

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIC
UNIVERSITÉ DE BOUIRA
FACULTE DES SCIENCES EXACTES
DEPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES



MEMOIRE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME DE MASTER EN
MATHÉMATIQUES

Option : Recherche opérationnelle

THÈME

Autour du principe du maximum de Pontriaguine : Théorie et applications

Présenté par : BOUFERKAS Yousra

REKKI Ikram

Devant le jury :

Mr. BIROUCHE Madjid	MAA	U. BOUIRA	Président
Mr. DEMMOUCHE Nacer	MCB	U. BOUIRA	Examineur
Mr. HAMID Karim	MCB	U. BOUIRA	Examineur
Mme OUIDJA Daya	MCB	U. BOUIRA	Promotrice

Année universitaire :2025/2026

Autour du principe du maximum de Pontriaguine : Théorie et applications

Résumé :

Dans ce travail, nous présentons les résultats obtenus à travers notre étude visant à résoudre un problème de contrôle optimal en utilisant le Principe du Maximum de Pontryaguine (PMP). Nous commençons par exposer les conditions nécessaires d'optimalité pour les systèmes continus. Elle est basée sur le Principe du Maximum de Pontriaguine, et qui consiste à réduire le problème de contrôle en un problème aux valeurs limites, puis le résoudre numériquement par une *méthode de tir*. Ensuite, nous discutons de quelques applications théoriques et fondamentales, notamment les problèmes de contrôle en temps minimal, qui approchent la solution exacte. Enfin, nous appliquons le Principe du Maximum de Pontryaguine pour résoudre un problème de contrôle optimal spécifique, à savoir le modèle de la ruche d'abeilles.

Mots clés : Contrôle optimal, optimisation, principe du maximum de Pontryaguine, méthode indirecte.

Around the Maximum Principle of Pontriagin : Theory and Applications

Abstract :

In this work, we present the results obtained through our study aiming to solve an optimal control problem using Pontryagin's Maximum Principle (PMP). We begin by outlining the necessary optimality conditions for continuous systems. It is based on the Principle of the Maximum of Pontriaguine, and which consists in reducing the problem of control to a problem in the limits, then in resolving it numerically by a *shooting method*. Next, we discuss several theoretical and fundamental applications, including time-optimal control problems, which approximate the exact solution. Finally, we apply Pontryagin's Maximum Principle to solve a specific optimal control problem, namely the beehive model.

Key words : Optimal control, optimization, Pontryagin's maximum principle, indirect method.

Dédicaces

Je dédie ce modeste travail et ma profonde gratitude à tous ceux qui se sont sacrifiés pour m'offrir les conditions propices à ma réussite :

À mon cher papa Abdelnour,

L'homme de peu de mots mais de grands gestes. Merci d'avoir cru en moi sans le dire, mais en le prouvant.

À ma chère maman Fatiha,

Ma reine, ma guerrière silencieuse. Si aujourd'hui je suis debout, c'est parce que tu as tenu le monde pour deux.

À ma famille,

*Pour les sourires dans les jours gris. À mon cher frère **Bilel** et à ma chère sœur **Dalel**, qui apportent toujours la joie à notre maison.*

À mon binôme Ikram,

Qui a partagé ce parcours avec moi et qui a été à mes côtés à travers toutes les moments de doute.

À mes vrais amis,

*Ceux qui ont tenu ma main dans l'ombre et ont partagé mes éclats de rire : **Chaima, Rafika, Sirine, Kaouther, Khadidja, Ikhlas, Ikram et Nedjla**. Vous avez été ma famille choisie.*

Ce mémoire, ce n'est pas juste un projet. C'est une revanche, une réponse aux doutes, et un cri de victoire. Il porte vos noms en silence.

Yousra

Dédicaces

Avec l'expression de ma profonde reconnaissance, je dédie ce modeste travail à ceux à qui, quels que soient les mots choisis, je n'arriverais jamais à exprimer mon amour sincère.

À l'homme, précieux cadeau de Dieu, à qui je dois ma vie, ma réussite et tout mon respect : mon cher père.

À la femme qui a souffert sans jamais me laisser souffrir, qui n'a jamais dit non à mes exigences et qui n'a épargné aucun effort pour me rendre heureuse : mon adorable mère.

À mes chers frères et sœurs HOCINE, AHLEM et AMINA, qui savent toujours comment apporter la joie et le bonheur à toute la famille.

À ceux que la chance a mis sur mon chemin et qui ont embelli ma vie : HASSAN et YASMINE.

À la petite fleur et la joie de notre maison, notre unique petite-fille INES, ainsi qu'aux futures petites étoiles qui viendront illuminer nos vies, si Dieu le veut.

À mes chères cousines, particulièrement AMIRA et RIMA, pour leur affection et leur présence chaleureuse.

À mon binôme YOUSRA pour son soutien moral, sa patience et sa compréhension tout au long de ce projet.

À mes amies : NADA, ASMA, HIND, CHAHRA, BOUCHRA, FERIAL et HAGER, pour leur amitié sincère et les moments inoubliables passés ensemble.

Un grand merci à NABIL, qui a été un véritable pilier et un soutien précieux lors de ma première expérience professionnelle, et qui n'a cessé de me conseiller et de m'encourager tout au long de mon parcours. Que Dieu le protège.

Merci pour leur amour et leurs encouragements.

Ikram

Remerciements

Avant tout, nous remercions le bon Dieu tout-puissant qui nous a accordé la patience, la force et la volonté nécessaires pour accomplir ce modeste travail.

En préambule à ce mémoire, nous tenons à exprimer notre profonde gratitude et nos remerciements les plus sincères à notre encadreuse, Mme OUIDJA Daya. Bien plus qu'une directrice de recherche, elle a été pour nous un véritable guide. Nous la remercions infiniment pour sa générosité scientifique, sa bienveillance constante, sa patience exemplaire et son soutien moral infaillible tout au long de la réalisation de ce travail. Que ce modeste mémoire soit le témoignage de notre immense respect et de notre haute considération pour sa noble personne.

Nos vifs remerciements s'adressent également aux honorables membres du jury qui ont honoré ce travail en acceptant de l'évaluer et de l'enrichir par leurs remarques constructives.

Enfin, nous tenons à remercier chaleureusement tous les enseignants de notre établissement, ainsi que toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à l'aboutissement de ce projet d'études.

table de notation

$x(t)$: vecteur d'état du système à l'instant t .

$u(t)$: vecteur de contrôle (commande) à l'instant t .

U : ensemble des contrôles admissibles.

$J(u)$: fonctionnelle de coût (critère d'optimalité).

$f(x, u, t)$: dynamique du système (fonction de transition).

$H(x, u, \lambda, t)$: fonction Hamiltonienne (le Hamiltonien).

$P(t)$: vecteur d'état adjoint.

$V(x, t)$: fonction de valeur associée à l'équation HJB.

t_f : temps final.

$\mathbb{R}^n$: espace vectoriel réel à n dimensions.

max : maximum.

min : minimum.

Table des matières

Introduction Générale	1
1 Généralités sur les équations différentielles	3
1.1 Intorduction	3
1.2 Définitions fondamentales	3
1.3 Types d'équations différentielles	4
1.3.1 Equation différentielle à variables séparées	4
1.3.2 Equation différentielle linéaire d'ordre 1	5
1.3.3 Equation d'Euler-Lagrange	6
1.4 Résolution numérique des équations différentielles	8
1.4.1 Le problème de Cauchy	8
1.4.2 Méthode de Newton	10
1.4.3 Méthode d'Euler	11
1.4.4 Méthode de Runge-Kutta	11
2 Fondements théoriques du contrôle optimal	15
2.1 Introduction	15
2.2 Théorie du contrôle optimal	15
2.2.1 Objet de la commande	15
2.2.2 Condition initiale du système	16
2.2.3 Le but de la commande	16
2.2.4 Classe des commandes admissibles	16
2.3 Formulation du problème	17
2.4 Typologie des problèmes de commande optimale	18
2.5 L'existence des trajectoires de contrôle optimal	19
2.6 Contrôlabilité	20
2.6.1 Accessibilité	20
2.7 Contrôlabilité des systèmes linéaires	21
2.7.1 Contrôlabilité des systèmes non linéaires	26
2.8 Méthodes de résolution	27

2.8.1	Méthode indirecte	28
2.8.2	Méthode direct	28
3	Principe du Maximum de Pontriaguine	29
	Introduction	29
3.1	Position de problème	29
3.2	Conditions de transversalité	32
3.3	Problème en temps minimum	33
3.3.1	Formulation du problème	33
3.4	Nature des solutions	37
3.4.1	Solution bang-bang	37
3.4.2	Solution bang-singulier	37
3.5	Les cas du Principe de Maximum de Pontryagin (PMP)	38
3.5.1	Cas sans contrainte (État final $x(t_f)$ entièrement libre) :	39
3.5.2	Cas avec contraintes sur l'état final :	39
3.5.3	Conclusion	40
4	Applications du Principe du Maximum de Pontriaguine	41
4.1	Introduction et Problématique du Chapitre	41
4.2	Mise en œuvre numérique du Principe du Maximum	42
4.2.1	Méthode des équations adjointes pour les problèmes en temps continu	42
4.2.2	Algorithmes de résolution numérique : La méthode de tir	43
4.3	Applications à des problèmes réels	44
4.3.1	Modèle I : Problème du temp minimal	44
4.3.2	Modèle II : Tracé optimal d'une voie de chemin de fer	50
4.3.3	Modèle III : Cas non-linéaire : Ruch d'abeilles	52
4.4	Discussions et Perspectives	55
4.4.1	Analyse Critique, Avantages et Limites du Principe du Maximum	55
4.4.2	Avantages structurels et conceptuels du formalisme	56
4.4.3	Limites inhérentes et verrous technologiques	56
4.4.4	PMP versus Calcul des Variations	57
4.4.5	PMP versus Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)	57
	Conclusion générale	59
	Bibliographie	61

Introduction Générale

*"Ce qui est créé par l'esprit
est plus vivant que la matière".*
Boudelaire.

En mathématiques, une équation différentielle est une équation qui met en relation une fonction et ses dérivées. En pratique, les fonctions représentent généralement des quantités physiques, leurs dérivées représentent les taux de changement de ces quantités, et une équation différentielle décrit la relation complexe entre les deux. Comme ces relations dynamiques sont très fréquentes dans la modélisation des phénomènes réels, les équations différentielles occupent une place de premier plan dans beaucoup de disciplines scientifiques, dont la théorie du contrôle.[\[2\]](#)

La théorie du contrôle est une discipline fondamentale des sciences de l'ingénieur et des mathématiques appliquées, reposant sur une base mathématique solide, qui étudie le comportement, la stabilité et la commande des systèmes dynamiques [\[27\]](#). Une question de base se pose avant d'optimiser un système : peut-on faire passer ce système d'un état donné à un autre ? C'est le concept de contrôlabilité. Cette propriété fondamentale vérifiée, l'objectif principal déplace son intérêt vers une performance supérieure, à savoir trouver le contrôle optimal [\[16\]](#).

L'optimisation de commande est une méthode mathématique rigoureuse qui permet de déterminer les valeurs optimales des variables de décision d'un système afin qu'il suive une trajectoire idéale, c'est-à-dire qu'il atteigne les valeurs maximales ou minimales d'une propriété ou d'une fonction de coût (ou critère de performance). Le problème mathématique fourni inclut la fonction de coût, qui dépend des variables d'état et de contrôle. Un ensemble d'équations décrit le contrôle optimal pour définir les trajectoires des variables de contrôle, dont l'objectif est de minimiser ou maximiser la fonction de coût. On peut déduire de façon élégante ce contrôle optimal soit en utilisant le principe du maximum de Pontriaguine comme condition nécessaire d'optimalité, soit en utilisant la programmation dynamique de Bellman [\[23\]](#).

Le présent mémoire se décompose en quatre chapitres principaux, organisés de la façon suivante :

- **Le premier chapitre** est dédié à l'étude des fondements des **équations différentielles**. Nous y abordons leurs différents types ainsi que les méthodes de résolution numérique

(**solutions numériques**) indispensables pour appréhender les systèmes dont les solutions analytiques sont complexes ou impossibles à obtenir.

- **Le deuxième chapitre** est consacré au **contrôle optimal**. Nous y introduisons les concepts clés de la théorie du contrôle, l'objet et le but de la commande, la propriété essentielle de **contrôlabilité**, ainsi que les différents types de problèmes optimaux. Enfin, nous passons en revue les **méthodes de résolution** directes et indirectes.
- **Le troisième chapitre** traite en détail du **Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP)**. Dans cette partie, nous développons rigoureusement la position du problème, le problème spécifique en **temps minimal**, ainsi que des applications pratiques illustrant la mise en ?uvre théorique de ce principe.
- **Le quatrième et dernier chapitre** est entièrement réservé à une **application** concrète. Ce chapitre met en oeuvre les outils théoriques développements précédemment à travers des simulations numériques afin d'évaluer et d'analyser les performances et le comportement d'un système commandé optimal.

Généralités sur les équations différentielles

1.1 Introduction

Une *équation différentielle* est une relation entre une ou plusieurs fonctions inconnues et leurs dérivées. L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de différenciation auquel une des fonctions inconnues a été soumise.

Les équations différentielles sont utilisées pour construire des modèles mathématiques de phénomènes physiques, biologiques, etc [6]. Par conséquent, les équations différentielles représentent un vaste champ d'étude, aussi bien en mathématiques pures qu'en mathématiques appliquées. [7].

1.2 Définitions fondamentales

Définition 1.1. Soit $x = \varphi(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'elle soit dérivable jusqu'à l'ordre n au moins et que, en tout point t de I , il existe entre x et ses n premières dérivées une relation de la forme :

$$\phi(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^n x}{dt^n}) = 0. \quad (1.1)$$

Cette équation, dans laquelle la fonction $x = \varphi(t)$ est considérée comme indéterminée est appelée *équation différentielle d'ordre n* .

Bien entendu, la même expression s'applique à toute équation qui peut se ramener à la forme (1.1).

Un cas particulier important est celui où l'équation différentielle est de la forme :

$$\frac{d^n x}{dt^n} = \phi(t, x, \frac{dx}{dt}, \dots, \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}}) \quad (1.2)$$

qui est dite *forme normale*, cette expression traduit l'idée selon laquelle une équation différentielle est, en principe, destinée à permettre de calculer $\frac{d^n x}{dt^n}$ en fonction de $t, x, \dot{x}, \dots, x^{(n-1)}$.

Remarque 1.1. L'équation (1.2) est dite *autonome* lorsqu'elle ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t , c'est-à-dire lorsqu'elle est de la forme

$$\dot{x} = f(x).$$

Définition 1.2. Toute fonction $x = \varphi(t)$ $t \in I$ qui vérifie l'équation (1.1) en tout point de l'intervalle I est appelée *solution* ou *intégrale* de cette équation.

Définition 1.3. Le graphe Γ d'une solution quelconque d'une équation différentielle est appelé *arc intégrale* ou *courbe intégrale*.

Définition 1.4. Le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = f(t, x) & \text{pour } t \in [a, b], \\ x(0) = x_0 & \text{pour } 0 \in [a, b], \end{cases}$$

avec $f : [a, b] \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, est appelé *problème de cauchy*. $(0, x_0)$ est appelée *condition initiale*.

Remarque 1.2. Le sens physique de la condition initiale est très intuitif. Un système physique régi par une équation différentielle du premier ordre, voit son état déterminé par une seule valeur qui dépend en général du temps. La connaissance de cet état à un instant donné, détermine l'état du système à tout instant.

1.3 Types d'équations différentielles

1.3.1 Equation différentielle à variables séparées

Une équation différentielle est dite à variables séparées si elle peut s'écrire sous la forme :

$$\dot{x} = g(x)f(t).$$

Pour la résoudre, on intègre les deux membres séparément, sans oublier les constantes d'intégration.

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = g(x).f(t) \Rightarrow \frac{dx}{g(x)} = f(t)dt,$$

par intégration, on obtient :

$$\int \frac{dx}{g(x)} = \int f(t)dt.$$

Exemple 1.1. Résolvons l'équation suivante :

$$x - \frac{\dot{x}}{2t} = 1 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

On écrit cette équation sous forme différentielle puis on sépare les variables :

$$x - \frac{dx}{2tdt} = 1 \Leftrightarrow x - 1 = \frac{dx}{2tdt} \Leftrightarrow \frac{dx}{x-1} = 2tdt.$$

Par intégration de cette relation, il vient :

$$\int \frac{dx}{x-1} = \int 2t \cdot dt \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-1}{k}\right) = t^2 \Leftrightarrow x-1 = ke^{t^2}.$$

En on déduit que l'ensemble des solutions est constitué des fonctions :

$$x \mapsto 1 + ke^{t^2}.$$

1.3.2 Equation différentielle linéaire d'ordre 1

Une équation différentielle est dite *linéaire* si elle peut s'écrire sous la forme :

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = c(t) \tag{1.3}$$

où a , b , et c sont des fonctions de la variable réelle t , continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ sur lequel la fonction $a(t)$ ne s'annule pas.

Définition 1.5. On appelle "*équation différentielle homogène*" associée à l'équation différentielle (1.3) l'équation :

$$a(t)\dot{x} + b(t)x = 0 \tag{1.4}$$

Les solutions de l'équation (1.4) sont données :

$$t \mapsto ke^{\int \frac{b(t)}{a(t)} dt},$$

où k est une constante réelle quelconque.

Les solutions de l'équation (1.3) s'obtiennent en ajoutant une solution particulière de cette équation à la solution générale de l'équation homogène associée.

