

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Mouloud Akli Mohand Oulhadj -Bouira

Faculté de Génie de la Construction
Département Génie Mécanique



Mémoire de Fin d'Études

EN VUE DE L'OBTENTION DU DIPLÔME MASTER EN GENIE
MECANIQUE

Spécialité : Construction Mécanique

Thème

Méthode de détection d'endommagement en utilisant
l'énergie de déformation modale

Réalisé par :

ABBASSI OUAFIA
CHEBAB Souraya

Encadré par :

Mr. Merzak Dahmane

Membres du jury :

Mr. MERZAK
Mr. MARZOUK
Mr. AIT Tahar

2025-2026

Remerciement

À notre cher professeur M. Dahmane.

Nous tenons à vous exprimer notre profonde gratitude pour votre accompagnement tout au long de notre parcours universitaire et durant la réalisation de ce travail.

Grâce à vos efforts, votre disponibilité et vos précieux conseils, nous avons pu avancer avec confiance. Les mots ne suffisent pas pour exprimer notre reconnaissance.

Merci beaucoup pour tout.

Dédicaces

*À la personne qui est là quand tout le monde s'en va,
qui m'a accompagnée dès mes premiers pas, qui est une
mère et un père à la fois, je dis : merci papa.*

Je t'aime.

*Je dédie ce travail également à mes deux chères sœurs
et à leurs petites familles, ainsi qu'à mes deux petits*

frères. mes amis

Je vous aime.

OUAFIA

Dédicaces

Tout d'abord, je tiens à remercier mes parents pour leur soutien indéfectible, pour tous les efforts qu'ils ont déployés afin de me fournir tout ce qui était nécessaire durant mon parcours d'études.

Je vous aime.

Et bien sûr, mes sœurs Douaa et Lyzia, ainsi que mes frères Farouk et Abdeslam, et toute ma famille.

SOURAYA

Sommaire

Remerciements.....	i
Dédicaces.....	Ii
Sommaire.....	iii
Liste des figures.....	v
Liste des tableaux.....	vi
Nomenclature.....	Vii
Introduction Générale	1

Table des matières

1. Recherche bibliographique

1.1. Introduction.....	4
1.2. Vibrations des structures mécaniques.....	4
1.3. L'endommagement des structures.....	5
1.3.1. Types d'endommagement.....	6
1.4. Les méthodes basées sur l'énergie de déformation modale...6	
1.4.1. La méthode de Stubs classique basée sur l'indice d'endommagement (IE).....	6
1.4.2. La méthode de l'énergie de déformation modale relative (EDMR)	8
1.4.3. La méthode du changement de l'énergie de déformation modale (DEMD).....	9
1.4.4. Méthode de l'énergie de déformation intermodale EDIM.....	11
1.4.5. Méthode de l'énergie de déformation modale élémentaire.....	13
1.4.6. La méthode de l'énergie de déformation modale basée sur la courbure.....	16

1.4.7. Approches hybrides basées sur l'intelligence artificielle et l'énergie de déformation modale (IA+MSE)	17
--	----

2. Modélisation par éléments finis

2.1. Introduction.....	20
2.2. Théorie de la méthode des éléments finis.....	20
2.2.1. Description générale sur les éléments finis.....	20
2.2.2. Historique sur MEF.....	21
2.2.3. Les étapes principales de calcul par la MEF.....	23
2.2.4. Types d'éléments finis.....	22
2.2.5. Discrétisation géométrique.....	23
2.3. Élément fini poutre 2D en flexion.....	23
2.3.1. Formulation d'une poutre d'Euler-Bernoulli	23
2.3.1.1. Identification du problème.....	23
2.3.1.2. Fonction d'interpolation.....	24
2.3.2. La relation entre déformations-déplacements	25
2.3.3. La relation entre déplacements-contraintes.....	25
2.3.4. Matrices de rigidité et de masse élémentaires.....	26
2.3.5. Assemblage des matrices de rigidité et de masse.....	27
2.3.6. Matrice de transformation.....	29
2.4. Conclusion	31

3. Présentation de la méthode des énergies de déformation modale

3.1. Introduction.....	32
3.2. La méthode de l'énergie de déformation modale (MES).....	32
3.3. Bases mathématiques de la méthode.....	33
3.3.1. Organigramme de la MSE.....	36
3.4. Cas tests de la méthode.....	37

3.4.1. Résultats et comparaison avec la méthode des fréquences.....	38
3.5. Conclusion.....	46

4. Normalisation statistique et application

4.1. Introduction.....	47
4.2. Traitement statistique de l'indicateur de dommage par la méthode statistique (Z-score)	47
4.2.1. Problématique et nécessité de la normalisation.....	47
4.2.2. Fondement mathématique du Z-score.....	49
4.2.3. Propriétés de la loi normale et définition du seuil de décision...	49
4.3. Résultats et discussion.....	50
4.4. Application.....	51
4.4.1. Premier cas.....	51
4.4.2. Deuxième cas.....	52
4.4.3. Troisième cas.....	53
4.4.4. Quatrième cas.....	54
4.4.5. Cinquième cas	56
4.4.6. Sixième cas.....	57
4.5. Conclusion	62
Conclusion générale.....	64

Liste des figures

Figure 2.1 : Elément poutre dans le plan (X-Y) avec 44 degrés de liberté.

Figure 2.2 : Segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation, (C) Angle de rotation de la section transversale.

Figure 2.3 : Transformation d'un élément horizontal.

Figure 3.1 : Poutre encastree à gauche divisée en 21 éléments.

Figure 3.2: L'énergie saine et endommagée avec détection de changement pour l'élément 1.

Figure 3.3: L'énergie saine et endommagée avec détection de changement pour l'élément 21.

Figure 3.4: L'énergie saine et endommagée avec détection de changement pour l'élément 3,10,19.

Figure 3.5 : Localisation d'endommagement par la Fraction d'énergie de déformation modale (Cas 1).

Figure 3.6 : Localisation d'endommagement par la Fraction d'énergie de déformation modale (Cas 2).

Figure 3.7 : Localisation d'endommagement par la Fraction d'énergie de déformation modale (Cas3).

Figure 4.1 : La distribution de Gauss.

Figure 4.2 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 1.

Figure 4.3 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 2.

Figure 4.4 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 3.

Figure 4.5 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 4.

Figure 4.6 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 5.

Figure 4.7 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 6

Figure 4.8 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score sous l'effet d'un bruit pour le Cas 1.

Figure 4.9 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score sous l'effet d'un bruit pour le Cas 2.

Liste des tableaux

Tableau 3.1: Propriétés mécaniques et géométriques de la structure poutre.

Tableau 3.2 : Scénarios d'endommagements et la réduction des éléments.

Tableau 3.3 : Résultats pour les huit premiers modes.

Tableau 4.1 : Six cas tests et les éléments endommagées avec les applications en choc.

Tableau 4.2 : Deux cas tests des éléments endommagés et application au choc et le bruit.

Nomenclature

MEF : Méthode des éléments finis.

d, d, l : Nombre de liberté.

1D : Unidimensionnelle.

2D : Bidimensionnelle.

3D : Tridimensionnelle.

Dm, De : domaine totale et élémentaire respectivement.

$[K^e]$: Matrice de rigidité élémentaire.

$[M^e]$: Matrice de masse élémentaire.

L_e : Longueur d'un élément.

ε_{xx} : déplacement axial.

σ_{xx} : contrainte de déformation.

y : Distance par rapport à l'axe neutre.

$[K]$: Matrice de rigidité de l'élément dans le système global.

$[M]$: Matrice de masse de l'élément dans le système global.

$v(x)$: La variation de déplacement.

d : vecteur de déplacement.

θ : La rotation à l'axe xy.

ρ : Masse volumique (Kg/m^3).

$\vec{\varphi}$: Est le vecteur du déplacement nodal.

$[\vec{P}]$: le vecteur des forces nodales.

x, y : les coordonnées axial et transversal respectivement.

A : Section de la poutre (m^2).

I : Moment d'inertie (Kg.m^2).

L : Longueur de la poutre (m).

E : Module de Young.

b : Largeur (m).

h : hauteur (m).

$[N]$: matrice des fonctions de forme.

C, S : Cosinus directeur.

$[T]$: Matrice de transformation.

MSE : Modal Strain Energy.

$MSE_{i,j}^{es}$: Energie de déformation modal d'une structure saine (J/m^3).

$MSE_{i,j}^{ed}$: Energie de déformation modal d'une structure endommagée (J/m^3).

n, m : nombre d'éléments et modes respectivement.

$NMSE_{i,j}^{es}$: Energie de déformation modal normalisé d'une structure saine.

$NMSE_{i,j}^{ed}$: Energie de déformation modal normalisé d'une structure endommagée.

$mNMSE_{i,j}^{es}$: La moyenne de MSE normalisée d'une structure saine.

$mNMSE_{i,j}^{ed}$: La moyenne de MSE normalisée d'une structure endommagée.

MSEBI: Indicateur de l'énergie de déformation modale.

Introduction générale

Depuis l'aube des civilisations l'être humain ne cesse de se développer dans tous les domaines (la médecine, l'industrie et la construction), afin de simplifier son quotidien. Cependant l'homme n'a pas été limité à ses seuls progrès, il a fait de la stabilité et la sécurité une propriété absolue en vue d'améliorer et garantir une vie plus sécurisée et plus confortable. A cet effet, il est nécessaire que l'homme œuvre constamment pour développer des solutions et des méthodes plus efficaces pour le contrôle des structures dans l'objectif de préserver leur intégrité et éviter des pertes matérielles et humaines.

Les structure de génie civil et mécanique sont largement utilisées dans de nombreux domaines industriels. Au cours de leur durée de vie, elles sont soumises à différentes sollicitations, telles que les chocs, les forces oscillatoires et les effets environnementaux, qui peuvent provoquer une dégradation progressive de leurs propriétés mécaniques. Ces dégradations se manifestent notamment par l'apparition de fissures ou par une diminution locale de rigidité, pouvant affecter les performances de la structure ainsi que leur sécurité.

Afin de prévenir les risques de défaillance, de nombreuses techniques de surveillance ont été développées pour détecter et localiser les endommagements à un stade précoce. Parmi ces techniques, les approches basées sur l'analyse du comportement dynamique des structures occupent une place importante. En effet, la présence d'un endommagement modifie les caractéristiques dynamiques de la structure, notamment ses fréquences propres, ses formes modales et ses énergies modales.

La méthode des énergies modales constitue une approche particulièrement intéressante pour la détection des endommagements. Son principe repose sur l'analyse de la distribution de l'énergie modale dans la structure saine et sur la comparaison de cette distribution avec celle obtenue après endommagement. Les

variations observées permettent d'identifier la présence d'un endommagement et de localiser la zone affectée à partir des changements les plus significatifs.

L'objectif de ce mémoire est d'évaluer la sensibilité de la méthode des énergies modales pour la détection et la localisation des endommagements structuraux. Plusieurs scénarios sont étudiés afin d'analyser l'influence de l'endommagement, de sa position, du nombre de zones endommagées ainsi que la présence de bruit dans les mesures. Les performances de cette méthode sont également comparées à celles obtenues par une méthode fréquentielle à partir des signaux de déplacement afin de mettre en évidence ses avantages et ses limites.

Pour ce faire, nous avons structuré le mémoire selon l'ordre suivant : une introduction générale, quatre chapitres et une conclusion générale avec quelques perspectives.

Le chapitre 1 est consacré à une recherche bibliographique qui fait une synthèse exhaustive des méthodes basées sur l'énergie de déformation modale.

Dans le chapitre 2, est présentée la méthode des éléments finis et son application à la modélisation d'une structure poutre.

Le chapitre 3, est consacré à la méthode MSE pour l'identification et localisations des endommagements.

Le chapitre 4, concerne une présentation des résultats obtenus à partir des cas test, afin de tester et d'évaluer la robustesse de la méthode (MSE) à plusieurs scénarios d'endommagement ainsi que l'influence du bruit de mesure sur la qualité de détection et de localisation.

Ce mémoire s'achève par une conclusion générale qui résume les principaux résultats obtenus à partir des analyses effectuées. Les performances de la méthode y sont également discutées, notamment sa capacité à détecter et à

localiser les endommagements, ainsi que son comportement en présence de bruit.

Chapitre 1 : Recherche bibliographique

1.1. Introduction :

La conception d'une structure repose sur un équilibre entre des contraintes initiales (coût, durée de vie) et sa capacité à résister à des sollicitations statiques et dynamiques extérieures (forces, température, vibrations).

