المحور الخامس: المسألة الثنائية (البرنامج المقابل، البرنامج الثنائي) DUAL.

تعتبر الثنائية من الخصائص الأساسية والمميزة في البرمجة الخطية، إذ لكل مسألة أولية تهدف إلى تعظيم الربح، توجد مسألة ثنائية مقابلة تهدف إلى تقليل التكاليف، والعكس صحيح (عبد المنعم عبد الله،2018،ص:126)، وتشتق المسألة الثنائية من الأولية وفق قواعد رياضية دقيقة، بحيث تعكس العلاقة بين المتغيرات والقيود في كل من النموذجين. (**محمد موفق الكبيسي، 1999، ص:110**)

في كثير من الحالات، يكون حل المسألة الثنائية أسهل من المسألة الأولية، إما بسبب بساطة الشكل الرياضي أو تقليل حجم الحسابات، وتعد خوارزمية السمبلكس أداة فعالة في هذا السياق، إذ تتيح الحصول على حلول المسألتين معا في إطار خطوات الحل الواحدة، دون الحاجة إلى إعادة الحل من الصفر، مما يوفر الجهد والوقت.

وتكمن الأهمية الكبرى لخاصية الثنائية في تفسيرها الاقتصادي، حيث تمثل المتغيرات في المسألة الثنائية ما يعرف بـ "القيمة الظلية" أو "القيمة الحدية" للموارد، أي مدى مساهمة كل وحدة إضافية من الموارد في تحسين الهدف (زيادة الربح أو خفض التكلفة)، هذا التفسير يمنح المحلل الاقتصادي أدوات دقيقة لتقييم مدى أهمية القيود المفروضة ودرجة الاستفادة من الموارد المتاحة، مما يساعد في اتخاذ قرارات أفضل على مستوى التخطيط والتخصيص.

1-مفهوم المسألة الثنائية (البرنامج الثنائي):

تعد المسألة الثنائية النموذج المعكوس للمسألة الأولية في البرمجة الخطية، وتبنى وفق قواعد رياضية تربط بين المتغيرات والقيود في كلا النموذجين، نلجأ إليها غالبا عندما يصعب حل المسألة الأولية مباشرة، إذ قد تكون أكثر بساطة من حيث الصياغة أو الحسابات، ولكل مسألة أولية يقابلها دائما مسألة ثنائية، فعلى سبيل المثال، إذا كان النموذج الأولي يهدف إلى تعظيم الأرباح، فإن النموذج الثنائي المقابل يهدف إلى تقليل التكاليف، والعكس صحيح.

2- صياغة المسألة الثنائية:

1.2- تحديد المسألة الثنائية للصيغة القانونية: إن شكل البرنامج الخطي في حالة التعظيم في صيغته القانونية يكون كما يلي: (**سهيلة عبد الله سعيد، 2007، 112**)

المسألة الأولية (البرنامج الأولي)

$$\begin{cases} Max(Z) = C\ X \\ s/c \\ AX \le B \\ X \geq 0 \end{cases}$$

البرنامج الثنائي الذي يقابل هذه المسألة هو:

المسألة الثنائية (البرنامج الثنائي)

$$\begin{cases} Min(W) = BY \\ S/C \\ A^{t}Y \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

و لإيجاد المسألة الثنائية لأي برنامج أولي في صيغته القانونية نتبع الخطوات التالية (**عبد المنعم عبد الله، 2018، ص: 127**):

- تحويل صيغة دالة الهدف حيث إذا كانت MAX في المسألة الأولية تصبح MIN في المسألة الثنائية و العكس.
- تتعاكس المتراجحات، بحيث المتراجحة أصغر أو تساوي في حالة MAX تتحول إلى أكبر أو تساوي في حالة MIN، و أكبر أو تساوي في حالة MIN تتحول إلى أصغر أو تساوي في حالة MAX.
- اذا كانت متغيرات المسألة الأولية هي: $x_1, x_2, \dots x_n$ فإن متغيرات المسألة الثنائية هي: $y_1, y_2, \dots, y_m$ حيث m هي عدد القيود في المسألة الأولية.
- مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود للمسألة الثنائية هي منقول مصفوفة معاملات المتغيرات في قيود المسألة الأولية.
- معاملات المتغيرات في دالة الهدف في المسألة الثنائية هي قيم الطرف الأيمن (b_i) في المسألة الأولية.

- قيم الطرف الأيمن في المسألة الثنائية هي معاملات المتغيرات في دالة الهدف للمسألة الأولية.
- تكون المتغيرات غير سالبة في كلتا المسألتين ما دام المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية.

ملاحظة:

نظرا للارتباط بين المسألتين الأولية والثنائية فإنه بحل إحدى المسألتين نحصل على حل المسألة الأخرى، فبدون حل المسألة الثنائية يمكن الحصول على حلها من واقع قراءة الصف الأخير في الجدول النهائي للمسألة الأولية، حيث نجد في جدول الحل الأمثل:

- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية بالقيمة المطلقة.
- القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة في المسألة الثنائية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الأولية بالقيمة المطلقة.
- قيم المتغيرات الحقيقية في المسألة الأولية والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للمسألة الثنائية والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل بالقيمة المطلقة.
- قيم المتغيرات الحقيقية في المسألة الثنائية والتي تظهر في عمود الثوابت، تساوي القيم المقابلة لمتغيرات الفجوة للمسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير من جدول الحل الأمثل بالقيمة المطلقة.
- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية.

1.1.2-حالة برنامج خطي من نوع تعظيم في صيغته القانونية

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$MAX(z) = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3$$

$$s/c$$

$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

المطلوب: إيجاد البرنامج الثنائي.

الحل:

لإيجاد البرنامج الثنائي للمسألة الأولية (البرنامج الأولي) نتبع الخطوات المذكورة سابقا كالتالي:

إذا لدينا المسألة الأولية:

$$MAX(z) = 40x_1 + 50x_2 + 60x_3$$
$$s/c$$
$$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 100$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 80$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 90$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

1- **نوع دالة الهدف:** بما أن المسألة الأولية من نوع تعظيم MAX، فإن المسألة الثنائية ستكون من نوع تخفيض (تدنئة) MIN.

2- عدد المتغيرات والقيود:

- عدد القيود في المسألة الأولية هو 3، ومنه عدد المتغيرات في المسألة الثنائية هو 3 ونسميها: $\mathbf{y_1, y_2, y_3}$.
- عدد المتغيرات في المسألة الأولية هو 3، وبالتالي فإن عدد القيود في المسألة الثنائية هو 3.

3-مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود:

- لدينا مصفوفة المعاملات في البرنامج الأولي هي:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

- مصفوفة المعاملات في البرنامج الثنائي هي $\boldsymbol{A^T}$ (منقول $\boldsymbol{A}$)

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

4- معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي:

معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي هي قيم الطرف الأيمن $\boldsymbol{b_i}$ في البرنامج الأولي.

$$\mathbf{(100 \quad 80 \quad 90)}$$

5- قيم الطرف الأيمن في البرنامج الثنائي:

قيم الطرف الأيمن في البرنامج الثنائي هي معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{50} \\ \mathbf{60} \end{pmatrix}$$

6- إشارة القيود:

بما أن المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية وهي من نوع MAX فإن إشارة المتراجحات تكون في المسألة الثنائية عكس إشارة المتراجحات في المسألة الأولية أي كلها أكبر أو يساوي.

7-إشارة المتغيرات:

تكون المتغيرات غير سالبة في كلتا المسألتين ما دام المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية أي:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وبالتالي البرنامج الثنائي هو:

$$MIN(w) = 100y_1 + 80y_2 + 90y_3$$
$$s/c$$
$$2y_1 + y_2 + 3y_3 \geq 40$$
$$4y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 50$$
$$y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 60$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

8-استنتاج الحل الأمثل للمسألة الثنائية:

الجدول التالي هو جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية:

C_j			40	50	60	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
50	x_2	2	0	1	0	7/15	–1/3	–1/5
60	x_3	20	0	0	1	–1/3	2/3	0
40	x_1	16	1	0	0	1/5	–1/3	2/5
Z_j		$Z^* = 1940$	40	50	60	6	10	6
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	90/7	0	–6	–10	–6

نعلم أن القيم المقابلة لمتغيرات الفرق في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية بالقيمة المطلقة، ومنه:

- القيمة المقابلة لمتغير الفرق s_1 في المسألة الأولية هي (-6) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_1 في المسألة الثنائية تساوي القيمة المطلقة لـ (-6).

$$y_1 = |-6| = 6$$

- القيمة المقابلة لمتغير الفرق s_2 في المسألة الأولية هي (-10) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_2 في المسألة الثنائية تساوي القيمة المطلقة لـ (-10).

$$y_2 = |-10| = 10$$

- القيمة المقابلة لمتغير الفرق s_3 في المسألة الأولية هي (-6) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_3 في المسألة الثنائية تساوي القيمة المطلقة لـ (-6).

$$y_3 = |-6| = 6$$

- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية، ومنه قيمة دالة الهدف للمسألة الثنائية تساوي 1940.

$$\mathrm{W} = 1940$$

وعليه الحل الأمثل للمسألة الثنائية هو:

$$\mathrm{y}_1^* = 6, \mathrm{y}_2^* = 10, y_3^* = 6, \mathrm{W}^* = 1940$$

2.1.2–حالة برنامج خطي من نوع تدنئة في صيغته القانونية

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} MIN(z) = 2x_1 + 3x_2 \\ s/c \\ x_1 + 5x_2 \geq 10 \\ x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{gathered}$$

المطلوب: إيجاد البرنامج الثنائي.

