



République algérienne démocratique et
populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj de
BOUIRA
Faculté des Sciences Exactes
Département de mathématiques



Mémoire de Master

En mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Thème

Approche hiérarchisée du contrôle optimal :
modèle leader-follower

Réalisé par :

- NASRY CHAIMA

Devant le jury composé de :

Nom	Établissement	Grade	Qualité
Birouche Madjid	Université Akli Mohand Oulhadj	MAA	Président
Ouidja Daya	Université Akli Mohand Oulhadj	MCB	Examinatrice
Demmouche Nacer	Université Akli Mohand Oulhadj	MCB	Examineur
Hamid Karim	Université Akli Mohand Oulhadj	MCB	Promoteur

Année académique 2025 / 2026

Dédicace

*Par quelle porte d'éloge pourrions-nous entrer, alors que toutes les langues
du monde s'avèrent impuissantes à leur exprimer notre gratitude...
À ceux qui ont balisé mon chemin par leurs prières et leur bienveillance, et
qui en ont illuminé les ténèbres par leur amour et leur générosité...
À mes chers parents, avec toute ma gratitude et mon plus profond
respect.*

*À mon soutien, ma force et mon refuge, à ceux qui m'ont vêtue du manteau
du savoir et ont semé en moi la passion de la science, à ceux qui m'épaulent
dans les moindres détails et à chaque pas que je franchis...
À mes deux chères sœurs : Soumia et Nadia.*

*À nos chères petites étoiles, les oiseaux de notre bonheur : Rima,
Abdelghafour, Abdelmoumen, nos précieux jumeaux Maram et
Assil, ainsi que Djawad et Mouiaz...
Et à notre petite princesse : Misk.*

*À tous ceux qui m'ont souhaité la réussite, m'ont soutenue ne serait-ce que
par une bonne parole, et ont été de formidables compagnons à bord de mon
navire...*

*À tous ceux qui m'ont enseigné ne serait-ce qu'une lettre, et ont laissé une
empreinte honorable tout au long de ce parcours académique.*

CHAIMA

Remerciements

Avant tout, je remercie Dieu le Tout-Puissant de m'avoir donné la force, la patience et le courage nécessaires pour accomplir ce modeste travail.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude et mes sincères remerciements à mon Promoteur de mémoire, **Monsieur Karim Hamid**, pour avoir accepté de diriger ce travail. Je le remercie chaleureusement pour sa disponibilité constante, ses précieux conseils, ses orientations judicieuses et sa grande patience tout au long de la réalisation de ce mémoire.

Mes vifs remerciements s'adressent également aux membres du jury qui ont honoré ce travail en acceptant d'examiner et d'évaluer ce mémoire.

Enfin, j'adresse mes remerciements les plus chaleureux à tous mes enseignants depuis mes premières années d'études, ainsi qu'à tous ceux qui m'ont soutenue de près ou de loin pour mener à bien ce parcours universitaire.

Table des matières

Introduction Générale	7
1 Concepts et outils préliminaires	9
1.1 Aperçu historique du contrôle optimal et des problèmes bi-niveaux	9
1.2 Définition et formulation du problème de contrôle optimal . .	11
1.2.1 Introduction à la théorie du contrôle	11
1.2.2 Systèmes dynamiques contrôlés	12
1.2.3 Commandes admissibles	13
1.2.4 Fonctionnels de coût et critères de performance	14
1.2.5 Position du problème du contrôle optimal	15
1.3 Le problème de contrôle optimal linéaire	16
1.3.1 Formulation du problème de contrôle optimal linéaire .	16
1.3.2 Commandabilité	17
1.3.3 Le critère de Kalman	18
1.4 Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)	22
1.5 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)	23
1.6 Cadre théorique du modèle de Stackelberg	24
1.6.1 Présentation du modèle de Stackelberg et définition du cadre bi-niveaux	24
1.7 Distinction entre problèmes statiques et dynamiques	27
2 Contrôle optimal bi-niveaux	28
2.1 Éléments de l'analyse convexe	28
2.1.1 Topologie des ensembles convexes	28
2.1.2 Analyse fonctionnelle des applications convexes	31
2.2 Éléments d'analyse non lisse	32
2.2.1 Fonctions lipschitziennes et gradients généralisés	32
2.2.2 Cônes tangents et cônes normaux de Clarke	35
2.3 Problème du contrôle optimal bi-niveaux	36
2.3.1 Formulation dynamique du problème bi-niveaux	36

2.3.2	Définition du problème du follower (niveau inférieur)	36
2.3.3	Définition du problème du leader (niveau supérieur)	37
2.3.4	Formulation du problème de contrôle optimal bi-niveaux	37
2.4	Étude du problème et conditions nécessaires d'optimalité	38
2.4.1	Hypothèses de régularité et compacité	39
2.4.2	Régularité de la fonction valeur du niveau inférieur	39
2.4.3	Difficultés théoriques intrinsèques et non-régularité du PCOB	42
2.4.4	Interprétation en théorie des jeux différentiels	43
3	Exemple d'application : Régulation bio-économique de la pêche	46
3.1	Formulation cinétique du système dynamique global	46
3.2	Le problème de décision du follower et la formulation par fonction valeur	47
3.3	Le problème global du leader (L'État côtier)	48
3.4	Application explicite des conditions d'optimalité non lisses de Clarke	48
3.4.1	Dérivation analytique de l'équilibre stationnaire	49
3.5	Analyse de sensibilité et interprétation structurelle	50
	Conclusion et Perspectives	51

Table des figures

1.1	Ensemble des points accessibles à l'instant T [20]	14
1.2	Représentation des trajectoires possibles entr l'état initial x_0 et l'état final $x(T)$ [20]	16
2.1	Ensembles convexe et non-convexe	29

Liste des tableaux

1.1	Distinction entre problèmes statiques et dynamiques	27
2.1	Comparaison structurelle entre l'Équilibre de Nash et l'Équilibre de Stackelberg	45

Introduction Générale

Le contrôle optimal constitue aujourd'hui une branche essentielle des mathématiques appliquées. Il s'intéresse à la manière de piloter l'évolution d'un système dynamique afin d'atteindre un objectif précis, tout en respectant certaines contraintes. Depuis les travaux fondateurs de Bellman [3] sur la programmation dynamique et l'introduction du Principe du Maximum de Pontryagin [14], cette théorie s'est développée de manière remarquable. Elle constitue désormais un outil fondamental pour la modélisation et la résolution de nombreux problèmes complexes issus des sciences de l'ingénieur, de l'économie, de la biologie et de la gestion des ressources naturelles.

Dans plusieurs situations réelles, la décision ne dépend pas d'un seul acteur unique cherchant à optimiser son propre critère. Elle résulte plutôt d'une interaction séquentielle entre plusieurs décideurs ayant des objectifs différents, parfois même opposés. Lorsqu'une hiérarchie stricte existe entre ces décideurs, les méthodes classiques du contrôle optimal monocritère ne suffisent plus. C'est dans ce cadre d'optimisation hiérarchique que s'inscrit le modèle de Stackelberg [18], qui décrit une situation où un premier agent, appelé Leader (niveau supérieur), prend ses décisions en anticipant rationnellement la réaction d'un second agent, appelé Follower (niveau inférieur). L'extension de ce concept au cadre dynamique a conduit naturellement aux problèmes de contrôle optimal bi-niveaux.

L'étude de ces problèmes est particulièrement intéressante, mais elle reste délicate. En effet, la décision du niveau supérieur dépend directement de l'ensemble des réponses optimales du niveau inférieur, ce qui crée une forte interdépendance et un couplage mathématique complexe entre les deux niveaux. La complexité majeure et la difficulté géométrique de ces problèmes résident dans leur nature intrinsèquement non convexe et souvent non lisse. La fonction de réaction ou la fonction valeur du Follower présentant fréquemment des points de non-régularité, l'application des outils de dérivation classiques devient insuffisante. Pour traiter rigoureusement ce type de problème et surmonter ces obstacles topologiques, il devient nécessaire de recourir à des outils géométriques et analytiques plus avancés, notamment l'analyse convexe,

l'analyse non lisse (en particulier le gradient généralisé et les cônes normaux de Clarke [7]), l'étude des fonctions valeurs et les conditions nécessaires d'optimalité [21].

L'objectif de ce mémoire est d'étudier l'approche hiérarchisée du contrôle optimal dans le cadre leader-follower, de présenter les fondements mathématiques nécessaires à sa formulation et à sa régularisation, puis de montrer son intérêt pratique à travers une application concrète en bio-économie, plus précisément dans la régulation de la pêche. Ce choix est motivé par l'importance économique et écologique du sujet et par la richesse mathématique du modèle, qui permet d'analyser finement l'interaction entre optimisation, hiérarchie et dynamique des populations [6].

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

- **Le premier chapitre** est consacré aux concepts et outils préliminaires du contrôle optimal. Nous y rappelons les fondements des systèmes dynamiques contrôlés, le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP), l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) ainsi que les bases de la programmation mathématique et du modèle classique de Stackelberg.
- **Le deuxième chapitre** est consacré au cœur théorique du contrôle optimal bi-niveaux. Après avoir formulé le problème, nous y développons les outils indispensables de l'analyse non lisse et de l'analyse convexe, avant d'exposer les conditions nécessaires d'optimalité sous-différentielles.
- **Le troisième chapitre** propose une application pratique à la régulation bio-économique de la pêche. À travers ce modèle, nous mettons en évidence l'interprétation des résultats théoriques obtenus et analysons l'impact des stratégies de régulation sur l'équilibre de la ressource.

Chapitre 1

Concepts et outils préliminaires

Ce chapitre présente les rappels fondamentaux sur les systèmes dynamiques, le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP), l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB), qui sont nécessaires pour introduire le contrôle optimal classique.

1.1 Aperçu historique du contrôle optimal et des problèmes bi-niveaux

Le domaine du contrôle optimal s'est construit progressivement au cours du XX^e siècle à travers plusieurs contributions majeures. Parmi les premières avancées importantes, on peut citer les travaux de Richard Bellman qui introduit, dans les années 1950, la programmation dynamique dans son ouvrage *Dynamic Programming* (1957) [3]. Cette approche repose sur le principe d'optimalité, selon lequel un problème complexe peut être décomposé en une suite de sous-problèmes plus simples, résolus de manière récursive.

Dans le même contexte, Lev Pontryagin et ses collaborateurs proposent en 1956 le Principe du Maximum, publié par la suite dans *The Mathematical Theory of Optimal Processes* (1962) [14]. Ce principe fournit des conditions nécessaires d'optimalité pour les systèmes dynamiques continus, en s'appuyant notamment sur l'introduction de l'Hamiltonien, qui joue un rôle central dans la caractérisation des trajectoires optimales.

Par ailleurs, l'idée de structures hiérarchiques n'est pas récente. Elle apparaît dès 1934 avec les travaux de Heinrich von Stackelberg dans *Marktform und Gleichgewicht* [18, 19]. Dans ce modèle, un décideur principal (leader) prend ses décisions en tenant compte de la réaction d'un second agent (follower). Ce cadre, bien que statique, constitue une base importante pour la formulation des problèmes bi-niveaux.

À partir des années 1970, plusieurs travaux ont cherché à relier ces différentes approches. En particulier, Tamer Başar et Geert Jan Olsder proposent, dans *Dynamic Noncooperative Game Theory* (1999) [1], une extension du modèle de Stackelberg au cas dynamique, en intégrant les outils du contrôle optimal. Cette contribution permet d'étudier des systèmes évolutifs tout en conservant une structure hiérarchique.

Enfin, J.J. Ye établit en 1995, dans *SIAM Journal on Control and Optimization*, des conditions nécessaires d'optimalité pour les problèmes bi-niveaux dynamiques [21]. Ces résultats, qui prolongent le principe du maximum, constituent aujourd'hui une référence importante dans ce domaine.

Ce parcours historique met en évidence la convergence progressive entre le contrôle optimal et les structures hiérarchiques. Il permet également d'introduire les outils mathématiques qui seront développés dans la suite de ce chapitre.

1.2 Définition et formulation du problème de contrôle optimal

1.2.1 Introduction à la théorie du contrôle

La théorie du contrôle (ou commande) étudie les propriétés des systèmes commandés, c'est-à-dire des systèmes dynamiques sur lesquels on peut agir au moyen d'une commande. Son objectif consiste à orienter l'évolution du système depuis un état initial vers un état final désiré, tout en respectant, lorsque cela est nécessaire, certaines contraintes et certains critères de performance. Historiquement le contrôle optimal est le prolongement du calcul variationnel.

Les systèmes considérés dans ce domaine sont variés : systèmes différentiels, systèmes discrets, systèmes à retard, entre autres, et leurs applications se rencontrent dans des domaines aussi divers(mécanique, électronique , biologique , économique...). Selon le contexte, l'objectif peut être soit de stabiliser le système afin de le rendre robuste face à certaines perturbations, soit de déterminer une commande optimale pour minimiser ou maximiser un critère donné [11].