Remarque 1.3. Certaines équations non linéaires se ramènent à des équations linéaires par changement de variables, c'est le cas par exemple des équations de *Bernoulli* :

$$\dot{x} = p(t)x + q(t)x^\alpha.$$

Les fonctions p et q étant continues.

Lorsque α vaut 0 ou 1 l'équation est linéaire.

Sinon : en posant $y = x^{1-\alpha}$, on se ramène à l'équation linéaire suivante :

$$\frac{\dot{y}}{1-\alpha} = p(t)y + q(t).$$

C'est aussi le cas de l'équation de Ricatti :

$$\dot{x} = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$$

qui se ramène à une équation de Bernoulli avec $\alpha = 2$, dès qu'on connaît une solution particulière $x_1(t)$. En effet, il suffit de poser $x = x_1 + y$ et de le remplacer dans l'équation de Ricatti, pour montrer que la variable y vérifie l'équation de Bernoulli suivante :

$$\dot{y} = (2a(t)x_1(t) + b(t))y(t) + a(t)y^2(t).$$

Remarque 1.4. Les équations linéaires d'ordre p se ramenant à des systèmes d'équations d'ordre 1 :

$$x^{(p)} + a_{p-1}x^{(p-1)} + \dots + a_1\dot{x} + a_0x = 0$$

équivalent au système :

$$\begin{cases} \dot{x} = x_1 \\ \dot{x}_1 = x_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{p-2} = x_{p-1} \\ \dot{x}_{p-1} = -a_{p-1}x_{p-1} - \dots - a_1x_1 - a_0x. \end{cases}$$

En posant :

$$X = \begin{pmatrix} x \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{p-1} \end{pmatrix} \text{ on obtient } \dot{X} = AX, \text{ avec : } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & 1 \\ -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{p-1} \end{pmatrix}.$$

1.3.3 Equation d'Euler-Lagrange

Soit $g : [0, t_f]_t \times \mathbb{R}_x \times \mathbb{R}_v \rightarrow \mathbb{R}$, une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour toute fonction $x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on note $\dot{x}$ sa dérivée, et on pose :

$$J(x) = \int_0^{t_f} g(t, x(t), \dot{x}(t)) dt.$$

Théorème 1.1. [6] Si x^* est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ qui donne à J une valeur extrême $J^* := J(x^*)$ parmi toutes les fonctions $x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant

$$x(0) = x_0; \quad x(t_f) = x_{t_f}, \quad (1.5)$$

alors nécessairement x^* satisfait à la formule d'Euler-Lagrange :

$$g'_x(t, x(t), \dot{x}(t)) = \frac{d}{dt}(g'_v(t, x(t), \dot{x}(t))). \quad (1.6)$$

Signalons que, réciproquement, si $x^* : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant l'équation d'Euler-Lagrange (1.6) et si pour tout $t \in [0, t_f]$, la fonction $g_t : (x, v) \mapsto g(t, x, v)$ est *concave*, alors J^* est le maximum des $J(x)$ pour la fonction $x : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ satisfaisant (1.5), si de plus les g_t sont *strictement concaves*, x^* est l'*unique* maximum parmi ces fonctions.

Démonstration. L'idée est d'utiliser le fait que toutes les dérivées partielles de la fonctionnelle J dans toutes les directions x satisfaisant (1.5) sont nécessairement nulles, et d'écrire x sous la forme $x = x^* + hX$.

Soit $X : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $X(t_f) = X(0) = 0$ et soit $\phi_X(h) = J(x^* + hX)$. On a $\phi_X(0) = J^*$ et comme ceci est la plus grande valeur de J , 0 est un extrémum de ϕ_X , d'où $\frac{d}{dh}\phi_X(0) = 0$, en d'autres termes, en dérivant sous le signe intégral puis en intégrant par partie, on a successivement :

$$\begin{aligned} 0 = \frac{d}{dh}\phi_X(0) &= \frac{d}{dh}J(x^* + hX)|_{h=0} \\ &= \int_0^{t_f} \frac{d}{dh}g(t, x^*(t) + hX(t), \dot{x}^*(t) + h\dot{X}(t))|_{h=0} dt \\ &= \int_0^{t_f} g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t) + g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))\dot{X}(t) dt \\ &= \int_0^{t_f} [g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))]X(t) dt \\ &\quad + [g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))X(t)]_{t=0}^{t=t_f} \\ &= \int_0^{t_f} G(t)X(t) dt. \end{aligned}$$

Puisque $X(t_f) = X(0) = 0$, avec $G(t) = g'_x(t, x^*(t), \dot{x}^*(t)) - \frac{d}{dt}g'_v(t, x^*(t), \dot{x}^*(t))$, qui est continue puisque g est de classe $\mathcal{C}^2$. Le théorème découle donc immédiatement du lemme suivant, souvent appelé "*lemme fondamental du calcul des variations*".

Lemme 1.1. [6] Soit $G : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ continue. Si pour toute fonction continue $X : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $X(t_f) = X(0) = 0$, et on a $\int_0^{t_f} G(t)X(t)dt = 0$ alors nécessairement la fonction G est nulle.

Démonstration. Soit $\varphi_\varepsilon : [0, t_f] \rightarrow [0, 1]$ continue telle que $\varphi_\varepsilon(t_f) = \varphi_\varepsilon(0) = 1$ et

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_f} \varphi_\varepsilon = 0,$$

par exemple $\varphi_\varepsilon(t) = \exp t(t - t_f)/\varepsilon$, alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{t_f} G^2 \varphi_\varepsilon = 0$$

puisque

$$0 \leq \int_0^{t_f} G^2 \varphi_\varepsilon \leq \max(G^2) \int_0^{t_f} \varphi_\varepsilon.$$

Posons

$$X(t) = G(t)(1 - \varphi_\varepsilon(t)),$$

on a :

$$0 = \int_0^{t_f} G(t)X(t)dt = \int_0^{t_f} G^2(t)dt - \int_0^{t_f} G^2(t)\varphi_\varepsilon(t)dt.$$

En passant à la limite sur ε , on a $\int_0^{t_f} G^2(t)dt = 0$ et donc $G \equiv 0$.

Nous renvoyons le lecteur à consulter [6], pour l'application pratique de cette équation en contrôle optimal.

1.4 Résolution numérique des équations différentielles

Il existe plusieurs méthodes pour la résolution des équations différentielles : les méthodes analytiques et les méthodes numériques.

Les méthodes analytiques ne sont pas suffisantes pour résoudre les problèmes d'équations différentielles et ne sont possibles que dans un nombre de cas très restreints.

La résolution de la plupart des équations différentielles requiert donc l'utilisation des méthodes numériques, chacune de ces méthodes peut être appliquée à la résolution de la plupart des équations différentielles, parmi ces méthodes on citera quelques une dans ce qui suit :

1.4.1 Le problème de Cauchy

Le problème de Cauchy (aussi appelé *problème aux valeurs initiales*) consiste à trouver la solution d'une équation différentielle ordinaire (EDO), scalaire ou vectorielle, satisfaisant des conditions initiales. Par exemple, dans le cas scalaire, si I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant le point 0, le problème de Cauchy associé à une EDO du premier ordre s'écrit :
trouver une fonction réelle $x(t) \in \mathcal{C}^1(I)$ solution du système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & t \in I \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (1.7)$$

où $f(t, x)$ est une fonction donnée à valeur réelle définie sur le produit $S = I \times]-\infty, +\infty[$ et continue par rapport aux deux variables. Si f ne dépend pas explicitement de t (i.e. $f(t, x(t)) = f(x(t))$), l'équation différentielle est dite *autonome*.

On obtient en intégrant (1.7) entre 0 et t

$$x(t) = x_0 + \int_0^t f(\tau, x(\tau)) d\tau, \quad t \in I. \quad (1.8)$$

La solution de (1.7) est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et satisfait l'équation intégrale (1.8). Inversement, si $x(t)$ est définie par (1.8), alors elle est continue sur I et $x(0) = x_0$.

Existence et unicité de solution

Rappelons maintenant deux résultats d'existence et d'unicité pour (1.7) :

1- Existence locale et unicité : on suppose $f(t, x)$ localement lipschitzienne en $(0, x_0)$ par rapport à x , ce qui signifie qu'il existe une boule ouverte $J \subseteq I$ centrée en 0 de rayon r_J , une boule ouverte Γ centrée en x_0 de rayon r_Γ et une constante $K > 0$ telles que

$$\forall t \in J, \forall (x_1, x_2) \in \Gamma, \|f(t, x_2) - f(t, x_1)\| \leq K \|x_2 - x_1\|. \quad (1.9)$$

Sous cette hypothèse, le problème de Cauchy (1.7) admet une unique solution dans une boule ouverte de centre 0 de rayon r_0 avec $0 < r_0 < \min(r_J, r_\Gamma/M, 1/K)$, où M est le maximum de $|f(t, x)|$ sur $J \times \Gamma$. Cette solution est appelée *solution locale*.

Remarquer que la condition (1.9) est automatiquement vérifiée si la dérivée de f par rapport à x est continue : en effet, dans ce cas, il suffit de prendre pour K le maximum de $|\partial f(t, x)/\partial x|$ sur $\overline{J \times \Gamma}$.

2- Existence globale et unicité : le problème de Cauchy admet une *solution globale* unique si on peut prendre dans (1.9)

$$J = I, \quad \Gamma = \mathbb{R},$$

c'est-à-dire, si f est *uniformément lipschitzienne* par rapport à x .

Par exemple, soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x} & t \in \mathbb{R} \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

Cette équation admet plusieurs solutions de la forme :

$$x(t) = \begin{cases} (t - a)^2 & \text{pour } t \geq a \\ 0 & \text{pour } t \leq a, \end{cases}$$

obtenues pour différentes valeurs du paramètre a , car la fonction $x(t)$ n'est pas lipschitzienne.

Remarque 1.5. L'intervalle de définition d'une solution dépend de la condition initiale, par exemple :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x^2, & t \in \mathbb{R} \\ x(1) = -1, \end{cases}$$

admet comme solution $x(t) = -1/t$ qui n'est pas définie en $t = 0$ bien que la fonction $f(t, x) = x^2$ soit continue.

En vue de l'analyse de stabilité du problème de Cauchy, on considère le problème suivant

$$\begin{cases} \dot{y} = f(t, y(t)) + \delta(t), & t \in I \\ y(t) = x_0 + \delta_0, \end{cases} \quad (1.10)$$

où $\delta_0 \in \mathbb{R}$ et où δ est une fonction continue sur I . Le problème (1.10) est déduit de (1.7) en perturbant la donnée initiale x_0 et la fonction f . Caractérisons à présent la sensibilité de la solution y par rapport à ces perturbations.

1.4.2 Méthode de Newton

Cette méthode à été mise au point par Newton en 1686, c'est pourquoi elle porte son nom. C'est l'une des méthodes les plus utilisées pour la recherche des racines des équations non linéaires. C'est une méthode simple dont la convergence est rapide.

Supposons $f \in C^1(I)$ et $f'(\alpha) \neq 0$ (α une racine simple de f). En se donnant la valeur initiale x_0 , on obtient la méthode de Newton :

$$x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad \forall n \geq 0$$

Algorithme de la méthode de Newton

- i. Etant donné, ε , un critère d'arrêt.
- ii. Etant donné N , le nombre maximal d'itérations.
- iii. Etant donné x_0 , une valeur initiale de la solution.
- iv. Effectuer : $x_{(n+1)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.
- v. Si : $\frac{|x_{(n+1)} - x_n|}{|x_{n+1}|} < \varepsilon$:
 - convergence atteinte.
 - écrire la solution x_{n+1} .
 - arrêt.
- vi. Si le nombre maximal d'itération N est atteint.
 - Convergence non atteinte en N itérations.
 - arrêt.
- vii. Retour à l'étape iv.

1.4.3 Méthode d'Euler

La méthode de Leonhard Euler (1707-1783) est la méthode la plus simple de résolution numérique d'équations différentielles ordinaires. Elle possède une belle interprétation géométrique et son emploi est facile. Toutefois, elle est relativement peu utilisée en raison de sa faible précision.

La résolution du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y} = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0, \end{cases}$$

conduit au schéma suivant :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \end{cases}$$

En pratique, la méthode d'Euler n'est pas utilisée car elle n'offre pas une précision suffisante. Cette méthode est convergente et du 1^{er} ordre car l'erreur de consistance (de troncature ou de discrétisation, est la différence entre la valeur discrétisée et la valeur exacte) vaut :

$$|y(x_i) - y_i| = \frac{1}{2}h^2 f'(c, y_i), \quad \text{avec } c \in [x_{i-1}, x_i]$$

mais cette méthode dite *explicite* est souvent instable c'est le cas si la fonction est linéaire, par exemple :

$$\dot{y} = f(x, y) = -ay \quad \text{avec } a > 0.$$

Le schéma d'Euler est :

$$y_{i+1} = y_i - ahy_i = (1 - ah)y_i$$

est instable dès que $h > \frac{2}{a}$, car dans ce cas y_i tend vers l'infini lorsque i tend vers l'infini.

1.4.4 Méthode de Runge-Kutta

Carl Runge (1856-1927) et Martin Kutta (1867-1944) ont proposé en 1895 de résoudre le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} \dot{y}(x) = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0. \end{cases}$$

En introduisant un schéma numérique de la forme :

$$\begin{cases} x_{i+1} = x_i + h \\ y_{i+1} = y_i + h \cdot \phi(x_i, y_i, h_i), \end{cases}$$

où la fonction d'incrément ϕ est une approximation de $f(x, y)$ sur l'intervalle $[x_i, x_{i+1}]$.

Supposons un entier r , une matrice A carrée d'ordre r dont les éléments triangulaires supérieurs sont nuls y compris la diagonale, et un vecteur $b = (b_1, b_2, \dots, b_r)$.
L'algorithme de Runge-Kutta est le suivant :

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(b_1 k_1 + \dots + b_r k_r) \\ x_{i+1} = x_i + h \\ k_j = f(x_i + c_j h, y_i + h(a_{j1} k_1 + \dots + a_{jr} k_r)). \end{cases}$$

Le vecteur b vérifie $b_1 + b_2 + \dots + b_r = 1$.

Les coefficients c_j sont les sommes des éléments de la ligne j de la matrice A .

Dans ces méthodes le pas h peut facilement varier, une méthode de Runge-Kutta est entièrement déterminée par la donnée de l'entier r , du vecteur b et de la matrice A .

Méthode d'ordre 1 ($r = 1$)

Pour $b = 1$, $a_{11} = 0$, l'algorithme $y_{i+1} = y_i + h.f(x_i, y_i)$, se réduit à la méthode d'Euler.

Méthode d'ordre 2 ($r = 2$)

Pour déterminer toutes les méthodes d'ordre 2, cherchons une fonction ϕ de la forme :

$$\phi = b_1 k_1 + b_2 k_2$$

où les coefficients k_1 et k_2 sont donnée par :

$$\begin{cases} k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + ch, y_i + ahk_1). \end{cases}$$

Développons y_{i+1} au voisinage du point (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y(x_i) + hf(x_i, y(x_i)) + \frac{h^2}{2} \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y(x_i)) + f(x_i, y(x_i)) \right] \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y(x_i)).$$

Développons de même k_2 au voisinage du point (x_i, y_i) :

$$y_{i+1} = y_i + hb_1 k_1 + hb_2 [f(x_i, y_i) + hc \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_i, y_i) + ahf(x_i, y_i) \frac{\partial f}{\partial y}(x_i, y_i) \right] + o(h^2)].$$

En identifiant les deux expressions on obtient :

$$\begin{cases} y(x_i) = y_i \\ f(x_i, y_i) = (b_1 + b_2)f(x_i, y_i) \\ 1/2 f'_x + 1/2 f'_y f = b_2 (c f'_x + a f'_y f), \end{cases}$$

on en déduit que :

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$b_2c = b_2a = \frac{1}{2}$$

soit en posant :

$b_2 = \theta$, $b_1 = 1 - \theta$ et $c = a = \frac{1}{2}$, on retrouve les trois cas standards :

La méthode d'Euler s'obtient pour $\theta = 0$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i).$$

La méthode de Heun (Euler-Cauchy) est obtenue pour $\theta = \frac{1}{2}$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + k_2)/2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h, y_i + hk_1). \end{cases}$$

La méthode de Runge-Kutta (proprement dite) est obtenue pour $\theta = 1$

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + hk_2 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + \frac{h}{2}, y_i + hk_1). \end{cases}$$

Méthode d'ordre 3 (r = 3)

L'algorithme de Runge-Kutta d'ordre 3 correspond au cas $b = (1/6, 2/3, 1/6)$, et la matrice :

$$A \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

L'algorithme effectue à chaque pas le calcul de trois facteurs k_i .

$$\begin{cases} y_{i+1} = y_i + h.(k_1 + 4k_2 + k_3)/6 \\ k_1 = f(x_i, y_i) \\ k_2 = f(x_i + h/2, y_i + hk_1/2) \\ k_3 = f(x_i + h, y_i - hk_1 + 2hk_2). \end{cases}$$

Algorithme de Runge-Kutta d'ordre 4

- i. Etant donné un pas de temps h , une condition initiale (x_0, y_0) et un nombre maximal d'itérations N .
- ii. Pour $0 \leq i \leq N$:

$$k_1 = hf(x_i, y_i)$$

$$k_2 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_3 = hf(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k_1}{2})$$

$$k_4 = hf(x_i + h, y_i + k_3)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$x_{i+1} = x_i + h$$

$$\text{Ecrire } x_{i+1} \text{ et } y_{i+1}$$

iii. L'itération se termine quand $i + 1 = N$.