الحل:

لإيجاد البرنامج الثنائي للمسألة الأولية (البرنامج الأولي) نتبع الخطوات المذكورة سابقا كالتالي:

إذا لدينا المسألة الأولية:

$$MIN(z) = 2x_1 + 3x_2$$
$$s/c$$
$$x_1 + 5x_2 \geq 10$$
$$x_1 + 2x_2 \geq 6$$
$$2x_1 + 2x_2 \geq 8$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

1- **نوع دالة الهدف:** بما أن المسألة الأولية من نوع تدنئة MIN، فإن المسألة الثنائية ستكون من نوع تعظيم MAX.

2- عدد المتغيرات والقيود:

- عدد القيود في المسألة الأولية هو 3، ومنه عدد المتغيرات في المسألة الثنائية هو 3 ونسميها: $\mathbf{y_1, y_2, y_3}$.
- عدد المتغيرات في المسألة الأولية هو 2، وبالتالي فإن عدد القيود في المسألة الثنائية هو 2.

3-مصفوفة معاملات المتغيرات في القيود:

- لدينا مصفوفة المعاملات في البرنامج الأولي هي:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{5} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

- مصفوفة المعاملات في البرنامج الثنائي هي $\boldsymbol{A^T}$ (منقول $\boldsymbol{A}$)

$$\boldsymbol{A^T} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

4- معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي:

معاملات دالة الهدف في البرنامج الثنائي هي قيم الطرف الأيمن $\boldsymbol{b}_\mathbf{i}$ في البرنامج الأولي.

$$(\mathbf{10} \quad \mathbf{6} \quad \mathbf{8})$$

5- قيم الطرف الأيمن في البرنامج الثنائي:

قيم الطرف الأيمن في البرنامج الثنائي هي معاملات دالة الهدف في البرنامج الأولي.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

6- إشارة القيود:

بما أن المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية وهي من نوع MIN فإن إشارة المتراجحات تكون في المسألة الثنائية عكس إشارة المتراجحات في المسألة الأولية أي كلها أصغر أو يساوي.

7-إشارة المتغيرات:

تكون المتغيرات غير سالبة في كلتا المسألتين ما دام المسألة الأولية مكتوبة في صيغتها القانونية أي:

$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

وبالتالي البرنامج الثنائي هو:

$$MAX(w) = 10y_1 + 6y_2 + 8y_3$$
$$s/c$$
$$y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 2$$
$$5y_1 + 2y_2 + 2y_3 \leq 3$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

8-استنتاج الحل الأمثل للمسألة الثنائية:

الجدول التالي هو جدول الحل الأمثل للمسألة الأولية:

C_j			2	3	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
3	x_2	2	0	1	0	−1	1/2
0	s_1	2	0	0	1	−4	3/2
2	x_1	2	1	0	0	1	−1
Z_j		$Z^* = 10$	2	3	0	−1	−1/2
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	1	1/2

نعلم أن القيم المقابلة لمتغيرات الفرق في المسألة الأولية والتي تظهر في السطر الأخير تساوي قيم المتغيرات الرئيسية بنفس الترتيب للمسألة الثنائية بالقيمة المطلقة، ومنه:

- القيمة المقابلة لمتغير الفرق s_1 في المسألة الأولية هي (0) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_1 في المسألة الثنائية تساوي (0).

$$y_1 = 0$$

- القيمة المقابلة لمتغير الفرق s_2 في المسألة الأولية هي (1) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_2 في المسألة الثنائية تساوي (1).

$$y_2 = 1$$

- القيمة المقابلة لمتغير الفرق s_3 في المسألة الأولية هي (1/2) وعليه قيمة المتغير الرئيسي y_3 في المسألة الثنائية تساوي (1/2).

$$y_3 = 1/2$$

- قيمة دالة الهدف في الحل الأمثل للمسألتين تكون متساوية، ومنه قيمة دالة الهدف للمسألة الثنائية تساوي 10.

$$\mathrm{W} = 1940$$

وعليه الحل الأمثل للمسألة الثنائية هو:

$$\mathrm{y}_1^* = 0, \mathrm{y}_2^* = 1, y_3^* = 1/2, \mathrm{W}^* = 10$$

2.2-تحديد المسألة الثنائية للصيغة المختلطة:

لإيجاد المسألة الثنائية للصيغ المختلطة باتباع الخطوات التالية:

- إذا كانت إشارة القيد في المسألة الأولية يساوي (=) فإننا نقوم بتعويض القيد بقيدين أحدهما أكبر أو يساوي و الآخر أصغر أو يساوي وذلك بغية كتابته على الصيغة القانونية.

مثلا إذا كان لدينا القيد:

$$x_1 + 3\mathrm{x}_2 = 6$$

نقوم بتعويضه بالقيدين التاليين:

$$x_1 + 3\mathrm{x}_2 \leq 6$$
$$x_1 + 3\mathrm{x}_2 \geq 6$$

ثم نقوم بضرب طرفي أحد القيدين في الإشارة (-) حسب نوع المسألة الأولية لدينا فإذا كانت من نوع MAX نضرب طرفي القيد الثاني في (-) لكي تصبح إشارة القيد أصغر أو يساوي، وإذا كانت من نوع MIN نقوم بضرب طرفي القيد الأول في (-) لكي تصبح إشارة القيد أكبر أو يساوي.

- إذا كانت المسألة الأولية من نوع MAX و إشارة القيد أكبر أو يساوي نقوم بضرب طرفي هذا القيد في الإشارة (–) بغية كتابته على الصيغة القانونية، والعكس أي إذا كانت المسألة الأولية من MIN وإشارة القيد أصغر أو يساوي فإننا نقوم بضرب طرفي القيد في الإشارة (–).
- بعد ذلك نتبع الخطوات المذكورة سابقا في ايجاد المسألة الثنائية للصيغة القانونية.

مثال:

ليكن لدينا البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered} MIN(z) = 4x_1 + x_2 \\ s/c \\ x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + x_2 = 3 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ x_1, x_2 \geq \end{gathered}$$

المطلوب: إيجاد المسألة الثنائية لهذا البرنامج الخطي.

الحل:

لدينا المسألة الأولية في صيغة مختلطة لذا سوف نقوم بكتابتها في صيغتها القانونية:

- المسألة الأولية من نوع MIN وإشارة القيد الأول أصغر أو يساوي لذا يجب جعل إشارته أكبر أو يساوي وذلك بضرب طرفيه في الإشارة (–)، فيصبح كما يلي:

$$-x_1 - 2x_2 \geq -4$$

- القيد الثاني عبارة عن مساواة لذا يتم تعويضه بالقيدين التاليين:

$$3x_1 + x_2 \geq 3 \ldots(1)$$

$$3x_1 + x_2 \leq 3 \ldots(2)$$

ثم نقوم بضرب طرفي القيد (2) في الإشارة (–) فيصبح كالآتي:

$$-3x_1 - x_2 \geq -3$$

وعلية المسألة الأولية في صيغتها القانونية تكون على الشكل التالي:

$$MIN(z) = 4x_1 + x_2$$
$$s/c$$
$$-x_1 - 2x_2 \geq -4$$
$$3x_1 + x_2 \geq 3$$
$$-3x_1 - x_2 \geq -3$$
$$4x_1 + 3x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

وعليه المسألة الثنائية تكون على الشكل التالي:

$$MAX(w) = -4y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 6y_4$$
$$s/c$$
$$-y_1 + 3y_2 - 3y_3 + 4y_4 \leq 4$$
$$-2y_1 + y_2 - y_3 + 3y_4 \leq 1$$
$$y_1, y_2, y_3, y_4 \geq 0$$

المحور السادس: برمجة الأعداد الصحيحة (Integer Programming)

1-تعريف برمجة الأعداد الصحيحة:

برمجة الأعداد الصحيحة هي فرع من فروع البرمجة الرياضية تختص بحل مشكلات التحسين التي تتطلب أن تكون بعض أو كل المتغيرات في النموذج أعدادا صحيحة فقط، أي أنها لا يمكن أن تأخذ قيما عشرية أو كسورا (أبو القاسم الشيخ،2009،ص:235).

تستخدم هذه البرمجة في الحالات التي تكون فيها المتغيرات تمثل أشياء منفصلة أو قرارات ذات طبيعة ثنائية، مثل عدد المنتجات التي يجب إنتاجها (لا يمكن إنتاج جزء من المنتج)، اتخاذ قرار (نعم/لا) بشأن تشغيل آلة أو قبول مشروع، وأيضا جدولة عدد الموظفين أو الرحلات.

تتميز برمجة الأعداد الصحيحة بكونها أكثر تعقيدا من البرمجة الخطية العادية لأن مجموعة الحلول الممكنة تصبح غير متصلة، مما يجعل العثور على الحل الأمثل أكثر صعوبة ويتطلب تقنيات خاصة مثل طريقة الفروع والحدود (Branch and Bound)أو القطوع المستوية(Cutting Planes) .

2-أنواع برمجة الأعداد الصحيحة:

تنقسم برمجة الأعداد الصحيحة إلى عدة أنواع، حسب طبيعة المتغيرات التي يشترط أن تكون أعدادا صحيحة، ومن أبرز أنواعها:

1.2-برمجة الأعداد الصحيحة الكاملة (Pure Integer Programming) :

هذا النوع من برمجة الأعداد الصحيحة يتشترط فيه أن تكون جميع المتغيرات في النموذج أعدادا صحيحة، ويستخدم عندما تكون جميع القرارات غير قابلة للتجزئة، مثل عدد الأشخاص، عدد الآلات، عدد المنتجات... إلخ، ومثال على ذلك شركة تنتج منتجات لا يمكن إنتاج جزء منها (إما ينتج أو لا).