Structure du problème

La formulation d'un problème de contrôle optimal exige la définition de trois éléments fondamentaux :

- **Modèle dynamique** : Généralement décrit par $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$.
- **Contraintes** : Limites sur l'état $x(t) \in X$ et la commande $u(t) \in U$.
- **Critère de performance** : La fonctionnelle $J(u)$ à minimiser.

1.2.2 Systèmes dynamiques contrôlés

On considère un système dont l'état à l'instant t est noté par $x(t)$, avec $x(t) \in \mathbb{R}^n$. Cet état regroupe l'ensemble des informations nécessaires pour décrire la situation du système à chaque instant. Son évolution dépend de la commande appliquée ainsi que du temps, et écrit sous l'équation différentielle suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad \text{p.p. sur } [0, T], \quad x(0) = x_0 \quad (1.1)$$

Dans cette formulation, trois composantes fondamentales interagissent pour structurer la dynamique :

- **Le vecteur d'état $x(t)$** : il représente la situation courante du système. Mathématiquement, nous supposons que $x(\cdot)$ appartient à l'espace des fonctions absolument continues $AC([0, T], \mathbb{R}^n)$, garantissant ainsi sa dérivabilité presque partout sur l'intervalle d'étude.
- **Le vecteur de commande $u(t)$** : il correspond au Moyen de contrôle exercé pour infléchir la trajectoire du système. Pour assurer la faisabilité du problème, nous restreignons le choix de $u(t)$ à un ensemble de valeurs admissibles $U \subset \mathbb{R}^m$, dans l'espace des fonctions mesurables et bornées $L^\infty([0, T], U)$ (c'est-à-dire l'ensemble des fonctions bornées et mesurables à valeurs dans U).
- **La fonction de dynamique f** : souvent qualifiée de champ vectoriel, elle traduit les lois internes Qui dirigent le système (mécaniques, économiques ou biologiques).

Pour garantir que le modèle soit "bien posé" au sens de Hadamard — assurant ainsi l'existence et l'unicité de la trajectoire pour une commande donnée — on impose les hypothèses classiques de **Cauchy-Lipschitz** :

1. **Continuité** : f doit être continue par rapport à ses arguments pour éviter les discontinuités non physiques dans l'évolution de l'état.
2. **Lipschitzianité** : f doit être localement lipschitzienne par rapport à l'état x , condition *sine qua non* pour garantir l'unicité du mouvement.
3. **Croissance linéaire** : cette condition est indispensable pour assurer la "non-explosion" de la solution en temps fini, permettant au système de demeurer borné sur tout l'horizon $[0, T]$.

Les systèmes dynamiques contrôlés apparaissent dans de nombreux domaines d'application, tels que les modèles de croissance économique, la gestion des stocks ou encore les processus biologiques, constituant ainsi le socle sur lequel nous bâtirons les conditions d'optimalité ultérieures.

1.2.3 Commandes admissibles

la commande $u(\cdot)$ n'est pas considérée comme une valeur constante, mais comme une fonction variant dans le temps et conditionnant l'évolution de l'état $x(\cdot)$. Pour que cette commande soit mathématiquement et physiquement admissible, elle doit appartenir à un espace spécifique, noté $\mathcal{U}_{ad}$.

Espace de contrainte

Nous supposons l'existence d'un ensemble non vide $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, représentant l'ensemble des valeurs que le contrôle peut prendre à chaque instant $t \in [0, T]$. Dans les contextes académiques avancés, on suppose généralement que Ω est un ensemble compact et convexe. Cette hypothèse est mathématiquement utile pour garantir l'existence de solutions au problème et prévenir la divergence des trajectoires.

Définition 1.1.

Une fonction $u : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m$ est dite une commande admissible si elle satisfait aux conditions techniques suivantes :

1. **Mesurabilité** : la fonction u doit être mesurable au sens de Lebesgue sur l'intervalle $[0, T]$, condition nécessaire pour permettre son intégration et son analyse mathématique.
2. **Régularité** : on suppose que le contrôle appartient à l'espace des fonctions essentiellement bornées, soit $u \in L^\infty([0, T], \Omega)$. Cela implique que les valeurs $u(t)$ demeurent dans l'ensemble des contraintes Ω pour presque tout $t \in [0, T]$.
3. **Existence de trajectoire** : pour un état initial x_0 donné, la commande u doit garantir l'existence d'une solution unique $x_u(\cdot)$ pour l'équation différentielle du système :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.2)$$

Cette trajectoire x_u doit être absolument continue et bien définie sur tout l'horizon de l'étude.

Ensemble accessible

Le concept de contrôle admissible est étroitement lié à celui d'ensemble accessible, qui regroupe tous les états que le système peut atteindre à l'instant final T en utilisant l'ensemble des contrôles admissibles :

$$\mathcal{A}(T, x_0) = \{x_u(T) \mid u \in \mathcal{U}_{ad}\} \quad (1.3)$$

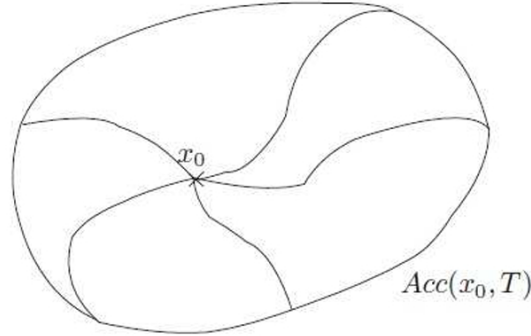


FIGURE 1.1 – Ensemble des points accessibles à l'instant T [20]

Cette collection (voir Figure 1.1) constitue la pierre angulaire de l'étude de la commandabilité et de l'accessibilité du système, et elle prépare le terrain théorique pour l'établissement des conditions nécessaires d'optimalité via le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP).

1.2.4 Fonctionnels de coût et critères de performance

La fonction de coût, dans les problèmes de contrôle optimal, constitue le critère mathématique permettant d'évaluer la performance des commandes admissibles $u \in \mathcal{U}_{ad}$ selon leur capacité à atteindre un objectif spécifique.

Techniquement, nous définissons cette fonction comme une application $J : \mathcal{U}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ c'est-à-dire associe à chaque commande admissible une valeur réelle représentant le coût .dont l'enjeu consiste à déterminer la commande optimale u^* minimisant (ou maximisant) cette application sous contraintes dynamiques.

Formulation intégrative : la forme de Bolza

La forme de Bolza est largement considérée comme l'une des formulations les plus complètes dans la littérature. Elle combine la performance cumulative du système avec l'état final souhaité. Mathématiquement, (ce problème s'appelle aussi problème de Mayer-Lagrange), donné par :

$$J(u) = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T)) \quad (1.4)$$

Cette fonction se décompose en deux éléments fondamentaux déterminant le comportement du système :

- **Terme de Lagrange :** Lorsque l'on a dans l'expression de la fonctionnelle J , $\Phi \equiv 0$, on parlera d'un problème de Lagrange donné par :

$$J(u, T) = \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.5)$$

il exprime le coût instantané associé à la consommation de ressources ou d'énergie sur l'intervalle $[0, T]$. Cette fonction est généralement supposée continue et différentiable par rapport aux variables (x, u) afin d'assurer la validité des conditions d'optimalité (Le temps initial et le temps final peuvent être considéré comme fixes ou libres dans le problème d'optimisation).

- **Terme de Mayer :** Lorsqu'on a dans l'expression de la fonctionnelle J , $L \equiv 0$, on parlera d'un problème de Mayer, donné par :

$$J(u, T) = \Phi(T, x(T)) \quad (1.6)$$

il mesure l'écart entre l'état final du système et l'objectif visé au terme de l'horizon temporel T . Dans les problèmes bi-niveaux, ce terme est déterminant pour évaluer la réponse du suiveur aux décisions du leader.

On suppose que $\Phi(T, x(T))$ et ses dérivées partielles par rapport à x existent et sont continues.

Fonction de coût dans le contrôle bi-niveaux

Dans les problèmes de contrôle bi-niveaux associés au modèle de Stackelberg, une complexité supplémentaire apparaît du fait de l'interdépendance des fonctions de coût.

Le leader cherche à minimiser sa fonction J_1 , qui dépend à la fois de la trajectoire x , de sa propre commande u et de la réponse v du suiveur.

Parallèlement, le suiveur résout son propre problème de minimisation de J_2 en réponse à la stratégie imposée par le leader.

Cette formulation mathématique ne sert pas uniquement à caractériser le problème ; elle constitue également la base de construction de l'Hamiltonien que nous traiterons dans le chapitre suivant. À ce stade, la minimisation de la fonction J est transformée en un problème de maximum instantané introduit par le biais de variables auxiliaires, appelées variables adjointes.

1.2.5 Position du problème du contrôle optimal

La formulation mathématique d'un problème de contrôle optimal est donnée par le système suivant :

$$\min_{u \in \mathcal{U}} J(u, T) = \Phi(T, x(T)) + \int_0^T L(t, x(t), u(t)) dt \quad (1.7)$$

Sous les contraintes :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)) \end{cases} \quad (1.8)$$

$$\begin{cases} x(0) = x_0 \in M_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

$$\begin{cases} x(T) = x_f \in M_1 \end{cases} \quad (1.10)$$

$$\begin{cases} u(t) \in U, \quad \forall t \in [0, T] \end{cases} \quad (1.11)$$

Où :

- $J(u, T)$ est le critère à optimiser (fonctionnelle de Bolza).
- $f : U \times V \times T \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^1 . L'équation (1.8) est appelée l'état contrôlé ou la trajectoire du système.
- x_0 et x_f sont respectivement les positions initiale et finale du système, où M_0 et M_1 sont deux variétés de $\mathbb{R}^n$.
- $\mathcal{U}$ est l'ensemble des applications mesurables et localement bornées sur $[0, T]$ à valeurs dans l'ensemble non vide $U \subset \mathbb{R}^m$.



FIGURE 1.2 – Représentation des trajectoires possibles entre l'état initial x_0 et l'état final $x(T)$ [20]

1.3 Le problème de contrôle optimal linéaire

1.3.1 Formulation du problème de contrôle optimal linéaire

Dans la classe des commandes constantes par morceaux $\mathcal{U} = \{u(t), t \in T = [0, T]\}$, considérons le problème de contrôle optimal linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(u(t)) = c^T x(T) + \int_{t_0}^T f_0(x(t), u(t), t) dt \longrightarrow \max_{u \in \mathcal{U}} \quad (1.12) \\ \dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.13) \\ Hx(T) = g \quad (1.14) \\ |u(t)| \leq 1, \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.15) \end{array} \right.$$

Où les différents composants et paramètres du système sont définis comme suit :

- $J(u)$ est le critère de qualité (la fonction objectif).
- $x(t) = (x_j)_{j \in J} \in \mathbb{R}^n$ est un n -vecteur représentant la position (l'état) du système à l'instant $t \in [0, T]$.
- A est une matrice de dimension $n \times n$ qui caractérise la structure interne et la dynamique du système.
- b est un n -vecteur donné d'entrée.
- H est une matrice de dimension $m \times n$ caractérisant les contraintes sur l'état final, telle que $\text{rang}(H) = m \leq n$.
- g est un m -vecteur qui représente la sortie du signal (ou la cible) à l'instant terminal t_f .
- $u(t)$ est une fonction de commande (le contrôle) appartenant à l'ensemble des commandes admissibles.
- c est le n -vecteur des coûts associés à l'état final.
- $I = \{1, \dots, m\}$ et $J = \{1, \dots, n\}$ représentent les ensembles d'indices respectifs pour les dimensions du système.
- x_0 désigne la position initiale (l'état initial) du système à l'instant t_0 .

1.3.2 Commandabilité

Avant d'aborder la résolution de tout problème de contrôle, on s'intéresse à l'existence des solutions à l'aide des notions de commandabilité ou de contrôlabilité. Celle-ci consiste à faire passer le système d'un état initial x_0 à un état final x_1 prescrit en un temps fini. Une fois ce problème résolu, on peut chercher une commande permettant ce transfert tout en minimisant un critère de performance.

Définition 1.2 (Systèmes non autonomes et autonomes).

Un système dynamique linéaire défini par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t) + B(t)u(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.16)$$

est dit **non autonome**.

Le système est dit **autonome** si les matrices ne dépendent plus du temps, c'est-à-dire si $A(t) = A$ et $B(t) = B$ sont des matrices constantes :

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (1.17)$$

Où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$.

Définition 1.3 (Commandabilité).