Remarque 1.6. La méthode de Rung-Kutta d'ordre 4 est très fréquemment utilisée car elle nous permet d'obtenir des résultats d'une grande précision. En fait plus l'ordre d'une méthode est élevé, plus elle devient plus précise.

Conclusion

La modélisation des problèmes de contrôle se fait généralement par des équations différentielles. Ceci procure aux équations différentielles un rôle majeur dans la théorie du contrôle. La résolution numérique des équations différentielles est le domaine de l'analyse numérique où les applications sont le plus nombreuses.

Fondements théoriques du contrôle optimal

2.1 Introduction

Tous les systèmes physiques ont besoin d'énergie pour fonctionner. Il est donc important de chercher à réduire cette consommation le plus possible, tout en restant proche de l'objectif à atteindre.

Ainsi, quand on veut fabriquer un produit, il est naturel de chercher un bon compromis. On veut d'un côté avoir une qualité et une quantité maximales pour le produit fini, et d'un autre côté, dépenser le moins possible d'énergie et de matière première. Il faut aussi réduire au maximum les inconvénients ou les pollutions causés par cette fabrication.

Si on a un modèle mathématique qui décrit ce système physique, et si on choisit un objectif à minimiser (sous forme d'une fonctionnelle), on peut alors écrire le problème mathématiquement et chercher les meilleures solutions possibles (solutions optimales)[14].

2.2 Théorie du contrôle optimal

Le problème classique du contrôle optimal se définit à travers les éléments fondamentaux suivants :

2.2.1 Objet de la commande

Un système dynamique peut dépendre d'un grand nombre de grandeurs ou paramètres. On considère ici que n variables sont indispensables pour caractériser pleinement son évolution. Déterminer ces variables et modéliser le comportement du système en fonction d'elles représente une phase cruciale, appelée l'étape de modélisation mathématique.

Ces grandeurs, appelées variables d'état, sont désignées par x_i , avec $i = 1, \dots, n$. Étant donné que le système se transforme au cours du temps, chaque x_i est une fonction de la variable

temporelle t (notée implicitement x_i au lieu de $x_i(t)$ pour alléger l'écriture). L'évolution de ces n variables d'état est régie par un système de n équations différentielles ordinaires du premier ordre sur un horizon temporel $T = [0, t_f]$. Ces équations prennent la forme générale suivante :

$$\dot{x}^i = f^i(t, x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m), \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.1)$$

D'autre part, les variables de contrôle (ou commandes) sont notées $u_j(t)$, avec $j = 1, \dots, m$. On suppose généralement que ces fonctions sont intégrables par rapport au temps t , ce qui facilite grandement l'analyse théorique lorsque les commandes u_j sont connues. Néanmoins, cette condition d'intégrabilité globale est parfois trop stricte, car dans les applications réelles, ces fonctions peuvent être simplement continues par morceaux ou appartenir à la catégorie des commandes de type Bang-Bang.

2.2.2 Condition initiale du système

L'état initial du système, défini par $x_0 = x(0)$, représente un vecteur connu au sein de l'espace des phases. En pratique, les différentes composantes de $x(t)$ et de x_0 possèdent une signification physique concrète : elles peuvent exprimer la position, la vitesse, la température, ou n'importe quel autre paramètre mesurable du système.

2.2.3 Le but de la commande

Dans le cadre d'un problème de contrôle, l'objectif principal de la commande est de transférer le système d'un état initial donné $x_0 = x(0)$ (où $x_0 \in M_0$) vers un autre état final désiré $x^* = x(t_f)$ (où $x^* \in M_1$). Ici, M_0 désigne l'ensemble de départ (ou configuration initiale) et M_1 représente l'ensemble d'arrivée (ou configuration cible).

2.2.4 Classe des commandes admissibles

L'ensemble des contrôles admissibles est noté U . Selon la nature du problème, cet ensemble peut regrouper des commandes non bornées, bornées ou encore de type Bang-Bang.

Commande bornée

Dans de nombreuses applications de contrôle, il est possible d'encadrer les valeurs de la commande $u_j(t)$ par des valeurs minimales et maximales constantes. Par la suite, nous allons nous intéresser à ce genre de situations où $a_j \leq u_j \leq b_j$. Il est utile de remarquer que l'on peut exprimer u_j en fonction d'une nouvelle variable v_j en posant :

$$u_j = \frac{1}{2}(a_j + b_j) + \frac{1}{2}(a_j - b_j)v_j \quad (2.2)$$

De cette manière, la variable v_j préserve la propriété d'intégrabilité et vérifie l'inégalité $-1 \leq v_j \leq 1$. Par conséquent, lorsque l'ensemble U est borné, il est toujours plus simple et pratique de ramener l'étude à des commandes comprises entre -1 et 1 .

Commande Bang-Bang

On suppose ici que U est un polyèdre (plus précisément un cube) $[-1, 1]^m$ dans $\mathbb{R}^m$. Une commande $u \in U$ est qualifiée de commande Bang-Bang si, à chaque instant t et pour tout indice $j = 1, \dots, m$, on a la relation $|u_j(t)| = 1$. En d'autres termes, une commande Bang-Bang est une fonction qui change de valeur de manière brusque, en possédant au moins un point de commutation (switch).

Contrôle en boucle ouverte

Dans un problème de contrôle en boucle ouverte, l'entrée de contrôle $u(t)$ est déterminée uniquement en fonction du temps t , sans dépendance directe de l'état actuel $x(t)$. Ainsi, la fonction du contrôle se présente sous la forme suivante :

$$u(t) = \phi(t)$$

où $\phi(t)$ est une fonction de temps qu'on détermine en résolvant un problème d'optimisation.

Contrôle en boucle fermée

Dans un problème de contrôle en boucle fermée (feedback), la commande d'entrée $u(t)$ est déterminée en fonction à la fois du temps t et de l'état actuel $x(t)$. Cela permet à la loi de commande de s'adapter dynamiquement aux changements de l'état du système, la rendant plus robuste face aux perturbations et aux incertitudes. Ici, le contrôle $u(t)$ dépend de l'état $x(t)$, et se présente sous la forme :

$$u(t) = \phi(t, x(t))$$

où $\phi(t, x(t))$ est la loi du contrôle feedback.

2.3 Formulation du problème

Le problème de contrôle optimal peut être énoncé de la manière suivante, dans la classe des commandes constantes par morceaux $U = \{u(t), t \in T = [0, t_f]\}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } J(u(t)) = c'x(t_f) + \int_0^{t_f} L(x, u, t)dt \\ \text{sous les contraintes :} \\ \dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t), \quad x(0) = x_0 \\ Hx(t_f) = g \\ |u(t)| \leq 1, \quad t \in [0, t_f] \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Les composantes de problème (2.3) sont les suivantes :

- $J(u)$: Représente la fonctionnelle à optimiser (couramment appelée indice de performance ou fonction objectif).
- $x(t)$: Vecteur d'état de dimension n décrivant la configuration du système au temps t .
- A : Matrice de dimension $n \times n$ définissant la dynamique intrinsèque du système.
- b : Vecteur constant de dimension n .
- H : Matrice de format $m \times n$ dont le rang est égal à m ($m \leq n$).
- g : Vecteur de dimension m spécifiant l'état final visé à l'instant t_f .
- $u(t)$: Variable de contrôle (ou commande).
- c : Vecteur de pondération des coûts de dimension n .
- x_0 : État initial du système au temps initial.

2.4 Typologie des problèmes de commande optimale

Selon la forme du critère de qualité, on distingue généralement trois types spécifiques de problèmes de contrôle optimal [15].

Problème de Lagrange

On dit qu'un problème est de type Lagrange si :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = \int_0^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Avec les commandes $u(\cdot)$ sont des fonctions définies sur l'intervalle $[0, t_f]$ dans $U \subset \mathbb{R}^m$, où $L : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, avec $x(0) = x_0$ est un état initial donné.

Problème de Mayer

Dans ce cas, le critère à optimiser est uniquement basé sur la valeur terminale de l'état. Soit la fonction $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, on définit le problème de Mayer sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = h(x(t_f), t_f), \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.5)$$

Problème de Bolza

Le problème de Bolza réside dans le fait qu'il combine les deux formulations précédentes (2.4), (2.5). Soient $L : \mathbb{R}^n \times U \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$, et $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ alors, le problème de Bolza est défini par :

$$\begin{cases} \min_{u(t)} J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt, \\ \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.6)$$

Remarque 2.1. Il faut souligner que ces trois structures sont mathématiquement équivalentes, ce qui rend possible la conversion d'un type vers un autre en fonction des exigences de l'étude. Le problème de Lagrange fut introduit en 1762, suivi par les travaux de Mayer en 1878, et la synthèse de Bolza fut établie en 1913.

2.5 L'existence des trajectoires de contrôle optimal

Théorème 2.1. [26] Prenons en considération le système de contrôle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

où $f(\cdot)$ est C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$ dans $\mathbb{R}^n$, les contrôles u sont à valeurs dans un compact $U \subset \mathbb{R}^m$, et où éventuellement on a des contraintes sur l'état

$$v_1(x) \leq 0, \dots, v_r(x) \leq 0,$$

où $v_1(t), \dots, v_r(t)$ sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$. Soient M_0 et M_1 deux compacts de $\mathbb{R}^n$ tels que M_1 est accessible depuis M_0 . Soit U l'ensemble des contrôles à valeurs dans U joignant M_0 à M_1 . Soient g une fonction de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$, et h une fonction continue sur $\mathbb{R}^n$. on considérerait le coût

$$J(u) = h(x(t(u), t(u))) + \int_0^{t(u)} L(x(t), u(t), t) dt$$

où $t(u) \geq 0$ est comme $x(t(u)) \in M_1$. On suppose que

- $\exists b > 0, b \in \mathbb{R}$ tel que toute trajectoire associée à un contrôle $u \in U$ est uniformément borné par b sur $[0, t(u)]$, ainsi que le temps $t(u)$, i.e.

$$\exists b > 0 \quad / \quad \forall u \in U \quad \forall t \in [0, t(u)] \quad t(u) + \|x_u(t)\| \leq b,$$

- $\forall (x, t) \in \mathbb{R}^n \times [0, t_f]$, l'ensemble

$$\Omega(x, t) = \left\{ \begin{pmatrix} f(x(t), u(t), t) \\ L(x(t), u(t), t) + \gamma \end{pmatrix} \quad / \quad u \in U, \gamma \geq 0 \right\}$$

est convexe.

Donc il existe un contrôle optimal u sur $[0, t(u)]$ tel que la trajectoire associée joint M_0 à M_1 en temps $t(u)$ et en coût minimal.

2.6 Contrôlabilité

contrôlabilité est une propriété qualitative fondamentale des systèmes dynamiques. De façon intuitive, il s'agit de la capacité d'un système à passer d'un état à un autre sous l'action d'une commande appropriée.

Définition 2.1. Un système contrôlé défini par :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.7)$$

est contrôlable lorsque pour tous les points $x_0 \in M_0$ et $x_{t_f} \in M_1$, il existe un contrôle $u(\cdot)$ tel que la trajectoire associée relie x_0 à x_{t_f} en un temps fini.

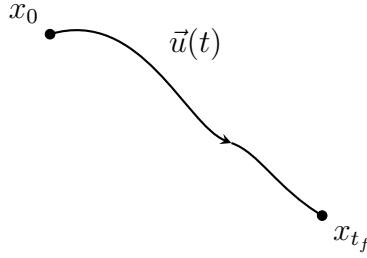


FIGURE 2.1 – Problème de contrôlabilité

2.6.1 Accessibilité

Nous considérons à présent le système dynamique modélisé par l'équation différentielle linéaire suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & t \in [0, t_f], \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.8)$$

Définition 2.2. L'ensemble des états atteignables à partir de la configuration initiale x_0 en un temps donné $t_f > 0$, noté $\text{Acc}(x_0, t_f)$, est défini mathématiquement par :

$$\text{Acc}(x_0, t_f) = \{x(t_f) \in \mathbb{R}^n, u \in U\} \quad (2.9)$$

où $x(\cdot)$ représente la solution unique du système (2.8) correspondant au contrôle admissible u .

En d'autres termes, $\text{Acc}(x_0, t_f)$ rassemble toutes les positions finales que le système (2.8) peut atteindre à l'instant t_f lorsque la commande u parcourt l'ensemble des contrôles admissibles U .

Définition 2.3. Le système dynamique linéaire (2.8) est dit complètement contrôlable au temps t (indépendamment du choix de l'état initial x_0) si l'ensemble de ses points accessibles coïncide avec l'espace tout entier, c'est-à-dire :

$$\text{Acc}(x_0, t_f) = \mathbb{R}^n. \quad (2.10)$$

De manière plus générale, on conclut que le système est contrôlable en un temps t arbitraire depuis la position initiale x_0 si et seulement si :

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{t_f \geq 0} \text{Acc}(x_0, t_f). \quad (2.11)$$

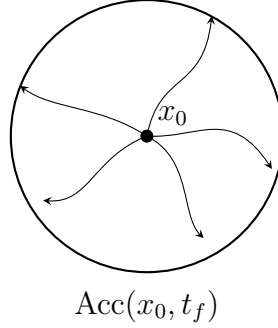


FIGURE 2.2 – Ensemble accessible

2.7 Contrôlabilité des systèmes linéaires

Définition 2.4. On considère un système dynamique linéaire régenté par l'équation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(t)u(t), \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

Ce système est qualifié de non autonome lorsque les matrices de transition $\mathcal{A}$ et de commande $\mathcal{B}$ dépendent (n'est pas constante).

Cas non autonome

Considérons le problème d'évolution temporelle défini par le système linéaire non autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(t)u(t), \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (2.12)$$

La trajectoire solution du système (2.12) à un instant t donné s'exprime par la formule de Duhamel :

$$x(t) = \mathcal{M}(t)x_0 + \int_0^t \mathcal{M}(t)\mathcal{M}^{-1}(s)\mathcal{B}(s)u(s)ds, \quad t \in [0, t_f].$$

Où l'application $\mathcal{M}(\cdot) : I = [0, t_f] \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ représente la matrice résolvante (ou matrice fondamentale de transition) associée au système homogène linéaire, définie par le problème de Cauchy matriciel :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{M}}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{M}(t), \\ \mathcal{M}(0) = I_n, \end{cases}$$

ici, I_n désigne la matrice identité de dimension $n \times n$ dans $\mathbb{R}^n$.

Le résultat fondamental suivant formule une condition nécessaire et suffisante pour garantir la contrôlabilité dans le cadre non autonome.

Théorème 2.2. [10] *Le système dynamique non autonome $\dot{x}(t) = \mathcal{A}(t)x(t) + \mathcal{B}(t)u(t)$ est dit contrôlable sur l'intervalle de temps $[0, t_f]$ si et seulement si la matrice de contrôlabilité, définie par :*

$$C(t_f) = \int_0^{t_f} \mathcal{M}^{-1}(t)\mathcal{B}(t)\mathcal{B}'(t)(\mathcal{M}^{-1}(t))'dt$$

est inversible. Cette matrice $C(t)$ est appelée Gramien de contrôlabilité du système.

Exemple 2.1. Pour illustrer ce mécanisme, analysons la contrôlabilité du système linéaire non autonome bidimensionnel alternatif suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t) \sin(t) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t) \cos(t). \end{cases} \quad (2.13)$$

Sous forme matricielle, les opérateurs s'écrivent :

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{B} = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

La matrice fondamentale de transition $\mathcal{M}(t)$ associée résout le système :

$$\begin{cases} \dot{\mathcal{M}}(t) = \mathcal{A}(t)\mathcal{M}(t), \\ \mathcal{M}(0) = I_n. \end{cases}$$

Ce qui équivaut au système matriciel :

$$\begin{pmatrix} \dot{m}_1(t) & \dot{m}_2(t) \\ \dot{m}_3(t) & \dot{m}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1(t) & m_2(t) \\ m_3(t) & m_4(t) \end{pmatrix}$$

sachant que $\mathcal{M}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, nous obtenons les équations différentielles couplées suivantes :

$$\begin{cases} \dot{m}_1(t) = m_3(t), \\ \dot{m}_2(t) = m_4(t), \\ \dot{m}_3(t) = -m_1(t), \\ \dot{m}_4(t) = -m_2(t). \end{cases}$$

En dérivant une seconde fois, la structure des solutions apparaît :

$$\begin{cases} \ddot{m}_1(t) = \dot{m}_3(t) = -m_1(t), \\ \ddot{m}_2(t) = \dot{m}_4(t) = -m_2(t). \end{cases}$$

L'intégration directe de ces équations harmoniques mène aux expressions générales :

$$\begin{cases} m_1(t) = \alpha_1 \cos(t) + \alpha_2 \sin(t), \\ m_2(t) = \alpha_3 \cos(t) + \alpha_4 \sin(t). \end{cases}$$

En injectant les conditions initiales $m_1(0) = 1$ et $m_2(0) = 0$, on détermine la matrice résolvante et son inverse :

$$\mathcal{M}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{M}^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

Déterminons à présent le Gramien de contrôlabilité C défini par :

$$C = \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} dt$$

Après réduction du produit matriciel interne, nous observons que :

$$\mathcal{M}^{-1}(t)\mathcal{B}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t)\sin(t) - \sin(t)\cos(t) \\ \sin^2(t) + \cos^2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, le produit global sous l'intégrale donne :

$$C = \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^{t_f} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & t_f \end{pmatrix}$$

Il s'ensuit que $\det(C) = 0$, impliquant que la matrice C n'est pas inversible. Par conséquent, le système proposé (2.13) n'est pas contrôlable.