2.2-برمجة الأعداد الصحيحة المختلطة (Mixed Integer Programming – MIP) :

في هذا النوع من برمجة الأعداد الصحيحة بعض المتغيرات صحيحة وبعضها مستمر (أعداد حقيقية) ويستخدم في حالة بعض المتغيرات قرارات غير قابلة للتجزئة، بينما تمثل الأخرى كميات قابلة للتجزئة مثل الوقت أو المال.

3.2-برمجة الأعداد الثنائية(Binary Integer Programming / 0–1 Programming) :

هو نوع خاص من برمجة الأعداد الصحيحة، حيث يسمح للمتغيرات أن تأخذ فقط القيم 0 أو 1،
يستخدم في مسائل تتعلق باتخاذ قرارات منطقية، مثل "تشغيل أو عدم تشغيل"، "اختيار أو عدم اختيار."
مثال على ذلك تحديد ما إذا كان يجب بناء مستودع في موقع معين (1 = نعم، 0 = لا).

3-برمجة الأعداد الصحيحة والبرمجة الخطية:

تعد البرمجة الخطية (LP) إحدى أهم أدوات بحوث العمليات المستخدمة في نمذجة المسائل التي تهدف إلى تعظيم أو تقليل دالة هدف خطية ضمن مجموعة من القيود الخطية، وتفترض هذه النماذج أن المتغيرات يمكن أن تأخذ قيما حقيقية مستمرة (أي غير صحيحة بالضرورة). ورغم قوة هذه النماذج وسهولة حلها باستخدام خوارزميات مثل السمبلكس، إلا أن استخدامها يصبح محدودا في الحالات التي تقتضي أن تكون الحلول على شكل أعداد صحيحة أو قرارات منطقية (نعم/لا).

في المقابل، تعد برمجة الأعداد الصحيحة (IP) امتدادا للبرمجة الخطية، حيث تضاف إليها قيود تفرض أن بعض أو جميع المتغيرات يجب أن تكون أعدادا صحيحة. وهذا النوع من النماذج يستخدم في التطبيقات التي تنطوي على قرارات غير قابلة للتجزئة، مثل تعيين عامل لوظيفة، أو تشغيل مشروع من عدمه، أو شراء عدد معين من الوحدات.

من الناحية الحسابية، تعد مسائل برمجة الأعداد الصحيحة أكثر تعقيدا من البرمجة الخطية، ويصعب حلها بسرعة مع زيادة حجم النموذج، ولذلك فإنها تتطلب تقنيات خاصة كطريقة الفروع والحدود (Branch and Bound)والقطع المستوي(Cutting Planes) .

ومع ذلك، فإن دقة النماذج التي تقدمها برمجة الأعداد الصحيحة في تمثيل الواقع العملي تجعلها أداة لا غنى عنها في مجالات عديدة مثل التخطيط الإنتاجي، وجدولة الموارد، والتصميم الشبكي، واختيار المشاريع، حيث لا تكون الحلول غير الصحيحة قابلة للتطبيق أو التفسير

	البرمجة الخطية (LP)	برمجة الأعداد الصحيحة (IP)
المتغيرات	يمكن أن تكون عشرية	يجب أن تكون صحيحة
صعوبة الحل	سهلة نسبيا	أكثر تعقيدا
زمن الحل	سريع	أطول (حسب المسألة)
التقنيات	السمبلكس ، M الكبيرة، طريقة المرحلتين	الفروع والحدود – القطوع المستوية

4-تطبيقات برمجة الأعداد الصحيحة:

➢ **تخطيط الإنتاج والجدولة:**

تُستخدم برمجة الأعداد الصحيحة في تحديد الكميات المثلى للإنتاج ضمن قيود الموارد، مع التأكيد على أن عدد الوحدات المنتجة يجب أن يكون صحيحا. كما تُستخدم في جدولة العمليات، مثل جدولة الآلات في المصانع أو العمال في النوبات.

➢ **اختيار المشاريع أو الاستثمارات:**

عندما تكون الموارد محدودة ويجب اختيار مجموعة من المشاريع للاستثمار فيها، تستخدم برمجة الأعداد الصحيحة لاختيار التشكيلة المثلى من المشاريع التي تحقق أقصى ربح ممكن ضمن الميزانية المتاحة.

➢ **تصميم شبكات النقل والتوزيع:**

في مجالات كالهندسة اللوجستية، تستخدم برمجة الأعداد الصحيحة لتحديد المواقع المثلى للمخازن ومراكز التوزيع، ولتخطيط مسارات الشحن بما يضمن خفض التكاليف.

➢ **التخطيط الحضري والمرافق العامة:**

تستخدم لتحديد المواقع المثلى لبناء المدارس، المستشفيات، أو محطات الشرطة، بحيث يتم تغطية أكبر عدد ممكن من السكان مع تقليل التكاليف أو المسافات.

➢ **مشكلة التعيين:(Assignment Problem)**

يتم فيها تخصيص عدد من الموارد (مثل العمال) إلى عدد من المهام بطريقة تحقق أقصى فاعلية أو أقل تكلفة، مع ضرورة أن تكون كل عملية تعيين على هيئة "0 أو 1."

➢ **تصميم شبكات الاتصالات:**

تستخدم برمجة الأعداد الصحيحة لتحديد كيفية بناء شبكة اتصالات فعالة من حيث التكاليف والربط بين المواقع الجغرافية.

5-طرق حل برمجة الأعداد الصحيحة:

لحل نماذج برمجة الأعداد الصحيحة نستخدم طريقة الفروع والحدود(Branch and Bound) أو طريقة القطوع المستوية (Cutting Planes) ، وسنتطرق إلى طريقة القطوع المستوية

1.5-تعريف طريقة قطع المستوي غوموري (Gomory`s Cutting Plane Method): هي إحدى الطرائق المستخدمة لحل مسائل البرمجة الخطية بالأعداد الصحيحة، وتستخدم لتحويل الحل غير الصحيح (الحل الذي يحتوي على أعداد غير صحيحة) لمسألة برمجة خطية إلى حل صحيح (عدد صحيح)، من خلال إضافة قيود جديدة تعرف باسم قيود القطع(Cutting Planes) .

2.5-خطوات طريقة قطع غوموري:

➢ حل المسألة أو البرنامج الخطي بطريقة السمبلكس دون الأخذ بعين الاعتبار شرط أن تكون المتغيرات صحيحة.

➢ إذا كان الحل كل قيمه أعداد صحيحة ينتهي الحل ويعتبر هذا الحل أمثلا.

➢ إذا كان الحل يحتوي على قيم غير صحيحة، يتم استخراج قطع غوموري (Gomory Cut) من الصف الذي يحتوي على قيمة أساسية غير صحيحة (إذا كان هناك أكثر من متغير غير صحيح نختار المتغير الذي له أكبر جزء عشري).

➢ تضاف القيود الجديدة إلى النموذج (قيد غوموري)، ويتم حل المسألة من جديد باستخدام السمبلكس.

➢ تتكرر العملية إلى أن يكون الحل مكونا من أعداد صحيحة فقط.

3.5–كيفية تشكيل قيد غوموري: من جدول الحل الأساسي الأمثل يتم تحديد المتغيرات التي يشترط أن تكون قيمها صحيحة، والتي لم يتحقق فيها هذا الشرط ثم نختار المتغير الذي يحتوي على أكبر جزء عشري.

$\boldsymbol{x_r}$: المتغير ذات القيمة غير الصحيحة والتي تحتوي على أكبر جزء عشري.

b_k: قيمة المتغير x_r.

E_k: الجزء الصحيح من b_k.

D_k: الجزء العشري من b_k والذي يجب أن يكون دائما موجبا. $0 < D_k < 1$

إذا : $b_k = E_k + D_k$

كتابة قيد غوموري: لكتابة قيد غوموري، ننطلق من قراءة السطر الخاص بالمتغير الأساسي الذي تم اختياره في الخطوة السابقة، وذلك كما يلي:

$$\boldsymbol{b_k = x_r + \sum_{j=h}^{p} a_{kj}\, X_j}$$

حيث:

$\boldsymbol{h}$: ترتيب أول متغير خارج الأساس.

$\boldsymbol{p}$: عدد المتغيرات خارج الأساس.

$$x_r = b_k - \sum_{j=h}^{p} a_{kj}\, X_j$$

$$x_r = E_k + D_k - \sum_{j=h}^{p} a_{kj}\, X_j$$

$$a_{kj} = E_{kj} + D_{kj}$$

حيث:

$$0 < D_k < 1$$
$$0 < D_{kj} < 1$$

E_k: عدد صحيح.

E_{kj}: عدد صحيح.

$$x_r = E_k + D_k - \left(\sum_{j=h}^{p} E_{kj}\, X_j + \sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j\right)$$

$$x_r = \left(E_k - \sum_{j=h}^{p} E_{kj}\, X_j\right) + \left(D_k - \sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j\right)$$

وحتى يكون $\boldsymbol{x_r}$ عددا صحيحا يجب أن يكون $D_k - \sum_{j=h}^{p} D_{kj}\, X_j$ عدد صحيح، وبما أن $0 < D_k < 1$ فإن:

$$\sum_{j=h}^{p} \boldsymbol{D_{kj}\, X_j \geq D_k}$$

وهذا القيد هو قيد غوموري ويتم إضافته إلى البرنامج الأصلي ويتم حله من جديد.