L'objectif est de prédire l'état final de la structure et sa capacité à résister (Déplacements, fréquences propres) en utilisant les lois de la mécanique (RDM, MMC, dynamique). L'endommagement qui se traduit par des déformations permanentes et une perte de rigidité du matériau, est à l'origine de la dégradation du comportement de la structure. Ces dommages peuvent prendre la forme de fissures, déformations plastiques ou usure permanentes. Pour éviter une défaillance catastrophique et garantir la sécurité de la structure, il est crucial d'utiliser des méthodes de Contrôle continues ou périodiques Non Destructif (CND) et de surveillance de l'état de santé de la structure (SHM, Structural Health Monitoring) pour détecter, localiser et éventuellement quantifier les défauts qui apparaissent lors du fonctionnement de la structure.

Ce travail a pour objectif d'analyser ces méthodes de contrôle. Il s'articule principalement autour d'une approche basée sur l'énergie de déformation de la structure. Cette approche qui date depuis plusieurs années a connue des évolutions importantes.

1.2. Vibrations des structures mécaniques :

Les vibrations des structures mécaniques correspondent aux mouvements oscillatoires d'une structure autour de sa position d'équilibre, sous l'effet de sollicitations extérieures ou internes. Ces vibrations apparaissent à cause des charges dynamiques comme le vent, les séismes et des charges cycliques dues notamment à des défauts de fabrication ou d'ajustement dans les machines mécaniques. L'étude vibratoire est nécessaire car elle permet de comprendre le

comportement dynamique des structures et d'éviter les défaillances pouvant être causées par des phénomènes comme la fatigue et la résonance.

L'analyse vibratoire d'une structure repose principalement sur trois éléments essentiels :

- **L'environnement vibratoire** : représentant les forces extérieures appliquées à la structure.
- **La structure elle-même** : concerne les caractéristiques vibratoires intrinsèques de la structure (matrice masse et matrice rigidité) permettant de déterminer les caractéristiques dynamiques propres de la structure (les fréquences naturelles, les modes propres). Par ailleurs, l'étude des vibrations forcées consiste à analyser la réponse de la structure lorsqu'elle est soumise à des charges dynamiques extérieures. Cette étude peut être menée dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel.
- **La réponse vibratoire** : l'étude des vibrations forcées consiste à analyser la réponse de la structure lorsqu'elle est soumise à des charges dynamiques extérieures. Cette étude peut être menée dans le domaine fréquentiel ou dans le domaine temporel.

Ainsi, l'étude des vibrations joue un rôle très important dans la conception, la surveillance et la détection des endommagements des structures mécaniques.

1.3 L'endommagement des structures :

Une structure soumise à des sollicitations dynamiques peut présenter selon l'intensité et la nature des sollicitations des changements importants dans son comportement mécanique. Ces variations peuvent évoluer depuis le domaine élastique jusqu'au domaine plastique, puis conduire à l'apparition d'endommagements pouvant provoquer la rupture de la structure. Par sa présence, un endommagement entraîne une dégradation progressive des

propriétés mécaniques du matériau, notamment une diminution de sa rigidité et donc de sa résistance.

1.3.1.Types d'endommagement :

- Réduction de la section transversale.
- Modélisation par fissures ouvertes.
- Modélisation par modèle à ressort de flexibilité.
- Mécanique de l'endommagement continu.

1.4. Les méthodes de détection basées sur l'énergie de déformation modale :

Plusieurs travaux de recherche ont été réalisés durant les dernières décennies dans le domaine de la détection des endommagements en utilisant l'énergie de déformation modale (*Modal Strain Energy* – MSE). Cette méthode repose sur le principe qu'un endommagement provoque une diminution locale de rigidité, ce qui entraîne une modification de l'énergie de déformation dans une structure. Ces méthodes basées sur l'énergie sont largement utilisées dans le domaine de la surveillance de santé des structures (*Structural Health Monitoring* – SHM) pour détecter et localiser les endommagements. Elles reposent principalement sur les variations de la rigidité structurale qui modifient la distribution de l'énergie de déformation dans les modes propres de vibration.

1.4.1.La méthode de Stubs classique basée sur l'Indice d'endommagement (IE) :

La méthode SIE (*Strain Energy Index*) exige à la connaissance des modes propres de la structure avant et après l'apparition des endommagements. Néanmoins, tout comme pour la méthode de la flexibilité, il n'est pas

indispensable d'obtenir des modes propres normalisés en masse pour évaluer l'indice d'endommagement. Initialement, les premières recherches ont validé l'efficacité de la SIE pour les structures assimilables à des poutres (ou décomposables en éléments de poutre). Par la suite, son application a été étendue avec succès aux plaques composites rigidifiées par des raidisseurs

Toutefois, la méthode SIE se limite à la localisation des endommagements et reste incapable de quantifier la sévérité. Pour pallier cette restriction et affiner l'estimation de la gravité des endommagements, la recherche actuelle se divise en deux approches majeures. La première vise à développer une méthode globale capable de localiser et de dimensionner précisément les dégradations, ce qui modifie inévitablement la formulation initiale de l'index de Stubbs. La seconde approche consiste à superposer une méthode de quantification distincte afin de prédire avec exactitude le niveau de gravité de l'endommagement.

N. Stubbs, J. T. Kim et K. Topole [1] figurent parmi les premiers chercheurs ayant contribué au développement de la méthode de l'indice de d'endommagement fondée sur l'énergie de déformation modale au années 1992. Ses travaux ont introduit une nouvelle approche consistant à exploiter la variation de l'énergie modale entre une structure saine et une structure endommagée afin de détecter et localiser les zones de dégradation. Ont démontré que la redistribution de l'énergie de déformation dans les éléments structurels constitue un indicateur fiable de perte de rigidité. Ses recherches ont posé les bases théoriques des méthodes modernes de SHM basées sur l'énergie modale.

Par la suite, C. R. Farrar. N. Stubbs, J. T. Kim [2] ont joués un rôle important dans la validation expérimentale des méthodes basées sur l'énergie modale. Ses travaux ont permis de confirmer, à travers des essais sur structures réelles et expérimentales, l'efficacité de cette méthode pour la détection des

endommagements. Ont notamment contribué à l'application de ces méthodes dans des structures mécaniques et aéronautiques, en mettant en évidence leur robustesse face aux incertitudes de mesure. Ses recherches ont fortement soutenu le développement et la crédibilité des techniques SHM basées sur l'énergie de déformation modale.

Choi et Stubbs [3] ont étendu la méthode de l'indice de dommage basée sur l'énergie de déformation modale aux structures de type plaque. Alors que les travaux initiaux de Stubbs, Kim et Topole étaient principalement consacrés aux structures poutres. Ils ont développé une formulation adaptée aux plaques bidimensionnelles. Leur approche consiste à discrétiser la plaque en plusieurs éléments et à analyser les variations locales de l'énergie de déformation modale entre l'état sain et l'état endommagé et qu'une perte de rigidité entraîne une redistribution de l'énergie de déformation dans la zone affectée, permettant ainsi de localiser efficacement les endommagements. Cette contribution a marqué une étape importante dans l'extension des méthodes basées sur l'énergie de déformation modale vers des structures plus complexes.

Cornwell, Doebling et Farrar [4] dans une étude publiée en 1999, ils ont démontré que les changements locaux de l'énergie de déformation modale constituent un indicateur sensible de la présence d'endommagements. Ces travaux ont contribué à élargir le domaine d'application de la méthode de l'indice d'endommagement, initialement développée pour les structures assimilables à des poutres.

1.4.2. La méthode de l'Énergie de Déformation Modale Relative (EDMR) :

La méthode de l'Énergie de Déformation Modale Relative, appelée *Relative Modal Strain Energy Difference* (RMSED), est une technique de détection d'endommagement utilisée dans le domaine du *Structural Health Monitoring* (SHM). Cette méthode repose sur l'analyse des variations relatives de l'énergie de déformation modale entre l'état sain et l'état endommagé d'une structure. Le principe fondamental est qu'un dommage provoque une diminution locale de rigidité, ce qui modifie la distribution de l'énergie de déformation dans les éléments structuraux. En comparant les valeurs relatives de cette énergie, il devient possible de localiser les zones présentant un endommagement.

La méthode RMSED a été développée et améliorée à travers les travaux de plusieurs chercheurs importants dans le domaine de la détection vibratoire des dommages, notamment N. Stubbs, J. T. Kim, A. K. Pandey. Ces chercheurs ont montré que les changements relatifs de l'énergie modale sont très sensibles aux réductions locales de rigidité et permettent une meilleure localisation des endommagements que les fréquences naturelles seules.

N. Stubbs, J. T. Kim [5] la méthode trouve son origine dans les travaux de Stubbs et Kim, qui ont proposé une approche de localisation des dommages basée sur l'énergie de déformation modale sans nécessiter les paramètres modaux de référence. Leur contribution repose sur l'exploitation des variations relatives de l'énergie de déformation modale, ce qui a permis de développer des formulations plus robustes pour la détection des endommagements structuraux.

1.4.3. La méthode du Changement de l'Énergie de Déformation Modale (DEMD) :

Connue sous le nom *Modal Strain Energy Change* (MSEC), cette méthode s'appuie sur l'étude des variations de l'énergie de déformation modale

engendrées par une diminution locale de la rigidité d'une structure. Un endommagement dans un élément structural modifie la répartition de l'énergie de déformation associée aux différents modes de vibration. En comparant les valeurs de l'énergie de déformation modale de la structure saine à celle de la structure endommagée, il devient alors possible de détecter des modifications et de localiser les zones affectées par le dommage.

Les travaux réalisés sur la base de l'énergie de déformation ont conduit au développement de plusieurs indices (*Damage index* DI) capables d'identifier les dommages dans différents types de structures : les poutres, les plaques et les structures complexes.

Les variations des courbures modales conduisant aux variations de l'énergie de déformation représentent des indicateurs particulièrement sensibles à la présence d'un endommagement structural. La diminution de rigidité provoque une augmentation des courbures modales au niveau de la zone endommagée, et étant donné que l'énergie de déformation modale dépend directement de ces courbures, sa valeur dans le cas endommagée est automatiquement augmentée. Par conséquent, les régions présentant les variations les plus importantes de l'énergie de déformation modale sont considérées comme des zones potentiellement endommagées.

Z. Y. Shi en collaboration avec N Stubbs [6], ont joué un rôle déterminant dans le perfectionnement et l'extension des approches basées sur l'énergie de déformation modale, en particulier pour le diagnostic des structures complexes. Bien qu'ils n'aient pas été les initiateurs directs de la méthode (*Modal Strain Energy Change* - MSEC), leurs travaux se sont concentrés sur l'exploitation des variations de l'énergie de déformation modale entre les états sain et endommagé afin d'optimiser la précision de la localisation des défauts. Leurs recherches ont principalement permis d'introduire des formulations améliorées et plus robustes dans le domaine du *Structural Health Monitoring* - SHM), spécifiquement

conçues pour atténuer la sensibilité au bruit expérimental et surmonter les incertitudes liées aux mesures sur site.

S. S. Law, Shi, Z. Y. Zhang, L. M [7] afin d'améliorer la détection et la localisation des endommagements structuraux. Cette méthode repose sur le principe qu'une réduction locale de rigidité modifie la distribution de l'énergie de déformation associée à un mode de vibration donné. En comparant l'énergie de déformation modale d'une structure saine à celle d'une structure endommagée, il devient possible d'évaluer les variations énergétiques induites par l'endommagement. Les zones présentant les changements les plus importants de l'énergie de déformation modale sont alors identifiées comme des emplacements potentiels d'endommagement. Les auteurs ont montré que cette approche fournit une localisation plus précise des endommagements.

1.4.4. Méthode de l'énergie de déformation intermodale MEDI :

La méthode (*Intermodal Strain Energy* - MEDI) est une approche basée sur l'exploitation simultanée de plusieurs modes, pour la détection d'endommagement dans les structure. Contrairement aux méthodes classiques qui utilisent un seul mode, l'MEDI considère les interactions entre les différentes modes afin d'améliorer la fiabilité de l'identification des endommagements. Cette méthode repose sur l'idée que l'apparition d'un endommagement entraîne une modification de la distribution de l'énergie dans la structure. En combinant les informations issues de plusieurs modes, elle permet une détection plus robuste face aux erreurs de mesure et aux incertitudes expérimentales. L'un des avantages de cette méthode est qu'elle ne nécessite pas une correspondance stricte entre les modes de la structure saine et endommagée, ce qui la rend plus flexible dans les applications pratiques. Cependant, elle suppose généralement que la masse de la structure reste inchangée après l'apparition d'endommagement, ce qui constitue une limitation importante.