Cas autonome

Définition 2.5. Un système linéaire est dit *autonome* (ou invariant dans le temps) lorsque sa dynamique prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

où les matrices A et B sont de nature constante (indépendantes du paramètre temporel t).

Cas sans contraintes sur le contrôle

Critère de Kalman :

Il existe une formulation algébrique élégante et directe pour statuer sur la contrôlabilité des systèmes invariants, formalisée par l'approche de Kalman.

Théorème 2.3. [10] *Un système linéaire stationnaire défini dans $\mathbb{R}^n$ par $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ est globalement contrôlable sur un horizon temporel fini t_f si et seulement si la matrice algébrique de contrôlabilité d'ordre $(n \times nm)$:*

$$C = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$$

est de rang maximal, à savoir $\text{rang}(C) = n$.

Remarque 2.2. Cette matrice C est communément appelée *matrice de Kalman*. La condition sur son rang implique que la propriété de contrôlabilité ne dépend ni de l'état d'origine x_0 , ni de la durée spécifique t_f . Ainsi, si un système autonome est contrôlable depuis x_0 sur un intervalle donné, il l'est à tout instant et depuis n'importe quelle configuration spatiale. Ce critère ramène un problème d'analyse fonctionnelle à une simple vérification d'algèbre linéaire.

Exemple 2.2. Soit le système linéaire invariant suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t). \end{cases}$$

Les matrices associées sont définies par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Pour évaluer la contrôlabilité, calculons explicitement la matrice de Kalman :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

D'où l'expression de la matrice C :

$$C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Comme $\det(C) = -1 \neq 0$, nous en déduisons que $\text{rang}(C) = 2 = n$, alors le système est donc entièrement contrôlable.

Cas avec contraintes

Les propriétés de contrôlabilité globale peuvent être altérées lorsque des restrictions sont appliquées sur l'espace des commandes admissibles. En présence de contraintes, la stabilité de la matrice A devient cruciale :

- i. La condition classique de Kalman doit être pleinement satisfaite.
- ii. L'origine doit appartenir à l'intérieur de l'espace des contrôles, soit $0 \in \text{int}(U)$.
- iii. Toutes les valeurs propres de l'opérateur A doivent posséder une partie réelle strictement négative (ce qui atteste de la stabilité asymptotique naturelle du système libre).

Sous ces conditions, tout état de $\mathbb{R}^n$ peut être ramené vers l'origine en un temps fini, éventuellement long.

Théorème 2.4. [10] Soit $B \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ évoluant dans un sous-ensemble U contenant l'origine. Considérons le système contraint :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \\ u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m. \end{cases}$$

Alors, n'importe quel point de l'espace d'état $\mathbb{R}^n$ peut être reconduit à l'origine en temps fini si :

- i. Le couple (A, B) vérifie la condition de rang de Kalman.
- ii. La partie réelle de chaque valeur propre de A est inférieure ou égale à zéro ($\text{Re}(\lambda_i) \leq 0$).

Exemple 2.3. Analysons le système stationnaire contraint suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = 2x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -2x_1(t) + u(t), \\ x(0) = x_0, \\ |u(t)| \leq 2. \end{cases}$$

Il s'agit d'étudier la contrôlabilité à zéro de ce système (c'est-à-dire la capacité à guider le système de x_0 vers $(0, 0)$ en temps fini). Les matrices du système sont :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculons la matrice de Kalman :

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \implies C = [B, AB] = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le déterminant vaut $\det(C) = -2 \neq 0$, donc $\text{rang}(C) = n = 2$. Le critère algébrique est validé. De plus, la contrainte donne $U = [-2, 2]$, d'où $0 \in \text{int}(U)$. Recherchons les valeurs propres de A :

$$\det(A - \lambda I_2) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ -2 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda = \pm 2i$$

Les spectres ont une partie réelle strictement nulle ($\text{Re}(\lambda) = 0$). En vertu du Théorème (2.4), le système sous contrainte est contrôlable à zéro. Il existe donc une commande admissible u respectant $|u(t)| \leq 2$ qui ramène efficacement le système de sa position initiale x_0 à l'origine $(0, 0)$.

2.7.1 Contrôlabilité des systèmes non linéaires

Dans la littérature mathématique, l'étude de la contrôlabilité des systèmes non linéaires est envisagée comme une extension naturelle des concepts établis pour les modèles linéaires. Néanmoins, il n'existe pas de critères généraux à la fois nécessaires et suffisants applicables directement à l'ensemble des systèmes non linéaires. C'est pourquoi on a souvent recours à des conditions suffisantes de contrôlabilité locale, obtenues principalement par le biais de la linéarisation autour d'une trajectoire [14].

Introduisons tout d'abord le formalisme mathématique représentant le système dynamique non linéaire ainsi que son évolution temporelle :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), & t \in [0, t_f] \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Ici, le vecteur $x(t) \in \mathbb{R}^n$ caractérise l'état du système à l'instant t , tandis que $u(t) \in \mathbb{R}^m$ représente la variable de contrôle admissible. On suppose de plus que le couple état-contrôle évolue au sein d'un sous-ensemble ouvert O , de telle sorte que $(x(t), u(t)) \in O \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$.

Définition 2.6. Le système non linéaire décrit par la relation (2.14) est dit localement contrôlable au point x_0 s'il existe un voisinage ouvert ν de x_0 tel que, pour tout état cible $x_1 \in \nu$, on puisse trouver un horizon temporel fini t_f ainsi qu'une commande admissible $u(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow U$ permettant de guider le système afin de satisfaire :

$$x_1 = x(t_f, x_0, u(\cdot)).$$

Définition 2.7. On appelle trajectoire du système de contrôle non linéaire (2.14) un couple de fonctions $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ défini sur l'intervalle $[0, t_f] \rightarrow O$ avec $t_f > 0$, où la fonction d'état est continue, soit $\bar{x}(t) \in C^0([0, t_f]; \mathbb{R}^n)$, et la commande est mesurable et essentiellement bornée, soit $\bar{u}(t) \in L^\infty([0, t_f]; \mathbb{R}^m)$.

De plus, il existe un sous-ensemble compact $K \subset O$ qui contient cette trajectoire, c'est-à-dire $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) \in K$ pour presque tout $t \in [0, t_f]$, et qui vérifie l'équation intégrale suivante :

$$\bar{x}(t_2) = \bar{x}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t) dt, \quad \forall [t_1, t_2] \subset [0, t_f]. \quad (2.15)$$

Une fois la notion de trajectoire posée, nous pouvons formuler rigoureusement la propriété de contrôlabilité locale le long de ce profil de référence :

Définition 2.8. Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [0, t_f] \rightarrow O$ une trajectoire de référence associée au système de contrôle non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Ce système est qualifié de localement contrôlable le long de ladite trajectoire si, pour tout paramètre $\varepsilon > 0$, il existe une constante positive $\eta > 0$ telle que, pour chaque couple de points $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ vérifiant les contraintes :

$$|a - \bar{x}(0)| < \eta \quad \text{et} \quad |b - \bar{x}(t_f)| < \eta$$

il existe une trajectoire alternative $(x, u) : [0, t_f] \rightarrow O$ satisfaisant les conditions aux limites :

$$x(0) = a, \quad x(t_f) = b,$$

tout en garantissant la proximité par rapport à la commande de référence :

$$|u(t) - \bar{u}(t)| \leq \varepsilon, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Pour analyser ce problème complexe, on introduit une approximation linéaire du comportement du système autour de la trajectoire de référence.

Définition 2.9 (Système de contrôle linéarisé). Le système linéarisé (ou système variationnel) associé au modèle non linéaire le long de la trajectoire de référence $(\bar{x}(t), \bar{u}(t)) : [0, t_f] \rightarrow O$ est un système linéaire à coefficients variables défini par la dynamique suivante :

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}(\bar{x}(t), \bar{u}(t), t)u(t), \quad t \in [0, t_f]. \quad (2.16)$$

En exploitant les définitions précédentes et la structure de l'équation (2.16), on établit le théorème fondamental suivant qui relie la contrôlabilité du modèle linéarisé à celle du système non linéaire d'origine :

Théorème 2.5. [26] Soit $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$ une trajectoire régulière du système non linéaire $\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t)$. Si le système linéaire obtenu par linéarisation autour de cette trajectoire, décrit par l'équation (2.16), est complètement contrôlable, alors le système non linéaire initial est localement contrôlable le long de cette trajectoire de référence $(\bar{x}(t), \bar{u}(t))$.

2.8 Méthodes de résolution

Pour résoudre les problèmes de commande optimale par des approches numériques, on distingue généralement deux grandes familles d'algorithmes : les méthodes directes et les méthodes indirectes.

Les techniques directes reposent sur la discrétisation des équations d'état et des conditions d'optimalité, ce qui permet de transformer le problème initial en un modèle d'optimisation non linéaire (généralement résolu par programmation non linéaire).

À l'inverse, les approches indirectes s'appuient sur la résolution numérique d'un problème aux limites, structuré à partir des conditions nécessaires issues de l'application directe du principe du maximum [26], comme c'est le cas pour la méthode de tir.

2.8.1 Méthode indirecte

Les approches indirectes sont fondamentalement basées sur le principe du maximum de Pontriaguine. L'objectif principal de cette démarche est de déterminer une trajectoire optimale globale qui satisfait rigoureusement à l'ensemble des conditions nécessaires d'optimalité dictées par ce principe.

2.8.2 Méthode direct

Les approches directes procèdent différemment en transformant directement le problème de commande optimale continue en un problème d'optimisation mathématique en dimension finie. Cette transcription permet d'appliquer les algorithmes standards de l'optimisation numérique pour identifier la solution optimale.

Nous présentons un résumé des caractéristiques des méthodes directes et indirectes dans le tableau ci-dessous (Table 2.1) [26] :

TABLE 2.1 – Caractéristique des méthodes directes et indirectes.

Méthodes directes	Méthodes indirectes
mise en œuvre simple	connaissance a priori de la structure de la trajectoire optimale
sans connaissance a priori de condition initiale	très sensibles au choix de la condition initiale
facilité de la prise en compte de contraintes sur l'état	difficulté théorique de la prise en compte de contraintes sur l'état
contrôles (globalement) optimaux en boucle fermée	contrôles (localement) optimaux en boucle ouverte
précision numérique basse ou moyenne	très grande précision numérique
efficaces en basse dimension	efficaces en toute dimension
gourmandise en mémoire	calculs parallélisables
problème des minima locaux	petit domaine de convergence

Conclusion

Ce chapitre a posé les jalons théoriques de notre étude à travers l'introduction de la théorie du contrôle et des différentes typologies du problème de commande optimale. Nous avons ensuite analysé les concepts d'accessibilité et de contrôlabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires, notamment via le critère de Kalman. Enfin, une étude comparative des méthodes numériques directes et indirectes a été présentée, offrant ainsi les outils nécessaires pour la suite de notre travail.

Principe du Maximum de Pontriaguine

Introduction

Formulé initialement dans les années 1950 par Lev Pontriaguine et son équipe de chercheurs, le Principe du Maximum s'impose comme une extension majeure des théorèmes classiques du calcul des variations[20]. Cet outil mathématique fournit une condition nécessaire d'optimalité permettant de caractériser la commande optimale à travers l'état du système et une variable additionnelle nommée *adjointe*. Selon la nature du problème étudié, diverses déclinaisons de ce principe existent, dictées principalement par les hypothèses retenues sur les espaces fonctionnels ainsi que par l'existence ou non de contraintes sur l'état ou sur le contrôle [26].

3.1 Position de problème

Considérons le problème dynamique décrit par le système d'équations suivant :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad (3.1)$$

où la fonctionnelle à optimiser est donnée par :

$$\min_{u(t)} J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt. \quad (3.2)$$

Sous les contraintes spatiales et temporelles suivantes :

$$x(t) \in \mathbb{R}^n, \quad u(t) \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad t \in [0, t_f].$$

Où :

- $U \subset \mathbb{R}^m$ désigne l'ensemble des commandes admissibles, supposées bornées et continues par morceaux sur l'intervalle $[0, t_f]$.
- $g(x(t), u(t), t)$ représente la fonction de coût définie sur l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$.

- $\frac{\partial g}{\partial x}(x(t), u(t), t)$ est la dérivée partielle de la fonction g par rapport à la variable d'état x .
- $\frac{\partial g}{\partial t}(x(t), u(t), t)$ constitue la dérivée de g par rapport au paramètre temporel t .
- x_0 incarne l'état initial du système décrit en (3.1) à l'instant originel $t = 0$.
- x_{t_f} correspond à l'état final (état terminal) du système décrit en (3.1) évalué à l'instant de clôture t_f .

L'objectif fondamental de ce problème est de transférer le système d'un point d'état initial vers un point d'état final tout en assurant la minimisation de la fonctionnelle $J(u)$.

Définition 3.1. La commande $u^*(t)$ est qualifiée d'optimale si elle correspond à l'extremum (maximum ou minimum) de la trajectoire, de telle sorte que pour toute autre commande admissible $u(t)$ définie sur $t \in [0, t_f]$, on vérifie la condition :

$$J(u^*(t)) < J(u(t)).$$

Définition 3.2. On appelle *instant de commutation* t_c le moment précis où l'extrémale associée à la commande $u(t)$ subit un changement de signe pour $t \in [0, t_f]$.

Définition 3.3. Il est possible de regrouper la dynamique du système (3.1) et le critère d'optimalité (3.2) en introduisant la fonction hamiltonienne $H(x(t), u(t), p(t), p_0, t)$ définie sur l'espace $\mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$ à valeurs réelles dans $\mathbb{R}$ par la structure :

$$H(x(t), u(t), p(t), p_0, t) = p_0 g(x(t), u(t), p(t), t) + \langle p(t), f(x(t), u(t), p(t), t) \rangle. \quad (3.3)$$

La fonction $H(x(t), u(t), p(t), t)$ est appelée *la fonction Hamiltonienne* du système. On suppose que les fonctions $H(x(t), u(t), p(t), p_0, t)$ ainsi que la dérivée partielle $\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), p_0, t)$ sont régulières et continues sur le domaine $\mathbb{R}^n \times U \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f]$.

Définition 3.4. Le vecteur $p(t)$ est dit *vecteur adjoint* s'il existe une fonction d'état adjointe $p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^m$ continue et non nulle, associée à la trajectoire optimale générée par la commande $u(t) \in U$ sur $[0, t_f]$, telle que l'on ait :

$$\dot{p}(\cdot) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t), \quad \forall t \in [0, t_f], \quad (3.4)$$

avec la condition de stationnarité faible $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$ pour tout $t \in [0, t_f]$.

Théorème 3.1. [20] Considérons un système de commande évoluant dans l'espace $\mathbb{R}^n$:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t). \quad (3.5)$$

Où la fonction $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ et le coût terminal $h : \mathbb{R}^n \times [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}$ appartiennent à la classe de régularité C^1 . Le vecteur $u(\cdot)$ représente une application mesurable et bornée prenant ses valeurs dans le domaine des commandes admissibles $U \subset \mathbb{R}^m$.

Soient M_0 et M_1 deux sous-ensembles de $\mathbb{R}^n$. On désigne par U la classe des commandes réalisables capables de lier le point initial appartenant à M_0 au point final situé dans M_1 au cours du temps t . Le coût global associé est formulé par :

$$J(u) = h(x(t_f), t_f) + \int_0^{t_f} g(x(t), u(t), t) dt, \quad (3.6)$$

où les fonctions f et h sont de classe C^1 , et la trajectoire $x(\cdot)$ est la solution de l'équation (3.5) associée au contrôle optimal u .

Pour déterminer le profil reliant M_0 à M_1 en minimisant la fonctionnelle (3.6), si la commande $u \in U$ associée au mouvement $x(\cdot)$ est optimale sur $[0, t_f]$, alors il existe un vecteur adjoint $p(\cdot) : [0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^n$ absolument continu et un multiplicateur réel $p_0 \leq 0$ non trivial, formant un couple $(p(\cdot), p_0) \neq (0, 0)$, vérifiant presque partout sur $t \in [0, t_f]$ le système canonique suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(x(t), p(t), u(t), p_0, t), \\ \dot{p}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), p(t), u(t), p_0, t). \end{cases} \quad (3.7)$$

L'expression de l'Hamiltonien du système s'écrit sous la forme :

$$H(x(t), p(t), u(t), p_0, t) = \langle p(t), f(x(t), u(t), t) \rangle + p_0 g(x(t), u(t), t).$$

De plus, la condition de maximisation de l'Hamiltonien est vérifiée presque partout sur $[0, t_f]$:

$$H(x(t), p(t), u^*(t), p_0, t) = \max_{u(t) \in U} H(x(t), p(t), u(t), p_0, t). \quad (3.8)$$

Si les ensembles terminaux M_0 et M_1 constituent des variétés de $\mathbb{R}^n$ admettant des espaces tangents respectifs aux points $x(0) = x_0 \in M_0$ et $x(t_f) = x_{t_f} \in M_1$, le vecteur adjoint satisfait alors aux conditions de transversalité suivantes aux extrémités :

$$p(0) \perp T_{x(0)} M_0, \quad (3.9)$$

et

$$p(t_f) - p_0 \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f) \perp T_{x(t_f)} M_1. \quad (3.10)$$

Remarque 3.1. Dans le cas où la commande u préserve sa continuité à l'instant final t_f , l'équation de maximisation (3.8) peut être reformulée par la relation temporelle :

$$H(x(t_f), p(t_f), u(t_f), p_0, t_f) = -p_0 \frac{\partial h}{\partial t}(x(t_f), t_f). \quad (3.11)$$

Définition 3.5. On spécifie la structure géométrique de la variété terminale M_1 par l'ensemble d'équations :

$$M_1 = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \mathcal{F}_1(x) = \dots = \mathcal{F}_p(x) = 0\},$$

où les applications $\mathcal{F}_i$ représentent des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}^n$ indépendantes. Lorsque M_1 définit une telle variété, la condition de transversalité explicitée en (3.9) se traduit sous la forme opérationnelle suivante :

$$\exists \lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R} \quad p(t_f) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \nabla \mathcal{F}_i(x(t_f)) + p_0 \frac{\partial h}{\partial x}(x(t_f), t_f). \quad (3.12)$$

- En vertu des conclusions du théorème (3.1), nous disposons de la propriété additionnelle suivante valable pour presque tout intervalle $t \in [0, t_f]$:

$$\frac{dH}{dt}(x(t), u(t), p(t), p_0, t) = \frac{\partial H}{\partial t}(x(t), u(t), p(t), p_0, t). \quad (3.13)$$

- Si l'Hamiltonien $H(\cdot)$ ne dépend pas explicitement de la variable temporelle t , et que les fonctions structurelles f et g sont autonomes, on obtient la constance de l'Hamiltonien sur tout l'horizon d'étude :

$$\max_{u(t) \in U} H(x(t), u(t), p(t), p_0, t) = \text{Cste}, \quad \forall t \in [0, t_f].$$

Remarque 3.2. La convention standard fixe la contrainte $p_0 \leq 0$ au sein du principe du maximum. Le choix alternatif $p_0 \geq 0$ inverserait la logique globale pour aboutir à un principe de minimum, transformant ainsi la condition de maximisation (3.8) en une condition de minimisation directe.