Le système autonome $\dot{x} = Ax + Bu$, où l'état $x \in \mathbb{R}^n$, la commande (l'entrée) $u \in \mathbb{R}^m$, et où les matrices A et B sont constantes, est dit **commandable** si et seulement si , pour tous les états $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$, il existe une commande mesurable et bornée telle que la trajectoire associée relie x_0 à x_1 en un temps fini T .

1.3.3 Le critère de Kalman

Il existe une caractérisation algébrique de la contrôlabilité d'un système linéaire due à Kalman, en général, facilement applicable. Soient A et B deux matrices constantes sur $[t_0, t_f]$ et on note :

$$\mathcal{C} = (B, AB, \dots, A^{n-1}B) \in \mathcal{M}_{n, nm}(\mathbb{R}) \quad (1.18)$$

la matrice dont les colonnes sont constituées par celles de $B, \dots, A^{n-1}B$.

Théorème 1.1 (Critère de Kalman [20]).

Le système autonome $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + r(t)$ est commandable en temps t_f (quelconque) si et seulement si la matrice de commandabilité de Kalman $\mathcal{C}$ est de rang $n = \dim(x)$, on écrit :

$$\text{rang } \mathcal{C} = n \quad (1.19)$$

Remarque 1.1. Le vecteur $r(t) \in \mathbb{R}^n$ représente un terme source ou une perturbation extérieure exogène qui agit sur la dynamique du système (par exemple, des forces environnementales). Une propriété remarquable du critère de Kalman est que la présence de ce terme $r(t)$ n'affecte pas la commandabilité du système : le système reste contrôlable si et seulement si $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$, indépendamment de la nature de cette perturbation.

L'essentiel de la preuve est contenu dans le lemme suivant.

Lemme 1.1. [13] La matrice $\mathcal{C}$ est de rang n si et seulement si l'application linéaire :

$$\begin{aligned}\Phi : L^\infty([0, T], \mathbb{R}^m) &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ u &\longmapsto \int_0^T e^{(T-t)A} B u(t) dt\end{aligned}$$

est surjective.

Remarque 1.2. Géométriquement, le fait que Φ soit surjective signifie $\text{Im}(\Phi) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que tout état cible $x_1 \in \mathbb{R}^n$ est atteignable par une commande admissible. D'après le lemme précédent, cela équivaut à $\text{rang}(\mathcal{C}) = n$ et caractérise la contrôlabilité complète du système linéaire autonome.

Preuve (Preuve du lemme). Nous procédons par double implication :

- **Sens direct :** Supposons, par l'absurde, que $\text{rang}(\mathcal{C}) < n$, et montrons que Φ n'est pas surjective.

L'application $\mathcal{C}$ étant non surjective, il existe un vecteur $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, que l'on supposera être un vecteur ligne, tel que $\psi \mathcal{C} = 0$. Par conséquent :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0. \quad (1.20)$$

En vertu du théorème d'Hamilton-Cayley, la matrice A annule son polynôme caractéristique, ainsi il existe des coefficients réels $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$ tels que :

$$A^n = a_0 I + a_1 A + \dots + a_{n-1} A^{n-1}. \quad (1.21)$$

On déduit par récurrence immédiate que pour tout entier k :

$$\psi A^k B = 0 \quad (1.22)$$

et donc, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\psi e^{tA} B = 0. \quad (1.23)$$

Par conséquent pour tout contrôle u on a :

$$\int_0^T \psi e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0, \quad (1.24)$$

i.e. $\psi \Phi(u) = 0$, ce qui montre que Φ n'est pas surjective.

- **Sens réciproque :** Si Φ n'est pas surjective, alors il existe un vecteur ligne $\psi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que pour tout contrôle u on ait :

$$\int_0^T \psi e^{(T-t)A} B u(t) dt = 0. \quad (1.25)$$

Ceci implique, pour tout $t \in [0, T]$:

$$\psi e^{(T-t)A} B = 0. \quad (1.26)$$

En $t = T$ on obtient $\psi B = 0$. Ensuite, en dérivant par rapport à t , puis en prenant $t = T$, on obtient $\psi AB = 0$. Ainsi par dérivations successives on obtient finalement :

$$\psi B = \psi AB = \dots = \psi A^{n-1} B = 0, \quad (1.27)$$

donc $\psi \mathcal{C} = 0$, et donc $\text{rang}(\mathcal{C}) < n$.

Ce lemme permet maintenant de montrer facilement le théorème.

Preuve (Preuve du théorème).

- **Sens direct** : Si la matrice $\mathcal{C}$ est de rang n , alors d'après le lemme précédent l'application Φ est surjective, i.e. $\Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n$. Or pour tout contrôle u , l'extrémité au temps t_f de la trajectoire associée à u est :

$$x(t_f) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} (Bu(t) + r(t)) dt \quad (1.28)$$

donc l'ensemble accessible en temps t_f depuis un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est :

$$\text{Acc}(T, x_0) = e^{TA} x_0 + \int_0^T e^{(T-t)A} r(t) dt + \Phi(L^\infty) = \mathbb{R}^n, \quad (1.29)$$

ce qui valide la propriété de contrôlabilité complète du système

- **Sens réciproque** : Si le système est contrôlable, alors il est en particulier contrôlable en un point x_0 défini par :

$$x_0 = -e^{-TA} \int_0^T e^{(T-t)A} r(t) dt. \quad (1.30)$$

Or en ce point l'ensemble accessible en temps t_f s'écrit :

$$\text{Acc}(T, x_0) = \Phi(L^\infty), \quad (1.31)$$

et le système étant contrôlable cet ensemble est égal à $\mathbb{R}^n$, ce qui prouve que Φ est surjective, et donc d'après le lemme, la matrice $\mathcal{C}$ est de rang n .

Remarque 1.3. Si $\text{rang}(B) = j$ alors la matrice de commandabilité peut être remplacée, dans l'énoncé du théorème, par :

$$\text{rang}(B, AB, \dots, A^{n-j}B) = n. \quad (1.32)$$

Remarque 1.4. La condition de Kalman ne dépend ni de t_f ni de x_0 . Autrement dit, si un système linéaire autonome est contrôlable en temps t_f depuis x_0 alors il est contrôlable en tous temps depuis tout point.

Exemple 1.1. Considérons le système linéaire défini par :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \quad (1.33)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.34)$$

Ici, $n = 2$ et $m = 2$. La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C}(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 4}. \quad (1.35)$$

Comme $B = I_2$, on a $AB = A$, donc :

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}. \quad (1.36)$$

Les deux premières colonnes forment I_2 et sont donc linéairement indépendantes. Ainsi, $\text{rang}(\mathcal{C}(A, B)) = 2 = n$, ce qui implique que le système est entièrement commandable.

Exemple 1.2. Considérons maintenant un système mono-variable dépendant d'un paramètre réel β :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1.37)$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \beta & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (1.38)$$

Ici, $n = 2$ et $m = 1$. La matrice de commandabilité est :

$$\mathcal{C}(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (1.39)$$

On calcule :

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ \beta & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \beta - 3 \end{bmatrix}, \quad (1.40)$$

d'où

$$\mathcal{C}(A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \beta - 3 \end{bmatrix}. \quad (1.41)$$

Le système est commandable si et seulement si $\mathcal{C}(A, B)$ est inversible, c'est-à-dire $\det(\mathcal{C}(A, B)) \neq 0$:

$$\det(\mathcal{C}(A, B)) = 1 \cdot (\beta - 3) - 1 \cdot 1 = \beta - 4. \quad (1.42)$$

Ainsi, le système est commandable si et seulement si $\beta \neq 4$. Si $\beta = 4$, alors $\text{rang}(\mathcal{C}) = 1 < 2$ et le système n'est pas commandable.

1.4 Principe du Maximum de Pontryagin (PMP)

Le principe du maximum de Pontryagin représente un outil fondamental dans la théorie du contrôle optimal [14, 20]. Contrairement aux approches basées sur le calcul des variations classique, qui nécessitent une régularité forte de la fonction de coût et des trajectoires, le PMP offre une approche robuste permettant de caractériser des conditions nécessaires d'optimalité pour des systèmes dynamiques non linéaires, même en présence de contraintes sur les commandes.

Soit un système régi par l'équation d'état $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Le problème consiste à minimiser la fonctionnelle de coût :

$$J(u) = \Phi(x(T)) + \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt$$

Pour résoudre ce problème, on introduit la fonction **Hamiltonienne** H , définie par :

$$H(x, u, p, t) = L(x, u, t) + p^T f(x, u, t) \quad (1.43)$$

où $p(t) \in \mathbb{R}^n$ représente le vecteur des variables adjointes (ou co-états), qui jouent un rôle important dans le lien entre l'état du système et le critère d'optimisation. Selon le principe du maximum, si u^* est une commande optimale associée à une trajectoire optimale x^* , alors il existe une fonction absolument continue $p(t)$ telle que, pour presque tout $t \in [0, T]$, les conditions suivantes soient vérifiées :

- **Équation d'état :**

$$\dot{x}^*(t) = \nabla_p H(x^*(t), u^*(t), p(t), t) = f(x^*(t), u^*(t), t)$$

- **Équation adjointe :**

$$\dot{p}(t) = -\nabla_x H(x^*(t), u^*(t), p(t), t)$$

- **Condition d'optimalité (Principe du maximum) :**

$$u^*(t) = \arg \min_{u \in U} H(x^*(t), u, p(t), t)$$

- **Condition de transversalité :** Ces conditions aux limites sur la variable adjointe $p(T)$ à l'instant final T dépendent de la nature de l'état final $x(T)$:

→ **Cas à état final fixé :** Si $x(T)$ est imposé, aucune condition supplémentaire n'est requise sur $p(T)$.

→ **Cas à état final libre** : Si $x(T)$ n'est pas prédéterminé, le vecteur adjoint doit vérifier :

$$p(T) = \nabla \Phi(x(T)) \quad (1.44)$$

où Φ représente le coût terminal.

Remarque 1.5. Le PMP ne fournit que des conditions nécessaires d'optimalité. Cependant, il permet de transformer un problème global en une condition locale à chaque instant, constituant ainsi une base essentielle pour l'analyse des modèles hiérarchiques étudiés dans la suite de ce travail.

1.5 L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

En suivant la formulation proposée par Sethi et Thompson [16], l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman est définie par :

$$-\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \min_{u \in U} \{L(x, u, t) + \nabla V(x, t) \cdot f(x, u, t)\} \quad (1.45)$$

où :

- $V(x, t)$ représente la fonction de valeur.
- $L(x, u, t)$ désigne le coût instantané (Lagrangien).
- $f(x, u, t)$ représente la dynamique du système.
- ∇V est le gradient de la fonction de valeur par rapport à l'état x .

Comme souligné dans [16], cette équation aux dérivées partielles constitue une condition suffisante d'optimalité. Elle démontre que si une fonction $V(x, t)$ existe et satisfait cette équation, alors la loi de commande u^* qui minimise l'Hamiltonien est effectivement le contrôle optimal pour l'ensemble de l'espace d'état. Cette approche permet de transformer la recherche d'une trajectoire optimale en la résolution d'une équation fonctionnelle unique, fournissant ainsi une loi de commande en boucle fermée (feedback control).

Remarque 1.6. L'objectif du principe de Pontryagin dans le cas classique est d'établir les conditions nécessaires d'optimalité alors que les équations de Hamilton Jacobi-Bellman, notées HJB permettent d'énoncer les conditions suffisantes d'optimalité.

1.6 Cadre théorique du modèle de Stackelberg

1.6.1 Présentation du modèle de Stackelberg et définition du cadre bi-niveaux

Un problème de programmation mathématique bi-niveaux est un problème d'optimisation mathématique où la variable est partitionnée en deux vecteurs x et y . Le vecteur x sera choisi comme solution optimale d'un deuxième problème de programmation mathématique paramétré par y . Donc un problème de programmation bi-niveaux est un problème hiérarchique dans la mesure où ses contraintes sont définies en partie par un second problème d'optimisation. Ainsi, on se trouve dans une situation où deux décideurs font leurs choix à deux niveaux différents de la hiérarchie. Quand le premier décideur, appelé leader (ou décideur du niveau supérieur) prend sa décision y , le second décideur, appelé suiveur (ou décideur du niveau inférieur), détermine sa décision x par la suite (l'ordre de prise de décisions peut être inversé) en étant au courant ou non du choix du leader.

La variable y va jouer le rôle de paramètre dans le problème du niveau inférieur (i.e. celui du suiveur). D'un autre côté, le leader doit anticiper sur le choix de son suiveur, car son gain ne dépend pas uniquement de son choix, mais aussi de celui du suiveur.