Hu, Wang et Li [8] ont proposé la méthode de l'énergie de déformation modale croisée (Cross-Modal Strain Energy - CMSE) qui est une forme particulière de méthode de l'énergie de déformation intermodale. Afin d'améliorer l'estimation de la sévérité des endommagements dans les structures. Contrairement aux méthodes classiques basées sur l'énergie de déformation modale, qui nécessitent la comparaison des mêmes modes de vibration entre l'état sain et l'état endommagé ainsi qu'une normalisation préalable des formes modales. Cette méthode exploite les interactions entre différents modes propres, elle permet d'établir un système d'équations exact et non itératif pour évaluer l'ampleur des endommagements, tout en supposant que les distributions de masse des structures saine et endommagée demeurent identiques (la masse ne change pas après l'apparition d'endommagement). Les auteurs ont démontré, à travers des simulations numériques réalisées sur une structure tridimensionnelle à cinq étages, que la méthode CMSE est capable d'estimer avec précision la sévérité d'endommagements multiples en utilisant seulement un nombre limité de modes mesurés. Cette méthode constitue ainsi une avancée importante dans le domaine de l'identification des endommagements structuraux, en offrant une meilleure robustesse et une plus grande flexibilité que les approches conventionnelles basées sur l'énergie de déformation modale.

Y. Q. Ni a apporté une contribution importante au développement des techniques de (*Structural Health Monitoring* - SHM) fondées sur les paramètres modaux et énergétiques. En collaboration avec S. S. Law, H. F. Lam et Z. J.

Yang [9], il a participé à l'élaboration de méthodes basées sur la décomposition de l'énergie de déformation modale pour la détection et la localisation des endommagements dans les structures complexes. Ces travaux ont montré que l'exploitation simultanée de plusieurs modes de vibration permet d'améliorer la sensibilité des indicateurs d'endommagement et de mieux identifier les réductions locales de rigidité. Les méthodes développées ont été

appliquées à des structures de génie civil telles que les ponts, les treillis métalliques et démontrant leur efficacité dans le cadre des systèmes modernes de surveillance de l'intégrité structurelle.

H. F. Lam en collaboration avec S. S. Law, Y. Q. Ni et Z. J. Yang [10] ont contribué au développement des méthodes de détection des endommagements basées sur l'énergie de déformation modale. Leurs travaux ont montré que l'exploitation simultanée de plusieurs modes de vibration améliore la sensibilité des indicateurs d'endommagement et permet une localisation plus fiable des défauts structuraux. En particulier, la méthode de décomposition de l'énergie de déformation modale développée par ces auteurs permet d'analyser la redistribution de l'énergie vibratoire dans les éléments endommagés et d'accroître la robustesse des résultats face aux erreurs de mesure et au bruit expérimental. Ces recherches ont constitué une avancée importante vers les approches multimodes et intermodales utilisées dans le domaine du *Structural Health Monitoring*.

1.4.5.L'énergie de déformation modale élémentaire (EDME) :

Souvent assimilée à la méthode de l'énergie de déformation modale (*Modal Strain Energy– MSE*), constitue une approche fondamentale en SHM pour la détection et la localisation des endommagements structuraux. Son principe repose sur le fait qu'une détérioration locale, telle qu'une fissure ou une perte de matière, entraîne une diminution de la rigidité de l'élément concerné, ce qui provoque une redistribution de l'énergie de déformation modale au sein de la structure. Pour chaque élément, cette énergie est calculée à partir de la rigidité élémentaire et des formes modales de vibration. La détection des endommagements s'effectue en comparant la distribution de l'énergie de

déformation modale entre l'état sain et l'état endommagé. Les variations significatives de cette énergie permettent d'identifier les zones susceptibles de contenir un défaut, les éléments présentant les plus fortes perturbations étant considérés comme potentiellement endommagés. Plusieurs travaux ont montré que cette méthode peut être formulée sous forme d'indicateurs de sensibilité, permettant d'améliorer à la fois la localisation et l'estimation de la sévérité des endommagements dans des systèmes linéaires ou non amorti.

Par ailleurs, afin de tenir compte des incertitudes expérimentales et d'améliorer la robustesse de la méthode, différentes extensions ont été proposées entre 2000 et 2010. Certaines approches introduisent des formulations de sensibilité de l'EDME permettant d'identifier simultanément la position et l'intensité des endommagements, tandis que d'autres combinent l'énergie modale avec des techniques d'optimisation afin d'affiner la localisation après une première phase de détection globale.

Enfin, des méthodes intègrent des stratégies de fusion de données et d'aide à la décision pour réduire l'effet de diffusion des indicateurs énergétiques vers les éléments voisins pouvant entraîner des erreurs de localisation. Ces développements ont ainsi permis d'améliorer progressivement la précision et la fiabilité des méthodes basées sur l'énergie de déformation modale dans le cadre du SHM.

Par ailleurs, Shi, Law et Zhang [11] ont proposé une méthode de détection des endommagements basée sur la variation de l'énergie de déformation modale (*Modal Strain Energy* – MSE). Leur approche repose sur le principe selon lequel une réduction locale de rigidité provoquée par un endommagement entraîne une modification de la répartition de l'énergie de déformation associée aux modes de vibration. En comparant l'énergie de déformation modale calculée pour l'état sain et l'état endommagé de la structure, les auteurs ont montré qu'il est possible

de localiser efficacement les zones endommagées. Les résultats obtenus sur différentes structures ont démontré que l'indicateur énergétique présente une sensibilité supérieure à celle des seules fréquences propres, particulièrement pour la détection des endommagements localisés de faible ampleur.

Yan et Ren [12] ont développé une approche fondée sur la sensibilité de l'énergie de déformation modale élémentaire afin d'améliorer la localisation et la quantification des endommagements structuraux. Leurs travaux ont établi des relations analytiques reliant les variations de l'énergie de déformation modale aux pertes de rigidité des éléments d'une structure. Grâce à cette formulation, il devient possible d'identifier simultanément l'emplacement et l'intensité d'endommagement sans recourir à des procédures itératives complexes. Les auteurs ont montré que la méthode est particulièrement efficace pour les structures discrétisées par éléments finis et qu'elle conserve une bonne précision même lorsque les données modales sont affectées par un faible niveau de bruit expérimental.

Dans la continuité de leurs travaux précédents, Yan, Huang et Ren [13] ont proposé une méthode de détection des endommagements basée sur la sensibilité de l'énergie de déformation modale élémentaire. Cette approche utilise les dérivées de l'énergie modale par rapport aux paramètres de rigidité afin d'évaluer l'influence de chaque élément sur la réponse dynamique globale de la structure. Les auteurs ont développé des équations de sensibilité permettant de détecter plusieurs endommagements simultanément et d'estimer leur sévérité avec une précision élevée. Les validations numériques réalisées sur des poutres et des structures discrétisées ont montré que cette méthode offre une meilleure robustesse vis-à-vis du bruit que plusieurs indicateurs énergétiques classiques.

1.4.6. La méthode de l'Énergie de Déformation Modale basée sur la Courbure :

Entre 2015 et 2020, la méthode des courbures modales a connu d'importants développements dans le domaine du (*Structural Health Monitoring* - SHM). Les travaux de Dessi et Camerlengo ont réalisé une analyse comparative approfondie des techniques de détection d'endommagement basées sur les courbures modales et l'énergie de déformation modale. Ces études ont confirmé que les courbures modales constituent des indicateurs particulièrement sensibles aux réductions locales de rigidité causées par les fissures ou autres formes d'endommagement. Le principe repose sur le fait que la courbure modale, obtenue par la dérivée seconde de la forme modale, est directement liée à la rigidité en flexion de la structure. Ainsi, lorsqu'un endommagement apparaît, une augmentation locale de la courbure est observée dans la zone affectée.

Les recherches menées durant cette période ont également montré que l'utilisation combinée des courbures modales et de l'énergie de déformation modale améliore considérablement la précision de localisation des endommagements, notamment dans les poutres, les ponts et les structures offshore [15]. Cependant, plusieurs auteurs ont souligné que le calcul des courbures par dérivation numérique amplifie fortement le bruit expérimental [16], ce qui peut entraîner des erreurs de détection. Pour remédier à cette limitation, diverses techniques de filtrage, de lissage et de traitement avancé du signal ont été proposées [17]. Malgré ces difficultés, la méthode des courbures modales demeure l'une des approches les plus sensibles pour détecter des endommagements de faible ampleur, même lorsque les variations des fréquences propres restent très faibles.

Dessi et Camerlengo [14] ont réalisé l'une des études comparatives les plus complètes consacrées aux méthodes de détection des endommagements basées

sur les courbures modales, ont évalué plusieurs indicateurs utilisant les courbures, les fréquences propres et l'énergie de déformation modale sur une même poutre d'Euler-Bernoulli endommagée. Ces auteurs ont montré que les méthodes basées sur les courbures présentent généralement une meilleure sensibilité aux endommagements localisés que celles fondées uniquement sur les fréquences naturelles. Ils ont également analysé l'influence du nombre de modes utilisés et de la densité des points de mesure sur la précision de localisation d'endommagement qui permis d'identifier les avantages et les limites de chaque variante de la méthode des courbures.

Quaranta, Carboni et Lacarbonara [18] ont étudié les difficultés numériques associées à la méthode des courbures modales. Ils ont montré que le calcul des courbures par dérivation numérique amplifie fortement les erreurs expérimentales et le bruit de mesure. Leurs travaux ont démontré que même lorsque des techniques de filtrage sont appliquées, les faux diagnostics peuvent subsister. Les auteurs ont ainsi mis en évidence l'une des principales limites de la méthode des courbures : sa grande sensibilité au bruit. Leur recherche a conduit au développement de procédures de lissage et de traitement du signal destinées à améliorer la fiabilité de la détection des endommagements dans les applications expérimentales.

1.4.7.Approches Hybrides basées sur l'Intelligence Artificielle et l'Énergie de Déformation Modale (IA + MSE) :

Les approches hybrides combinant l'Intelligence Artificielle (IA) et (*l'Énergie de Déformation Modale* - MSE) constituent une évolution récente et prometteuse dans le domaine du (*Structural Health Monitoring*- SHM). Elles reposent sur l'association des méthodes vibratoires traditionnelles basées sur

l'énergie modale avec les capacités d'apprentissage, de classification et de prédiction offertes par l'intelligence artificielle. L'objectif principal de ces approches est d'accroître la précision, la rapidité et la robustesse de la détection des endommagements, notamment dans des environnements bruités ou des structures complexes. Le principe fondamental de ces techniques consiste à exploiter les paramètres modaux, tels que les fréquences naturelles, les formes modales, les courbures modales ainsi que l'énergie de déformation modale, comme données d'entrée pour des modèles d'intelligence artificielle. Les variations observées dans ces paramètres servent ensuite à entraîner des algorithmes capables d'identifier automatiquement les zones endommagées et d'estimer le degré de dégradation de la structure avec une meilleure fiabilité.

Dans les approches hybrides, les variations de l'énergie modale sont introduites dans des modèles d'intelligence artificielle afin d'effectuer la classification ou la prédiction des endommagements. Les chercheurs ont montré que les approches IA + MSE permettent de réduire les erreurs de détection et d'améliorer la sensibilité aux faibles endommagements. Contrairement aux méthodes classiques, les modèles d'intelligence artificielle peuvent apprendre automatiquement les relations complexes entre les paramètres vibratoires et les niveaux d'endommagement. Cela permet d'obtenir une meilleure robustesse face aux perturbations expérimentales et aux variations des conditions de fonctionnement.

M. M. Rahman, S. S. Law, S. Ahmed [19] a participé au développement de méthodes avancées de détection des endommagements utilisant les paramètres modaux et les techniques numériques intelligentes. Ses recherches ont porté sur l'amélioration de la précision des méthodes vibratoires en combinant l'énergie de déformation modale avec des techniques d'identification automatique. Les travaux de Law ont montré que les approches hybrides permettent une meilleure localisation des endommagements dans les structures complexes.

S. W. Doebling [20] ont contribué à poser les bases fondamentales de la détection des endommagements par le biais des paramètres modaux et de leur traitement statistique. En formalisant l'impact des variations structurelles sur les propriétés dynamiques, ses recherches ont permis de développer des repères méthodologiques essentiels. Ces derniers ont ensuite été largement exploités pour concevoir des approches hybrides modernes, qui intègrent des outils d'intelligence artificielle et de reconnaissance des formes pour optimiser la classification et l'évaluation de la sévérité des endommagements structuraux.

Y. Q. Ni [21] est l'un des chercheurs les plus actifs dans le développement des méthodes hybrides SHM. Il a travaillé sur l'intégration de l'énergie de déformation modale et des techniques d'apprentissage automatique pour améliorer la détection et la localisation des dommages dans les structures de grande échelle, notamment les ponts et les bâtiments.

Wei-Xin Ren [22] a travaillé sur l'amélioration des méthodes énergétiques et leur intégration dans les techniques d'optimisation et d'intelligence artificielle. Ses recherches ont contribué à la conception de systèmes hybrides qui permettent d'exploiter efficacement des données modales pour la détection automatique des endommagements.