Remarque 3.3. Lorsque le problème formulé ne présente aucune contrainte sur la variable de contrôle, la condition classique du principe de maximum imposée à la relation (3.8) se réduit à l'annulation du gradient par rapport à l'état, soit :

$$\frac{\partial H}{\partial x}(x(t), u(t), p(t), t) = 0.$$

3.2 Conditions de transversalité

Conditions de transversalité concernant le vecteur adjoint

- **Problème de Lagrange**

On a déjà définie le problème de lagrange (2.4). Si de plus $x(t_f)$ est libre, alors la condition de transversalité concernant le vecteur adjoint,

$$p(t_f) = 0$$

- **Problème de Mayer**

On a déjà définie le problème de mayer (2.5). Si de plus $x(t_f)$ est libre, alors la condition de transversalité concernant le vecteur adjoint.

$$p(t_f) = \frac{dH}{dx}(x(t_f), t_f).$$

Conditions de transversalité sur Hamiltonien

- L'Hamiltonien $H(\cdot)$ ne dépend pas explicitement de t et le temps final est libre, et $x(t_f)$ est fixé, alors l'Hamiltonien $H(\cdot)$ doit être nul quand est évalué sur une extrémale, i.e

$$H(x^*(t), u^*(t), p^*(t), t) = 0, \quad t \in [0, t_f].$$

- L'Hamiltonien $H(\cdot)$ dépend de t et le temps final est libre, alors l'Hamiltonien H doit être nul quand est évalué sur une extrémale, i.e

$$H(x^*(t_f), u^*(t_f), p^*(t_f), t_f) = 0, \quad t \in [0, t_f].$$

3.3 Problème en temps minimum

Une illustration classique du principe du maximum concerne la commande en temps minimum. L'objectif fondamental dans ce type de configuration est de concevoir une stratégie de contrôle capable de transférer l'état du système d'une position initiale donnée x_0 vers une cible finale désirée x_1 tout en minimisant la durée totale du transfert.

En d'autres termes, pour ce genre de problèmes, la fonction objective (le coût instantané) est définie par :

$$f_0(x, u, t) \equiv 1,$$

ce qui implique que le critère de performance à minimiser se réduit à l'intégrale temporelle suivante :

$$J(u) = \int_0^{t_f} dt,$$

où l'instant final t_f est considéré comme libre.

3.3.1 Formulation du problème

La catégorie des problèmes d'optimisation dans lesquels on cherche à réduire au maximum le temps de transition entre un état initial x_0 et un état final x_1 est désignée sous le nom de classe des problèmes de temps minimal.

D'un point de vue mathématique, le problème de contrôle en temps optimal consiste à déterminer une commande admissible capable de satisfaire les deux exigences suivantes :

- Atteindre l'état terminal requis x_1 le plus rapidement possible.
- Identifier la loi de commande spécifique qui réalise cette transition.

Position du problème

Considérons le système dynamique général régi par l'équation différentielle suivante :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t)),$$

soumis à une contrainte additionnelle sur la sortie : $y(t) = h(x(t))$, où $x(t)$ représente un n -vecteur d'état, $u(t)$ désigne un m -vecteur de commande, et la fonction f est supposée de classe C^1 par rapport à ses arguments.

On suppose que les composantes du vecteur de commande $u(t) = (u_1(t), \dots, u_r(t))$ sont bornées et satisfont l'inégalité de saturation suivante :

$$|u_j(t)| \leq m_j, \quad j = 1, 2, \dots, r. \quad (3.14)$$

Soit $z(t)$ un vecteur à m composantes représentant le "vecteur de sortie désiré", et définissons le vecteur d'erreur par la relation :

$$e(t) = y(t) - z(t).$$

Le problème de commande consiste alors à trouver un contrôle optimal tel que :

- La contrainte de saturation (3.14) soit respectée à chaque instant.
- Cette commande conduit le système à minimiser l'erreur à l'instant final, soit :

$$e(t_f) \in E,$$

où $E \subset \mathbb{R}^m$ est un ensemble cible défini par :

$$E = \{e(t) = y(t) - z(t) \text{ tel que } e(t) \text{ soit le plus petit possible}\}.$$

- Minimiser globalement la durée du processus, c'est-à-dire la quantité : $t_f - 0$.

Exemple 3.1.

$$(p) = \begin{cases} \text{Minimiser} & J(u(t_f), t_f) = t_f \\ \text{Sous les contraintes :} & \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), & \\ \dot{x}_2(t) = u(t), & \\ x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 0, & \\ x_1(t_f) = 0, \quad x_2(t_f) = 0, & \\ -1 \leq u(t) \leq 1, \quad t \in T = [0, t_f], & \\ t_f > 0 \quad \text{libre.} & \end{cases}$$

Designons par $p(t) = (p_1(t), p_2(t))$ le vecteur adjoint associé au problème (p). En fixant le multiplicateur initial $p_0 = -1$, la fonction Hamiltonienne du système s'écrit :

$$H(-1, x(t), p(t), u(t), t) = p_1(t)x_2(t) + p_2(t)u(t) - 1.$$

Par conséquent, le système adjoint décrivant l'évolution des multiplicateurs est donné par les dérivées partielles de l'Hamiltonien :

$$\begin{cases} \dot{p}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = 0, \\ \dot{p}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -p_1(t). \end{cases} \quad (3.15)$$

Puisque le système dynamique étudié est autonome (ne dépend pas explicitement du temps t), l'Hamiltonien reste constant le long de la trajectoire optimale. Nous pouvons donc écrire :

$$H(-1, x(0), p(0), u(0), 0) = H(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f),$$

où les expressions aux bornes se développent ainsi :

$$\begin{cases} H(-1, x(0), p(0), u(0), 0) = p_2(0)u(0) - 1, \\ H(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f) = p_1(t_f)x_2(t_f) + p_2(t_f)u(t_f) - 1. \end{cases}$$

De plus, étant donné que le temps final t_f est libre, la condition de transversalité classique impose que l'Hamiltonien s'annule à l'instant terminal :

$$H(-1, x(t_f), p(t_f), u(t_f), t_f) = 0.$$

Ce qui implique directement à l'instant initial la relation suivante :

$$p_2(0)u(0) = 1.$$

Sachant que le contrôle est borné ($|u(t)| \leq 1$), l'application du principe du maximum indique que le contrôle optimal $u^*(t)$ doit maximiser l'Hamiltonien à chaque instant :

$$\begin{aligned} H(-1, x(t), p(t), u^*(t), t) &= \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} H(-1, x(t), p(t), u(t), t) \\ &= p_1(t)x_2(t) - 1 + \max_{-1 \leq u(t) \leq 1} (p_2(t)u(t)). \end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que la commande optimale dépend du signe de la fonction adjointe $p_2(t)$:

$$u^*(t) = \text{sign}(p_2(t)).$$

En résolvant le système adjoint linéaire (3.15), nous obtenons par intégrations successives :

$$\begin{cases} p_1(t) = p_{10}, \\ p_2(t) = -p_{10}t + p_{20}, \end{cases}$$

avec les conditions initiales $p_{10} = p_1(0)$ et $p_{20} = p_2(0)$.

Puisque la fonction $p_2(t)$ est une fonction affine du temps (une ligne droite), elle ne peut changer de signe qu'au plus une seule fois. Le problème admet donc au maximum une seule commutation (c'est-à-dire $n - 1$ commutations pour un système d'ordre $n = 2$). Par conséquent, quatre stratégies de commande sont théoriquement envisageables :

- i. $u(t) = 1$,
- ii. $u(t) = -1$,
- iii. $u(t) = 1$ puis $u(t) = -1$,
- iv. $u(t) = -1$ puis $u(t) = 1$.

Analyse de la stratégie optimale

Considérons la structure de commande définie par $u(t) = -1$ suivi de $u(t) = 1$ sur l'intervalle $[0, t_f]$. Notons t_c l'instant de commutation. La loi de commande s'écrit :

$$u^*(t) = \begin{cases} -1 & t \in [0, t_c[\\ 1 & t \in [t_c, t_f] \end{cases}$$

Première étape : Pour $u(t) = -1$ sur l'intervalle $t \in [0, t_c[$ En intégrant la dynamique du système avec $u(t) = -1$ et en appliquant les conditions initiales $x_1(0) = 1, x_2(0) = 0$, nous obtenons :

$$\begin{cases} x_1(t) = -\frac{t^2}{2} + 1, \\ x_2(t) = -t. \end{cases}$$

Deuxième étape : Pour $u(t) = 1$ sur l'intervalle $t \in [t_c, t_f]$ En intégrant à nouveau la dynamique du système avec cette fois $u(t) = 1$, les trajectoires prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{t^2}{2} + c_1 t + c_2, \\ x_2(t) = t + c_1, \end{cases}$$

où c_1 et c_2 sont des constantes d'intégration.

Détermination des constantes c_1 et c_2 Par continuité des trajectoires d'état au point de commutation $t = t_c$, nous devons égaliser les solutions des deux étapes :

$$\begin{cases} x_1(t_c) = -\frac{t_c^2}{2} + 1 = \frac{t_c^2}{2} + c_1 t_c + c_2, \\ x_2(t_c) = -t_c = t_c + c_1. \end{cases}$$

Ce qui implique directement les valeurs des constantes suivantes :

$$\begin{cases} c_1 = -2t_c, \\ c_2 = 1 - t_c^2 - c_1 t_c. \end{cases}$$

En substituant c_1 , on obtient : $c_2 = 1 + t_c^2$.

À l'instant final $t = t_f$, le système doit atteindre l'origine, soit $x(t_f) = 0$:

$$\begin{cases} \frac{t_f^2}{2} - 2t_c t_f + t_c^2 + 1 = 0 & (*) \\ t_f - 2t_c = 0 & (**) \end{cases}$$

De la relation (**), on tire immédiatement :

$$t_f = 2t_c.$$

En remplaçant cette expression de t_f dans l'équation (*), nous obtenons :

$$\frac{(2t_c)^2}{2} - 2t_c(2t_c) + t_c^2 + 1 = 0 \implies 2t_c^2 - 4t_c^2 + t_c^2 + 1 = 0 \implies -t_c^2 + 1 = 0.$$

Puisque l'instant de commutation doit être positif ($t_c > 0$), nous trouvons de manière unique :

$$t_c = 1 \quad \text{et par conséquent} \quad t_f = 2.$$

3.4 Nature des solutions

La configuration des trajectoires optimales dépend de manière fondamentale de la structure géométrique du domaine de commande. Il existe généralement plusieurs types de solutions pour un problème de contrôle optimal, dont les configurations les plus classiques sont présentées ci-dessous :

3.4.1 Solution bang-bang

Une trajectoire est qualifiée de type bang-bang lorsque la norme du vecteur de contrôle n'est pas continue et commute de façon instantanée et exclusive entre les valeurs limites des bornes imposées au domaine des commandes.

3.4.2 Solution bang-singulier

La solution de type bang-singulier correspond à une trajectoire où le contrôle optimal n'est pas continu, combinant à la fois des arcs saturants (où le contrôle atteint les limites supérieure ou inférieure) et des arcs non saturants, appelés arcs singuliers, pour lesquels la commande évolue strictement à l'intérieur du domaine admissible.

En d'autres termes, si l'on considère que le vecteur de commande est borné par la contrainte $|u(t)| \leq 1$, la fonction Hamiltonienne associée au système peut s'écrire sous la forme affine suivante :

$$H = H_1 + u(t)H_2, \quad (3.16)$$

avec $H = H(\lambda_0, u(t), x(t), p(t), t)$, $H_1 = H(\lambda_0, x(t), p_1(t), t)$ et $H_2 = H(\lambda_0, x(t), p_2(t), t)$.

Introduisons la fonction de commutation, notée par $\Psi(t) = H_2$:

- i. Si, dans le voisinage immédiat d'un instant de commutation t_c , le contrôle optimal demeure constant par morceaux en prenant alternativement les valeurs extrêmes $u(t) = +1/-1$ ou $u(t) = -1/+1$, cette stratégie de commande est dite de type bang-bang ou régulière.
- ii. S'il existe un intervalle de temps $[a, b]$ non réduit à un point ($b > a$) tel que la fonction de commutation $\Psi(t)$ s'annule identiquement sur tout cet horizon, c'est-à-dire $\Psi(t) = 0$ pour tout $t \in [a, b]$, cette configuration correspond à ce que l'on appelle un arc singulier.

lemme 2.1 Le problème de commande en temps minimal n'admet pas de contrôle singulier.
 t_f

preuve 2.1 Le système admet des trajectoires singulières si et seulement si la condition nécessaire suivante est satisfaite :

$$\partial_u H = 0.$$

D'après la structure de l'équation de l'Hamiltonien définie par :

$$H(-1, u(t), x(t), p(t), t) = p(t) (Ax(t) + B(t)u) - 1, \quad (3.17)$$

nous obtenons par dérivation par rapport à u :

$$p(t)B = 0.$$

En dérivant ensuite cette relation par rapport au temps t , il vient :

$$\dot{p}(t)B = 0.$$

Sachant que la dynamique adjointe libre est régie par l'équation $\dot{p}(t) = Ap(t)$ (ou $p(t)A$ selon les conventions de produit), on en déduit immédiatement la relation suivante :

$$p(t)AB = 0.$$

Par conséquent, en effectuant des dérivations successives par rapport au temps, nous obtenons finalement la suite d'égalités :

$$p(t)B = p(t)AB = \dots = p(t)A^{n-1}B = 0.$$

On en déduit par une récurrence immédiate que, pour tout entier k , la propriété suivante est vérifiée :

$$p(t)A^k B = 0, \quad \forall k \in \{0, \dots, n-1\}.$$

Par construction, cela signifie que le vecteur adjoint $p(t)$ est orthogonal à la matrice de contrôlabilité du système. Étant donné que le système est supposé complètement contrôlable, sa matrice de contrôlabilité est de rang plein (n), ce qui implique nécessairement que le vecteur adjoint est trivial :

$$p(t) = 0.$$

En injectant ce résultat $p(t) = 0$ au sein de l'équation de l'Hamiltonien (3.17), nous aboutissons à :

$$H(-1, p(t), x(t), u(t), t) = -1. \quad (3.18)$$

D'autre part, puisque le temps final t_f est libre pour ce problème, l'application de la condition de transversalité classique impose que l'Hamiltonien soit nul le long de la trajectoire optimale :

$$H(-1, p(t), x(t), u(t), t) = 0. \quad (3.19)$$

L'égalité (3.18) se trouve en contradiction directe avec la condition requise en (3.19), ce qui achève la démonstration du lemme.

3.5 Les cas du Principe de Maximum de Pontryagin (PMP)

L'application du Principe de Maximum de Pontryagin (PMP) dépend directement des conditions aux limites imposées à l'état final $x(t_f)$ et au temps final t_f . En se basant sur la formulation standard du problème de contrôle optimal, on distingue deux grands cas selon la présence ou l'absence de contraintes sur l'état final :

3.5.1 Cas sans contrainte (État final $x(t_f)$ entièrement libre) :

Dans cette configuration, le temps final t_f est supposé fixe et connu, tandis que le système peut atteindre n'importe quelle valeur finale pour l'état $x(t_f)$. Il n'y a aucune restriction géométrique ou physique sur $x(t_f)$.

Sous ces conditions, le PMP stipule que le vecteur adjoint $p(t)$ doit satisfaire une condition aux limites bien précise à l'instant final t_f , appelée condition de transversalité :

$$p(t_f) = -\nabla\phi(x^*(t_f)) \quad (3.20)$$

Où ϕ représente la partie terminale de la fonction de coût (le terme de Mayer).

Dans le cas particulier où le critère à optimiser ne contient pas de coût final (c'est-à-dire $\phi(x(t_f)) = 0$), cette condition aux limites devient simplement :

$$p(t_f) = 0 \quad (3.21)$$

Ce cas est le plus simple à résoudre numériquement car la valeur finale de $p(t_f)$ est explicitement connue.