مثال (01): لدينا المثال السابق.

$$MAX(z) = 3300x_1 + 2000x_2$$
$$s/c$$
$$6x_1 + 4x_2 \leq 60$$
$$5x_1 + 3x_2 \leq 40$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 30$$
$$x_1, x_2 \geq 0(\text{أعداد صحيحة})$$

المطلوب: حل البرنامج الصحيح باستخدام طريقة غوموري.

باستخدام طريقة السمبلكس وبدون الأخذ بعين الاعتبار شرط أن المتغيرات صحيحة، نجد جدول الحل الأساسي التالي:

C_j			3300	2000	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3
0	s_1	20/3	−2/3	0	1	−4/3	0
2000	x_2	40/3	5/3	1	0	1/3	0
0	s_3	10/3	2/3	0	0	−2/3	1
Z_j		$Z^* = 80000/3$	10000/3	2000	0	2000/3	0
$\Delta_j = c_j - z_j$			−100/3	0	0	−2000/3	

$$x_1 = 0, \mathrm{x}_2 = 40/3, \mathrm{s}_1 = 20/3, \mathrm{s}_2 = 0, \mathrm{s}_3 = 10/3, \mathrm{s}_4 = 0$$
$$\mathrm{Z} = 80000/3$$

يمثل الجدول **الحل الأمثل للمسألة بدون شرط المتغيرات صحيحة**، وهذا يتضح من أن جميع القيم في صف الفرق $\Delta_j = c_j - z_j$ سالبة أو صفر، مما يدل على التوقف وفق خوارزمية السمبلكس لأننا في حالة دالة هدف من نوع MAX .

في هذا الجدول، نجد أن القيم الأساسية في عمود b_i هي كالتالي:

$$s_1 = 20/3$$
$$x_2 = 40/3$$
$$s_3 = 10/3$$

من بين هذه المتغيرات x_2 هو متغير قرار رئيسي في النموذج، وبما لا يأخذ قيمة صحيحة، فإن هذا الحل لا يعتبر صالحا لمسألة البرمجة الصحيحة.

بما أن الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عن طريق خوارزمية السمبلكس يحتوي على متغيرات أساسية تأخذ قيما غير صحيحة، فإن هذا الحل لا يعتبر صالحاً ضمن إطار البرمجة الصحيحة، وعليه نلجأ إلى تطبيق طريقة غوموري لإنشاء قيد إضافي (قطع) يشتق من الصف المرتبط بالمتغير الأساسي x_2 غير الصحيح، بهدف استبعاد هذا الحل الكسري دون التأثير على صلاحية الحلول الصحيحة المحتملة.

لدينا القيد الذي يحتوي على المتغير x_2 هو:

$$5/3x_1 + x_2 + 1/3s_2 = 40/3$$

نستعمل هذا القيد لاستخراج قيد إضافي (قطع غوموري) وذلك باتباع الخطوات اللازمة على النحو التالي:

$$5/3x_1 + x_2 + 1/3s_2 = 40/3$$
$$(1 + 2/3)x_1 + x_2 + 1/3s_2 = (13 + 1/3)$$
$$x_1 + 2/3x_1 + x_2 + 1/3s_2 = 13 + 1/3$$
$$2/3x_1 + 1/3s_2 - 1/3 = -x_1 - x_2 + 13$$
$$2/3x_1 + 1/3s_2 - 1/3 \geq 0$$
$$2/3x_1 + 1/3s_2 \geq 1/3$$

نضيف هذا القيد إلى النموذج الأصلي، وسيؤدي إلى استبعاد الحل الحالي الذي يجعل $x_2 = \frac{40}{3}$ ،

لأنه لا يمكن أن يحقق هذا القيد الجديد إذا بقيت القيم كما هي، لكن القيد لا يستبعد أي حلول أخرى ممكنة تكون صحيحة (كل القيم فيها أعداد صحيحة).

إذا يصبح عندنا البرنامج الجديد بعد إضافة قيد غوموري كالآتي:

$$MAX(z) = 3300x_1 + 2000x_2$$
$$s/c$$
$$-2/3x_1 + s_1 - 4/3s_2 = 20/3$$
$$5/3x_1 + x_2 + 1/3s_2 = 40/3$$
$$2/3x_1 - 2/3s_2 = 10/3$$
$$2/3x_1 + 1/3s_2 \geq 1/3$$
$$x_1, x_2 \geq 0(\text{أعداد صحيحة})$$

هذا البرنامج الجديد نقوم بحله بدون شرط أن تكون المتغيرات صحيحة باستخدام طريقة المرحلتين أو طريقة M الكبيرة، فنتحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

C_j			3300	2000	0	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4
0	s_1	7	0	0	1	–1	0	0
2000	x_2	25/2	0	1	0	–1/2	0	5/2
0	s_3	3	0	0	0	–1	1	1
3300	x_1	1/2	1	0	0	1/2	0	–3/2
Z_j		Z^* =26650	3300	2000	0	650	0	50
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	–650	0	–50

$$x_1 = 1/2, x_2 = 25/2, s_1 = 7, s_2 = 0, s_3 = 3, s_4 = 0$$
$$Z = 26650$$

هذا الجدول يعطينا **الحل الأمثل للمسألة بدون شرط المتغيرات صحيحة**، وهذا يتضح من أن جميع القيم في صف الفرق $\Delta_j = c_j - z_j$ سالبة أو صفر، مما يدل على التوقف وفق طريقة المرحلتين لأننا في حالة دالة هدف من نوع MAX.

في هذا الجدول، نجد أن القيم الأساسية في عمود b_i هي كالتالي:

$$s_1 = 7$$
$$x_2 = 25/2$$
$$s_3 = 3$$
$$x_1 = 1/2$$

من بين هذه المتغيرات x_1، x_2 وهما متغيرا قرار رئيسيان في النموذج، وبما أنهما لا يأخذان قيمتان صحيحتان، فإن هذا الحل لا يعتبر صالحا لمسألة البرمجة الصحيحة.

بما أن الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عن طريق خوارزمية السمبلكس (طريقة المرحلتين) يحتوي على متغيرات أساسية تأخذ قيما غير صحيحة، فإن هذا الحل لا يعتبر صالحا ضمن إطار البرمجة الصحيحة، وعليه نلجأ إلى تطبيق طريقة غوموري لإنشاء قيد إضافي (قطع) يشتق من الصف المرتبط بالمتغير الأساسي x_2 غير الصحيح (نختار x_2) ، بهدف استبعاد هذا الحل الكسري دون التأثير على صلاحية الحلول الصحيحة المحتملة.

لدينا القيد الذي يحتوي على المتغير x_2 هو:

$$x_2 - 1/2s_2 + 5/2s_4 = 25/2$$
$$x_2 + (-1 + 1/2)s_2 + (2 + 1/2)s_4 = (12 + 1/2)$$
$$x_2 - s_2 + 1/2s_2 + 2s_4 + 1/2s_4 = 12 + 1/2$$
$$1/2s_2 + 1/2s_4 - 1/2 = -x_2 + s_2 + 12 - 2s_4$$
$$1/2s_2 + 1/2s_4 - 1/2 \geq 0$$
$$1/2s_2 + 1/2s_4 \geq 1/2$$

نضيف هذا القيد إلى النموذج الأصلي، وسيؤدي إلى استبعاد الحل الحالي الذي يجعل $x_2 = 25/2$ ،

لأنه لا يمكن أن يحقق هذا القيد الجديد إذا بقيت القيم كما هي، لكن القيد لا يستبعد أي حلول أخرى ممكنة تكون صحيحة (كل القيم فيها أعداد صحيحة).

إذا يصبح عندنا البرنامج الجديد بعد إضافة قيد غوموري كالآتي:

$$MAX(z) = 3300x_1 + 2000x_2$$
$$s/c$$
$$s_1 - s_2 = 7$$
$$x_2 - 1/2s_2 + 5/2s_4 = 25/2$$
$$-s_2 + s_3 + s_4 = 3$$
$$x_1 + 1/2s_2 - 3/2s_4 = 1/2$$
$$1/2s_2 + 1/2s_4 \geq 1/2$$
$$x_1, x_2 \geq 0 (\text{أعداد صحيحة})$$

نقوم بحل هذا البرنامج الجديد دون شرط أن تكون المتغيرات أعداد صحيحة فنتحصل على جدول الحل الأساسي الأمثل التالي:

C_j			3300	2000	0	0	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5
0	s_1	7	0	0	1	−1	0	0	0
2000	x_2	10	0	1	0	−3	0	0	5
0	s_3	2	0	0	0	−2	1	0	2
3300	x_1	2	1	0	0	2	0	0	−3
0	s_4	1	0	0	0	1	0	1	−2
Z_j		Z^* =26600	3300	2000	0	600	0	0	100
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	0	−600	0	0	−100

$$x_1 = 0, x_2 = 10, s_1 = 7, s_2 = 0, s_3 = 2, s_4 = 1, s_5 = 0$$
$$Z = 26600$$

يمثل الجدول **الحل الأمثل للمسألة بدون شرط المتغيرات صحيحة**، وهذا يتضح من أن جميع القيم في صف الفرق $\Delta_j = c_j - z_j$ سالبة أو صفر، مما يدل على التوقف وفق خوارزمية السمبلكس لأننا في حالة دالة هدف من نوع MAX.