Chapitre 2 : Modélisation par éléments finis

2.1. Introduction :

Dans ce chapitre, nous explorerons la méthode des éléments finis (MEF) et son application sur une structure poutre saine avec la théorie D'EULER Bernoulli.

La méthode des éléments finis est une méthode numérique utilisée pour approcher des solutions des équations différentielles décrivant les phénomènes physiques en l'ingénierie. Elle est largement utilisée pour approximer des solutions de problèmes mathématiques complexes dans différents domaines [24] tels que la mécanique des structures, l'aérodynamique, la thermodynamique, etc...

En dynamique des structures, cette méthode est particulièrement précieuse pour étudier les comportements vibratoires et les réponses aux diverses sollicitations. Elle consiste à diviser la structure en petites morceaux appelées « éléments » pour transformer les équations aux dérivées partielles en équations algébriques, puis assembler ces éléments de telle façon que l'équilibre des forces et les déplacements soient satisfaits au niveau de chaque nœud.

Enfin, après l'assemblage des contributions de chaque élément, nous obtenons une représentation globale de la structure. Cette approche nous permettra d'extraire les modes propres et les fréquences naturelles de la poutre saine.

2.2. Théorie de la méthode des éléments finis :

2.2.1. Description générale sur les éléments finis :

Les éléments finis sont des sous-domaines de taille finie obtenus par la discrétisation d'un domaine continu. Chaque élément est défini par un nombre de nœuds et permet d'approximer les variables inconnues (déplacements, rotations) à l'aide de fonctions d'interpolation appelées fonctions de forme [22].

2.2.2. Historique sur MEF :

C'est en 1943 Richard Courant introduit l'idée de diviser le domaine en sous-domaines triangulaires et d'utiliser des approximations linéaires sur chaque triangle mais elles restèrent sans suite.

La méthode des éléments finis (MEF) est mise en place en 1953 chez Boeing, on y développe le premier élément finis, sa matrice de rigidité, l'assemblage et la résolution par la méthode des déplacements [23].

Le mot rigidité, Stiffness apparaissait dans le titre de son article « Stiffness and Deflection Analysis of Complex Structures ». Le terme « Finite Element » est officiellement consacré par Ray Clough en 1960. Par la suite, les travaux d'Olgierd Zienkiewicz ont généralisé l'application de la MEF à l'ensemble des problèmes physique (thermique, fluides, électromagnétisme).

2.2.3. Les étapes principales de calcul par la MEF :

- **Définition du problème** : La première étape consiste à définir le problème physique à résoudre, les propriétés des matériaux, les charges appliquées, etc...
- **Discrétisation de l'élément** : On divise la structure (poutre, plaque...) en petits éléments simples (triangles, quadrilatères, etc.), pour transformer un problème continu en un problème discret.
- **Choix des fonctions d'interpolations** : On choisit une fonction d'interpolation pour chaque élément qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de chaque élément en termes de déplacements nodaux. En général la solution ou le modèle d'interpolation est de forme

polynomial, contenant un coefficient inconnu pour chaque degré de liberté.

- **Définition des degrés de liberté :** À chaque nœud, on définit les inconnues, Les déplacements vertical et les rotations.
- **Etablissement des matrices de rigidités et de masse élémentaires :** Pour chaque élément en calcule la matrice de rigidité et la matrice de masse après en les dériver en utilisant les conditions d'équilibre.
- **Assemblage des équations élémentaires :** On assemble toutes les matrices élémentaires pour obtenir la matrice de rigidité et de masse globale de la structure, et l'équation d'équilibre global est formulé comme suit :

$$[K]\{\varphi\} = \{P\}$$

Où $[K]$ est la matrice de rigidité assemblée, $\vec{\varphi}$ est le vecteur du déplacement nodal et $\{P\}$ est le vecteur des forces nodales.

- **Résolution numérique :** La solution numérique est obtenue en résolvant la matrice globale pour les valeurs nodales inconnues, et l'équation sera :

$$[K]\{u\} = \{F\}$$

Où F : vecteur de force et U : vecteur de déplacement.

2.2.4.Types d'éléments finis :

Il existe 3 grandes familles d'éléments : Les éléments unidimensionnels, bidimensionnels, tridimensionnels.

- 1D : Élément barre (treillis) : Travaille uniquement en traction/compression, Pas de flexion.

Élément poutre : Travaille en flexion, effort tranchant et effort normal, Prend en compte la rotation.

- 2D : Élément plaque : Résiste à la flexion
Élément coque : Combine membrane + flexion

- 3D : Élément tétraédrique

2.2.5.Discrétisation géométrique :

La discrétisation géométrique est une étape cruciale dans la résolution numérique de problème physique continu par la méthode des éléments finis. Elle consiste à procéder à un découpage du domaine géométrique continu en sous domaine.

2.3. Élément fini poutre 2D en flexion :

2.3.1.Formulation d'une poutre d'Euler-Bernoulli dans le plan :

Nous définirons Une poutre comme étant une droite, la déformation de la poutre est décrite par un déplacement et une rotation. Le nombre de degrés de liberté est calculé à partir des déplacements transversaux et des rotations aux extrémités de cette poutre [25].

La théorie de Bernoulli- Euler est l'une des plus anciennes théories des poutres connues. Elle est basée sur trois hypothèses :

- ✓ Les sections droites restent planes et perpendiculaires à la fibre moyenne après déformation.
- ✓ Elle néglige la déformation par cisaillement.
- ✓ Les sections sont indéformables dans leurs plans.

2.3.1.1. Identification du problème :

Considérons un élément poutre bidimensionnelle encastrée à gauche de longueur L , de section S et d'inertie I et un module d'élasticité longitudinal E , dans le plan (x - y) comme montré sur la Figure 1.1. Les 4 degrés de liberté dans les coordonnées locales axiaux (x) et transversales (y) et rotations θ .

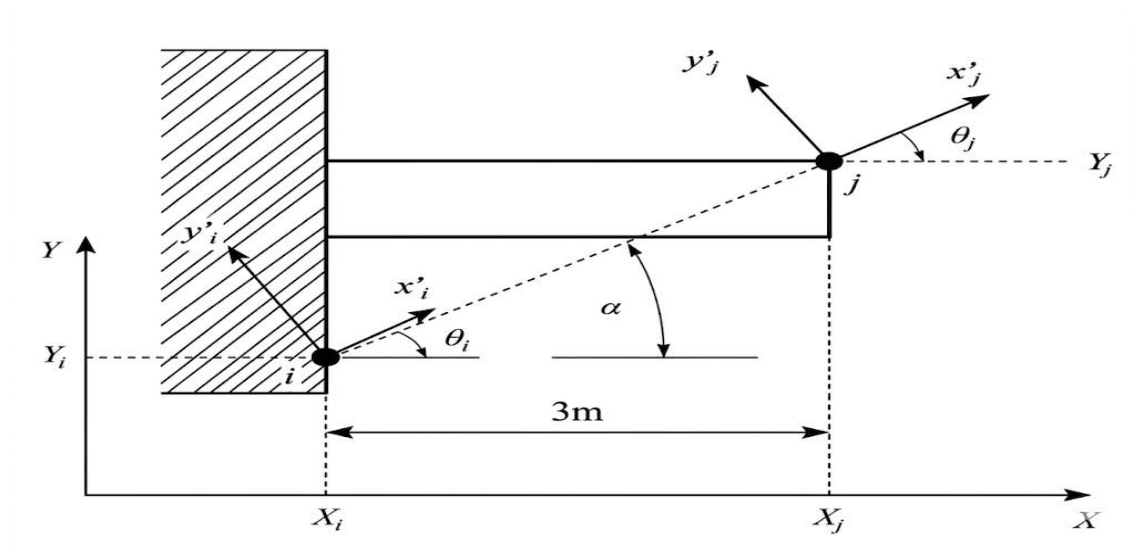


Figure 2.1 : Elément poutre dans le plan(X-Y) avec 44 degrés de liberté.

2.3.1.2. Fonction d'interpolation :

On choisit une fonction d'interpolation qui définit d'une façon approximative l'état de déplacement de tous les points de l'élément.

La variation de déplacement transversal à travers la longueur L de la poutre dans la structure à 4 ddl est égale à :

$$v(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \quad (1)$$

Le vecteur des déplacements nodaux s'écrit :

$$\{d\} = [v_1, \theta_1, v_2, \theta_2] \quad (2)$$

A partir des conditions aux limites de $v(x)$:

$$v(0) = v_1 = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv(0)}{dx} = \theta_1 = 0 \quad (3)$$

$$v(L) = v_2 \quad \text{et} \quad \frac{dv(L)}{dx} = \theta_2 \quad (4)$$

L'équation (1) peut être exprimée de la manière suivante :

$$\{v\} = [N]\{d\} \quad (5)$$

Ou N dans un élément est donné par :

$$[N] = [N_1 \ N_2 \ N_3 \ N_4] \quad (6)$$

$$\begin{cases} N_1(x) = (2x^3 - 3lx^2 + l^3)/l^3 \\ N_2(x) = (x^3 - 2lx^2 + l^2x)/l^2 \\ N_3(x) = -(2x^3 - 3lx^2)/l^3 \\ N_4(x) = (x^3 - lx^2)/l^2 \end{cases} \quad (7)$$

D'après l'équation (2) et (5) et (6) on obtient :

$$v(x) = N_1 v_i + N_2 \theta_i + N_3 v_j + N_4 \theta_j \quad (8)$$

2.3.2. La relation entre déformations déplacements :

Lorsqu'un matériau subit une contrainte, il se déforme. Cette déformation peut être mesurée en termes de : changement de longueur, d'angle ou de volume du matériau. Ces déplacements sont mesurés en termes de la position de points spécifiques.

La relation entre les déformations et les déplacements nodaux exprimées :

$$\{\varepsilon\} = [B] \{v\} \quad (11)$$

- $\{\varepsilon\}$ est le vecteur des déformations.
- $\{v\}$ est le vecteur des déplacements nodaux.
- $[B]$ contient les dérivées des fonctions de forme de l'élément.

2.3.3. La relation entre déformation-contraintes :

La contrainte axiale est écrite :

$$\sigma_{xx} = E \cdot \varepsilon_{xx} \quad (10)$$

$$\text{Ou} \quad \sigma_{xx} = [D] \cdot \varepsilon_{xx} \quad (11)$$

Avec $[D]$: Matrice de comportement, E est le module de Young.

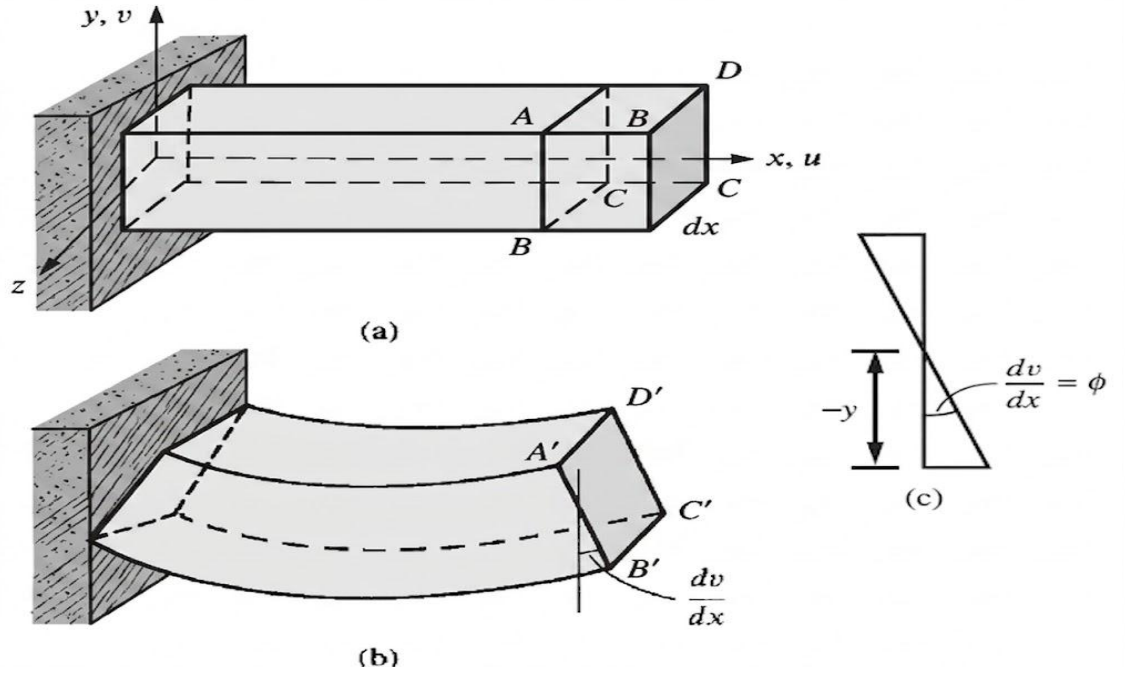


Figure 2.2 : Segment de la poutre (a) avant déformation et (b) après déformation, (C) Angle de rotation de la section transversal.