Formulation mathématique

En général un problème de programmation mathématique bi-niveaux peut être formulé de la manière suivante :

Tout d'abord, considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \min_{x \in X} f(x, y), \\ g(x, y) \leq 0, \\ h(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1.46)$$

où : $X \subset \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^q$, $x \in \mathbb{R}^n$ et $y \in \mathbb{R}^m$.

$$g(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y), \dots, g_p(x, y))^T,$$

$$h(x, y) = (h_1(x, y), h_2(x, y), \dots, h_q(x, y))^T.$$

Le problème (1.46) sera appelé problème du **niveau inférieur** (ou problème du suiveur).

1. Concepts et outils préliminaires

Pour un $y \in \mathbb{R}^m$ fixé, notons par $\Psi(y)$ l'ensemble des solutions optimales du problème (1.46). On définit ainsi une fonction multivoque de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$. Soit :

$$\Psi : \mathbb{R}^m \longrightarrow 2^{\mathbb{R}^n},$$

où $2^{\mathbb{R}^n}$ désigne l'ensemble de toutes les parties de $\mathbb{R}^n$. On a donc pour tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\Psi(y) = \operatorname{argmin}_x \{f(x, y) : g(x, y) \leq 0, h(x, y) = 0\}.$$

Notons par $x(y)$ un élément quelconque de $\Psi(y)$. Le but sera alors de choisir $y \in \mathbb{R}^m$ qui est solution optimale du problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{y \in Y} F(x, y), \\ G(x, y) \leq 0, \\ H(x, y) = 0, \end{cases} \quad (1.47)$$

où : $Y \subset \mathbb{R}^m$, $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$, $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$.

$$G(x, y) = (G_1(x, y), G_2(x, y), \dots, G_k(x, y))^T,$$

$$H(x, y) = (H_1(x, y), H_2(x, y), \dots, H_l(x, y))^T.$$

Le problème de déterminer la meilleure solution y^* peut ainsi être ramené au problème qui consiste à trouver un vecteur $y^* \in \mathbb{R}^m$ pour le problème d'optimisation paramétrique (1.46), qui avec le vecteur $x(y) \in \Psi(y)$ satisfaisant les contraintes du problème (1.47) donnent la valeur optimale de F . On obtient le problème suivant :

$$\begin{cases} \text{"min"}_{y \in Y} F(x(y), y), \\ G(x(y), y) \leq 0, \\ H(x(y), y) = 0, \\ x(y) \in \Psi(y). \end{cases} \quad (1.48)$$

Le problème (1.48) sera appelé problème de programmation bi-niveaux ou problème du **niveau supérieur** (ou problème du leader). La fonction F est appelée fonction objectif du niveau supérieur, les fonctions G et H fonctions contraintes du niveau supérieur. De même, la fonction f sera appelée fonction objectif du niveau inférieur et les fonctions g et h les fonctions contraintes du niveau inférieur.

La présence des contraintes dites couplantes du niveau supérieur ($G(x, y) \leq 0$ et $H(x, y) = 0$) confère à cette définition un caractère général. En l'absence de ces contraintes, on obtient une formulation particulière du problème de programmation bi-niveau qui a été utilisée par la plupart des auteurs dans ce domaine.

Remarque 1.7. La notation avec guillemets dans (1.48) est due à la définition ambiguë de la valeur de la fonction $F(x, y)$ du point de vue du leader (qui n'exerce de contrôle que sur y) si l'ensemble des solutions optimales de (1.46) n'est pas réduit à un singleton.

Remarque 1.8. Notons que le problème de programmation bi-niveaux est un cas particulier d'un problème plus général appelé problème de programmation multi-niveaux, dont le modèle mathématique est le suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \longrightarrow \min_{x_1} \\ g_1(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \leq 0 \\ \text{où } x_2, x_3, \dots, x_p \text{ sont solution de} \\ \left\{ \begin{array}{l} f_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \longrightarrow \min_{x_2} \\ g_2(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \leq 0 \\ \text{où } x_3, \dots, x_p \text{ sont solution de} \\ \left\{ \begin{array}{l} f_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \longrightarrow \min_{x_3} \\ g_3(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \leq 0 \\ \dots \\ \text{où } x_p \text{ est solution de} \\ \dots f_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \longrightarrow \min_{x_p} \\ g_p(x_1, x_2, x_3, \dots, x_p) \leq 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Exemple 1.3. Considérons le problème du niveau inférieur défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_x f(x, y), \\ 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right. \quad (1.50)$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $f(x, y) = -xy$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\Psi(y) = \operatorname{argmin}_x \{-xy : 0 \leq x \leq 1\}.$$

Et considérons le problème de programmation bi-niveaux suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{"min"}_y F(x, y), \\ x \in \Psi(y), \\ 0 \leq x \leq 1, \end{array} \right. \quad (1.51)$$

avec $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $F(x, y) = x^2 + y^2$.

Après évaluation du problème du niveau inférieur, et en portant sa solution optimale dans la fonction objectif du niveau supérieur, on obtient les

résultats suivants :

$$\Psi(y) = \begin{cases} \{0\} & \text{si } y > 0, \\ \{1\} & \text{si } y < 0, \\ [0, 1] & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

$$F(x(y), y) = \begin{cases} y^2 & \text{si } y > 0, \\ 1 + y^2 & \text{si } y < 0, \\ \in [0, 1] & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Remarquons qu'au point $y = 0$, la valeur minimum de la fonction $y \rightarrow F(x(y), y)$ est égale à zéro, mais cette valeur est atteinte uniquement si $F(x(0), 0) = 0$, i.e. dans le cas où le suiveur choisit $x = 0$ quand $y = 0$. Si ce n'est pas le cas, alors le problème bi-niveaux considéré n'a pas de solution.

1.7 Distinction entre problèmes statiques et dynamiques

problème statique, la décision est prise à un instant unique, sans prendre en compte l'évolution temporelle du système. En revanche, dans un problème dynamique, la commande dépend du temps et la trajectoire de l'état évolue selon une loi différentielle. Cette distinction est essentielle dans le contrôle optimal bi-niveaux, car le modèle de Stackelberg peut être formulé dans un cadre statique ou étendu à un cadre dynamique, selon que l'on considère des décisions ponctuelles ou des stratégies évolutives. Dans cette étude, nous nous plaçons dans le cas dynamique, où les décisions du leader influencent à chaque instant la réponse optimale du follower.

Critère	Statique	Dynamique
Moment de décision	Unique	Continu
Dépendance temporelle	Absente	Présente
État du système	Fixe	Évolutif
Commande	Ponctuelle	Fonction du temps
Dans Stackelberg	Version statique	Version dynamique étudiée ici

TABLE 1.1 – Distinction entre problèmes statiques et dynamiques

Après avoir rappelé ces bases classiques, nous allons aborder au chapitre suivant les outils de l'analyse non lisse adaptés aux problèmes bi-niveaux.

Chapitre 2

Contrôle optimal bi-niveaux

Dans ce chapitre, nous formulons le problème du contrôle optimal bi-niveaux et présentons les conditions d'optimalité en utilisant l'analyse non lisse.

2.1 Éléments de l'analyse convexe

La théorie de la convexité occupe une place prépondérante et incontournable dans le champ de l'optimisation mathématique. Son intérêt conceptuel réside dans le fait qu'elle élimine la distinction entre les extrema locaux et globaux, garantissant que tout optimum local d'une fonction convexe s'identifie à un optimum global. Cette propriété simplifie considérablement l'analyse de convergence des algorithmes numériques. Pour une étude exhaustive et approfondie de ces concepts, nous renvoyons le lecteur aux travaux fondateurs de Rockafellar [15].

2.1.1 Topologie des ensembles convexes

Le formalisme de l'analyse convexe repose en premier lieu sur la structure des sous-ensembles de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

Définition 2.1 (Ensemble convexe).

Un sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est dit convexe si, pour tout couple de points appartenant à cet ensemble, le segment linéaire les reliant est intégralement contenu dans C . Mathématiquement, cela se traduit par :

$$\forall (x, y) \in C \times C, \quad \forall \alpha \in [0, 1], \quad \alpha x + (1 - \alpha)y \in C \quad (2.1)$$

Par convention, l'ensemble vide $\emptyset$ ainsi que les singletons sont des structures convexes.

On distingue plusieurs structures convexes fondamentales opérant dans $\mathbb{R}^n$, notamment :

- i. **Hyperplan** : Un sous-espace affine de codimension 1 défini par $H = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = \alpha\}$, où $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
- ii. **Demi-espace fermé** : L'une des deux régions délimitées par un hyperplan, formulée par $S = \{x \in \mathbb{R}^n : a^T x \leq \alpha\}$.
- iii. **Polyèdre (ou ensemble polyédral)** : Une intersection finie de demi-espaces fermés, correspondant à l'ensemble des solutions d'un système d'inéquations linéaires $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$, où $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $b \in \mathbb{R}^m$.
- iv. **Voisinage sphérique ouvert** : Une boule ouverte centrée en x_0 de rayon $\delta > 0$, notée $U_\delta(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| < \delta\}$.

Dans la figure qui suit, on a deux ensembles : E_1 étant convexe et E_2 non convexe.

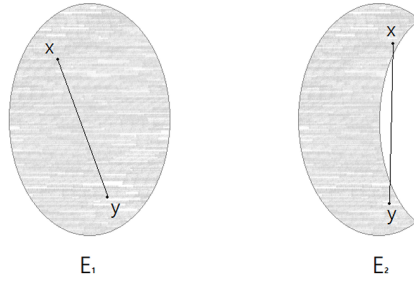


FIGURE 2.1 – Ensembles convexe et non-convexe

L'extension de la notion de convexité aux combinaisons linéaires d'un nombre fini de points conduit aux définitions suivantes :

Définition 2.2 (Combinaison et enveloppe convexe).

Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est qualifié de combinaison convexe d'une famille finie de vecteurs $\{x_1, \dots, x_p\}$ s'il s'exprime sous la forme :

$$x = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^p \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, p\} \quad (2.2)$$

L'enveloppe convexe d'un ensemble arbitraire $C \subset \mathbb{R}^n$, notée $\text{conv}(C)$, est définie comme l'ensemble de toutes les combinaisons convexes possibles des éléments de C .

Définition 2.3 (Ensemble et enveloppe affine).

Un sous-ensemble $M \subset \mathbb{R}^n$ est un espace affine (ou variété linéaire) s'il est stable par combinaisons affines, c'est-à-dire :

$$\forall (x, y) \in M \times M, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad (1 - \lambda)x + \lambda y \in M \quad (2.3)$$

Le plus petit ensemble affine contenant une partie $S \subset \mathbb{R}^n$ est appelé l'enveloppe affine de S et est noté $\text{aff}(S)$.

Pour affiner l'analyse des frontières des ensembles convexes, nous introduisons les notions de points extrêmes, d'hyperplans d'appui et d'intérieurs relatifs :

Définition 2.4 (Point extrême).

Soit C un ensemble convexe. Un point $x \in C$ est qualifié de point extrême s'il ne peut pas être exprimé comme une combinaison convexe stricte de deux éléments distincts de C . En d'autres termes, $x = \lambda y + (1 - \lambda)z$ avec $y, z \in C$ et $\lambda \in]0, 1[$ implique nécessairement $y = z = x$.

Définition 2.5 (Hyperplan de support).

Soit $S \subset \mathbb{R}^n$ et x_0 un point localisé sur la frontière topologique de S . S'il existe un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^n$ vérifiant l'inégalité $a^T x \leq a^T x_0$ pour tout $x \in S$, l'hyperplan associé $\{x \in \mathbb{R}^n : a^T x = a^T x_0\}$ est appelé hyperplan de support (ou d'appui) de S au point x_0 .

Cet hyperplan est tangent à la frontière de l'ensemble S au point x_0 , et laisse l'intégralité de S confinée dans l'un des deux demi-espaces fermés associés. Le théorème de l'hyperplan d'appui assure l'existence d'une telle structure en tout point de la frontière d'un ensemble convexe non vide.

Définition 2.6 (Intérieur relatif et face).

Soit C une partie convexe de $\mathbb{R}^n$. Un point $x \in C$ appartient à l'intérieur

relatif de C , noté $\text{ri}(C)$, s'il existe un voisinage sphérique ouvert $S(x, \epsilon)$ tel que :

$$S(x, \epsilon) \cap \text{aff}(C) \subset C \quad (2.4)$$

Une face d'un ensemble convexe C est un sous-ensemble convexe $F \subset C$ tel que pour tout segment linéaire $[y, z] \subset C$ dont l'intérieur relatif intersecte F , les extrémités y et z appartiennent obligatoirement à F .

2.1.2 Analyse fonctionnelle des applications convexes

L'extension naturelle de la convexité des ensembles aux opérateurs fonctionnels se formalise par l'analyse des propriétés de leurs graphes et domaines.

Définition 2.7 (Fonction convexe).