وبما أن قيم المتغيرات الأساسية صحيحة، فإن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل لنموذج البرمجة العددية الصحيحة.

$$x_1^* = 0, x_2^* = 10, s_1 = 7, s_2 = 0, s_3 = 2, s_4 = 1, s_5 = 0$$
$$Z^* = 26600$$

مثال(02): ليكن لدينا البرنامج التالي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$s/c$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 10$$
$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 15$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \geq 12$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نتجاهل شرط أن المتغيرات يجب أن تكون صحيحة، ونقوم بحل البرنامج الخطي باستخدام طريقة المرحلتين،

فنتحصل على جدول الحل الأمثل التالي:

C_j			3	2	4	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3
2	x_2	8/3	0	1	1/3	–2/3	0	1/3
3	x_1	14/3	1	0	1/3	1/3	0	–2/3
0	s_2	5/3	0	0	–2/3	1/3	1	–5/3
Z_j		Z^* =58/3	3	2	5/3	–1/3	0	–4/3
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	7/3	1/3	0	4/3

$$x_1 = 14/3, \mathrm{x}_2 = 8/3, x_3 = 0, \mathrm{s}_1 = 0, \mathrm{s}_2 = 5/3, \mathrm{s}_3 = 0$$
$$\mathrm{Z} = 58/3$$

يمثل الجدول **الحل الأمثل للمسألة بدون شرط المتغيرات صحيحة**، وهذا يتضح من أن جميع القيم في صف الفرق $\Delta_j = c_j - z_j$ موجبة أو صفر، مما يدل على التوقف وفق خوارزمية السمبلكس لأننا في حالة دالة هدف من نوع MIN .

في هذا الجدول، نجد أن القيم الأساسية في عمود b_i هي كالتالي:

$$x_1 = \frac{14}{3} = 4.6667$$
$$x_2 = \frac{8}{3} = 2.6667$$
$$S_2 = \frac{5}{3} = 1.6667$$

من بين هذه المتغيرات x_2, x_1 هما متغيرا قرار رئيسيان في النموذج، وبما لا أنهما يأخذان قيمة صحيحة، فإن هذا الحل لا يعتبر صالحا لمسألة البرمجة الصحيحة.

بما أن الحل الأمثل الذي تم الحصول عليه عن طريق خوارزمية السمبلكس يحتوي على متغيرات أساسية تأخذ قيما غير صحيحة، فإن هذا الحل لا يعتبر صالحاً ضمن إطار البرمجة الصحيحة، وعليه نلجأ إلى تطبيق طريقة غوموري لإنشاء قيد إضافي (قطع) يشتق من الصف المرتبط بالمتغير الأساسيx_1 أوx_2 (لأن الجزء العشري لكليهما متساويين) غير الصحيح، بهدف استبعاد هذا الحل الكسري دون التأثير على صلاحية الحلول الصحيحة المحتملة.

اذا نشتق القيد من المتغيرx_1 ، حيث لدينا القيد الذي يحتوي على المتغير x_1 هو:

$$x_1 + 1/3x_3 + 1/3s_1 - 2/3s_3 = 14/3$$

نستعمل هذا القيد لاستخراج قيد إضافي (قطع غوموري) وذلك باتباع الخطوات اللازمة على النحو التالي:

$$x_1 + 1/3\, x_3 + 1/3\, s_1 - \frac{2}{3} s_3 = 14/3$$

$$x_1 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 + \left(-1 + \frac{1}{3}\right) s_3 = (4+2/3)$$

$$x_1 + \frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 + \frac{1}{3} s_3 - s_3 - 2/3 = 4$$

$$\frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 + \frac{1}{3} s_3 - \frac{2}{3} = 4 + s_3 - x_1$$

وعليه القيد الجديد هو:

$$\frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 + \frac{1}{3} s_3 \geq 2/3$$

نضيف هذا القيد إلى النموذج الأصلي، وسيؤدي إلى استبعاد الحل الحالي الذي يجعل $x_1 = 14/3$ ،

لأنه لا يمكن أن يحقق هذا القيد الجديد إذا بقيت القيم كما هي، لكن القيد لا يستبعد أي حلول أخرى ممكنة تكون صحيحة (كل القيم فيها أعداد صحيحة).

إذا يصبح عندنا البرنامج الجديد بعد إضافة قيد غوموري كالآتي:

$$MIN(z) = 3x_1 + 2x_2 + 4x_3$$
$$s/c$$
$$x_2 + \frac{1}{3}\, x_3 - \frac{2}{3}\, s_1 + \frac{1}{3}\, s_3 = 8/3$$
$$x_1 + \frac{1}{3}\, x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 - \frac{2}{3}\, s_3 = 14/3$$
$$-\frac{2}{3}\, x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 + s_2 - \frac{5}{3}\, s_3 = 5/3$$
$$\frac{1}{3} x_3 + \frac{1}{3}\, s_1 + \frac{1}{3} s_3 \geq 2/3$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

نقوم بحل هذا البرنامج الجديد دون شرط أن تكون المتغيرات أعداد صحيحة، فنتحصل على جدول الحل الأساسي الأمثل التالي:

C_j			3	2	4	0	0	0	0
C_B	X_B	b_i	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4
2	x_2	4	0	1	1	0	0	1	−2
3	x_1	4	1	0	0	0	0	−1	1
0	s_2	1	0	0	−1	0	1	−2	1
0	s_1	2	0	0	1	1	0	1	−3
Z_j		Z^* =20	3	2	2	0	0	−1	−1
$\Delta_j = c_j - z_j$			0	0	2	0	0	1	1

$$x_1 = 4, x_2 = 4, x_3 = 0, s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 0, s_4 = 0$$
$$Z = 20$$

يمثل الجدول **الحل الأمثل للمسألة بدون شرط المتغيرات صحيحة**، وهذا يتضح من أن جميع القيم في صف الفرق $\Delta_j = c_j - z_j$ موجبة أو صفر، مما يدل على التوقف وفق خوارزمية السمبلكس لأننا في حالة دالة هدف من نوع MIN.

وبما أن قيم المتغيرات الأساسية صحيحة، فإن الحل المتوصل إليه هو الحل الأمثل لنموذج البرمجة العددية الصحيحة.

$$x_1^* = 4, x_2^* = 4, x_3^* = 0, s_1 = 1, s_2 = 2, s_3 = 0, s_4 = 0$$
$$Z^* = 20$$

المحور السابع: المسائل النقل Transportation Problems

1–تعريف مسائل النقل: تعد مشكلة النقل من النماذج الأساسية في بحوث العمليات، وتندرج ضمن فئة البرمجة الخطية، لكنها تصنف كحالة خاصة نظرا لبنيتها المحددة وطبيعة قيودها.

يتمثل هدف هذه المشكلة في تحديد خطة توزيع مثلى لنقل كميات من سلعة معينة من مجموعة من المصادر (مثل المصانع أو مراكز الإنتاج) إلى مجموعة من الوجهات (مثل المستودعات أو مناطق الاستهلاك)، بحيث تتحقق أقل تكلفة إجمالية ممكنة لعملية النقل.

ترتكز هذه المشكلة على عنصرين أساسيين:

- **الطاقة الإنتاجية للمصادر** :إذ لا يمكن تخصيص كميات تفوق القدرة الإنتاجية لكل مصنع أو مصدر.

- **الطلب في الوجهات** :حيث يجب تلبية حاجة كل وجهة بالكامل، دون تجاوز أو نقص في الكمية المطلوبة.

وتتمثل أهمية هذه المشكلة في قدرتها على دعم اتخاذ القرار في المجالات الإنتاجية واللوجستية، من خلال تقديم حلول اقتصادية وفعالة لعمليات توزيع الموارد، مع مراعاة كل من قيود الإنتاج وقيود الطلب، وضمان التوازن بين الكميات المرسلة من المصادر والكميات المطلوبة في الوجهات.

من خلال ما سبق نستخلص أن مسألة النقل يجب أن تتوفر على العناصر التالية:

- مواقع توزيع (مصانع ، شركات، مستودعات) لكل منهم طاقة محددة.
- مواقع طلب (مراكز تجارية، مناطق استهلاك) لكل منهم طلب محدد.
- تكلفة نقل محددة من المصادر الإنتاجية إلى مناطق الاستهلاك.

2-عرض مسألة النقل:

يمكن تمثيل مسألة النقل بالشكل النموذجي التالي:

نفترض وجود كميات من منتج معين (مثل القمح، الزيت، البترول، وغيرها) تنتج في مصادر إنتاج متعددة S_i حيث $(\mathrm{i} = 1,2,3, \dots .\mathrm{m})$، بحيث تكون كمية الانتاج في المصدر i هي a_i .

يتم نقل هذه الكميات إلى مراكز تسويقية مختلفة D_j حيث $(\mathrm{j} = 1,2,3, \dots .\mathrm{n})$، ولكل مركز تسويقي طلب محدد b_j من المنتج.

نرمز إلى تكلفة نقل وحدة واحدة من المصدر i إلى المركز التسويقي j بالرمز C_{ij} ، حيث تكون هذه التكلفة قيمة غير سالبة.