D'après les équations (5) et (8), la matrice qui regroupe la déformation et le déplacement est :

$$[B] = -\frac{y}{L^3} (12x - 6L)L(6x - 4L)L (12x - 6L)L(6x - 2L) \quad (12)$$

En utilisant les équations (10) et (2) :

$$K_e = \iiint_V [B]^T [D] [B] dv = E \int_0^L dx \iint_A [B]^T [B] dA \quad (13)$$

2.3.4. Matrices de rigidité et de masse élémentaires :

Après intégration de tous les coefficients de la matrice de rigidité K^e dans un élément à 4DDL, on obtient [26] :

$$[K_e] = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L_e & -12 & 6L_e \\ 6L_e & 4L_e^2 & -6L_e & 2L_e^2 \\ -12 & -6L_e & 12 & -6L_e \\ 6L_e & 2L_e^2 & -6L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pour obtenir la matrice de masse en se basant sur l'équation :

$$Me = \int_0^v \rho [N]^T [N] dv \quad (15)$$

La matrice de masse pour un élément poutre à 4 degrés de liberté, exprimée dans le repère local, peut être définie comme suit :

$$[Me] = \frac{\rho Al}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22L_e & 54 & -13L_e \\ 22L_e & 4L_e^2 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 54 & 13L_e & 156 & -22L_e \\ -13 & -3L_e^2 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (16)$$

2.3.5. Assemblage des matrices de rigidité et de masse :

Après avoir déterminé les caractéristiques élémentaires (matrices de rigidité et vecteurs) exprimées dans le repère global obtenue à l'aide des boucles (For) dans le programme assisté par ordinateur MATLAB [27]. La prochaine étape consiste à assembler le système d'équations algébriques global.

Le processus repose sur le principe de compatibilité nodale, ce qui signifie que sur les nœuds, la valeur du degré de liberté inconnue est la même pour tous les éléments. Les variables nodales sont généralement des déplacements généralisés (translations et rotations) ou d'autre dérivations. Quand ces déplacements sont reliés à un nœud, la rigidité nodale et les charges nodales de chacun des éléments interconnectés à ce nœud, sont sommet pour obtenir la rigidité et charge nette. Soient Nbr le nombre total d'éléments et M le nombre total de degrés de liberté et [K] la matrice de rigidité assemblée d'ordre M×M. Chaque matrice élémentaire [ke] de dimension n×n dans les structures globales par une expansion dimensionnelle, en complétant les zones non définies par des zéros.

La matrice globale caractéristique et le vecteur global caractéristique sont obtenu par addition algébrique [28], [29] :

$$[K] = \sum_e^{Nbr} [Ke] \quad (17)$$

L'équation (17) valides Même si l'assemblage contient différents types d'éléments, bien que le nombre de degrés de liberté n de l'élément changent d'un élément à un autre. La matrice de rigidité globale $[K]$ peuvent être construire par l'intégration directe des contributions locales $[K_e]$, cette méthodologie est illustrés en référence à l'assemblage de quatre éléments unidimensionnels de la structure poutre, Dans ce cas, chaque élément situé dans le plan XY possède quatre degrés de liberté. Après la transformation dans le système de coordonnées global, les matrices $[k_e]$ (4×4) sont calculés pour chaque élément ($e=1$ à $e=4$).

Exemple : l'assemblage entre l'élément 1 et 2

De l'équation (14) et (17) la matrice de rigidité est de forme :

$$[K] = \frac{EI}{L_e^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L & 0 & 0 \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6L & 24 & 0 & -12 & 6L \\ 6L & 2L^2 & 0 & 8L^2 & -6L & 2L^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6L & 12 & -6L \\ 0 & 0 & 6L & 12L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \quad (18)$$

On calcule la matrice de rigidité pour 21 éléments, les mêmes étapes se répètent :

$$\bullet \quad [K] = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{11} + K_{33} & K_{12} + K_{34} & K_{13} & K_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{21} + K_{43} & K_{22} + K_{44} & K_{23} & K_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{11} + K_{33} & K_{12} + K_{34} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & K_{21} + K_{43} & K_{22} + K_{44} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & K_{11} & K_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & K_{21} & K_{22} \end{bmatrix}$$

- Pour l'assemblage d'élément 1 et 2 la matrice de masse s'écrit :

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L_e & 0 & 54 & 13 \\ 0 & 22L_e & 4L_e^2 & 0 & 13L_e & -3L_e^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L_e & 0 & 156 & -22L_e \\ 0 & -13L_e & -3L_e^2 & 0 & -22L_e & 4L_e^2 \end{bmatrix} \quad (19)$$

On calcule la matrice de masse pour 21 éléments

$$[M] = \frac{\rho AL}{420} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{11} + M_{33} & M_{12} + M_{34} & M_{13} & M_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{21} + M_{43} & M_{22} + M_{44} & K_{23} & M_{24} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{11} + M_{33} & M_{12} + M_{34} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & M_{21} + M_{43} & M_{22} + M_{44} & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & M_{11} & M_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

2.3.6. Matrice de transformation :

La matrice de transformation est une matrice qui permet de passer d'un repère local (élément) à un repère global (structure).

Quand on travaille avec une poutre :

- Chaque élément est défini dans un repère local (axe x de la poutre)
- Mais toute la structure est définie dans un repère global (X, Y)

Donc, il faut transformer :

- Les déplacements.
- Les forces.
- Les matrices (rigidité, masse).

Quand un l'élément orienté dans le plan 2D avec un angle θ par rapport à l'axe x, la matrice de rigidité subit une transformation dans le système globale. La taille de la matrice de rotation de l'élément poutre est de (6×6) et la rotation s'effectue autour d'axe z local et Z global, cela implique que

$$\theta_1 = \theta_g.$$

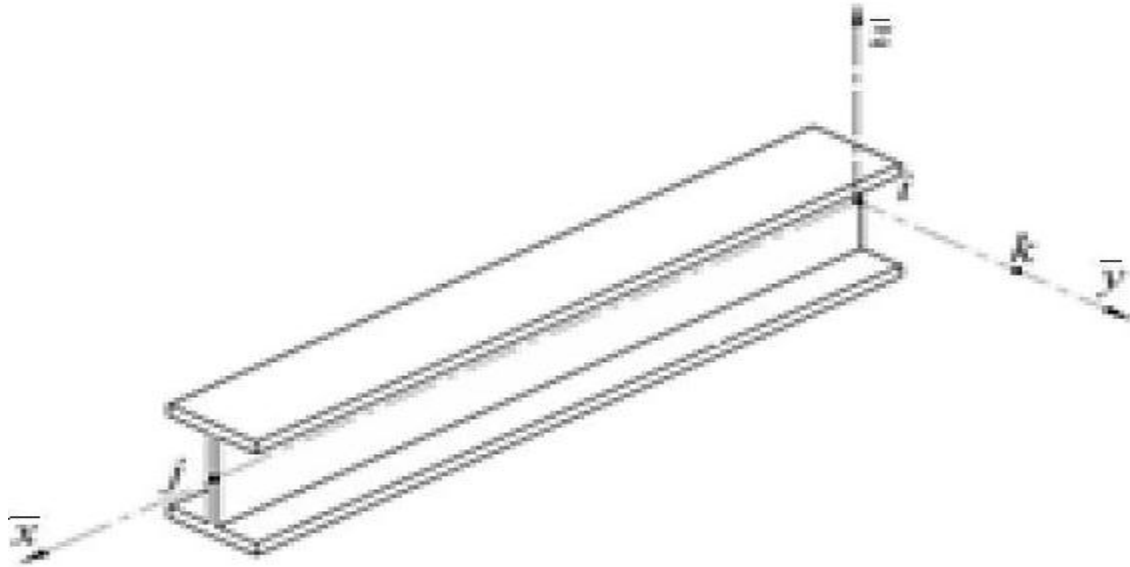


Figure 2.3 : Transformation d'un élément horizontal

➤ La relation est :

$$\{U\}_{\text{global}} = [T] \{U\}_{\text{local}} \quad (20)$$

$$\begin{cases} u_i = u_i \cos\theta + v_i \sin\theta \\ v_i = -u_i \sin\theta + v_i \cos\theta \\ M_i = M_i \end{cases} \quad (21)$$

$$\begin{cases} u_j = u_j \cos\theta + v_j \sin\theta \\ v_j = -u_j \sin\theta + v_j \cos\theta \\ M_j = M_j \end{cases} \quad (22)$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \theta_j \end{Bmatrix} \quad (23)$$

De l'équation (20), (21), (22) et (23) on obtient alors :

$$[T] = \begin{bmatrix} C & S & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -S & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -S & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{On pose : } \begin{cases} S = \sin\theta \\ C = \cos\theta \end{cases}$$

2.4. Conclusion :

Dans ce chapitre, nous avons présenté les formulations élémentaires et globales utilisées pour l'analyse d'une structure poutre, en utilisant la méthode des éléments finis dans le code de conception assisté par ordinateur MATLAB. Cette méthode permet de résoudre les problèmes complexes des structures en les divisant en éléments plus simples.

La formulation élémentaire consiste à déterminer une fonction d'interpolation qui représente la variation des déplacements à l'intérieur de chaque élément en termes de déplacements nodaux. Ensuite, pour chaque élément, on calcule la matrice de rigidité, la matrice de masse. D'autre part la formulation globale consiste à rechercher, pour la structure complète ceci nécessite l'assemblage des caractéristiques élémentaire. Afin de déterminer les fréquences et les modes propres de toute la structure.

Chapitre 3 : Présentation de la méthode des énergies de déformation modale

3.1. Introduction :

En génie mécanique les structures sont soumises à diverses charges naturelles externes, telles que les tremblements de terre, les forces de vent ou le trafic routier. Cela peut conduire à l'apparition graduelle d'endommagements, causant des changements dans les propriétés vibratoires de ces structures (les vecteurs, les valeurs propres). Ces changements sont considérés comme des défaillances qui peuvent causer la rupture mécanique. Plusieurs méthodes basées sur la réponse vibratoire sont conçues et utilisées afin de détecter, localiser et quantifier ces endommagements précocement.

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier l'une de ces méthodes et qui est basée sur l'énergie de déformation modale (Modal Strain Energy, MSE). Cette méthode exploite la différence de répartition de l'énergie de déformation associée à chaque mode propre d'une structure entre l'état sain et l'état endommagé.

3.2. La méthode de l'énergie de déformation modale (MSE) :

La méthode de l'énergie de déformation modale (MSE) est basée sur le rapport entre l'énergie de déformation modale des éléments avant et après l'endommagement. Les variations de ce rapport permettent de détecter, localiser l'endommagement.

Le développement des méthodes basées sur l'énergie de déformation date depuis plusieurs années. Ce développement est animé par un souci grandissant d'aboutir à des variantes de plus en plus fiables. Rappelons qu'en général, les méthodes d'identification d'endommagements sont classifiées en quatre niveaux principaux :

- ✓ Niveau 1 : Détection de la présence de l'endommagement.

- ✓ Niveau 2 : Localisation de l'endommagement.
- ✓ Niveau 3 : Quantification de l'endommagement.
- ✓ Niveau 4 : Evolution de l'endommagement.

La méthode MSE se limite en général aux deux premiers niveaux. Par ailleurs, une méthode capable d'accomplir ces niveaux n'est pas une preuve d'une méthode plus fiable que les autres [30].

3.3. Bases mathématiques de la méthode :

La méthode MSE utilise les énergies de déformation. Ces énergies sont calculées à partir des caractéristiques dynamiques de la structure (Matrices de rigidité et de masse, vecteurs propres et valeurs propres). Comme il est de notoriété dans le domaine, le calcul de ces caractéristiques se fait généralement en adoptant un modèle éléments finis (MEF) dans le cas sain et le cas endommagé, au lieu de travailler sur la structure continue.

Le comportement dynamique d'une structure saine discrétisée par MFE, en vibrations libres et non amorties, est régi par l'équation différentielle du mouvement suivante :

$$[M]\{\ddot{q}(t)\} + [K]\{q(t)\} = \{0\}$$

$[K]$, $[M]$: matrices globales de rigidité et masse respectivement et $\ddot{q}$, q sont respectivement les vecteurs des déplacements et des accélérations nodaux.

Le modèle MEF nous permet d'écrire l'expression de l'équation caractéristique de la structure :

$$([K] - \lambda_i [M])\{\varphi\}_i = 0 \quad i = 1 \dots m \quad (1)$$

Avec m : nombre de mode et φ, λ : vecteurs et valeurs propres de la structure.