3.5.2 Cas avec contraintes sur l'état final :

Lorsque l'état final $x(t_f)$ ne peut pas évoluer librement et doit satisfaire certaines exigences, la résolution change. On distingue alors deux situations classiques :

- **Sous-cas A : L'état final est entièrement fixé** ($x(t_f) = x_f$)

Ici, la trajectoire optimale doit impérativement se terminer en un point précis x_f donné à l'avance (par exemple, ramener la vitesse d'un système à zéro).

Puisque la contrainte est déjà portée sur l'état $x(t_f)$, le Principe de Maximum ne donne aucune information directe sur la valeur finale du vecteur adjoint. Ainsi, la valeur de $p(t_f)$ est considérée comme *libre* (inconnue a priori), et elle doit être déterminée lors de la résolution globale du système différentiel.

- **Sous-cas B : L'état final appartient à une cible contrainte** ($x(t_f) \in \mathcal{C}$)

Si l'état final doit vérifier un ensemble d'équations de type $g(x(t_f)) = 0$ (la trajectoire doit terminer sur une surface ou une courbe cible $\mathcal{C}$), le vecteur adjoint $p(t_f)$ doit vérifier les conditions de transversalité géométriques.

Géométriquement, cela signifie que le vecteur adjoint $p(t_f)$ à l'instant final doit être orthogonal à l'espace tangent à la cible $\mathcal{C}$ au point optimal $x^*(t_f)$. Mathématiquement, il existe des multiplicateurs λ tels que :

$$p(t_f) = -\nabla\phi(x^*(t_f)) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(x^*(t_f)) \quad (3.22)$$

3.5.3 Conclusion

Le Principe du Maximum de Pontriaguine fournit les conditions nécessaires d'optimalité indispensables permettant d'évaluer et de calculer analytiquement les trajectoires optimales des systèmes commandés.

Applications du Principe du Maximum de Pontriaguine

4.1 Introduction et Problématique du Chapitre

Cette partie constitue le noyau applicatif de notre mémoire de Master en Recherche Opérationnelle. Son objectif principal est de jeter un pont méthodologique entre les théorèmes d'existence, l'appareil analytique de Lev Pontriaguine, et les réalités empiriques issues de l'ingénierie, de l'écologie et des sciences économiques.

L'analyse de ce chapitre est motivée par la nécessité d'opérationnaliser le Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP). Dans les chapitres précédents, nous avons examiné les conditions géométriques de commandabilité, les propriétés topologiques des ensembles d'accessibilité ainsi que la dérivation formelle des conditions nécessaires d'optimalité. Ici, nous mettons en œuvre ces concepts à travers une structure tridimensionnelle :

- i. La formalisation des algorithmes numériques de résolution des problèmes aux limites bidimensionnels induits par le formalisme d'état et d'état adjoint.
- ii. L'intégration exhaustive, sans aucune simplification ni omission, des trois modèles de référence prescrits, traduisant chacun une classe spécifique de systèmes dynamiques.
- iii. L'évaluation critique par le biais de simulations numériques et d'analyses de sensibilité paramétrique.

Cette approche systématique nous permettra de valider la robustesse mathématique du Principe du Maximum tout en cernant ses limites computationnelles face au phénomène de non-linéarité et à la sensibilité des conditions initiales de la trajectoire adjointe.

4.2 Mise en œuvre numérique du Principe du Maximum

4.2.1 Méthode des équations adjointes pour les problèmes en temps continu

Considérons un système dynamique non linéaire généralisé défini sur un horizon temporel déterministe et compact $[0, T]$, où le comportement de l'état macroscopique $x(t) \in \mathbb{R}^n$ est gouverné par l'équation différentielle ordinaire :

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \quad \text{avec les conditions initiales fixées } x(0) = x_0 \quad (4.1)$$

Le vecteur de contrôle $u(t)$ est une fonction mesurable au sens de Lebesgue, prenant ses valeurs presque partout dans un sous-ensemble compact et non vide $U \subset \mathbb{R}^m$. La performance globale de la stratégie de contrôle est quantifiée par une fonctionnelle de coût de type Bolza, combinant un coût intégral de performance (le Lagrangien L) et une fonction de pénalité terminale (le critère de Mayer Φ) :

$$J(u) = \int_0^T L(x(t), u(t), t) dt + \Phi(x(T)) \quad (4.2)$$

Pour formaliser le Principe du Maximum, nous introduisons les multiplicateurs de Lagrange continus, désignés sous le terme de variables adjointes ou co-états

$$\lambda(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), \dots, \lambda_n(t)]^T \in \mathbb{R}^n$$

Le Hamiltonien H du système s'écrit sous la forme algébrique suivante :

$$H(x(t), u(t), \lambda(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \sum_{i=1}^n \lambda_i(t) f_i(x(t), u(t), t) \quad (4.3)$$

En vertu du théorème fondamental de Pontriaguine, si le couple $(x^*(t), u^*(t))$ définit une solution optimale locale du problème, alors il existe une trajectoire co-décisionnelle $\lambda^*(t)$ absolument continue telle que les conditions canoniques de Hamilton sont vérifiées à chaque instant $t \in [0, T]$:

$$\dot{x}^*(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (4.4)$$

$$\dot{\lambda}^*(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) \quad (4.5)$$

De plus, la condition aux limites pour la variable adjointe est dictée à l'instant final T par la condition de transversalité :

$$\lambda^*(T) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^*(T)) \quad (4.6)$$

Le contrôle optimal $u^*(t)$ doit maximiser (ou minimiser, selon la convention adoptée) le Hamiltonien sur l'espace des contrôles admissibles U :

$$H(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \max_{u \in U} H(x^*(t), u, \lambda^*(t), t) \quad (4.7)$$

L'imbrication des conditions initiales pour l'état $x(0) = x_0$ et des conditions finales pour l'adjoint $\lambda(T) = \nabla \Phi(x(T))$ structure le problème sous la forme d'un problème aux limites à deux points (TPBVP - *Two-Point Boundary Value Problem*). Cette architecture mathématique bidimensionnelle exclut l'utilisation directe des schémas d'intégration numérique classiques, rendant obligatoire l'implémentation d'algorithmes itératifs de raccordement.[11]

4.2.2 Algorithmes de résolution numérique : La méthode de tir

La méthode de tir (*Shooting Method*) transpose le problème complexe aux limites (TPBVP) en une suite convergente de problèmes à valeurs initiales (IVP). La substance de cette méthode repose sur l'approximation de la valeur manquante de l'état adjoint à l'instant initial, soit $\lambda(0) = \alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur inconnu que l'algorithme doit identifier de manière itérative.

Soit $(x(t, \alpha), \lambda(t, \alpha))$ la solution globale obtenue en intégrant le système hamiltonien couplé de $t = 0$ à $t = T$, en utilisant le vecteur d'amorçage α . L'objectif numérique est d'annuler la fonction d'écart résiduel $F(\alpha)$, définie par l'écart entre la valeur calculée de l'adjoint à l'instant final et la contrainte de transversalité théorique :

$$F(\alpha) = \lambda(T, \alpha) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(T, \alpha)) = 0 \quad (4.8)$$

L'algorithme de tir direct s'exécute selon le protocole de calcul détaillé suivant :

- **Étape 1 : Initialisation.** Définir une conjecture initiale pour l'adjoint $\alpha^{(0)}$. Spécifier le critère de convergence de Cauchy $\varepsilon > 0$ (généralement $\varepsilon = 10^{-6}$) et le nombre maximal d'itérations K_{max} . Fixer l'indice d'itération $k = 0$.
- **Étape 2 : Intégration Prospective.** Résoudre numériquement le système différentiel de dimension $2n$ de $t = 0$ à $t = T$:

$$\dot{x}^{(k)} = \frac{\partial H}{\partial \lambda}(x^{(k)}, u^{(k)}, \lambda^{(k)}, t), \quad x^{(k)}(0) = x_0 \quad (4.9)$$

$$\dot{\lambda}^{(k)} = -\frac{\partial H}{\partial x}(x^{(k)}, u^{(k)}, \lambda^{(k)}, t), \quad \lambda^{(k)}(0) = \alpha^{(k)} \quad (4.10)$$

À chaque pas de discrétisation temporelle, le contrôle instantané $u^{(k)}(t)$ est déterminé de manière analytique ou numérique en résolvant l'équation algébrique de stationnarité $\frac{\partial H}{\partial u} = 0$.

- **Étape 3 : Calcul du Résidu et Test de Convergence.** Évaluer la norme du vecteur résiduel :

$$\|F(\alpha^{(k)})\| = \left\| \lambda^{(k)}(T, \alpha^{(k)}) - \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x^{(k)}(T, \alpha^{(k)})) \right\| \quad (4.11)$$

Si $\|F(\alpha^{(k)})\| \leq \varepsilon$, l'algorithme a convergé avec succès. Les trajectoires optimales sont alors validées : $x^*(t) = x^{(k)}(t)$, $\lambda^*(t) = \lambda^{(k)}(t)$ et $u^*(t) = u^{(k)}(t)$. Passer à l'étape 5.

- **Étape 4 : Correction de l'Amorçage.** Si le test échoue, mettre à jour le vecteur d'estimation $\alpha^{(k+1)}$ via le formalisme multidimensionnel de Newton-Raphson :

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} - [J_F(\alpha^{(k)})]^{-1} F(\alpha^{(k)}) \quad (4.12)$$

Où $J_F(\alpha^{(k)}) = \frac{\partial F}{\partial \alpha}(\alpha^{(k)})$ représente la matrice Jacobienne des sensibilités finales par rapport à l'adjoint initial. Incrémenter $k = k + 1$ et retourner à l'Étape 2.

- **Étape 5 : Fin du processus computationnel.** Stocker les résultats pour exploitation graphique et analyse.

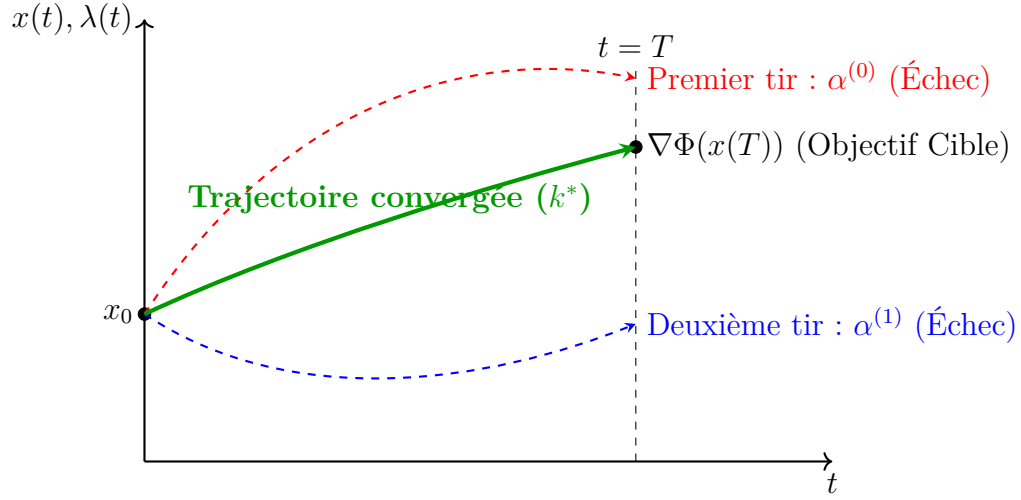


FIGURE 4.1 – Schéma conceptuel du mécanisme itératif de correction de la méthode de tir (Forme 1).

4.3 Applications à des problèmes réels

4.3.1 Modèle I : Problème du temps minimal

Nous appliquons le principe du maximum à un problème de contrôle en temps optimal. On considère une voiture qui se déplace d'un état x_0 à un état x_1 . Notre but est de trouver la meilleure commande (commande optimale) pour ramener la voiture de x_0 à x_1 en temps minimal.

Le problème considéré est régi par l'équation différentielle suivante (équation du mouvement de la voiture) :

$$\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2} = u,$$

où u est un paramètre de commande réel, $|u| \leq 1$. Il s'agit de minimiser la fonction coût suivante :

$$J(u) = \int_0^{t_f} dt = t_f - 0 = t_f \rightarrow \min.$$

Dans l'espace de phase, on pose $\dot{x} = y$ et $\ddot{x} = \dot{y} = u$ avec x est la position et y la vitesse, en faisant associer la condition initiale et la condition finale, le problème peut s'écrire d'une manière équivalente :

$$(P) \begin{cases} J(u) = \int_0^{t_f} dt \longrightarrow \min_u \\ \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = u(t), \\ |u(t)| \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(t_f) = -1. \end{cases} \quad (4.13)$$

Application du Principe du Maximum

Contrôlabilité :

Comme le système (4.13) est linéaire, alors il s'écrit sous la forme matricielle suivante :

$$\dot{X} = AX + BU,$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

nous avons $n = 2$ états, $m = 1$ entrée.

Et la matrice de commandabilité du système est :

$$C(A, B) = [B \quad AB] \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice C est de rang $2 = n$, d'après le théorème de Kalman, le système (4.13) est contrôlable.

Calcul de l'hamiltonien :

La fonction hamiltonienne de ce problème s'écrit :

$$H = H(x(t), p(t), p^0, u(t)) = p_x(t)y(t) + p_y(t)u(t) + p^0,$$

où p^0 est une constante négative qui est la variable duale du coût et $p(t) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur adjoint, solution du système :

$$\dot{p}_x(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \dot{p}_y(t) = -\frac{\partial H}{\partial y} = -p_x.$$

On en déduit que $p_x(t) = \text{constante} = \lambda$, et donc $p_y(t) = -\lambda t + \mu$, où λ et μ sont des constantes. Donc

$$H = \lambda y + (\mu - \lambda t)u.$$

Principe du maximum :

Par ailleurs la condition du maximum (du principe du maximum) :

$$\max_{-1 \leq u \leq 1} H = \lambda y + \max_{-1 \leq u \leq 1} (\mu - \lambda t)u,$$

nous donne

$$u(t) = \text{signe}(\mu - \lambda t). \quad (4.14)$$

Comme la droite $(\mu - \lambda t)$ change au plus une fois de signe sur l'intervalle $t_0 \leq t \leq t_1$ alors, chaque commande optimale $u(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$ est une fonction constante par morceaux, prenant les valeurs ± 1 et admettant au plus deux intervalles de constance. En particulier les contrôles extrémaux ont au plus une commutation.

Inversement, une telle fonction $u(t)$ peut être tirée de la relation (4.14) pour certaines valeurs de constantes λ, μ .

i. $u \equiv +1$: la résolution de système du problème (4.13), donne :

$$\dot{y} = u = +1 \Rightarrow y = t + s_2,$$

et

$$\dot{x} = y = t + s_2 \Rightarrow x = \frac{1}{2}t^2 + s_2t + s_2 = \frac{1}{2}(t + s_2)^2 + (s_1 - \frac{s_2^2}{2})$$

où s_1, s_2 sont des constantes d'intégration.

De là on obtient x en fonction de y :

$$x = \frac{1}{2}y^2 + s \quad (4.15)$$

où $s = s_1 - \frac{1}{2}s_2^2$ est une constante. Par conséquent la portion de trajectoire de phase pour laquelle $u \equiv +1$ est un arc de parabole (4.15).

De la même manière :

ii. Pour $u \equiv -1$, on obtient les trajectoires suivantes :

$$y = -t + z_2$$

et

$$x = \frac{-1}{2}t^2 + z_2t + z_2 = \frac{-1}{2}(-t + z_2)^2 + (z_1 + \frac{z_2^2}{2})$$

où z_1, z_2 sont des constantes d'intégration.

Alors on obtient x en fonction de y :

$$x = \frac{-1}{2}y^2 + z \quad (4.16)$$

Les points présentatifs parcourent les paraboles (4.15) de bas en haut (car $\dot{y} = +1$) et les paraboles (4.16) de haut en bas (car $\dot{y} = -1$).

- iii. Si la commande $u(t) = +1$ et ensuite $u(t) = -1$, la trajectoire de phase est composée de deux portions de paraboles contigües, la deuxième portion est située sur la parabole (4.16) qui passe par l'origine (car la trajectoire cherchée doit finir à l'origine).
- iv. Si la commande $u(t) = -1$ et ensuite $u(t) = +1$, la trajectoire de phase est remplacée par une trajectoire qui lui est symétrique par rapport au centre.

Remarque 4.1. La solution du problème optimal de cet exemple peut être interprétée de la manière suivante :

Soit $v(x, y) = v(z)$, la fonction définie dans le plan (x, y) comme suit :

$$v(z) = \begin{cases} +1, & \text{au dessous de la ligne AOB et sur l'arc AO} \\ -1, & \text{au dessus de la ligne AOB et sur l'arc BO} . \end{cases}$$

Sur chaque trajectoire optimale, la valeur $u(t)$ (à l'instant t) est égale à $v(x(t))$.

Donc, le système (4.13) devient en remplaçant u par la fonction $v(x)$:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = y(t), \\ \dot{y}(t) = v(x, y), \\ |u(t)| \leq 1, \\ x(0) = 0, \quad x(t_f) = 0, \\ y(0) = 0, \quad y(t_f) = -1. \end{cases} \quad (4.17)$$

La solution du système (4.17) (avec un état initial $x_0 = (0, 0)$) nous donne la trajectoire de phase optimale qui mène à un état final arbitraire x_1 .

En d'autre terme, le système (4.17) est un système d'équations différentielles (avec un deuxième ordre discontinu) dont la résolution donne les trajectoires optimales.