ونفترض أن : $a = \sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j = b$ أي أن الكمية المطلوبة تساوي تماما الكمية المعروضة، ونقول في هذه الحالة أن مسألة النقل متوازنة ويمكن عرضها في الجدول التالي:

مناطق التسويق / مصادر الانتاج	D_1	D_2	……..	D_j	……..	D_n
S_1	C_{11}	C_{12}	……..	C_{1j}	……..	C_{1n}
S_2	C_{21}	C_{22}	……..	C_{2j}	……..	C_{2n}
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .
S_i	C_{i1}	C_{i2}	……..	C_{ij}	……..	C_{in}
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .
S_m	C_{m1}	C_{m2}	……..	C_{mj}	……..	C_{mn}

المطلوب في مسألة النقل هو تموين مناطق التسويق D_j بكل احتياجاتها من خلال مصادر الانتاج S_i، بحيث تكلفة النقل أصغر ما يمكن وفي حدود طاقات العرض الممكنة، فإذا كانت الكميات التي يمكن أن تمون بها المصدر i المنطقة j هي x_{ij} (تكون غير سالبة)، فإن الكميات التي يتم توجيهها من كل مصدر إلى كل منطقة ممثلة في الجدول التالي (ابراهيم عبدالفتاح،2006،ص:190):

مناطق التسويق / مصادر الانتاج	D_1	D_2	……..	D_j		D_n	الكميات المتوفرة
S_1	X_{11}	X_{12}	……..	X_{1j}	……..	X_{1n}	a_1
S_2	X_{21}	X_{22}	……..	X_{2j}	……..	X_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	⋮
S_i	X_{i1}	X_{i2}	……..	X_{ij}	……..	X_{in}	a_i
⋮	⋮	⋮		⋮		⋮	
S_m	X_{m1}	X_{m2}	……..	X_{mj}	……..	X_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2		b_j		b_n	

هذا الجدول مشابه لجدول التكاليف، إلا أنه الفرق بينهما يتمثل في أن قيم التكاليف C_{ij} من كل مصدر إنتاج إلى كل منطقة تسويق أو استهلاك معلومة، في حين أن الكميات X_{ij} مجهولة وهي التي نهدف إلى تحديدها من خلال حل مسألة النقل.

3-تكوين جدول مسألة النقل:

يمكن تمثيل الإطار العام لمسألة النقل من خلال صيغة جدولية تُستخدم كأساس لإيجاد الحل الابتدائي الأولي. اعتمادًا على هذا الحل، يتم العمل تدريجيًا للوصول إلى الحل النهائي الذي يحقق أقل تكلفة ممكنة لعملية النقل.

وتعرض الصيغة الجدولية لمسألة النقل كما يلي:

مناطق التسويق / مصادر الانتاج	D_1	D_2	....	D_j		D_n	الكميات المتوفرة
S_1	X_{11} C_{11}	X_{12} C_{12}	....	X_{1j} C_{1j}	....	X_{1n} C_{1n}	a_1
S_2	X_{21} C_{21}	X_{22} C_{22}	....	X_{2j} C_{2j}	....	X_{2n} C_{2n}	a_2
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
S_i	X_{i1} C_{i1}	X_{i2} C_{i2}	....	X_{ij} C_{ij}	....	X_{in} C_{in}	a_i
. . .	. . .	. . .		. . .		. . .	. . .
S_m	X_{m1} C_{m1}	X_{m2} C_{m2}	....	X_{mj} C_{mj}	....	X_{mn} C_{mn}	a_m
الكميات المطلوبة	b_1	b_2		b_j		b_n	$a = b$

حيث: c_{ij}: تمثل تكلفة نقل الوحدة الواحدة من المصدر i إلى المنطقة j.

x_{ij} : تمثل عدد الوحدات المنقولة من المصدر i إلى المنطقة j.

4–النموذج الرياضي لمسألة النقل:

يتم تكوين الصيغة الرياضية لمسألة النقل كما يلي (ابراهيم عبدالفتاح،187،2006):

- **التكلفة الإجمالية:**

يمكن حسابها بالصيغة الرياضية التالية:

$$\begin{aligned} Z = {} & x_{11}c_{11} + x_{12}c_{12} + \cdots + x_{1j}c_{1j} + \cdots x_{1n}c_{1n} + x_{21}c_{21} + x_{22}c_{22} + \cdots \\ & + x_{2j}c_{2j} + \cdots + x_{2n}c_{2n} + x_{i1}c_{i1} + x_{i2}c_{i2} + \cdots + x_{ij}c_{ij} + \cdots \\ & + x_{in}c_{in} + x_{m1}c_{m1} + x_{m2}c_{m2} + \cdots + x_{mj}c_{mj} + \cdots + x_{mn}c_{mn} \end{aligned}$$

وتكتب هذه الصيغة اختصارا كما يلي:

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij}$$

- **الكميات التي يعرضها كل منبع (مصدر انتاج):**

المصدر 1: $x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1j} + \cdots x_{1n} = a_1$

المصدر 2: $x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2j} + \cdots x_{2n} = a_2$

.

.

المصدر i: $x_{i1} + x_{i2} + \cdots + x_{ij} + \cdots x_{in} = a_i$

.

.

المصدر m: $x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mj} + \cdots x_{mn} = a_n$

وتكتب الكميات التي يعرضها كل مصدر اختصارا كما يلي:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i$$

- **الكميات المطلوبة في كل مصب (منطقة تسويق):**

الوجهة 1: $x_{11}+x_{21}+\cdots+x_{i1}+\cdots x_{m1}=b_1$

الوجهة 2: $x_{12}+x_{22}+\cdots+x_{i2}+\cdots x_{m2}=b_2$

.

.

الوجهة j: $x_{1j}+x_{2j}+\cdots+x_{ij}+\cdots x_{mj}=b_i$

.

الوجهة n: $x_{1n}+x_{2n}+\cdots+x_{in}+\cdots x_{mn}=b_n$

وتكتب الكميات التي يطلبها كل وجهة اختصارا كما يلي:

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j$$

كما قلنا سابقا أن الهدف من مسألة النقل هو تقليل التكاليف، وحسب هذا الافتراض فإن الصيغة الرياضية لمسألة النقل تكون كالتالي:

$$\begin{cases} MIN\ (Z)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}c_{ij} \\ {}^{s}/_{c} \\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}=b_j \\ \sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j \end{cases}$$

ملاحظة: تحتوي مسائل النقل على ثلاث حالات رئيسية وهي:

- الكمية المعروضة تساوي الكمية المطلوبة (حالة التوازن)
- الكمية المعروضة أكبر من الكمية المطلوبة.
- الكمية المطلوبة أكبر من الكمية المعروضة.

5-طرق حل مسائل النقل:

توجد عدة طرق معتمدة لإيجاد الحلول لها، وتنقسم عملية الحل إلى مرحلتين أساسيتين:

1.5-إيجاد الحل الأساسي الأولي(Initial Basic Feasible Solution)

تهدف هذه المرحلة إلى إيجاد توزيع مبدئي للمنتج يلبي القيود المفروضة (الإنتاج والطلب) دون النظر إلى التكلفة المثلى، باستخدام إحدى الطرق التالية:

1.1.5-طريقة الزاوية الشمالية الغربية(Northwest Corner method) :

هي طريقة بسيطة تعتمد على البدء بالتخصيص من الخانة الواقعة في الزاوية العلوية اليسرى من جدول النقل (أي الركن الشمالي الغربي)

يتم تخصيص الكمية الممكنة في تلك الخانة حسب الحد الأدنى بين العرض والطلب، ثم يتم تعديل الجدول بإلغاء السطر أو العمود الذي تم استنفاذه، وتكرار العملية إلى أن يتم إتمام التوزيع.
ملاحظة: من عيوب هذه الطريقة أنها لا تأخذ التكاليف بعين الاعتبار، لذلك غالبا ما تعطي حلا بعيدا عن الحل الأمثل.

2.1.5-طريقة أقل تكلفة(Least Cost Method) :

تقوم على اختيار الخلية ذات أقل تكلفة نقل في الجدول، وتخصيص الكمية الممكنة فيها (الحد الأدنى بين العرض والطلب)، ثم تعديل الجدول بنفس طريقة الركن الشمالي الغربي، ويتم تكرار هذه العملية باختيار أقل تكلفة متاحة بعد كل خطوة حتى يتم استكمال التوزيع.

ملاحظة: من عيوبها أنها لا تضمن الحل الأمثل، ولكنها غالبا تعطي نتائج أفضل من طريقة الركن الشمالي الغربي.

3.1.5–طريقة تقريب فوجل(Vogel's Approximation Method – VAM) :

تعد من أكثر الطرق كفاءة لإيجاد حل ابتدائي قريب من الأمثل، تعتمد على حساب فرق التكلفة بين أقل وأقل ثاني تكلفة في كل سطر وعمود، واختيار السطر أو العمود الذي يملك أعلى فرق، ثم يتم التخصيص في الخلية ذات أقل تكلفة في ذلك السطر أو العمود، وتكرر العملية بتحديث الفروق حتى الانتهاء.

ملاحظة: تعتبر أفضل من الطريقتين السابقتين في إيجاد الحل حيث يكون قريبا من الحل الأمثل، ولكنها أكثر تعقيدا من الطرق السابقة.

2.5–تحسين الحل (Optimality Test) :

بعد الحصول على حل ابتدائي، يتم اختبار مدى كفاءته ومقارنته بالحل الأمثل باستخدام:

1.2.5–طريقة التوزيع المعدل (MODI Method) :

تقوم هذه الطريقة على فروض أنU_{i} تعبر عن الأسطر و V_{j} تعبر عن الأعمدة، وتعتمد هذه الطريقة على مرحلتين هما:

المرحلة الأولى: في هذه المرحلة نتعامل مع القيم الداخلة في الحل الأساسي ونحل المعادلات $U_{\text{i}} + \text{V}_{\text{j}} = \text{C}_{\text{ij}}$، ونفترض أن U_{i} لأول معادلة معدوم ثم نجد قيم U_{i}، و قيم V_{j} الداخلة في الحل.