Les vecteurs propres et valeurs propres doivent vérifier les conditions d'orthogonalité suivantes :

$$\begin{cases} \{\varphi\}^T [M] \{\varphi\} = 1 \\ \{\varphi\}^T [K] \{\varphi\} = \lambda_i \end{cases} \quad (2)$$

Les énergies de déformation élémentaires correspondant au mode i et l'élément j dans le cas sain $MSE_{i,j}^{es}$ et endommagé $MSE_{i,j}^{ed}$ sont exprimées comme suit :

$$\begin{cases} MSE_{i,j}^{es} = \frac{1}{2} \{\varphi^s\}_i^T [K]^e \{\varphi^s\}_i \\ MSE_{i,j}^{ed} = \frac{1}{2} \{\varphi^d\}_i^T [K]^e \{\varphi^d\}_i \end{cases} \quad (3)$$

Où $i = 1 \dots m$; $j = 1 \dots n$

On définit l'énergie de déformation modale totale comme étant la somme des MSE des éléments donnés de la structure dans le mode i :

D'après les équations (2) et (3), on peut calculer l'énergie de toute la structure pour un mode i :

$$\begin{cases} MSE_i^s = \sum_{j=1}^n MSE_{i,j}^{es} \\ MSE_i^d = \sum_{j=1}^n MSE_{i,j}^{ed} \end{cases} \quad (4)$$

Pour des raisons de calcul numérique, on normalise la MSE des éléments par rapport à la MSE totale de la structure [33], [34] :

$$\begin{cases} NMSE_{i,j}^{es} = \frac{MSE_{i,j}^{es}}{MSE_i^s} \\ NMSE_{i,j}^{ed} = \frac{MSE_{i,j}^{ed}}{MSE_i^d} \end{cases} \quad (5)$$

$NMSE_{i,j}^{es}$: Energie de déformation modale normalisée d'une structure saine.

$NMSE_{i,j}^{ed}$: Energie de déformation modale normalisée d'une structure endommagée.

La moyenne des valeurs MSE normalisées sur les m modes de vibration peut être utilisée comme un paramètre de la localisation des endommagements :

$$\left. \begin{aligned} mNMSE_j^{es} &= \frac{\sum_{i=1}^m NMSE_{i,j}^{es}}{m} \\ mNMSE_j^{ed} &= \frac{\sum_{i=1}^m NMSE_{i,j}^{ed}}{m} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Lorsqu'un élément de la structure subit un endommagement, sa rigidité diminue, ce qui entraîne une augmentation de sa flexibilité [7]. Par conséquent, les déplacements modaux associés aux modes propres deviennent plus importants. Cette modification influence l'énergie de déformation modale directement, provoquant une augmentation du paramètre mNMSE par rapport à celui de la structure saine.

Pour détecter les endommagements, il suffit d'identifier les indices MSEBI (*Modal Strain Energy Based Index*) non nuls ainsi que les éléments qui leur correspondent.

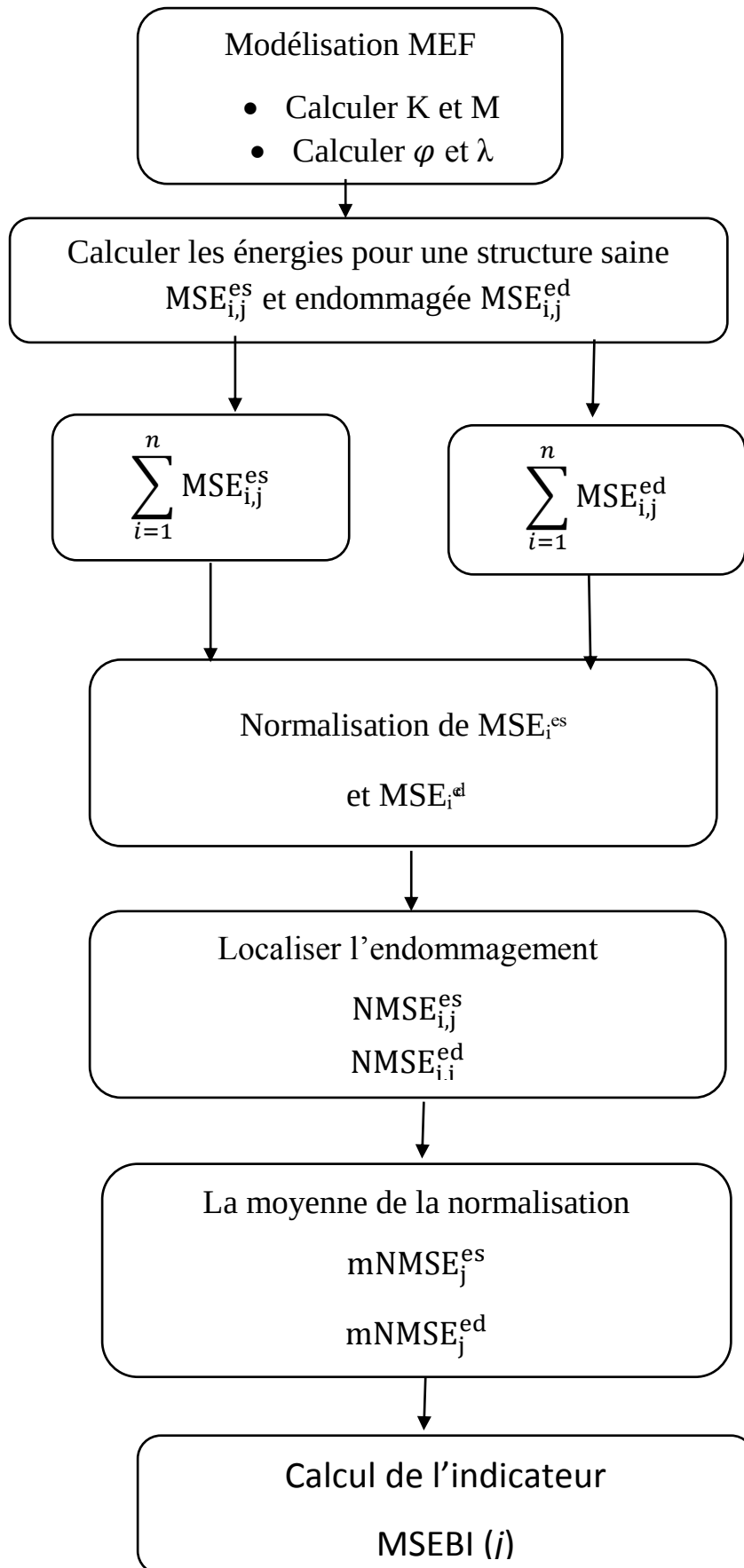
D'après les équations (4), (5), (6) on peut calculer indicateur MSEBI :

$$MSEBI = \frac{mNMSE_j^{es} - mNMSE_j^{ed}}{mNMSE_j^{es}} \quad (7)$$

Si :

- $MSEBI > 0 \rightarrow$ élément probablement endommagé
- $MSEBI \approx 0 \rightarrow$ élément sain

3.3.1. Organigramme de la MSE :



3.4. Cas test de la méthode :

Une structure poutre encastrée à gauche est simulée et utilisée pour vérifier la fiabilité et la robustesse de la méthode. Le modèle est constitué de 21 éléments de 2 *ddl* pour chaque nœud. (Figure 2.1). La simulation (MEF, Indice d'endommagement) est effectuée sous l'environnement de programmation *MATLAB*.

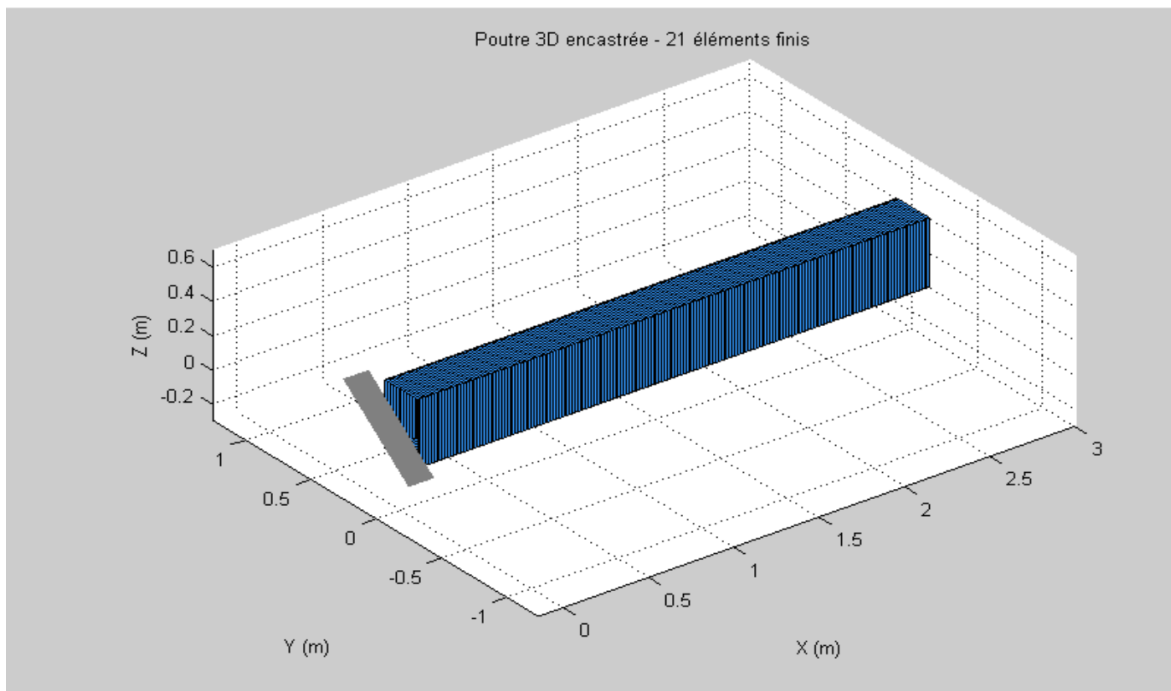


Figure 3.1 : Poutre encastrée à gauche divisée en 21 éléments.

Section S (m ²)	Module de Young	Masse volumique(Kg/m ³)
0.001	$E=2.1 \cdot 10^{11}$	7850

Tableau 3.1: Propriétés mécaniques et géométriques de la structure poutre.

Afin de valider la méthode d'évaluation des endommagements proposée pour plusieurs scénarios, le calcul des énergies de déformation est limité aux huit premiers modes. Ce choix est dicté par le fait que les premiers modes de

vibration (basses fréquences) concentrent la majorité de l'énergie de déformation. Trois scénarios d'endommagement sont pris en considération. Un scénario concernant la présence de plusieurs endommagements dans la structure et deux scénarios de présence d'endommagements aux extrémités de la poutre (extrémité libre élément 21 et extrémité encastree élément 1). Ces scénarios sont choisis pour tester la robustesse de la méthode dans le cas de plusieurs endommagements et dans le cas d'endommagements dans les structures vibrantes à extrémités de la poutre. A titre illustratif, les résultats obtenus par cette méthode seront comparés à ceux obtenus par la méthode la plus utilisée dans le domaine, à savoir la méthode fréquentielle.

Le calcul des énergies de déformation MSE ainsi que les fréquences propres (cas sain et endommagés) sont calculées directement à partir des matrices masse et rigidité afin juste de tester la validité de la méthode.

Scénario d'endommagement	Eléments endommagés(Réduction de rigidité %)		
D1	1 (20%)		
D2	21 (15%)		
D3	3 (30%)	10 (30%)	19 (30%)

Tableau 3.2 : Scénarios d'endommagements et la réduction des éléments.

3.4.1.Résultats et comparaison avec la méthode des fréquences :

Les résultats obtenus par la méthode fréquentielle pour les huit premiers modes sont représentés dans le tableau 2.3. Ces résultats englobent ceux de la

structure saine et la structure endommagée pour les trois scénarios et les variations entre les valeurs de ces résultats sont exploitées pour déceler la présence de l'endommagement. Les résultats obtenus par le calcul des énergies normalisées dans le cas sain et le cas endommagés sont représentés sur les figures (3.2, 3.3, 3.4) pour les trois scénarios.

Modes	Fréquences Saines	Fréquences endommagées					
		Elément 1	Var	Elément 21	Var	Eléments 3,10,19	Var
1	0.0004	0.0004	0.000	0.0004	0.000	0.0004	0.000
2	0.0026	0.0026	0.000	0.0026	0.000	0.0026	0.000
3	0.0074	0.0072	-2.703	0.0074	0.000	0.0073	-1.351
4	0.0144	0.0142	-1.389	0.0144	0.000	0.0140	-2.778
5	0.0238	0.0236	-0.840	0.0238	0.000	0.0231	-2.941
6	0.0356	0.0353	-0.843	0.0356	0.000	0.0341	-4.213
7	0.0497	0.0494	-0.604	0.0497	0.000	0.0475	-4.427
8	0.0662	0.0658	-0.604	0.0662	0.000	0.0642	-3.021

Tableau 3.3 : Résultats pour les huit premiers modes.