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un domaine convexe. Une application $f : C \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si elle satisfait l'inégalité suivante :

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y), \quad \forall (x, y) \in C \times C, \forall \alpha \in [0, 1] \quad (2.5)$$

La fonction f est dite strictement convexe si cette inégalité est stricte pour tout $x \neq y$ et $\alpha \in]0, 1[$. Inversement, une fonction f est qualifiée de concave (respectivement strictement concave) si l'application opposée $-f$ est convexe (respectivement strictement convexe).

Pour traiter des fonctions pouvant admettre des valeurs infinies, nous introduisons les notions d'épigraphe et de domaine effectif :

Définition 2.8 (Épigraphe et domaine effectif).

Soit $f : X \longrightarrow [-\infty, +\infty]$ une fonction définie sur $X \subset \mathbb{R}^n$.

— L'épigraphe de f , noté $\text{epi}(f)$, est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$ défini par :

$$\text{epi}(f) = \{(x, \alpha) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \leq \alpha\} \quad (2.6)$$

— Le domaine effectif de f , noté $\text{dom}(f)$, est le sous-ensemble où la fonction prend des valeurs finies ou égales à $-\infty$:

$$\text{dom}(f) = \{x \in X : f(x) < +\infty\} \quad (2.7)$$

Une fonction f est convexe si et seulement si son épigraphe $\text{epi}(f)$ forme un ensemble convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$.

Le résultat central reliant la convexité fonctionnelle à la simplification des problèmes d'optimisation globale est énoncé dans le théorème suivant :

Théorème 2.1 (Équivalence des minima locaux et globaux [12]).

Soit X un sous-ensemble convexe non vide de $\mathbb{R}^n$. Si $f : X \rightarrow]-\infty, +\infty]$ est une fonction convexe, alors tout minimum local de f sur X est également un minimum global. De surcroît, si l'application f est strictement convexe, le problème admet au plus un unique minimum global.

Dans le cas des fonctions différentiables, le théorème ci-après, qui constitue un résultat standard de la programmation non linéaire (voir par exemple Bertsekas [4]), donne une caractérisation analytique globale de la convexité à l'aide des développements limités du premier ordre.

Théorème 2.2 (Caractérisation différentielle du premier ordre). [15]

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble convexe ouvert et soit $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction donnée différentiable sur C . Alors :

- i. La fonction f est convexe si et seulement si son graphe reste au-dessus de son approximation affine tangente en tout point, c'est-à-dire :*

$$f(z) \geq f(x) + \nabla f(x)^T(z - x), \quad \forall x, z \in C \quad (2.8)$$

- ii. Si l'inégalité précédente est stricte pour tout $x \neq z$, alors la fonction f est strictement convexe sur C .*

2.2 Éléments d'analyse non lisse

L'étude des problèmes de contrôle optimal bi-niveaux requiert des outils mathématiques avancés issus de l'analyse non régulière (*nonsmooth analysis*). En effet, la fonction valeur du niveau inférieur n'est généralement pas différentiable au sens usuel (présence de points de rebroussement ou de ruptures de pente). Cette section introduit les concepts fondamentaux développés principalement par Clarke [8, 9], indispensables pour caractériser les conditions d'optimalité.

2.2.1 Fonctions lipschitziennes et gradients généralisés

Commençons par définir la classe des fonctions lipschitziennes, qui jouent un rôle central en analyse non régulière en raison de leurs propriétés de régularité locale.

Définition 2.9 (Fonction lipschitzienne locale).

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. La fonction f est dite lipschitzienne

au voisinage de x s'il existe un scalaire $K \geq 0$ et un voisinage U de x tels que, pour tous points $y, z \in U$, on ait :

$$|f(y) - f(z)| \leq K\|y - z\| \quad (2.9)$$

Le plus petit scalaire K vérifiant cette inégalité est appelé le rang lipschitzien (ou constante de Lipschitz) de f sur cet ensemble.

Pour traiter le manque de dérivabilité classique d'une fonction locale lipschitzienne, Clarke a introduit la notion de dérivée directionnelle généralisée.

Définition 2.10 (Dérivée directionnelle généralisée de Clarke).

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne au voisinage de x , et $v \in \mathbb{R}^n$ un vecteur de direction. La dérivée directionnelle généralisée de f en x dans la direction v , notée $f^\circ(x; v)$, est définie par :

$$f^\circ(x; v) = \limsup_{\substack{y \rightarrow x \\ t \downarrow 0}} \frac{f(y + tv) - f(y)}{t} \quad (2.10)$$

où $y \in \mathbb{R}^n$ et t est un scalaire strictement positif.

Cette dérivée directionnelle possède des propriétés remarquables de convexité par rapport à la direction v , résumées dans la proposition suivante.

Proposition 2.1 ([7, 8]). *Soit f une fonction lipschitzienne de rang K au voisinage de x . Alors :*

1. *La fonction $v \mapsto f^\circ(x; v)$ est positivement homogène, i.e., $f^\circ(x; \lambda v) = \lambda f^\circ(x; v)$ pour tout $\lambda > 0$, sous-additive, i.e., $f^\circ(x; v + w) \leq f^\circ(x; v) + f^\circ(x; w)$, et bornée par $K\|v\|$.*
2. *La fonction $(x, v) \mapsto f^\circ(x; v)$ est semi-continue supérieurement.*
3. *$f^\circ(x; -v) = (-f)^\circ(x; v)$.*

En vertu du théorème de Hahn-Banach, la sous-additivité et l'homogénéité de $v \mapsto f^\circ(x; v)$ garantissent l'existence de formes linéaires dominées par cette fonction. Cela conduit naturellement à la définition du gradient généralisé.

Définition 2.11 (Gradient généralisé de Clarke).

On appelle gradient généralisé de f au point x , noté $\partial f(x)$, le sous-ensemble du dual $(\mathbb{R}^n)^*$ donné par :

$$\partial f(x) = \{\zeta \in \mathbb{R}^n \mid f^\circ(x; v) \geq \langle \zeta, v \rangle, \quad \forall v \in \mathbb{R}^n\} \quad (2.11)$$

Exemple d'illustration :

Pour bien comprendre cette notion dans le cas non lisse, considérons la fonction valeur absolue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = |x|$. Cette fonction est localement lipschitzienne partout, mais elle n'est pas différentiable au sens classique au point de non-régularité $x_0 = 0$.

En appliquant la définition du gradient généralisé de Clarke (basée sur la dérivée directionnelle définie précédemment), nous obtenons un ensemble de sous-gradients sous forme d'intervalle :

$$\partial f(0) = [-1, 1]$$

Tandis que pour tout $x > 0$, $\partial f(x) = \{1\}$ et pour tout $x < 0$, $\partial f(x) = \{-1\}$. Cet exemple simple montre clairement comment l'analyse non lisse permet de surmonter l'absence de dérivée classique en associant une infinité de pentes (un ensemble compact convexe) au point singulier.

Dans le cadre convexe, cette notion coïncide parfaitement avec l'outil classique de l'analyse convexe.

Définition 2.12 (Sous-différentiel convexe).

Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. On appelle sous-gradient de f au point x_0 tout vecteur γ vérifiant :

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \gamma, x - x_0 \rangle, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (2.12)$$

L'ensemble de ces vecteurs est le sous-différentiel de f en x_0 , également noté $\partial f(x_0)$.

Proposition 2.2 ([7, 8]). *Si f est convexe sur un ensemble convexe ouvert contenant x , et lipschitzienne au voisinage de x , alors le gradient généralisé de Clarke $\partial f(x)$ coïncide avec le sous-différentiel au sens de l'analyse convexe.*

Remarque 2.1. Si f est continûment différentiable en x_0 , son gradient généralisé se réduit à un singleton contenant uniquement le gradient classique : $\partial f(x_0) = \{\nabla f(x_0)\}$.

Pour l'étude des trajectoires d'état, nous définissons également la régularité des arcs admissibles.

Définition 2.13 (Arc absolument continu).

Une fonction $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite absolument continue s'il existe une fonction v intégrable au sens de Lebesgue telle que $x(t) = x(0) + \int_0^t v(\tau) d\tau$. Il s'ensuit que la dérivée $\dot{x}(t) = v(t)$ existe presque partout (p.p.). En théorie du contrôle, une telle fonction x est appelée un **arc**.

2.2.2 Cônes tangents et cônes normaux de Clarke

Pour étendre le Principe du Maximum aux domaines avec contraintes d'état ou ensembles cibles non lisses, il est nécessaire de généraliser la notion d'espace normal à un ensemble fermé $C \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $d_C(x) = \inf\{\|x - c\| \mid c \in C\}$ la fonction distance associée à l'ensemble C . La fonction d_C étant lipschitzienne de rang 1, on peut utiliser sa dérivée directionnelle généralisée.

Définition 2.14 (Cône tangent de Clarke).

Soit $C \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble fermé et $x \in C$. Un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est dit tangent à C en x si $d_C^\circ(x; v) = 0$. L'ensemble de ces vecteurs forme le cône tangent de Clarke, noté $T_C(x)$.

Le cône normal est ensuite défini par dualité polaire à partir du cône tangent.

Définition 2.15 (Cône normal de Clarke).

Soit $x \in C$. Le cône normal de Clarke à C en x , noté $N_C(x)$, est le cône polaire de $T_C(x)$, défini par :

$$N_C(x) = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \langle \xi, v \rangle \leq 0, \quad \forall v \in T_C(x)\} \quad (2.13)$$

Une alternative géométrique repose sur les cônes normaux proximaux et prénormaux, où l'on prend l'adhérence de l'enveloppe convexe des limites de vecteurs orthogonaux proximaux : $N_C(x) = \text{cl}(\text{conv}(\hat{N}_C(x)))$.

Pour faire le lien entre les ensembles et les fonctions, on introduit la fonction indicatrice Ψ_C , définie par $\Psi_C(x) = 0$ si $x \in C$ et $+\infty$ sinon. On a alors la relation fondamentale : $\partial\Psi_C(x) = N_C(x)$.

Proposition 2.3 (Propriétés fondamentales [9]).

Les concepts géométriques et analytiques précédents vérifient les règles de calcul suivantes :

1. Si C est un ensemble convexe non vide, alors le cône normal de Clarke coïncide avec le cône normal classique de l'analyse convexe :

$$\xi \in N_C(x) \iff \langle \xi, y - x \rangle \leq 0, \quad \forall y \in C \quad (2.14)$$

2. Pour deux sous-ensembles fermés $S_1, S_2 \subset \mathbb{R}^n$ intersectés en x , si la condition de qualification $\hat{N}_{S_1}(x) \cap (-\hat{N}_{S_2}(x)) = \{0\}$ est satisfaite, alors le cône normal de l'intersection vérifie l'inclusion :

$$\hat{N}_{S_1 \cap S_2}(x) \subset \hat{N}_{S_1}(x) + \hat{N}_{S_2}(x) \quad (2.15)$$

2.3 Problème du contrôle optimal bi-niveaux

Dans cette section, on introduit la formulation mathématique du problème de contrôle optimal à deux niveaux (ou bi-niveaux), en abrégé PCOB¹. Nous considérons un système de contrôle hiérarchique à deux niveaux, où deux décideurs cherchent à prendre la meilleure décision pour atteindre leurs objectifs qui sont généralement différents. À ceci s'ajoute le fait que les deux décideurs ne peuvent pas prendre leurs décisions respectives indépendamment l'un de l'autre, mais qu'ils sont dans un système d'interdépendance hiérarchique.

2.3.1 Formulation dynamique du problème bi-niveaux

Nous allons transposer la terminologie utilisée pour les problèmes de programmation bi-niveaux aux problèmes de contrôle optimal bi-niveaux pour donner la formulation générale d'un PCOB.

Considérons un système hiérarchique à deux niveaux où le niveau supérieur (ou le leader) et le niveau inférieur (ou le suiveur) cherchent à trouver, respectivement un contrôle u et une fonction de contrôle v qui permettent de minimiser leurs fonctions coûts respectives.

La dynamique de l'état du système global $x(t) \in \mathbb{R}^d$ sur l'intervalle de temps $[t_0, t_1]$ est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)) & \text{p.p.} \\ x(0) = x_0, \quad x(T) \in C_1, & t \in [0, T] \end{cases} \quad (2.16)$$

où $u(t)$ représente le contrôle du leader et $v(t)$ représente le contrôle du follower (ou suiveur).

2.3.2 Définition du problème du follower (niveau inférieur)

Admettons que le leader prend sa décision le premier en choisissant un contrôle $u \in U$, où U est l'ensemble des contrôles admissibles du leader. Par la suite, le suiveur choisit sa fonction de contrôle $v \in V$, où V est l'ensemble des contrôles admissibles du niveau inférieur.