Décrivons la trajectoire obtenue en prenant $u(t) = 1$ sur $[0, t_1[$, puis $u(t) = -1$ sur $]t_1, T]$. D'après les équations (4.13), on obtient

- si $0 \leq t \leq t_1$, alors $x(t) = \frac{t^2}{2}$ et $y(t) = t$,
- si $t_1 \leq t \leq T$, alors $x(t) = -\frac{t^2}{2} + 2t_1t - t_1^2$ et $y(t) = -t + 2t_1$.

Les trajectoires obtenues en prenant d'abord $u = -1$, puis $u = 1$, sont les symétriques des précédentes par rapport à l'origine

Il est clair que la courbe Γ définie par

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{y^2}{2} \text{ signe}(y)\},$$

est la courbe de commutation. Plus précisément, le contrôle temps minimal est donné par

- Si $x > \frac{y^2}{2} \text{ signe}(y)$ ou si $x = \frac{y^2}{2}$, alors $u(x, y) = +1$

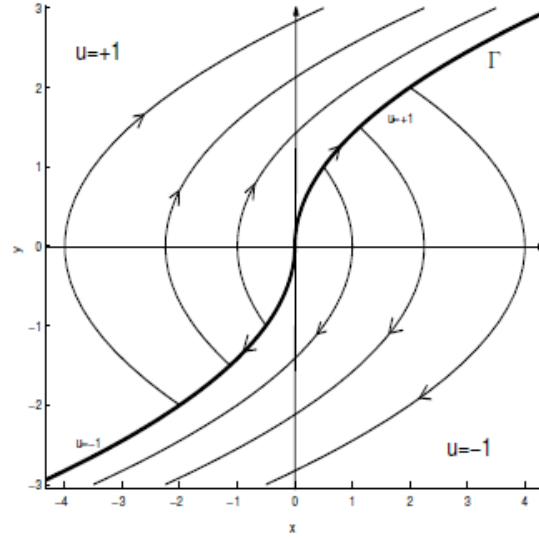


FIGURE 4.2 – Synthèse optimale

- Si $x < \frac{y^2}{2}\text{signe}(y)$ ou si $x = -\frac{y^2}{2}$, alors $u(x, y) = -1$

Calculons la fonction de temps minimal $t_f(x, y)$ pour aller de $(0, 0)$ à (x, y) .

Supposons que le point (x, y) est en dessous de la courbe Γ . Ce point est atteint par la succession d'un arc $u = +1$, puis $u = -1$. On en déduit qu'il existe un unique couple (t_1, t_f) tel que $x(t) = -\frac{t_f^2}{2} + 2t_1t_f - t_1^2$, et $y = -t_f + 2t_1$.

La résolution de ce système conduit facilement à $t_f = 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2} - y$. De même, si le point (x, y) est au-dessus de la courbe Γ , on calcule $t_f = 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2} + y$. Enfin, le long de la courbe Γ , on a clairement $t_f = |y|$, finalement, la fonction temps minimal est donnée par la formule

$$t_f(x, y) = \begin{cases} 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2} - y & \text{si } x \geq \frac{y^2}{2}\text{signe}(y) \\ 2\sqrt{x + \frac{1}{2}y^2} + y & \text{si } x < \frac{y^2}{2}\text{signe}(y) \end{cases}$$

Résolution à l'aide du logiciel MATLAB

On se ramène à un problème de tir simple, le programme suivant est effectué sous *Matlab*, on utilise la méthode de Newton, implémentée dans la *ToolBox optim* de *Matlab*, il s'agit de la routine *fsolve.m*.

```
function tirsimple
```

```
% Methode de tir simple, en utilisant fsolve,
% pour le systeme de controle
```

```
%          xdot=y, ydot=u, |u|<=1.
% On veut aller de (0,0) à (0,-1) en temps minimal.

clear all ; clf ; clc ; format long ;

global x0 ; x0=[0;0] ;
P0=[1;1] ; tf=5 ;

% Calcul de P0,tf
options=optimset('Display','iter','LargeScale','on');
[P0tf,FVAL,EXITFLAG]=fsolve(@F,[P0;tf],options);

EXITFLAG % 1 si la methode converge, -1 sinon

% Trace de la trajectoire optimale
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode45(@sys,[0;P0tf(3)],[x0;P0tf(1);P0tf(2)],options) ;
subplot(121) ; plot(z(:,1),z(:,2)) ; axis square ; title('Trajectoire') ;
subplot(122) ; plot(t,sign(z(:,4))) ; axis square ; title('Contrôle') ;

t(end) % 2.41194262167697
z(1,3) % 1.41531069421559
z(1,4) % 0.99965473076264

%-----

function Xzero=F(X)
% Definition de la fonction dont on cherche un zero

global x0 ;
options = odeset('AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9) ;
[t,z] = ode113(@sys,[0;X(3)],[x0;X(1);X(2)],options) ;
HamEnd = z(end,3)*z(end,2)+abs(z(end,4))-1 ;
Xzero = [ z(end,1) % on impose xf=0
          z(end,2)+1 % on impose yf=-1
          HamEnd ] ; % tf libre donc H(tf)=0

%-----

function zdot=sys(t,z)
```

```

u=sign(z(4)) ;
zdot = [ z(2)
        u
        0
        -z(3) ] ; % systeme extremal
    
```

Les résultats sont donnés dans la figure 4.3

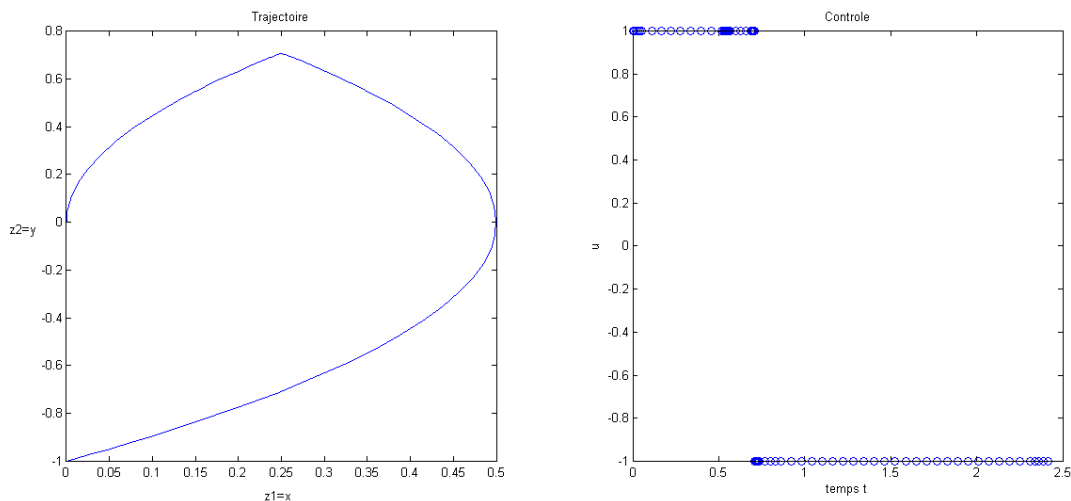


FIGURE 4.3 – Résultats de la méthode de tir

4.3.2 Modèle II : Tracé optimal d'une voie de chemin de fer

Ce second modèle relève du domaine de l'ingénierie des infrastructures de transport et de l'optimisation géométrique. Il vise à modéliser le profil vertical d'une ligne ferroviaire à grande vitesse traversant un relief topologique irrégulier, de sorte à minimiser les coûts d'excavation et de remblai tout en respectant des normes géométriques strictes de courbure.

Formulation du Problème et Espace d'État d'Ordre Supérieur

Soit $t \in [0, T]$ la coordonnée horizontale normalisée représentant la distance parcourue le long du tracé. Nous définissons le vecteur d'état par deux composantes physiques : $x_1(t)$ correspond à l'altitude absolue de la ligne ferroviaire, et $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ représente la pente locale de la voie. Le contrôle $u(t) = \ddot{x}_1(t)$ représente la courbure spatiale imposée au profil de la ligne. Le système

dynamique linéaire d'ordre deux s'exprime ainsi :

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t) \quad (4.18)$$

$$\dot{x}_2(t) = u(t) \quad (4.19)$$

Les conditions aux limites sont fixées rigidement aux deux extrémités du tracé :

$$x_1(0) = a_0, \quad x_2(0) = b_0 \quad (\text{Altitude et pente initiales}) \quad (4.20)$$

$$x_1(T) = a_f, \quad x_2(T) = b_f \quad (\text{Altitude et pente finales attendues}) \quad (4.21)$$

Soit $h(t)$ la fonction continue connue décrivant le profil topographique naturel du terrain. L'écart vertical local entre la voie construite et la surface naturelle est donné par $(x_1(t) - h(t))$. Le critère de coût global à minimiser intègre ce coût de terrassement et un terme de régularisation quadratique de la courbure :

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^T [(x_1(t) - h(t))^2 + ru^2(t)] dt \quad (4.22)$$

Où $r > 0$ représente le facteur de pondération de la courbure.

Analyse variationnelle et équation différentielle d'ordre 4

Pour déduire les conditions nécessaires d'optimalité, nous construisons le Hamiltonien à l'aide des multiplicateurs adjoints $\lambda_1(t)$ et $\lambda_2(t)$:

$$H(x_1, x_2, u, \lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2} (x_1(t) - h(t))^2 + \frac{1}{2} ru(t)^2 + \lambda_1(t)x_2(t) + \lambda_2(t)u(t) \quad (4.23)$$

Les équations différentielles adjointes dictant le comportement de λ_1 et λ_2 découlent des dérivations partielles :

$$\dot{\lambda}_1(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_1} = -(x_1(t) - h(t)) \quad (4.24)$$

$$\dot{\lambda}_2(t) = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = -\lambda_1(t) \quad (4.25)$$

La condition nécessaire du premier ordre par rapport à la variable de contrôle u implique :

$$\frac{\partial H}{\partial u} = ru(t) + \lambda_2(t) = 0 \implies u^*(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{r} \quad (4.26)$$

Nous procédons à une réduction structurelle en éliminant les variables adjointes par dérivations temporelles successives. En dérivant deux fois la relation du contrôle optimal, nous obtenons :

$$\ddot{u}^*(t) = -\frac{\ddot{\lambda}_2(t)}{r} = -\frac{-\dot{\lambda}_1(t)}{r} = -\frac{(x_1(t) - h(t))}{r} \quad (4.27)$$

Puisque par définition du système initial, nous avons $u(t) = \ddot{x}_1(t)$, la quatrième dérivée temporelle de l'altitude $x_1(t)$ s'exprime ainsi :

$$\frac{d^4 x_1(t)}{dt^4} = \ddot{u}^*(t) = -\frac{1}{r} (x_1(t) - h(t)) \quad (4.28)$$

En réorganisant les termes, nous mettons en évidence une équation différentielle linéaire d'ordre quatre fondamentale qui régit le tracé optimal de la voie ferroffé :

$$r \frac{d^4 x_1(t)}{dt^4} + x_1(t) = h(t) \quad (4.29)$$

Cette équation met en évidence que le tracé de la voie ferrée agit comme un filtre passe-bas appliqué au profil du terrain $h(t)$, le paramètre r contrôlant la raideur du lissage.

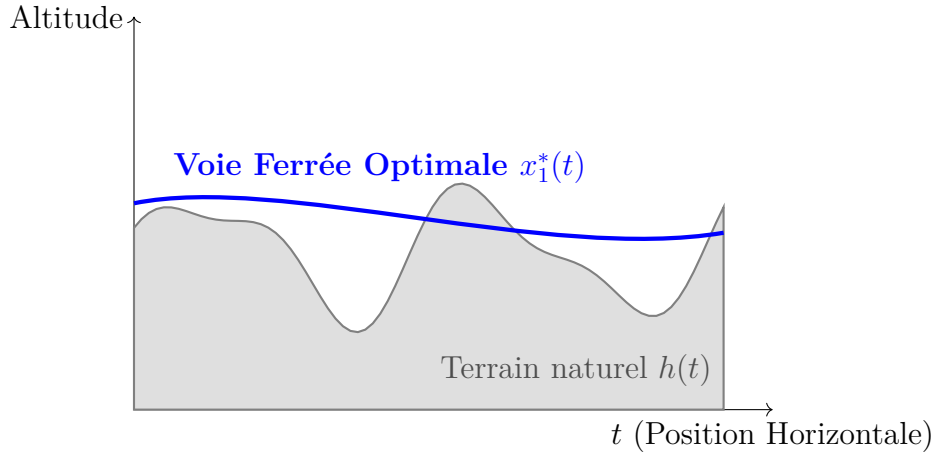


FIGURE 4.4 – Visualisation géométrique du lissage d'infrastructure par rapport au relief topographique réel (Forme 3).

4.3.3 Modèle III : Cas non-linéaire : Ruch d'abeilles

On considère un modèle relativement simple de dynamique de populations. Pour fixer les idées, nous allons le décliner dans le contexte de la modélisation d'une ruche d'abeilles. On suppose que dans la ruche, la population d'abeilles $a(t)$ et celle des reines $r(t)$ évolue selon la dynamique

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} \dot{a}(t) \\ \dot{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(u(t))a(t) \\ \gamma u(t)a(t) \end{pmatrix}, \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.30)$$

où le contrôle $u \in L^\infty([0, T]; U)$ avec $U = [0, 1]$ représente l'effort des abeilles pour fournir des reines et où nous avons introduit la fonction

$$\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad \varphi(v) = \alpha(1 - v) - \beta. \quad (4.31)$$

Les paramètres du modèle α, β, γ sont des réels strictement positifs et on suppose que $\alpha > \beta$. On suppose également que $a(0) > 0$; comme $\dot{a}(t) = \varphi(u(t))a(t)$, on a $a(t) > 0$ pour tout $t \in [0, T]$. On notera également que

- si u est constant égal à 1, on a $\dot{a}(t) = -\beta a(t) < 0$: la population d'abeilles décroît (exponentiellement);
- si u est constant égal à 0, on a $\dot{a}(t) = (\alpha - \beta)a(t) > 0$: la population d'abeilles croît (exponentiellement).

Notre objectif ici est de chercher un contrôle optimal afin de maximiser la population de reines au temps T . En introduisant la fonctionnelle $J : \mathcal{U} = L^1([0, T]; U) \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$J(u) = -r(T), \quad (4.32)$$

le problème de contrôle optimal est donc le suivant :

$$\text{Chercher } \bar{u} \in \mathcal{U} \text{ tel que } J(\bar{u}) = \inf_{u \in \mathcal{U}} J(u). \quad (4.33)$$

On commence par chercher une condition nécessaire d'optimalité en appliquant le PMP. L'état de la ruche est décrit par le vecteur $x = (a, r)^\dagger \in \mathbb{R}^2$. Le problème de contrôle optimal (4.33) rentre dans le cadre d'application du PMP en posant

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi(u)a \\ \gamma ua \end{pmatrix}, \quad g(x, u) = 0, \quad h(x) = -r. \quad (4.34)$$

Soit $\bar{u} \in \mathcal{U}$ un contrôle optimal, de trajectoire associée $(\bar{a}, \bar{r})^\dagger$. Comme $\frac{\partial f}{\partial x}(x, u) = \begin{pmatrix} \varphi(u) & 0 \\ \gamma u & 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = 0$, l'état adjoint $\bar{p} = (\bar{p}_a, \bar{p}_r)^\dagger : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est tel que

$$\begin{cases} \frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = -\varphi(\bar{u}(t))\bar{p}_a(t) - \gamma\bar{u}(t)\bar{p}_r(t), \\ \frac{d\bar{p}_r}{dt}(t) = 0, \end{cases} \quad \forall t \in [0, T], \quad (4.35)$$

et la condition finale sur l'état adjoint est

$$\bar{p}(T) = (\bar{p}_a(T), \bar{p}_r(T)) = (0, -1)^\dagger. \quad (4.36)$$

On a donc

$$\frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = -\varphi(\bar{u}(t))\bar{p}_a(t) + \gamma\bar{u}(t), \quad \bar{p}_r(t) \equiv -1, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (4.37)$$

Par ailleurs, le Hamiltonien est autonome (cf. la définition 5.3) et s'écrit sous la forme

$$H(x, p, u) = p_a \varphi(u)a + \gamma p_r u a. \quad (4.38)$$

La condition de minimisation s'écrit, en utilisant le fait que $\bar{a}(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0, T]$,

$$\bar{u}(t) \in \arg \min_{v \in [0, 1]} \psi(t)v, \quad (4.39)$$

où la **fonction de commutation** est donnée par

$$\psi(t) = -\bar{p}_a(t)\alpha - \gamma. \quad (4.40)$$

La solution du problème de minimisation (4.39) est élémentaire ; on obtient, pour tout $t \in [0, T]$,

- si $\psi(t) > 0$, $\bar{u}(t) = 0$;
- si $\psi(t) = 0$, $\bar{u}(t) \in [0, 1]$;
- si $\psi(t) < 0$, $\bar{u}(t) = 1$.

Le contrôle optimal est donc nécessairement bang-bang, sauf si $\bar{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}$ sur un sous-intervalle de temps de mesure strictement positive. Reprenons alors l'équation de l'état adjoint :

- si $\bar{p}_a(t) > -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\bar{u}(t) = 1$, et on a $\frac{d}{dt}\bar{p}_a(t) = \beta\bar{p}_a(t) + \gamma \geq 0$, i.e., $t \mapsto \bar{p}_a(t)$ est croissante ;
- si $\bar{p}_a(t) < -\frac{\gamma}{\alpha}$, $\bar{u}(t) = 0$, et on a $\frac{d}{dt}\bar{p}_a(t) = (\beta - \alpha)\bar{p}_a(t) \geq 0$, i.e., $t \mapsto \bar{p}_a(t)$ est encore croissante ;
- enfin, il ne peut exister d'intervalle de mesure strictement positive où $\bar{p}_a$ est constant et égal à $-\frac{\gamma}{\alpha}$; en effet, dans ces conditions, on aurait $\varphi(u(t))\frac{\gamma}{\alpha} + \gamma u(t) = 1 - \frac{\beta}{\alpha} \neq 0$, donc $\bar{p}_a$ ne pourrait pas être constant.