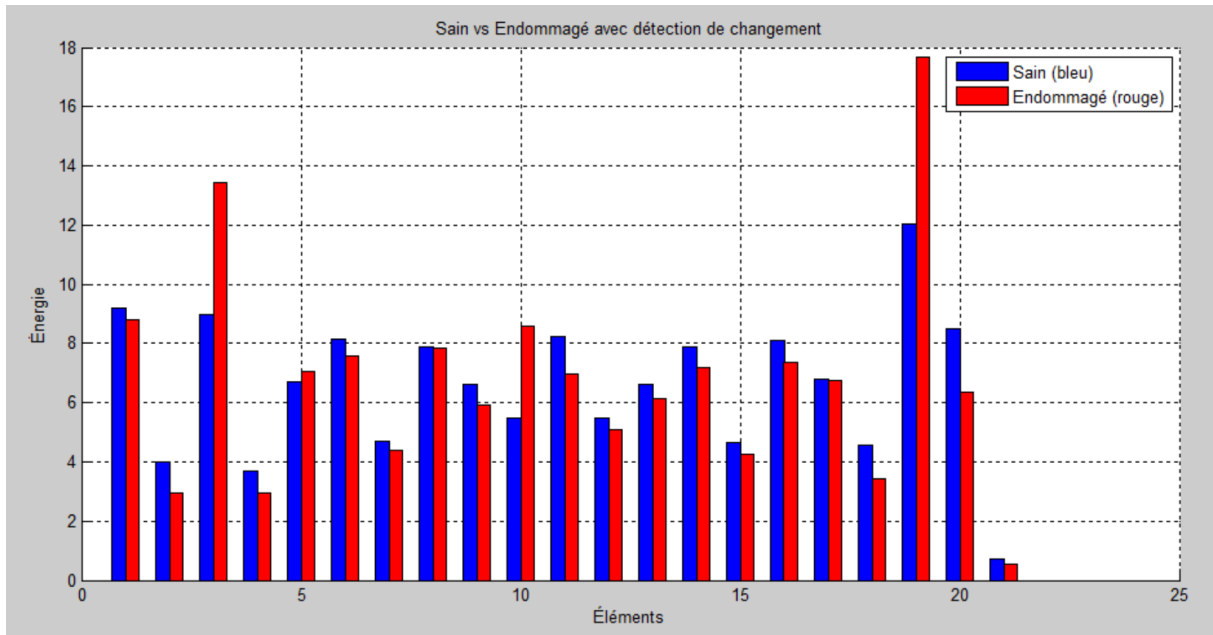


Figure 3.2: L'énergie saine et endommagée avec détection de changement pour l'élément 1.

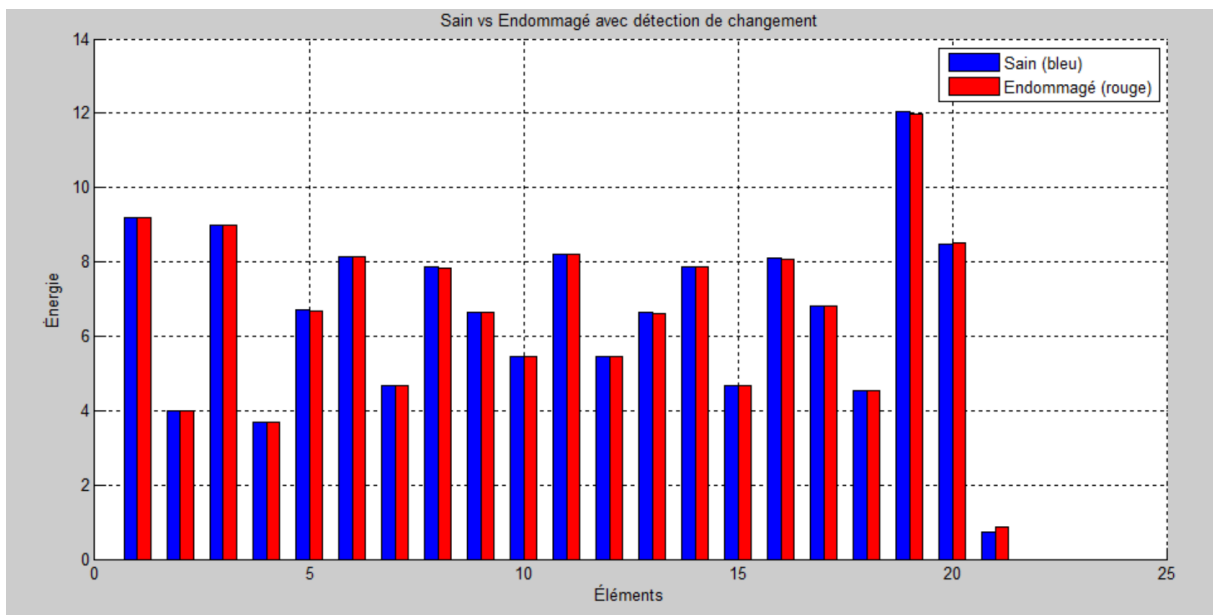


Figure 3.3 : L'énergie saine et endommagée avec détection de changement pour l'élément 21.

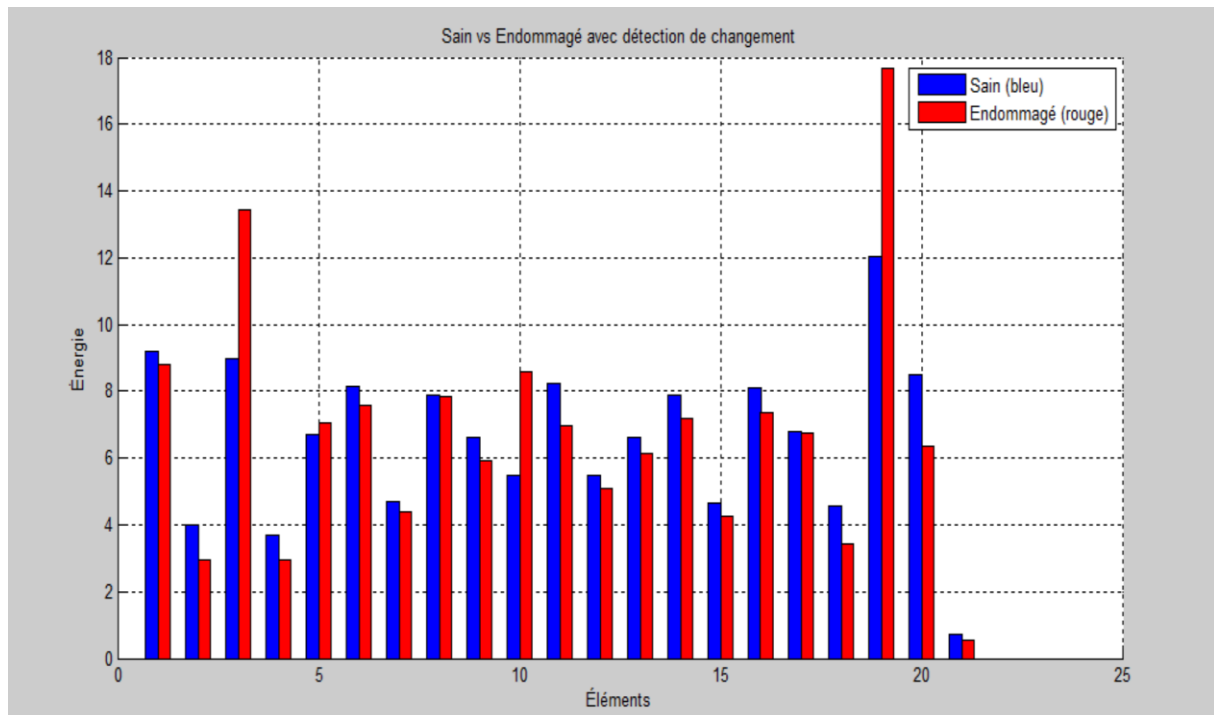


Figure 3.4 : L'énergie saine et endommagée avec détection de changement pour les éléments 3,10,19.

Dans le cas de la méthode fréquentielle, les résultats montrent que ces variations sont très faibles, voire nulles dans certains cas. Ainsi, bien qu'un léger changement du comportement dynamique puisse être observé, il ne permet pas de conclure de manière fiable à la présence d'un endommagement. Plusieurs phénomènes naturels (température, pression ...) ou numériques peuvent affecter les fréquences sans pour autant que cela constitue une preuve de présence d'un endommagement. Ensuite, l'analyse a porté sur la variation des énergies entre l'état sain et l'état endommagé. Les résultats mettent en évidence une différence globale entre les deux états, notamment pour les deux derniers, confirmant la sensibilité de la méthode à la présence de dommages. Toutefois, cette approche ne permet pas une localisation précise des zones endommagées, en raison de la dispersion des écarts d'énergie sur plusieurs éléments.

La variation des énergies entre l'état sain et l'état endommagé est évaluée uniquement par la différence directe entre les deux cas, sans utilisation d'un

indicateur de type MSE ou MSEBI. Dans le premier scénario, l'élément 1 est supposé endommagé avec une réduction de rigidité de 20 %. Les résultats montrent une variation globale des énergies entre les états sain et endommagé. Toutefois, l'élément 1 ne présente pas nécessairement l'écart le plus élevé, celui-ci étant observé au niveau de l'élément 19. Par conséquent, cette approche ne permet pas de localiser précisément l'endommagement.

Dans le deuxième scénario, l'endommagement est introduit au niveau de l'élément 21, situé en extrémité de la structure, avec une réduction de rigidité de 15 %. Les résultats montrent une faible perturbation globale des énergies. L'effet reste principalement localisé au niveau de l'élément endommagé, sans influence significative sur les autres éléments, ce qui peut s'expliquer par la position en bordure de la structure de l'endommagement. Dans le troisième scénario, plusieurs éléments (3, 10 et 19) sont endommagés. On observe alors des variations d'énergie plus étendues, affectant plusieurs éléments de la structure. Les écarts les plus importants correspondent aux éléments effectivement endommagés, mais des perturbations secondaires apparaissent également dans d'autres zones, traduisant l'influence globale des dommages sur la réponse dynamique de la structure.

En conséquence, cette approche basée sur la variation directe des énergies est efficace pour détecter la présence d'endommagements et leur influence globale sur le comportement dynamique de la structure. Cependant, elle ne permet pas une localisation précise des zones endommagées, en raison de la dispersion des écarts d'énergie sur plusieurs éléments. Cette situation nous oblige à évaluer autrement la présence de l'endommagement en introduisant les différentes étapes de normalisation contenues dans la méthode MSE, ainsi que l'indice associé MSEBI. L'indice $MSEBI(j)$ utilisé est une version qui exploite le rapport entre ces énergies (Fractionnel MSE, FMSE) dont la valeur est très sensible aux petites variations, au lieu d'utiliser la soustraction entre énergies (entre éléments sain et endommagé). Les résultats sont représentés sur les figures (3.5, 3.6, 3.7).

Les trois figures montrent clairement, dans chaque cas, l'élément endommagé par une barre présentant la variation la plus élevée. Cependant, on remarque également d'autres barres dont les valeurs sont assez élevées.

Cas 1 : Le pic de l'élément 1 est le plus élevé et le plus visible, ce qui indique qu'il s'agit de l'élément endommagé. Cependant, il est difficile d'affirmer qu'il est le seul, car d'autres pics présentant également des variations importantes apparaissent au niveau des éléments 6, 7, 10 et 14. Il est donc nécessaire de distinguer les variations dues à l'endommagement décelé liées à d'autres facteurs.

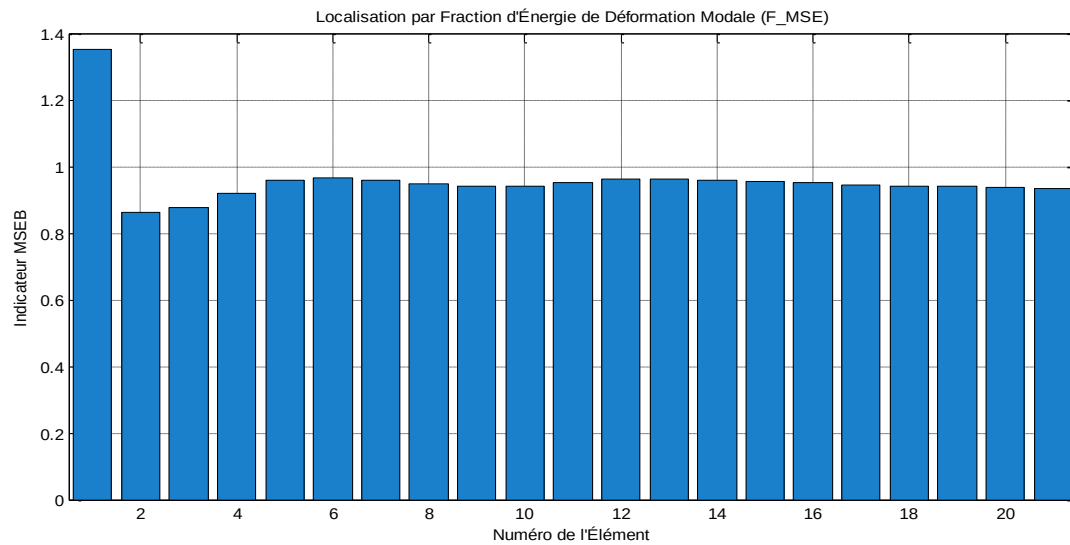


Figure 3.5 : Localisation d'endommagement par Fraction d'énergie de déformation modale.