Avec cette hypothèse sur l'ordre de prise de décisions, le jeu va se dérouler de la manière suivante : étant donnée une décision $u \in U$ choisie par le leader, le suiveur va choisir sa fonction contrôle $v \in V$, qui dépend du contrôle u choisi par le leader, afin de minimiser sa fonction coût $J_2(x, u, v_u)$.

1. Cette abréviation est introduite par le promoteur dans son travail original [10].

Prenant en considération toutes les hypothèses faites précédemment, le problème du niveau inférieur pour un choix $u \in U$ du leader est :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_2(x, u, v) = \int_0^T G(t, x(t), u(t), v(t)) dt + g(x(T)) \longrightarrow \min_v \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \quad \text{p.p.} \\ x(0) = x_0, \quad x(T) \in C_1 \\ v(t) \in V(t) \quad \text{p.p.} \end{array} \right. \quad (2.17)$$

2.3.3 Définition du problème du leader (niveau supérieur)

Le problème de contrôle optimal bi-niveaux, vu du niveau supérieur, est le problème d'optimisation dynamique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(x_u, u, v_u) = \int_0^T F(t, x_u(t), u(t), v_u(t)) dt + f(x_u(T)) \longrightarrow \min_u \\ \text{s.t. } u(t) \in U \quad \text{p.p.} \\ (x_u, v_u) \text{ sont des solutions optimales du problème inférieur (2.17)} \end{array} \right. \quad (2.18)$$

2.3.4 Formulation du problème de contrôle optimal bi-niveaux

Mathématiquement, le problème de contrôle optimal bi-niveaux global, qui intègre les structures interconnectées des deux niveaux, peut être formulé de manière imbriquée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} J_1(x, u, v) = \int_0^T F(t, x(t), u(t), v(t)) dt + f(x(T)) \longrightarrow \min_u \\ \text{où } (x_u, v_u) \text{ est solution optimale du problème inférieur :} \\ \left\{ \begin{array}{l} J_2(x, u, v) = \int_0^T G(t, x(t), u(t), v(t)) dt + g(x(T)) \longrightarrow \min_v \\ \text{s.t. } \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), v(t)) \quad \text{p.p.} \\ x(0) = x_0, \quad x(T) \in C_1 \\ v(t) \in V(t) \quad \text{p.p.} \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (2.19)$$

Admettons aussi que le jeu est coopératif, i.e. que si pour un paramètre ou contrôle u le suiveur possède plusieurs choix, il choisira toujours la fonction v qui convient le mieux du point de vue du leader.

Remarque 2.2. Une situation pratique dont le problème de contrôle optimal bi-niveaux peut servir de modèle est la suivante : Le leader est le gouvernement qui impose une taxe u , le suiveur est une entreprise qui cherche une politique optimale $v_u(t)$ en réaction à la politique fiscale du gouvernement.

Remarque 2.3. Une formulation plus générale d'un problème de contrôle bi-niveaux suppose que les décisions des deux niveaux sont des fonctions temporelles évoluant dans des espaces de Banach appropriés, ce qui donne lieu à des couplages dynamiques plus profonds entre les trajectoires d'états et les ensembles de contrôles admissibles.

2.4 Étude du problème et conditions nécessaires d'optimalité

L'approche retenue consiste à reformuler le problème de contrôle optimal bi-niveaux (PCOB) comme un problème de contrôle optimal standard à un seul niveau en utilisant la fonction valeur du niveau inférieur.

Définitions fondamentales

Nous introduisons d'abord les notions de mesurabilité et d'admissibilité inhérentes au formalisme du PCOB, adaptées aux contrôles temporels du leader $u(\cdot)$ et du follower $v(\cdot)$.

Définition 2.16.

1. **Fonction contrôle :** Une fonction de contrôle admissible est une fonction mesurable au sens de Lebesgue satisfaisant $u(t) \in U(t)$ et $v(t) \in V(t)$ pour presque tout (p.p.) $t \in [0, T]$.
2. **Arc :** Un arc désigne une fonction $x : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ absolument continue.
3. **Paire réalisable du follower :** On appelle paire réalisable du problème inférieur un couple de fonctions $(x(\cdot), v(\cdot))$ sur $[0, T]$ tel que v est une fonction de contrôle et x est l'arc d'état satisfaisant la dynamique $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))$ p.p., avec les conditions aux limites $x(0) = x_0$ et $x(T) \in C_1$. La première composante est la *trajectoire réalisable*, et la deuxième est le *contrôle réalisable*.
4. **Solution du problème inférieur :** Une solution du problème inférieur est une paire réalisable (x_u, v_u) qui minimise la fonctionnelle de

coût $J_2(x, u, v)$ sur l'ensemble de toutes les paires réalisables pour un contrôle u fixé du leader.

5. **Stratégie réalisable globale :** On appelle stratégie réalisable du problème global un couple (u, v_u) où $u \in U$ et v_u est un contrôle optimal du follower en réaction à u . La stratégie (u^*, v^*) est dite optimale globale si elle minimise le coût du leader $J_1(x, u, v)$ sur l'ensemble de ces stratégies réalisables.

2.4.1 Hypothèses de régularité et compacité

Pour toute la suite de cette étude, nous posons les hypothèses structurelles suivantes :

- (H_1) L'ensemble de contraintes U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$ et l'ensemble cible $C_1 \subset \mathbb{R}^d$ est fermé.
- (H_2) $V : [0, T] \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ est une multifonction dont les valeurs sont non vides et compactes. Le graphe de V , noté $\text{Gr}(V) = \{(s, r) : s \in [0, T], r \in V(s)\}$, est $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -mesurable (où $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ est la σ -algèbre engendrée par les ensembles de Lebesgue de $[0, T]$ et les boréliens de $\mathbb{R}^m$).
- (H_3) Il existe une fonction intégrable $k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que pour tout $(t, v) \in \text{Gr}(V)$, les fonctions $f(t, \cdot, \cdot, v)$, $F(t, \cdot, \cdot, v)$ et $G(t, \cdot, \cdot, v)$ sont localement lipschitziennes de rang $k(t)$ par rapport aux variables d'état et de contrôle du leader. De plus, pour tout (x, u) , les applications temporelles associées sont $\mathcal{L} \times \mathcal{B}$ -mesurables.
- (H_4) Les fonctions de coût terminal $f, g : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ sont continues et localement lipschitziennes.
- (H_5) Pour tout contrôle $u \in U$ choisi par le leader, le problème du follower admet au moins une paire réalisable.

2.4.2 Régularité de la fonction valeur du niveau inférieur

Définissons la fonction valeur du niveau inférieur, notée $V_2 : U \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ (où $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), qui associe à chaque annonce du leader le coût minimal atteignable par le follower :

$$V_2(u) = \inf_{(x,v)} \left\{ \int_0^T G(t, x(t), u(t), v(t)) dt + g(x(T)) \right\} \quad (2.20)$$

sous les contraintes $\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t))$ p.p., $v(t) \in V(t)$ p.p., $x(0) = x_0$ et $x(T) \in C_1$.

Pour analyser la différentiabilité généralisée de cette fonction valeur V_2 , les conditions techniques suivantes sont requises :

- (A₁) Condition d'accroissement : Il existe $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$ tels que pour tout u , $\|(f(t, x, u, v), G(t, x, u, v))\| \leq \alpha\|x\| + \beta$.
- (A₂) Les applications f (resp. G) sont continues, différentiables par rapport à x et u , et semi-continues inférieurement en v . De plus, il existe $k(\cdot)$ intégrable dominant uniformément leurs normes et leurs gradients.
- (B₁) Convexité de l'ensemble des vitesses et coûts : Pour chaque (t, x, u) , l'ensemble $\{(f(t, x, u, v), G(t, x, u, v)) : v \in V(t)\}$ est convexe.
- (B₂) L'ensemble $\{(f(t, x, u, v), G(t, x, u, v) + r) : v \in V(t), r \geq 0\}$ est convexe.

L'Hamiltonien associé au problème du follower est défini par :

$$H_2(t, x, u, p_2, \lambda) = \sup_{v \in V(t)} \{p_2 \cdot f(t, x, u, v) - \lambda G(t, x, u, v)\} \quad (2.21)$$

Théorème 2.3 ([21]). *Sous les hypothèses (H₁)-(H₅), complétées par la condition (A₁, B₁) ou (A₂, B₂), si l'ensemble des multiplicateurs singuliers est réduit à zéro, alors la fonction valeur $V_2(u)$ est lipschitzienne et continue au voisinage de u , et son sous-différentiel généralisé vérifie la condition d'inclusion dans l'ensemble des multiplicateurs adjoints terminaux.*

Condition nécessaire d'optimalité via la réduction à un seul niveau

En exploitant la fonction valeur $V_2(u)$, le problème bi-niveaux initial peut être reformulé de manière équivalente comme un problème de contrôle optimal monocritère avec une contrainte de type "généralisée" sur l'état final :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_u \quad J_1(x, u, v) = \int_0^T F(t, x(t), u(t), v(t)) dt + f(x(T)) \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)) \quad \text{p.p.} \\ \quad \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \in C_1, \quad u(t) \in U(t) \quad \text{p.p.} \\ \quad \quad V_2(u(T)) \geq \int_0^T G(t, x(t), u(t), v(t)) dt + g(x(T)) \end{array} \right. \quad (2.22)$$

Définissons le pseudo-Hamiltonien du problème global reformulé (2.22) :

$$H_1(t, x, u, p_1; \lambda, r) = p_1 \cdot f(t, x, u, v) - rG(t, x, u, v) - \lambda F(t, x, u, v) \quad (2.23)$$

Théorème 2.4 (Conditions nécessaires d'optimalité du PCOB). [21]

Soit $(u^*(\cdot), v^*(\cdot))$ une stratégie optimale globale associée à la trajectoire $x^*(\cdot)$. Supposons que les hypothèses de régularité soient satisfaites et que la fonction valeur V_2 soit lipschitzienne au voisinage du contrôle optimal. Alors, il existe des multiplicateurs non tous nuls $\lambda \leq 0$, $r \leq 0$ et des arcs adjoints $p_1(\cdot), \eta(\cdot)$ tels que :

1. **Équation adjointe** : $(\dot{p}_1(t), \dot{\eta}(t)) \in \partial_{x,u} H_1(t, x^*(t), u^*(t), p_1(t); \lambda, r)$ p.p.
2. **Condition de maximum** :
 $\max_{u \in U(t)} H_1(t, x^*(t), u, p_1(t); \lambda, r) = H_1(t, x^*(t), u^*(t), p_1(t); \lambda, r)$ p.p.
3. **Transversalité initiale** : $\eta(t_0) = 0$.
4. **Transversalité finale sur l'état** : $-p_1(T) \in \lambda \hat{\partial} f(x^*(T)) + r \hat{\partial} g(x^*(T)) + \hat{N}_{C_1}(x^*(t_1))$.
5. **Transversalité finale sur le contrôle** : $\eta(t_1) \in r \partial V_2(u^*(T))$.
6. **Non-trivialité** : $\|p_1\|_\infty + \|\eta\|_\infty + |\lambda| + |r| > 0$.

Théorème 2.5 (Conditions nécessaires d'optimalité généralisées du PCOB).

[21] Supposons que les conditions suivantes soient satisfaites :

- i. Les hypothèses (H_1) à (H_5) sont satisfaites.
- ii. Au moins l'une des situations suivantes est vérifiée : les hypothèses (A_1) et (B_1) sont satisfaites, ou les hypothèses (A_2) et (B_2) sont satisfaites.

Soit (z, u) une stratégie optimale pour le problème reformulé, et $x(t)$ la trajectoire correspondante. Supposons également que $\hat{\partial} g(x(T)) \cap \hat{N}_{C_1}(x(T)) = \{0\}$ et $QM^0(Y) = \{0\}$. Alors, il existe :

- i. des scalaires $\lambda \geq 0$, $r \geq 0$, $0 \leq \hat{r} \leq r$,
 - ii. des entiers I, J et des coefficients $\lambda_{ij} \geq 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \lambda_{ij} = 1$,
 - iii. des trajectoires optimales $x_i(t)$ pour le problème du niveau inférieur,
 - iv. des arcs adjoints $p(t)$, $\eta(t)$, $p_{ij}(t)$ et $q_{ij}(t)$,
- tels que les conditions suivantes soient vérifiées presque partout (p.p.) :

1. $-(\dot{p}(t), \dot{\eta}(t)) \in \partial_{(x,z)} H_1(t, x(t), z, p(t), u(t), \lambda, r)$ p.p.
2. $\max_{u \in U(t)} H_1(t, x(t), z, p(t), u, \lambda, r) = H_1(t, x(t), z, p(t), u(t), \lambda, r)$ p.p.
3. $\eta(t_0) = 0$
4. $-p(t_1) \in \hat{\partial} f(x(T)) + r \hat{\partial} g(x(T)) + \hat{N}_{C_1}(x(T))$
5. $\eta(t_1) = \hat{r} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \lambda_{ij} q_{ij}(t_0)$

6. $(-\dot{p}_{ij}(t), -\dot{q}_{ij}(t), \dot{x}(t)) \in \partial_{(x,z,p)} H_2(t, x_i(t), z, p_{ij}(t), 1) \quad p.p.$
7. $q_{ij}(T) = 0$
8. $-p_{ij}(T) \in \hat{\partial} g(x_i(T)) + \hat{N}_{C_1}(x_i(T))$

2.4.3 Difficultés théoriques intrinsèques et non-régularité du PCOB

Bien que la formulation du problème de contrôle optimal bi-niveaux (PCOB) paraisse intuitive, sa résolution analytique face aux critères classiques de l'optimisation se heurte à des obstacles topologiques majeurs. Cette section met en évidence les raisons fondamentales pour lesquelles les méthodes traditionnelles, telles que le principe du maximum de Pontryagin standard, s'avèrent structurellement insuffisantes.