المرحلة الثانية: في هذه المرحلة نتعامل مع القيم الخارجة من الحل الأساسي ونجد القيم الحدية حيث يعبر عنها بالعلاقة التالية: $\boldsymbol{\delta_{ij} = C_{ij} - U_{\text{i}} - \text{V}_{\text{j}}}$

مثال:

تقوم شركة ما بإنتاج مواد غذائية معلبة في ثلاثة مصانع، وتقوم بتوزيعها إلى أربعة مستودعات رئيسية منتشرة في مناطق مختلفة من البلاد .يختلف كل من طاقة إنتاج المصانع وطلب المستودعات، كما تختلف تكلفة النقل لكل وحدة من كل مصنع إلى كل مستودع .تهدف الشركة إلى تقليل التكلفة الإجمالية لعملية النقل، مع ضمان تلبية كامل الطلب في المستودعات دون تجاوز الطاقة الإنتاجية للمصانع.

الطاقة الإنتاجية للمصانع:

المصنع	الطاقة الإنتاجية
مصنع A	120
مصنع B	100
مصنع C	80

الطلب في المستودعات:

المستودع	الطلب
مستودع1	90
مستودع2	70
مستودع3	80
مستودع4	60

تكلفة الشحن لكل وحدة (بالدينار):

	مستودع 1	مستودع 2	مستودع 3	مستودع 4
مصنعA	4	6	8	10
مصنعB	6	4	3	5
مصنعC	9	7	4	2

المطلوب:

1. بين أن هذه المسألة تخضع لمسائل النقل.
2. شكل جدول المسألة.
3. حل هذه المسألة باستخدام الطرق الثلاثة السابقة.
4. اختبر أمثلية الحل باستعمال طريقة التوزيع المعدل.

الحل:

1.تبيان أن المسألة تخضع لمسائل النقل:

- تهدف الشركة إلى ايجاد الكميات الواجب توجيهها من كل مصنع إلى كل مستودع بحيث تكون التكاليف أقل ما يمكن، وعليه يمكن تشكيل دالة الهدف كما يلي:

$$MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}c_{ij}$$

- مجموع الطلب يساوي مجموع العرض:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 120 + 100 + 80 = 300$$

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 90 + 70 + 80 + 60 = 300$$

إذا لدينا الكمية المطلوبة = الكمية المعروضة وهي كميات غير سالبة وعليه من1 و2 نقول أن المسألة تخضع لمسائل النقل.

2.تشكيل جدول مسألة النقل

يمكن تلخيص المسألة في جدول مسألة النقل التالي:

مراكز التسويق / المصنع	المستودع 1	المستودع 2	المستودع 3	المستودع 4	الكميات المعروضة
المصنع A	4	6	8	10	120
المصنع B	6	4	3	5	100
المصنع C	9	7	4	2	80
الكميات المطلوبة	90	70	80	60	300

3.إيجاد الحل الأساسي الأولي .

➢ **كتابة البرنامج الرياضي للمسألة:**

❖ دالة الهدف:

$$MIN\ (Z) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4} x_{ij}c_{ij}$$

❖ دوال العرض:

$$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 120$$
$$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 100$$
$$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 80$$

❖ دوال الطلب:

$$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 90$$
$$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 70$$
$$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 80$$
$$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 60$$

❖ شرط التوازن:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = \sum_{i=1}^{3} a_i = 300$$

❖ شرط عدم السلبية:

$$x_{ij}, c_{ij} \geq 0$$

1.3. إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة الزاوية الشمالية الغربية:

مراكز التسويق / المصنع	المستودع 1	المستودع 2	المستودع 3	المستودع 4	الكميات المعروضة
المصنع A	4 90	6 30	8 0	10 0	120
المصنع B	6 0	4 40	3 60	5 0	100
المصنع C	9 0	7 0	4 20	2 60	80
الكميات المطلوبة	90	70	80	60	300

في هذه الطريقة نقوم بتخصيص الكميات بدءا من الزاوية العلوية اليسرى من الجدول، ثم التقدم أفقيا أو عموديا حسب استنفاد العرض أو الطلب، وتكون عملية التخصيص كالتالي:

- نبدأ من الخانة التي تقابل المصنع A والمستودع 1 (من المصنع A إلى المستودع 1) وهي التي تمثل الزاوية الشمالية الغربية، حيث أن طلب المستودع 1 هو 90 وحدة، وطاقة المصنع A هي 120 وحدة، نقوم بتخصيص 90 وحدة من المصنع A إلى المستودع 1، ويتبقى 30 وحدة فقط في المصنع A ، بينما يعتبر المستودع 1 مغطى بالكامل، وبالتالي نضع القيمة صفر في بقية خانات عمود المستودع 1.
- ننتقل أفقيا إلى الخانة التي تقابل المصنع A والمستودع 2 (من المصنع A إلى المستودع 2)، حيث أن طلب المستودع 2 هو 70 وحدة، فنقوم بتخصيص 30 وحدة المتبقية في المصنع A لهذا المستودع، وبالتالي تنتهي الكمية في المصنع A ونضع القيمة صفر في باقي خانات سطر المصنع A، في حين تبقى 40 وحدة غير مغطاة في المستودع 2.
- ننتقل إلى الخانة التي تقابل المصنع B والمستودع 2 (من المصنع B إلى المستودع 2)، فنقوم بتخصيص 40 وحدة من المصنع B لتغطية الطلب المتبقي في المستودع 2، وبالتالي يعتبر المستودع 2 مغطى بالكامل ونضع القيمة صفر في باقي خانات عمود المستودع 2، ويتبقى 60 وحدة في المصنع B.
- ننتقل إلى الخانة التي تقابل المصنع B والمستودع 3 (من المصنع B إلى المستودع 3)، فنقوم بتخصيص 60 وحدة المتبقية في المصنع B لتغطية جزء من الطلب في المستودع 3، وبالتالي تنتهي الكمية في المصنع B

ونضع القيمة صفر في باقي خانات سطر المصنع B، في حين تبقى 20 وحدة غير مغطاة في المستودع 2.

- ننتقل إلى الخانة التي تقابل المصنع C والمستودع 3 (من المصنع C إلى المستودع 3)، فنقوم بتخصيص 20 وحدة من المصنع C لتغطية الطلب المتبقي في المستودع 3، وبالتالي يعتبر المستودع 3 مغطى بالكامل ونضع القيمة صفر في باقي خانات عمود المستودع 3، ويتبقى 60 وحدة في المصنع C.
- ننتقل إلى الخانة التي تقابل المصنع C والمستودع 4 (من المصنع C إلى المستودع 4)، فنقوم بتخصيص 60 وحدة المتبقية في المصنع C لتغطية الطلب في المستودع 4، وبالتالي يعتبر المستودع 4 مغطى بالكامل، وكذلك تنتهي الكمية المتوفرة في المصنع C.

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لعدد الحلول الممكنة وهو:

$$m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

نحسب قيمة التكلفة الإجمالية للنقل:

$$z = 90 * 4 + 30 * 6 + 40 * 4 + 60 * 3 + 20 * 4 + 60 * 2$$
$$z = 1080$$

2.3. إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة أقل تكلفة:

مراكز التسويق / المصنع	المستودع 1	المستودع 2	المستودع 3	المستودع 4	الكميات المعروضة
المصنع A	4 90	6 30	8 0	10 0	120
المصنع B	6 0	4 20	3 80	5 0	100
المصنع C	9 0	7 20	4 0	2 60	80
الكميات المطلوبة	90	70	80	60	300

- نلاحظ أن أقل تكلفة في الجدول هي 2 وهي تقابل المصنع C والمستودع 4، لذا نقارن ما هو متوفر في المصنع C، وما يحتاجه المستودع 4، ثم نختار أقل الكميتين ونخصصها لهذه للخانة، إذا أصغر كمية هي

60 وحدة نخصصها فيها، أما باقي الخانات في عمود المستودع 4 نضع فيها أصفار لأنه تم تلبية كامل الطلب فيه، في حين تبقى 20 وحدة في المصنع C .

- ثم نبحث عن أقل تكلفة ضمن الخانات المتبقية، وهي الخانة المقابلة للمصنع B والمستودع 3، والتي تكلفتها 3 ونخصص فيها أقل كمية بين العرض والطلب وهي 80، أما باقي الخانات في عمود المستودع 3 نخصص فيها أصفار لأن الكمية المطلوبة من هذا المستودع قد لبيت كاملا ، في حين تبقى 20 وحدة في المصنع B .
- التكلفة الأقل التالية هي 4 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع A والمستودع 1 ، وكذلك في الخانة المقابلة للمصنع B والمستودع 2، في هذه الحالة نختار الخانة التي فيها تخصيص أكبر، وهي الخانة المقابلة للمصنع A والمستودع 1، ونخصص فيها أقل الكميتين بين العرض والطلب وهي 90 وحدة، أما باقي الخانات في عمود المستودع 1 نخصص فيها أصفار لأن الكمية المطلوبة من هذا المستودع قد لبيت كاملا ، في حين تبقى 30 وحدة في المصنع A .
- التكلفة الأقل التالية هي 4 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع B والمستودع 2، نخصص فيها الكمية المتبقية في المصنع B وهي 20 وحدة، أما باقي الخانات في سطر المصنع B نخصص فيها أصفار لأن الكمية المتوفرة في هذا المصنع قد نفدت بالكامل، في حين تبقت 50 وحدة لم تلبى.
- التكلفة الأقل التالية هي 6 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع A والمستودع 2، نخصص فيها الكمية المتبقية في المصنع A وهي 30 وحدة، أما باقي الخانات في سطر المصنع A نخصص فيها أصفار لأن الكمية المتوفرة في هذا المصنع قد نفدت بالكامل، في حين تبقت 20 وحدة لم تلبى.
- التكلفة الأقل التالية هي 7 وتقع في الخانة المقابلة للمصنع C والمستودع 2، نخصص فيها الكمية المتبقية في المصنع C وهي 20 وحدة، وبالتالي الكمية المتوفرة في هذا المصنع قد نفدت بالكامل، وكذلك تم تلبية الطلب في المستودع 2.