Nous pouvons maintenant terminer la résolution du problème. Au temps final, $\psi(T) = -\gamma < 0$, ce qui montre que $\bar{u}(T) = 1$, i.e., au temps final, le contrôle optimal consiste à fournir des reines (ce qui n'est pas très surprenant puisque l'objectif est d'en maximiser le nombre). Le point qui reste à préciser est s'il est optimal d'en fournir depuis l'instant initial ou s'il convient plutôt de laisser d'abord croître la population d'abeilles avant de commencer à en fournir. Comme la fonction de commutation est continue, il existe un temps $t_* < T$ tel que $\bar{u}(t) = 1$ sur $]t_*, T]$. Sur cet intervalle, on a $\frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = \beta\bar{p}_a(t) + \gamma$ et par ailleurs la condition finale sur $\bar{p}_a$ étant $\bar{p}_a(T) = 0$, on en déduit que

$$\bar{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\beta} \left(1 - e^{\beta(t-T)}\right), \quad \forall t \in [t_*, T]. \quad (4.41)$$

La fonction $\bar{p}_a$ est donnée par l'expression ci-dessus tant que le contrôle optimal $\bar{u}$ reste égal à 1. Pour que la valeur du contrôle change, la fonction de commutation (qui est continue) doit s'annuler, i.e., $\bar{p}_a(t_*) = -\frac{\gamma}{\alpha}$. En utilisant l'expression de $\bar{p}_a$, on obtient

$$t_* = \frac{1}{\beta} \ln \left(1 - \frac{\beta}{\alpha}\right) + T. \quad (4.42)$$

On notera que $t_* < T$. Deux cas peuvent alors se produire en fonction des paramètres du problème.

- **Cas 1.** $t_* < 0$ (ce qui correspond au cas d'un horizon temporel T petit) ; le contrôle optimal est alors $\bar{u} \equiv 1$ sur $[0, T]$, ce qui signifie que l'on fournit des reines en continu depuis $t = 0$ jusqu'à $t = T$;

- **Cas 2.** $t_* > 0$ (ce qui correspond au cas d'un horizon temporel T relativement grand) ; le contrôle optimal est $\bar{u} \equiv 0$ sur $[0, t_*[$ et $\bar{u} \equiv 1$ sur $]t_*, T]$. En effet, le contrôle $\bar{u}$ vérifie bien le PMP car $\frac{d\bar{p}_a}{dt}(t) = (\beta - \alpha)\bar{p}_a(t)$, $\bar{p}_a(t_*) = -\frac{\gamma}{\alpha}$, d'où $\bar{p}_a(t) = -\frac{\gamma}{\alpha}e^{(\beta-\alpha)(t-t_*)} < -\frac{\gamma}{\alpha}$ sur $[0, t_*[$, si bien que la fonction de commutation est positive, ce qui correspond bien à $\bar{u}(t) = 0$. L'ensemble $\{t \in [0, T] \mid \psi(t) = 0\}$ est réduit au singleton $\{t_*\}$ et est donc de mesure nulle.

Une illustration de la trajectoire de l'état adjoint et un contrôle optimal est présentée dans le cas où il y a une commutation. Voir figure 4.5.

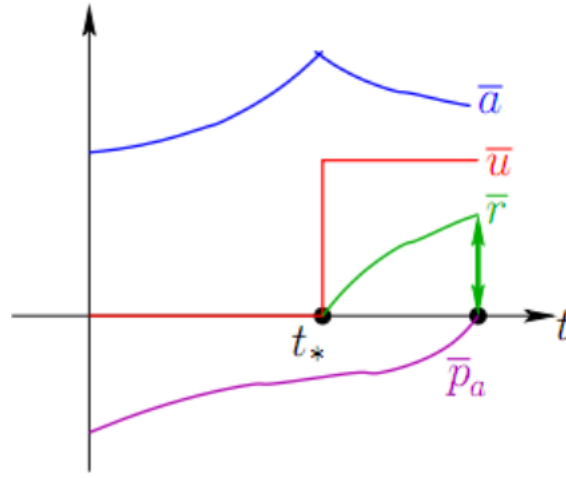


FIGURE 4.5 – Trajectoire, état adjoint et contrôle optimal pour le modèle de la ruche

4.4 Discussions et Perspectives

Après avoir posé les jalons théoriques du contrôle optimal et implémenté diverses simulations numériques, il est fondamental de procéder à une évaluation épistémologique et méthodologique des outils utilisés. Dans un premier temps, nous dresserons un bilan analytique rigoureux des forces, des opportunités, mais également des limitations structurelles et computationnelles du Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP). Enfin, nous ouvrirons la voie à des prolongements académiques en détaillant les perspectives d'extensions stochastiques et structurelles, ainsi que les nouveaux horizons d'application du contrôle optimal dans les sciences de l'ingénieur, l'économie quantitative et l'écologie globale.

4.4.1 Analyse Critique, Avantages et Limites du Principe du Maximum

Le Principe du Maximum de Pontriaguine (PMP) s'est imposé, depuis sa formulation à la fin des années 1950, comme l'un des piliers les plus puissants des mathématiques appliquées et de

la recherche opérationnelle. Cependant, comme tout formalisme mathématique, son application à des systèmes dynamiques réels révèle un certain nombre de compromis entre la précision analytique et la faisabilité algorithmique.

4.4.2 Avantages structurels et conceptuels du formalisme

L'attrait persistant pour le PMP au sein de la communauté scientifique s'explique par plusieurs caractéristiques mathématiques uniques qui le distinguent des approches classiques :

- i. **Prise en compte des domaines de commande compacts et fermés** : Sur le plan historique, le calcul des variations classique imposait des conditions de régularité très strictes, notamment le fait que le domaine des commandes admissibles U soit un ensemble ouvert, permettant ainsi l'utilisation des dérivées partielles pour caractériser les extrema. Le PMP brise totalement cette barrière en formulant la condition d'optimalité non pas sous forme de dérivée nulle, mais sous forme d'une maximisation globale (ou minimisation) du Hamiltonien sur un domaine U qui peut être fermé, borné, ou même constitué de points discrets :

$$\mathcal{H}(x^*(t), u^*(t), \lambda^*(t), t) = \max_{u \in U} \mathcal{H}(x^*(t), u, \lambda^*(t), t) \quad (4.43)$$

Cette avancée permet de modéliser mathématiquement les contraintes réelles de saturation, de vannes complètement ouvertes ou fermées, ou de budgets limités.

- ii. **Réduction de la complexité dimensionnelle fonctionnelle** : D'un point de vue topologique, la recherche d'une trajectoire optimale revient à explorer un espace fonctionnel de dimension infinie. Le coup de génie du PMP réside dans sa capacité à projeter cette complexité sur un espace vectoriel de dimension finie à chaque instant t . En fixant le temps, le choix de la commande optimale $u^*(t)$ se réduit à un problème d'optimisation statique classique, ce qui simplifie grandement l'analyse qualitative du comportement du système.
- iii. **Richesse de l'interprétation duale (Prix fictifs)** : En recherche opérationnelle, les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes ont toujours possédé une signification économique profonde. Dans le PMP, le vecteur adjoint $\lambda(t)$ représente le multiplicateur de la contrainte dynamique (l'équation d'état). Il s'interprète physiquement comme le "prix fictif" (shadow price) ou la valeur marginale de l'état du système.

4.4.3 Limites inhérentes et verrous technologiques

Malgré sa rigueur, l'implémentation du PMP confronte le chercheur à des verrous théoriques et numériques complexes :

- **La nature non suffisante des conditions d'optimalité** : Il est crucial de rappeler que le PMP est, par essence, un théorème de conditions *nécessaires*. Une trajectoire

qui satisfait toutes les équations du PMP (équations d'état, équations adjointes, maximisation de l'Hamiltonien et conditions de transversalité) n'est pas obligatoirement la solution optimale globale. Il peut s'agir d'un maximum local, d'un minimum local (si le signe de l'Hamiltonien est mal configuré), ou d'un point de selle fonctionnel. Pour garantir l'optimalité globale, le chercheur doit obligatoirement valider des hypothèses de convexité très restrictives, telles que les théorèmes de rigidité de Mangasarian (convexité de l'Hamiltonien par rapport à x et u) ou de Arrow.

- **L'instabilité numérique des TPBVP (Two-Point Boundary Value Problems) :** Le système d'équations différentielles couplées généré par le PMP se structure de la manière suivante :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}, & x(0) = x_0 \quad (\text{Condition initiale}) \\ \dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}, & \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x}(x(t_f)) \quad (\text{Condition finale}) \end{cases} \quad (4.44)$$

Nous nous retrouvons face à un problème aux limites où la moitié des conditions est connue au début (0) et l'autre moitié à la fin (t_f). Les méthodes numériques classiques d'intégration (comme Runge-Kutta) ne peuvent pas être appliquées directement. Les algorithmes de résolution (méthode de tir simple/multiple, collocation) souffrent d'une sensibilité extrême aux conditions initiales devinées pour le vecteur adjoint, un phénomène souvent lié à la présence de modes stables et instables qui font diverger les trajectoires très rapidement.

4.4.4 PMP versus Calcul des Variations

Le Calcul des Variations, formalisé par Euler et Lagrange, repose sur l'hypothèse que la commande optimale dérive directement de l'annulation du gradient de l'action fonctionnelle. Si l'on applique l'équation d'Euler-Lagrange :

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) = 0 \quad (4.45)$$

on s'aperçoit que le PMP englobe totalement cette condition lorsque le domaine $U = \mathbb{R}^m$. En effet, si le contrôle est interne au domaine, la condition de maximum du PMP implique la stationnarité ($\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u} = 0$), ce qui redonne exactement les équations classiques. Le PMP est donc une généralisation directe, indispensable dès lors que les commandes subissent des contraintes de borne ($u_{\min} \leq u \leq u_{\max}$).

4.4.5 PMP versus Équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

La Programmation Dynamique, introduite par Richard Bellman, aborde le problème sous un angle totalement différent en introduisant la fonction de valeur $V(x, t)$, qui représente

le coût optimal restant à partir de l'état x à l'instant t . Elle mène à l'équation aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire d'Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$-\frac{\partial V}{\partial t}(x, t) = \max_{u \in U} \left\{ f_0(x, u, t) + \nabla_x V(x, t)^T f(x, u, t) \right\} \quad (4.46)$$

Le lien analytique entre les deux théories est profond : le vecteur adjoint du PMP correspond rigoureusement au gradient de la fonction de valeur de Bellman, soit :

$$\lambda(t) = \nabla_x V(x^*(t), t).$$

Le tableau suivant synthétise les divergences opérationnelles majeures entre ces deux approches :

TABLE 4.1 – Analyse comparative approfondie entre le PMP et l'Équation HJB
plus1.3fill

Dimension d'analyse	Principe du Maximum (PMP)	Programmation Dynamique (HJB)
Type mathématique	Système d'équations différentielles ordinaires (EDO) couplées.	Équation aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire.
Nature du contrôle	Boucle ouverte $u^*(t)$: valable uniquement pour la condition initiale x_0 .	Boucle fermée (Feedback) $u^*(x, t)$: loi de contrôle universelle.
Sensibilité à la dimension	Faible. Le calcul s'effectue le long d'une seule trajectoire unidimensionnelle.	Critique. Souffre de la "malédiction de la dimension" (grille d'espace).
Garantie d'optimalité	Condition nécessaire locale (nécessite des tests de convexité supplémentaires).	Condition suffisante globale (donne directement l'optimum absolu).
Gestion des singularités	Analyse complexe des arcs singuliers et des commutations (<i>Bang-Bang</i>).	Gérée naturellement par la non-linéarité de la fonction de valeur.

Conclusion générale

Il n'est pas nécessaire qu'un problème de maths ait des applications pratiques pour qu'il soit intéressant et il peut être très agréable pour l'esprit d'essayer de résoudre des questions apparemment futiles.

John Von Neumann

Notre objectif dans ce mémoire était l'étude du contrôle optimal et l'application du principe de Pontriaguine. Ce travail nous a permis de comprendre comment diriger un système dynamique de manière efficace et optimale en utilisant des outils mathématiques rigoureux.

Pour commencer, nous avons étudié les équations différentielles qui décrivent l'évolution des systèmes dans le temps. Nous avons vu leurs différents types, ainsi que l'importance des solutions numériques. Ces méthodes numériques sont indispensables pour trouver des résultats pratiques quand le calcul mathématique direct devient trop difficile ou impossible à résoudre à la main.

Après cela, nous nous sommes intéressés à la théorie du contrôle. Nous avons expliqué le but de la commande et le concept fondamental de contrôlabilité, qui nous permet de savoir si on peut transférer un système d'un état initial à un autre état voulu. Nous avons également classé les différents problèmes optimaux et présenté les méthodes de résolution directes et indirectes.

Ensuite, nous avons approfondi le **principe du maximum de Pontriaguine**, qui est l'outil principal de notre étude. Ce principe nous donne les conditions nécessaires pour trouver le contrôle optimal en transformant notre problème en une maximisation de la fonction Hamiltonienne. Grâce à cela, nous avons pu analyser la position du problème, étudier le cas spécifique du temps minimal (pour atteindre l'objectif le plus rapidement possible), et explorer des applications pratiques.

Finalement, nous avons présenté une application concrète avec des simulations numériques. Cette étape nous a permis de tester nos résultats théoriques et de voir le comportement réel du système commandé.

Comme perspectives de recherche, ce genre de contrôle basé sur le principe de Pontriaguine

peut être développé et appliqué dans le futur pour stabiliser des systèmes plus grands, plus complexes ou soumis à des perturbations réelles.

Bibliographie

- [1] M. Aliane, *Contrôle optimal et application à l'aéronautique*, Université Amar Telidji de Laghouat, 2020/2021.
- [2] J. T. Betts and S. L. Campbell, *Discretize then optimize*, in *Mathematics for Industry*, eds SIAM, 2005
- [3] J.M. Coron, *Control and nonlinearity*, American Mathematical Society, 2007
- [4] G.B. Dantzig, *Programmation linéaire*, Dunod, Paris, 1966.
- [5] J.P. Demailly, *Analyse numérique et équations différentielles 3e édition*, EDP, SCIENCES, 2006.
- [6] M. et F. Diener, *Macrodynamique et financement des économies ouvertes*. CIMPA, Nouakchott, 1998.
- [7] A. Fortin, *Analyse numérique pour ingénieurs*. Edition de L'école polytechnique de Montréal, 1997.
- [8] D. Jacobson, D. Lele, J.L. Speyer, *New necessary conditions of optimality for control problems vol 35*, pp 255-284, 1971
- [9] E. Hairer, *Méthodes numériques*, Cours de l'université de Genève, 2004.
- [10] R.E. Kalman, *Contributions to the theory of optimal control*, Boletín de Sociedad Matematica Mexicana, 1960.
- [11] E.B. Lee, L. Markus, *Foundations of optimal control theory*. John Wiley et Sons, New-York. 1967.
- [12] V. Legat, *Mathématique et méthodes numériques*, thèse de doctorat, Université Mouloud Memmri Tizi-ouzou, 2012.
- [13] C. Lobry et T. Sari, *Introduction à la théorie du contrôle*, CIMPA, Tlemcen, 2003.
- [14] K. Louadj, *Résolution des problèmes paramétrés en contrôle optimal*, Thèse de doctorat, 2012
- [15] N. Moussouni, *contrôle optimal : optimisation d'une production céréalière*, Cours de l'université catholique de Louvain, 2004.
- [16] F.Z Mokkedem, *Introduction à la théorie du contrôle*, Université Abou Beker Belkaid Tlemcen, 2019

- [17] H. Nijmeijer. and A.J. Van Der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*, Springer-Verlag New Yourk Inc, 1990.
- [18] D.Ouidja , *Principe du maximum et méthode de tir*, mémoire de Magister université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzo, 2011.
- [19] B. Oukacha, *Résolution de problème de contrôle optimal*, thèse de doctorat université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzo, 2005.
- [20] L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *The mathematical theory of optimal processes*, New York-London, 1962.
- [21] L. S. Pontryagin, *mathematical theory of optimal processes*, Eds Mir Moscou, 1974.
- [22] L. Pujo-Menjouet, *Equations Différentielles Ordinaires et Partielles* , Université Claude Bernard, Lyon I, 1918.
- [23] I. Rezzoug, *cours : théorie du controle.* , Université Larbi Ben M Hidi-Oum el bouaghi, 2019.
- [24] J.Store, R.Bulirsh, *Introduction to Numerical Analysis*, second edition, 1991.
- [25] R.TERKMANI, *Contribution à la commande prédictive des systèmes dynamiques*, UNIVERSITÉ MOULOUDE MAMMERI DE TIZI-OUZOU, 2021.
- [26] E.Trélat, *commande optimale*, Note de cours A 08, 2007/2008.
- [27] E.Trélat, *Optimal control : theory and applications*, Paris : Vuibert, Concrete mathematic collection , 2005
- [28] R.B. Wilson, *A simplicial algorithm for concave programming*, ph.D. Dissertation, Graduate School of Bussiness Administration, 1963.