Non-convexité et non-régularité de l'application de réaction

Dans un problème de contrôle optimal standard, la régularité des trajectoires dépend fortement de la convexité des ensembles de configurations. Or, dans le cadre du PCOB, même si les fonctions des deux niveaux (J_1 et J_2) et la dynamique $\dot{x} = f(t, x, u, v)$ sont indéfiniment différentiables ($\mathcal{C}^\infty$), l'ensemble des réponses optimales du follower, défini par la multi-application :

$$\Psi(u) = \arg \min_v \{J_2(x, u, v) : \dot{x} = f(t, x, u, v), v(t) \in V(t)\} \quad (2.24)$$

est généralement **non convexe** et **non partout différentiable**.

Selon les travaux fondateurs de Clarke [7], dès que le leader fait varier continûment son contrôle $u(t)$, l'ensemble $\Psi(u)$ peut subir des bifurcations ou des sauts discrets (discontinuités de type *jump*). Par conséquent, substituer directement la condition d'optimalité du niveau inférieur dans le niveau supérieur engendre un problème d'optimisation contraint par des inclusions différentielles hautement non régulières.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_{(u,v,p_2)} J_1(x, u, v) \\ \text{s.t.} \quad \dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), v(t)) \\ \dot{p}_2(t) = -\nabla_x H_2(t, x(t), u(t), v(t), p_2(t)) \\ v(t) = \arg \max_{w \in V(t)} H_2(t, x(t), u(t), w, p_2(t)) \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Cependant, cette reformulation pose des difficultés théoriques insurmontables dues aux points suivants :

1. **Perte de la qualification des contraintes** : Le principe du maximum appliqué au système d'état élargi (x, p_2) viole presque systématiquement les conditions de qualification standard (telles que la condition de Mangasarian-Fromovitz ou de Slater) le long de la trajectoire optimale.
2. **Présence de multiplicateurs sauvages** : Les variables adjointes p_2 du follower apparaissent ici comme des variables d'état pour le leader. Les multiplicateurs de Lagrange associés à cette nouvelle contrainte dynamique peuvent devenir des mesures signées (singularités) au lieu de fonctions lipschitziennes, rendant le calcul numérique instable ou impossible.

La nécessité du formalisme non lisse de Clarke

Pour pallier l'échec des méthodes lisses, l'introduction de la **fonction valeur** $V_2(u)$ (définie à la section précédente) est la seule alternative rigoureuse validée par la théorie moderne de l'optimisation [21].

La contrainte d'optimalité du follower est alors encapsulée dans une unique inégalité globale :

$$J_2(x, u, v) - V_2(u) \leq 0 \quad (2.26)$$

Puisque $V_2(u)$ est intrinsèquement non différentiable au sens de Fréchet (car elle est définie par un *infimum*), le problème réformulé bascule impérativement dans le domaine de l'analyse variationnelle non lisse (Non-smooth analysis). C'est ce qui justifie l'application directe du **sous-différentiel généralisé de Clarke** ∂ et des **cônes normaux de bord** $\hat{N}_{C_1}$ exprimés dans le Théorème 2.4. Sans ce formalisme non régulier, il est impossible de caractériser mathématiquement les états d'équilibre du PCOB.

2.4.4 Interprétation en théorie des jeux différentiels

Le problème de contrôle optimal bi-niveaux s'inscrit naturellement dans le cadre des jeux différentiels à structure hiérarchique. Dans ce type de modèle, les décisions ne sont pas prises simultanément : le leader choisit d'abord son contrôle, puis le follower ajuste sa réponse en fonction de cette décision. Cette organisation séquentielle correspond au schéma de Stackelberg, largement étudié dans la littérature sur les jeux dynamiques [1, 19].

Contrairement à l'équilibre de Nash, où chaque joueur choisit sa stratégie en tenant compte des stratégies des autres comme données mais sans ordre de décision privilégié, l'équilibre de Stackelberg repose sur une asymétrie informationnelle et temporelle. Le leader anticipe la meilleure réponse du

follower avant de fixer sa propre stratégie. Cette différence fondamentale explique pourquoi les problèmes bi-niveaux sont souvent formulés comme des jeux hiérarchiques en temps continu [1, 2].

Formalisation mathématique comparée des concepts de solution

Pour mettre en évidence la différence entre ces deux approches, nous rappelons leurs critères d'optimalité respectifs.

L'équilibre de Nash (simultané). Dans un cadre différentiel non hiérarchique à deux joueurs, un couple de contrôles admissibles (u^*, v^*) constitue un équilibre de Nash si aucun des joueurs ne peut améliorer unilatéralement sa propre fonctionnelle de coût. On a alors :

$$\begin{cases} J_1(u^*, v^*) \leq J_1(u, v^*) & \forall u \in U_{ad}, \\ J_2(u^*, v^*) \leq J_2(u^*, v) & \forall v \in V_{ad}. \end{cases} \quad (2.27)$$

L'équilibre de Stackelberg (séquentiel). À l'inverse, dans le PCOB régi par la structure de Stackelberg, le follower détermine d'abord sa meilleure réponse au contrôle du leader :

$$v^*(u) \in \arg \min_{v \in V_{ad}} J_2(u, v).$$

Le leader choisit ensuite son contrôle en tenant compte de cette réaction, ce qui conduit au problème réduit :

$$\min_{u \in U_{ad}} J_1(u, v^*(u)). \quad (2.28)$$

Avantage stratégique de la hiérarchie

Sous réserve d'existence des solutions, cette structure permet au leader d'optimiser sa décision en anticipant la réponse du niveau inférieur. Elle ne signifie pas nécessairement que l'équilibre de Stackelberg est "meilleur" dans tous les sens que l'équilibre de Nash, mais elle met en évidence un avantage stratégique lié au pouvoir de décision en premier. Dans notre cadre, cette interprétation relie naturellement la formulation dynamique du problème aux outils de la théorie des jeux différentiels et prépare l'étude des conditions d'optimalité du follower et du leader [1]. Une comparaison entre l'équilibre de Nash et l'équilibre de Stackelberg est donnée par le Tableau 2.1.

Ces caractérisations théoriques étant établies, nous consacrons le chapitre suivant à une application pratique dans le domaine bio-économique.

Caractéristique	Équilibre de Nash	Équilibre de Stackelberg (PCOB)
Structure	Simultanée et symétrique (aucun joueur n'a la priorité).	Séquentielle et hiérarchique (Leader puis Follower).
Information	Parfaite mais sans anticipation de la réaction de l'autre.	Asymétrique (le Leader anticipe la réaction $\Psi(u)$).
Outils	Points fixes, intersection des fonctions de meilleure réponse.	Problèmes imbriqués, Fonction valeur, Sous-différentiel de Clarke.
Impact	Souvent sous-optimal (Tragédie des biens communs).	Régulation optimale possible via des politiques fiscales.
Flexibilité	Limitée à l'espace d'intersection direct.	Maximale (Domination sur tout le graphe de réaction).

TABLE 2.1 – Comparaison structurelle entre l'Équilibre de Nash et l'Équilibre de Stackelberg

Chapitre 3

Exemple d'application : Régulation bio-économique de la pêche

Pour illustrer concrètement et valider l'édifice théorique du contrôle optimal bi-niveaux développé au cours des chapitres précédents, nous présentons dans ce chapitre une formalisation approfondie d'un modèle de régulation halieutique. Ce problème, inspiré des travaux fondateurs de Clarke [7] et des développements fondamentaux de Ye [21], met en scène un État côtier (agissant comme Leader au niveau supérieur) qui cherche à réguler l'exploitation d'une ressource biologique renouvelable par une flotte de pêche privée ou étrangère (agissant comme Follower au niveau inférieur).

3.1 Formulation cinétique du système dynamique global

Considérons un horizon temporel fini et déterminé $[0, T]$. La variable d'état du système, notée $x(t) \in \mathbb{R}_+$, représente la biomasse totale de la ressource marine disponible à l'instant t . L'évolution temporelle de cette biomasse est gouvernée par l'équation différentielle non linéaire suivante :

$$\dot{x}(t) = F(x(t)) - qE(t)x(t), \quad \text{presque partout } t \in [0, T] \quad (3.1)$$

avec la condition initiale fixe $x(0) = x_0 > 0$.

Afin de faciliter la lecture du modèle, nous précisons que $x(t)$ désigne la biomasse de la ressource, $E(t)$ l'effort de pêche, q le coefficient de capturabilité, p_0 le prix unitaire de la ressource, c_0 le coût fixe unitaire, $n(t)$ la taxe unitaire sur les captures et $m(t)$ la charge fixe unitaire sur l'effort de pêche.

3. Exemple d'application : Régulation bio-économique de la pêche

Dans cette formulation, nous supposons que le système satisfait aux hypothèses standard de régularité définies par Ye [21], à savoir que la fonction de croissance naturelle $F(x)$ est localement lipschitzienne et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$. L'effort de pêche $E(t)$ représente la variable de contrôle du niveau inférieur, soumise à des contraintes physiques de saturation :

$$E(t) \in U_{ad} = \{E(\cdot) \text{ mesurable} : 0 \leq E(t) \leq E_{\max}, \forall t \in [0, T]\} \quad (3.2)$$

où U_{ad} est un ensemble de contrôle compact et mesurable au sens de la théorie de la tribu de Lebesgue-Borel.

3.2 Le problème de décision du follower et la formulation par fonction valeur

La flotte de pêche observe les paramètres fiscaux fixés par le leader, à savoir la taxe unitaire sur les captures $n(t) \in \mathbb{R}_+$ et la charge fixe par unité d'effort $m(t) \in \mathbb{R}_+$. Le problème d'optimisation du follower consiste à maximiser sa fonctionnelle de profit net actualisé :

$$\begin{cases} \max_{E \in U_{ad}} & J_2(n, m, E) = \int_0^T e^{-\delta t} [(p_0 - n(t))qx(t) - (c_0 + m(t))] E(t) dt \\ \text{s.t.} & \dot{x}(t) = F(x(t)) - qE(t)x(t) \\ & x(0) = x_0, \quad x(T) \geq \underline{x} \end{cases} \quad (3.3)$$

Conformément à l'approche de Ye [21], nous introduisons la fonction valeur du niveau inférieur, notée $V(n, m)$, définie par le maximum de la fonctionnelle de coût sous les contraintes dynamiques. Comme souligné dans [21], bien que les données initiales soient régulières, cette fonction valeur V est intrinsèquement non lisse (*nonsmooth*).

Pour caractériser ce niveau, nous construisons l'Hamiltonien du niveau inférieur H_2 :

$$\begin{aligned} H_2(t, x, E, p_2) &= p_2(t) [F(x(t)) - qEx(t)] \\ &\quad + e^{-\delta t} [(p_0 - n(t))qx(t) - (c_0 + m(t))] E \end{aligned} \quad (3.4)$$

où $p_2(t)$ est la variable adjointe du follower, dont l'évolution est régie par l'équation différentielle :

$$\dot{p}_2(t) = -p_2(t) [F'(x(t)) - qE(t)] - e^{-\delta t} (p_0 - n(t))qE(t) \quad (3.5)$$

avec la condition de transversalité finale terminale :

$$-p_2(T) \in \hat{N}_{\mathcal{C}_1}(x(T)) \quad (3.6)$$

3.3 Le problème global du leader (L'État côtier)

L'État, anticipant la rationalité de la flotte, cherche à maximiser ses revenus fiscaux totaux. En utilisant la reformulation par fonction valeur rigoureusement établie par Ye [21], le problème de contrôle optimal bi-niveaux (PCOB) est transformé en un problème d'optimisation à niveau unique équivalent contenant une contrainte de type inégalité sur la fonction valeur :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \min_{(n,m,E)} & - \int_0^T e^{-\delta t} [n(t)qx(t) + m(t)] E(t) dt \\ \text{s.t.} & \dot{x}(t) = F(x(t)) - qE(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad x(T) \geq \underline{x} \\ & \int_0^T e^{-\delta t} [(p_0 - n(t))qx(t) - (c_0 + m(t))] E(t) dt - V(n, m) \geq 0 \\ & V(n, m) \geq L \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Sous les conditions de qualification de base de Clarke et Ye [?], nous supposons que la condition de qualification pour les multiplicateurs est satisfaite ($QM^0(Y) = \{0\}$), garantissant ainsi que la fonction valeur V est localement lipschitzienne et que son gradient généralisé est non vide.