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لعدد الحلول الممكنة وهو:

$$\mathrm{m} + \mathrm{n} - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

نحسب قيمة التكلفة الإجمالية للنقل:

$$z = 90 * 4 + 30 * 6 + 20 * 4 + 80 * 3 + 20 * 7 + 60 * 2$$
$$z = 1120$$

3.3. إيجاد الحل الأساسي الأولي بطريقة فوجل التقريبية:

مراكز التسويق / المصنع	المستودع 1	المستودع 2	المستودع 3	المستودع 4	الكميات المعروضة	1	2	3	4	5	6
المصنع A	(4) 90	(6) 30	(8) 0	(10) 0	120	2	2	2	2	0	0
المصنع B	(6) 0	(4) 40	(3) 60	(5) 0	100	1	1	1	2	0	/
المصنع C	(9) 0	(7) 0	(4) 20	(2) 60	80	2	3	/	/	/	/
الكميات المطلوبة	90	70	80	60	300						
1	2	2	1	3							
2	2	2	1	/							
3	2	2	5	/							
4	2	2	/	/							
5	/	2	/	/							
6	/	0	/	/							

لحساب فروقات فوجل، نطرح أقل تكلفة في كل صف أو عمود من ثاني أقل تكلفة فيه، ثم نختار الصف أو العمود ذو الفارق الأعلى (الأكثر خسارة محتملة).

– نقوم أولا بحساب فروقات فوجل، وذلك بطرح أقل تكلفة في كل سطر أو عمود من ثاني أقل تكلفة فيه، وقد كانت الفروقات الأولى الخاصة بالأسطر كالتالي: المصنع A (2)، المصنع B (1)، والمصنع C (2)، أما الأعمدة فكانت فروقاتها: المستودع1 (2)، المستودع2 (2)، المستودع3 (1)، والمستودع4 (3)، وبما أن أعلى فرق يوجد في العمود الرابع (المستودع 4) بقيمة 3، فإن الأولوية تمنح له في التخصيص، وذلك لتفادي تحمل تكاليف أعلى لاحقا، في هذا العمود نجد أن أدنى تكلفة تقع في سطر المصنع C بقيمة 2، لذا نقوم بتخصيص 60 وحدة، لتغطية كامل الطلب في المستودع 4 ، وبالتالي نضع أصفارا في باقي خانات عمود المستودع 4 ، ويتم استبعاده من الخطوات الحسابية اللاحقة عند إعادة حساب الفروقات، في حين تبقى كمية قدرها 20 وحدة في المصنع C .

– ننتقل إلى المرحلة التالية وهي حساب الفروقات الثانية، وقد كانت فروقات الأسطر كالتالي: المصنع A (2)، والمصنع B (1)، والمصنع C (3)، أما الأعمدة فكانت فروقاتها: المستودع1 (2)، المستودع2 (2)، المستودع3 (1)، وبما أن أعلى فرق يوجد في السطر الثالث (المصنع C) بقيمة 3، فإن الأولوية تمنح له في التخصيص، في هذا السطر نجد أن أدنى تكلفة بعد استبعاد عمود المستودع 4 تقع في عمود المستودع 3 بقيمة 4، لذا نقوم بتخصيص باقي الكمية المتاحة في المصنع C وهي 20 وحدة، لتغطية جزء من الطلب في المستودع 3 ، وبهذا يعتبر سطر المصنع C قد تم استنفاده بالكامل وسيتم استبعاده في المراحل اللاحقة، في حين تبقى كمية قدرها 60 وحدة لم يتم تلبيتها في المستودع 3.

– ننتقل إلى المرحلة التالية وهي حساب الفروقات الثالثة، وقد كانت فروقات الأسطر كالتالي: المصنع A (2)، المصنع B (1)، أما الأعمدة فكانت فروقاتها: المستودع1 (2)، المستودع2 (2)، المستودع3 (5)، وبما أن أعلى فرق يوجد في العمود الثالث (المستودع 3) بقيمة 5، فإن الأولوية تمنح له في التخصيص، في هذا العمود نجد أن أدنى تكلفة تقع في سطر المصنع B بقيمة 3، لذا نقوم بتخصيص 60 وحدة من المصنع B، لتغطية الطلب المتبقي في المستودع 3 ، وبالتالي نضع أصفارا في باقي خانات عمود المستودع 3، ويتم استبعاده من الخطوات الحسابية اللاحقة عند إعادة حساب الفروقات، في حين تبقى كمية قدرها 40 وحدة في المصنع B .

– ننتقل إلى المرحلة التالية وهي حساب الفروقات الرابعة، وقد كانت فروقات الأسطر كالتالي: المصنع A (2)، المصنع B (2)، أما الأعمدة فكانت فروقاتها: المستودع1 (2)، المستودع2 (2)، وبما أن كل الفروقات متساوية بقيمة 2 ، فإن الأولوية في التخصيص تمنح للسطر أو العمود الذي يحتوي على أقل تكلفة، واذا كانت التكلفة أيضا متساوية تمنح للسطر أو العمود الذي يضمن أكبر تخصيص، وهنا نختار العمود الأول (المستودع 1)، في هذا العمود نجد أن أدنى تكلفة تقع في سطر المصنع A بقيمة 4، لذا نقوم بتخصيص 90 وحدة من المصنع A، لتغطية كامل الطلب في المستودع 1 ، وبالتالي نضع أصفارا في باقي خانات عمود المستودع 1، ويتم استبعاده من الخطوات الحسابية اللاحقة عند إعادة حساب الفروقات، في حين تبقى كمية قدرها 30 وحدة في المصنع A .

– ننتقل إلى المرحلة التالية وهي حساب الفروقات الخامسة، وقد كانت فروقات الأسطر كالتالي: المصنع A (0)، المصنع B (0)، أما الأعمدة فكانت فروقاتها: المستودع2 (2)، وبما أن أعلى فرق يوجد في العمود الثاني (المستودع 2) بقيمة 2، فإن الأولوية تمنح له في التخصيص، في هذا العمود نجد أن أدنى تكلفة تقع في

سطر المصنع B بقيمة 4، لذا نقوم بتخصيص الكمية المتبقية في المصنع B وهي 40 وحدة ، لتغطية جزء من الطلب في المستودع 2 ، ويتم استبعاد سطر المصنع B من الخطوات الحسابية اللاحقة عند إعادة حساب الفروقات، في حين تبقى كمية قدرها 30 وحدة لم يتم تلبيتها في المستودع 2 .

– تبقى خانة واحدة لم يتم التخصيص فيها، وهي الخانة المقابلة للمصنع A والمستودع 2، لذا نقوم بتخصيص الكمية المتبقية في المصنع A وهي 30 وحدة لتلبية باقي الطلب في المستودع 2 ، وبهذا نكون قد قمنا بتخصيص جميع الخانات.

نلاحظ أن عدد الخانات المشغولة مساو لعدد الحلول الممكنة وهو:

$$\mathrm{m} + \mathrm{n} - 1 = 3 + 4 - 1 = 6$$

نحسب قيمة التكلفة الإجمالية للنقل:

$$z = 90 * 4 + 30 * 6 + 40 * 4 + 60 * 3 + 20 * 4 + 60 * 2$$
$$z = 1080$$

المراجع:

1-إبراهيم موسى عبد الفتاح، مقدمة في بحوث العمليات (نماذج وتطبيقات)، المكتبة العلمية الزقازيق، مصر، 2006.

2-أبو القاسم مسعود الشيخ، بحوث العمليات، الطبعة الثاني، المجموعة العربية للتدريب والنشر، مصر، 2009.

3-عبد المنعم فليح وآخرون، بحوث العمليات في المحاسبة، الطبعة الثانية، جهاز الكتب للنشر، مصر، 2018.

4-وليد خالد البلك، استخدام الأساليب المية في حل المشاكل الإدارية، القاهرة، مصر ، 2016.

5-اليمين فالته، بحوث العمليات، إيتراك للنشر و التوزيع، الجزء الأول، الجزائر، 2006.

6-دلال صادق الجواد، حيد ناصر الفتال، بحوث العمليات، دار اليازوري للنشر والتوزيع، الأردن، 2008.

7-نصر الدين بن مسعود، بحوث العمليات: محاضرات وتطبيقات، مطبوعة بيداغوجية، جامعة عين تيموشنت، الجزائر، 2020-2021.

8- محمد كعبور ، بحوث العمليات: نماذج وتطبيقات، طرابلس، ليبيا، 2004.

9- سهيلة عبد الله سعيد ، الأسالسب الكمية و بحوث العمليات ، دار الحامد- عمان-،2007.

10- محمد موفق الكبيسي ، بحوث العمليات : تطبيقات و خوارزميلت، دار الحامد –عمان-، 1999.

11-ERIC JACKET-LAGREZE , programmation linéaire mise en œuvre informatique ,ED (Economica) ,Paris ;1998

12-Rama. m, operation research, second Edition, Published by New Age International (P) Ltd.,2007.

13-Azouliat Dassonville, Recherche opérationnelle de gestion , édition presse universitaire de France , France, 1983.