3.4 Application explicite des conditions d'optimalité non lisses de Clarke

Nous définissons le pseudo-Hamiltonien étendu du niveau supérieur, H_1 , en y incorporant le co-état du leader $p_1(t)$ et le multiplicateur d'échelle $\lambda_1 \geq 0$ associé à l'objectif supérieur :

$$\begin{aligned} H_1(t, x, n, m, E, p_1, \lambda_1) = & p_1(t) [F(x(t)) - qE(t)x(t)] \\ & + \lambda_1 e^{-\delta t} [n(t)qx(t) + m(t)] E(t) \end{aligned} \quad (3.8)$$

En appliquant le théorème des conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre pour les problèmes bi-niveaux de Ye [21], il existe un arc adjoint $p_1(t)$, une variable de sensibilité $\eta(t)$ et un multiplicateur constant $r \geq 0$ associé à la contrainte de la fonction valeur tel que l'inclusion différentielle adjointe supérieure se lise via le sous-différentiel de Clarke [7] :

$$\dot{p}_1(t) \in -\partial_x H_1(t, x, n, m, E, p_1, \lambda_1) - r \cdot \partial_x H_2(t, x, E, p_2) \quad (3.9)$$

3. Exemple d'application : Régulation bio-économique de la pêche

Avec les conditions aux limites et de transversalité terminales suivantes issues directement du formalisme non lisse de Ye [21] :

$$\eta(0) = 0, \quad \eta(T) \in r\partial V(n, m) \quad (3.10)$$

Puisque les fonctions constitutives sont différentiables par rapport à la variable d'état x , cette inclusion se ramène à l'équation déterministe couplée :

$$\begin{aligned} \dot{p}_1(t) = & -p_1(t) [F'(x(t)) - qE(t)] - \lambda_1 e^{-\delta t} n(t) qE(t) \\ & - r [p_2(t)(F'(x(t)) - qE(t)) + e^{-\delta t} (p_0 - n(t)) qE(t)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.4.1 Dérivation analytique de l'équilibre stationnaire

Pour expliciter la solution analytique à long terme, nous introduisons les hypothèses de l'état stationnaire, caractérisé par la stabilisation des trajectoires d'état et des variables adjointes, soit :

$$\dot{x}(t) = 0, \quad \dot{p}_1(t) = 0, \quad \dot{p}_2(t) = 0 \implies x(t) = x^*, \quad p_1(t) = p_1^*, \quad p_2(t) = p_2^* \quad (3.12)$$

En premier lieu, l'annulation de la dynamique de la biomasse (3.1) implique directement l'expression de l'effort de pêche stationnaire E^* :

$$F(x^*) - qE^* x^* = 0 \implies E^* = \frac{F(x^*)}{qx^*} \quad (3.13)$$

En second lieu, en imposant $\dot{p}_2(t) = 0$ dans l'équation adjointe du follower (3.5), nous obtenons le système algébrique suivant :

$$-p_2^* [F'(x^*) - qE^*] - e^{-\delta t} (p_0 - n) qE^* = 0 \quad (3.14)$$

En substituant l'effort stationnaire E^* par son expression (3.13), et en appliquant la condition de transversalité liée au taux d'actualisation δ , l'isolation du co-état inférieur permet d'extraire explicitement la formulation de p_2^* :

$$p_2^* = \frac{e^{-\delta t} [(p_0 - n)qx^* - (c_0 + m)]}{qx^*(\delta - F'(x^*))} \quad (3.15)$$

Enfin, sous l'hypothèse de normalité ($\lambda_1 = 1$) et en annulant la dynamique supérieure $\dot{p}_1(t) = 0$ dans l'équation (3.11), le système du leader se réduit à :

$$-p_1^* [F'(x^*) - qE^*] - e^{-\delta t} n qE^* - r [p_2^* (F'(x^*) - qE^*) + e^{-\delta t} (p_0 - n) qE^*] = 0 \quad (3.16)$$

Par élimination croisée, en injectant l'expression de p_2^* définie par (3.15) dans l'équation (3.16), et en simplifiant algébriquement par la division du facteur d'actualisation commun $e^{-\delta t}$, les variables de co-état s'annulent. Après

3. Exemple d'application : Régulation bio-économique de la pêche

regroupement des termes finis et réduction des fractions au dénominateur commun $q(x^*)^2$, nous aboutissons à la relation d'équilibre bio-économique globale du PCOB :

$$F'(x^*) + \frac{F(x^*) \cdot \frac{r(c_0+m)-m}{q(x^*)^2}}{r(p_0 - n) + n - \frac{r(c_0+m)-m}{qx^*}} = \delta \quad (3.17)$$

3.5 Analyse de sensibilité et interprétation structurelle

L'équation d'optimalité couplée (3.17) synthétise l'impact de la hiérarchie de Stackelberg sur la gestion des ressources :

- Le paramètre $r \geq 0$, qui provient rigoureusement du multiplicateur non lisse de la fonction valeur établi par Ye [21], représente le coût marginal d'opportunité lié au maintien de la flotte sur le marché (le coût de la contrainte d'incitation).
- Le terme $\frac{r(c_0+m)-m}{q(x^*)^2}$ met en évidence la distorsion du coût marginal induite par la double décision fiscale (*bi-level fee distortion*).
- L'État utilise cette règle d'or pour identifier le couple de politiques fiscales optimales (n^*, m^*) . Ces valeurs incitent indirectement le suiveur à choisir un effort de pêche stationnaire E^* qui maintient la biomasse exactement au niveau stable x^* , réalisant ainsi un compromis parfait entre l'efficacité économique privée, le rendement fiscal public et la durabilité écologique.

Cette application concrète illustre l'utilité des outils développés et vient clôturer l'ensemble de notre travail de recherche.

Conclusion et Perspectives

Arrivé au terme de ce travail de recherche, nous avons abordé l'étude théorique et la formulation mathématique des problèmes de contrôle optimal bi-niveaux (PCOB) dans un cadre hiérarchique de type leader-follower. L'objectif principal était de comprendre et d'analyser comment une stratégie optimale prise au niveau supérieur peut être construite en anticipant rationnellement la réaction du niveau inférieur.

Pour mener à bien cette étude, notre démarche a été structurée en plusieurs étapes. Dans un premier temps, nous avons rappelé les fondements classiques du contrôle optimal, notamment le Principe du Maximum de Pontryagin (PMP) et l'approche de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB). Ces bases ont été complétées par les notions indispensables de l'analyse convexe et de l'analyse non lisse de Clarke. Ces outils préliminaires nous ont fourni le cadre topologique nécessaire pour aborder la structure géométrique particulière des problèmes bi-niveaux.

Ensuite, nous avons formulé le problème du contrôle optimal bi-niveaux en mettant en évidence ses difficultés majeures, principalement liées à la non-convexité et à la non-régularité de la fonction valeur ou de la réaction du Follower. C'est ici que l'utilisation des concepts de gradient généralisé et de cônes normaux de Clarke a pris tout son sens, nous permettant d'établir des conditions nécessaires d'optimalité rigoureuses là où les dérivées classiques échouent.

Enfin, l'application pratique à la régulation bio-économique de la pêche a démontré l'intérêt concret de cette approche hiérarchisée. Au-delà des aspects purement théoriques, ce modèle a permis de représenter de façon claire et quantitative le compromis délicat entre l'exploitation économique des agents et la préservation à long terme de la ressource halieutique, s'inscrivant ainsi dans une démarche de gestion durable.

Bien que les objectifs fondamentaux de ce mémoire aient été atteints, ce travail reste une étape qui ouvre la voie à plusieurs perspectives de recherche intéressantes :

- **L'introduction de l'aspect stochastique :** Intégrer des paramètres

aléatoires ou de l'incertitude (liée aux facteurs climatiques ou aux fluctuations du marché) pour modéliser plus fidèlement le comportement du niveau inférieur.

- **L'extension au cas multi-followers :** Analyser les situations où le Leader fait face à plusieurs Followers, en étudiant leurs interactions sous forme de jeux coopératifs ou d'équilibres de Nash.
- **Le développement de méthodes numériques :** Mettre en œuvre des algorithmes de résolution numérique (comme la méthode de tir ou des méthodes d'optimisation directe) afin de simuler graphiquement les trajectoires optimales et effectuer une analyse de sensibilité des solutions obtenues.

Bibliographie

- [1] T. Başar & G. Olsder, *Dynamic Noncooperative Game Theory*, SIAM, 1999.
- [2] T. Başar, *Hierarchical decision making in stochastic and deterministic systems*, Journal of Optimization Theory and Applications, Vol. 35, No. 4, 1981.
- [3] R. Bellman, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.
- [4] D. P. Bertsekas, *Nonlinear Programming*, 2nd Edition, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, 1999.
- [5] C. I. Chen and J. B. Cruz Jr, *Stackelberg solution for two-person games with biased information pattern*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol. 17, No. 6, 1972.
- [6] C. W. Clark, *Mathematical Bioeconomics : The Mathematical Theory of Fisheries Management*, 3rd Edition, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2010.
- [7] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, 1983.
- [8] F. H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pennsylvania, 1990.
- [9] F. H. Clarke, Yu. S. Ledyaev, R. J. Stern and P. R. Wolenski, *Nonsmooth Analysis and Control Theory*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [10] K. Hamid, *Programmation Mathématique bi-niveaux et Contrôle Optimal bi-niveaux*, Mémoire de Magister en Mathématiques (Option : Recherche Opérationnelle et Optimisation), Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, Juin 2010.
- [11] K. Louadj, *Résolution de problèmes paramétrés de contrôle optimal*, Thèse de Doctorat, Université de Bouira, 2012.
- [12] M. Minoux, *Programmation mathématique : théorie et algorithmes*, Bordas et C.N.E.T.-E.N.S.T., Paris, 1983.

- [13] OUIDJA, Daya. (2012). *Principe du maximum et méthode de tir*. Mémoire de Magister en Mathématiques, Option : Recherche Opérationnelle et Optimisation, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou.
- [14] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Wiley & Sons, 1962.
- [15] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.
- [16] S. P. Sethi & G. L. Thompson, *Optimal Control Theory : Applications to Management Science and Economics*, Springer, 2000.
- [17] J. A. Snyman, *Practical Mathematical Optimization : An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms*, Springer Science+Business Media, Inc., 2005.
- [18] H. Von Stackelberg, *Market Structure and Equilibrium*, Vienna : Julius Springer, 1934.
- [19] H. Von Stackelberg, *Market Structure and Equilibrium*, Springer, 1952.
- [20] E. Trélat, *Contrôle optimal : théorie et applications*, Vuibert, Paris, 2005.
- [21] J.J. Ye, *Necessary Conditions for Bilevel Dynamic Optimization Problems*, SIAM, 1995.

Résumé

Ce travail porte sur l'étude du contrôle optimal bi-niveaux dans un cadre hiérarchique de type leader-follower. Ce type de problème traite des situations où la décision du niveau supérieur dépend de la réaction optimale du niveau inférieur, ce qui rend l'analyse plus complexe que dans le contrôle optimal classique.

Pour étudier ce cadre, nous avons utilisé des outils issus du contrôle optimal, de l'analyse convexe et de l'analyse non régulière, ainsi que la fonction valeur du niveau inférieur et les gradients généralisés. L'objectif était de mettre en évidence les principales difficultés théoriques liées à la non-convexité et à la non-régularité du problème.

Une application à la régulation bio-économique de la pêche a permis d'illustrer concrètement l'intérêt du modèle. Cette étude montre que l'approche hiérarchisée constitue un outil pertinent pour analyser l'interaction entre exploitation économique et préservation des ressources naturelles.

Abstract

This work studies bi-level optimal control in a hierarchical leader-follower framework. In this setting, the decision made at the upper level depends on the optimal response of the lower level, which makes the problem more complex than classical optimal control.

To address this issue, we use tools from optimal control, convex analysis, nonsmooth analysis, the lower-level value function, and generalized gradients. The aim is to highlight the main theoretical difficulties related to nonconvexity and nonsmoothness.

An application to the bio-economic regulation of fisheries is presented to illustrate the model. This example shows that the hierarchical approach is a useful framework for describing the interaction between economic exploitation and natural resource preservation. endotherlanguage