Cas 2 : On remarque que l'élément 21 présente la barre de variation la plus élevée par rapport aux autres éléments, ce qui indique clairement la présence d'un endommagement à cet emplacement.

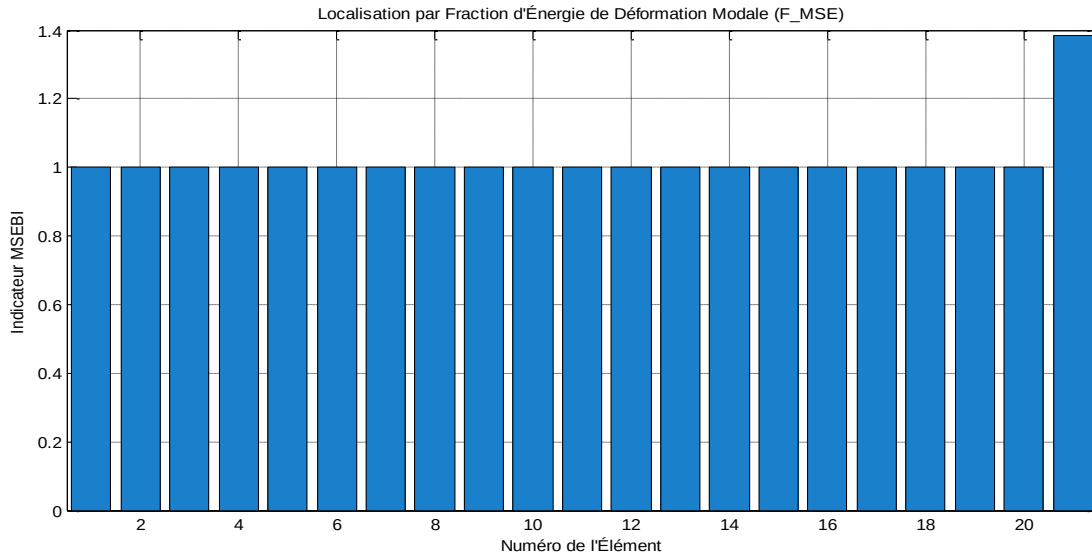


Figure 3.5 : Localisation d’endommagement par la Fraction d’énergie de déformation modale.

Cas 3 : Cette figure met clairement en évidence les trois pics correspondant aux trois éléments endommagés 3, 10 et 19. Toutefois, des variations d’énergie sont également observées pour certains autres éléments, notamment les éléments 18, 20 et 21, ce qui peut rendre l’interprétation plus complexe en raison de la difficulté de prise de décision concernant ces éléments. En effet aucun seuil critique n’est défini permettant la distinction entre éléments sains et éléments endommagés. Cette situation soulève la question suivante :

Y a-t-il un moyen de définir un autre indice plus sensible pour faire apparaître les éléments endommagés de manière plus claire pour pouvoir les distinguer des éléments non endommagés ?

La réponse à cette question réside dans l’utilisation d’un critère de normalisation statistique, utilisé dans beaucoup de domaines, ainsi qu’un seuil critique de détection. Ce critère va être présenté au chapitre suivant.

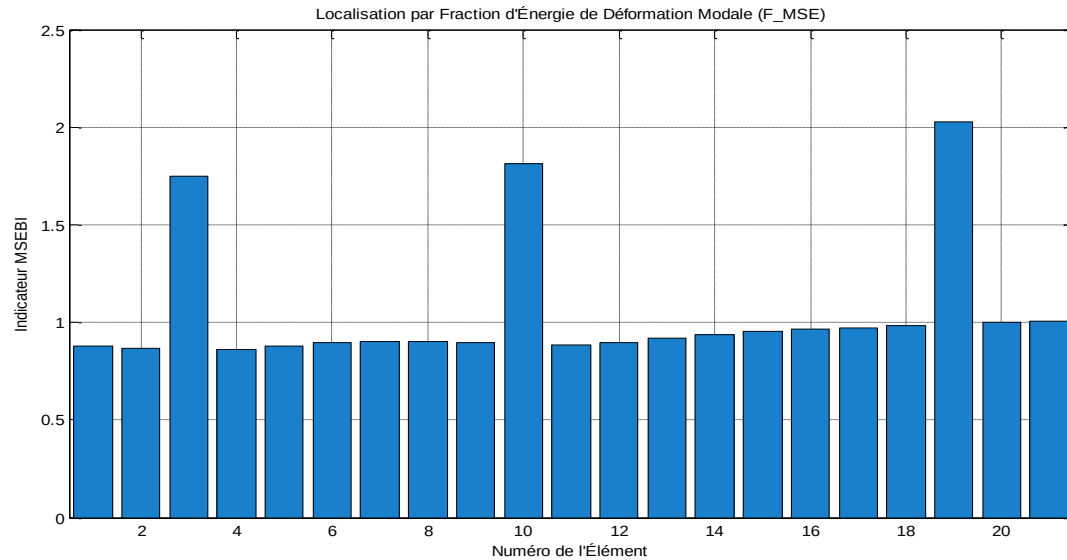


Figure 3.6 : Localisation d'endommagement par la Fraction d'énergie de déformation modale.

3.5. Conclusion :

Afin de faciliter la localisation de l'endommagement, les énergies modales ont été normalisées par le principe de normalisation adopté par l'indicateur MSEBI, ce qui permet de mettre en évidence la variation des énergies entre le cas sain et le cas endommagé en réduisant les amplitudes absolues sans pour autant pouvoir disposer d'un seuil critique entre les éléments sains et les éléments endommagés. Pour pouvoir distinguer sans confusion la position des endommagements, nous utiliserons par la suite une limite de seuil afin de déterminer quel seuil de variation peut être considéré comme un endommagement.

Chapitre 4 : Normalisation statistique et application

4.1. Introduction :

Dans cette partie, six cas d'étude ont été considérés pour vérifier la capacité et la fiabilité de la méthode FMSE couplée au critère statistique de normalisation pour la localisation des éléments endommagés. En complément de l'analyse énergétique, les réponses temporelles ainsi que leurs transformées de Fourier rapides (FFT) ont été analysées. Cette analyse supplémentaire nous permet de comparer les variations observées dans les signaux vibratoires avec celles mises en évidence par les indicateurs énergétiques.

4.2. Traitement statistique de l'indicateur de dommage par la méthode statistique (Z-score) :

4.2.1. Problématique et nécessité de la normalisation :

Bien que la méthode de l'Énergie de Déformation Modale (FMSE) soit théoriquement capable de détecter des variations de rigidité, elle s'avère incapable de prédire la position de ces variations. Par ailleurs, son application à des cas comportant des incertitudes numériques ou des bruits de mesure expérimentaux se heurte à une limite majeure [38]. En conditions réelles, les déformées modales extraites des capteurs contiennent des fluctuations aléatoires à haute fréquence. Lors du calcul de l'énergie de déformation ces micro-variations sont mathématiquement amplifiées.

L'indicateur de dommage $MSEBI(j)$ pour un élément j , n'est jamais strictement égal à sa valeur théorique ($MSEBI=0$) sur les sections saines de la structure, ce qui présente une dispersion qui peut masquer l'anomalie causée par le véritable endommagement, menant soit à une non-détection, soit à de faux positifs.

Pour s'affranchir de cette limite et garantir la robustesse du diagnostic, il est indispensable d'introduire un traitement statistique capable de discriminer une fluctuation aléatoire d'une signature physique de défaillance. À cet effet, la technique de normalisation statistique par le Z-score va être utilisée.

4.2.2. Fondements mathématiques du Z-score

Le Z-score (ou valeur centrée réduite) est une métrique statistique universelle permettant de mesurer l'écart d'une variable donnée par rapport à la moyenne de sa population, exprimé en unités d'écart-type. Dans le cadre de la localisation des défauts structurels, le Z-score [41] transforme le vecteur des indicateurs bruts MSEBI en un vecteur d'indicateurs normalisés Z.

Pour chaque élément fini j de la structure (allant de 1 à n_e), le calcul est défini par la relation suivante [42] :

$$Z(j) = \frac{MSEBI(j) - \mu_{MSEBI}}{\sigma_{MSEBI}}$$

Où :

- $MSEBI(j)$: est l'indicateur de dommage cumulé sur les i premiers modes pour l'élément j .
- μ_{MSEBI} : représente la moyenne arithmétique de l'indicateur sur l'ensemble de la structure :

$$\mu_{MSEBI} = \frac{1}{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} MSEBI(j)$$

- σ_{MSEBI} : représente l'écart-type (standard déviation) de l'indicateur, qui quantifie la dispersion globale du bruit autour de la moyenne :

$$\sigma_{MSEBI} = \sqrt{\frac{1}{n_e} \sum_{j=1}^{n_e} (MSEBI(j) - \mu_{MSEBI})^2}$$

4.2.3. Propriétés de la loi normale et définition du seuil de décision

L'intérêt fondamental du Z-score repose sur les propriétés de la distribution normale (loi de Gauss). Lorsque les variations des indicateurs sur les éléments sains sont régies par un bruit blanc gaussien (erreurs de mesure, approximations numériques), les valeurs de Z suivent une loi centrée réduite de moyenne nulle ($\mu=0$) et de variance unitaire ($\sigma^2 = 1$).

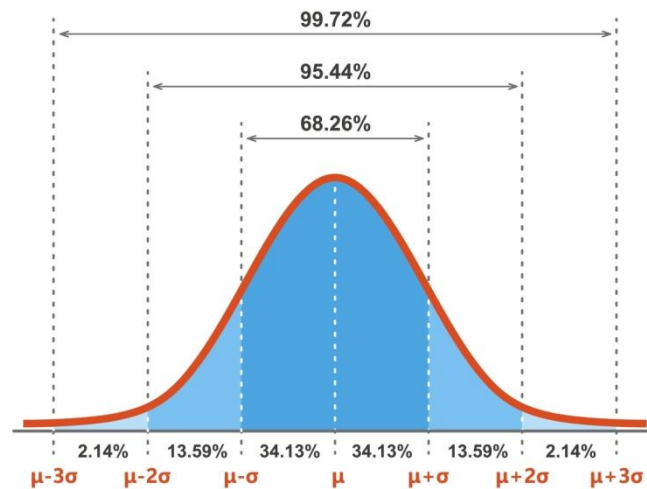


Figure 4.1 : La distribution de Gauss.

- Selon la théorie des probabilités et l'intervalle de confiance de la loi normale :
- 68,2% des points de données se situent à l'intérieur d'un intervalle de ± 1 écart-type ($|Z| \leq 1$).
- 95,4% des points de données se situent à l'intérieur d'un intervalle de ± 2 écart-types ($|Z| \leq 2$).
- 99,7% des points de données se situent à l'intérieur d'un intervalle de ± 3 écart-types ($|Z| \leq 3$).

En fixant un seuil critique de décision à $Z_{\text{seuil}} = 2$, on établit une règle statistique stricte : toute valeur de $Z(i)$ inférieure ou égale à 2 est considérée

comme appartenant aux fluctuations normales du bruit de fond de la structure (avec un niveau de confiance de 95,4%).

À l'inverse, si l'indicateur d'un élément dépasse cette limite ($Z(i) > 2$), la probabilité que cette variation soit le résultat du hasard devient inférieure à 4,6%. Il s'agit alors d'une anomalie statistique majeure qui valide rigoureusement la présence d'une singularité physique : l'élément j est identifié comme le siège de l'endommagement.

Le choix du seuil de 2 est purement mathématique et peut quelquefois aboutir à des faux négatifs. C'est pour cette raison que dans notre cas, le seuil critique va être fixé à 1.1, ce qui correspond à un niveau de confiance de 70 %. Cela nous permettra d'éviter les faux négatifs avec un niveau de confiance acceptable.

4.3. Résultats et discussion :

Dans le cadre de l'évaluation de la méthode, plusieurs tests sont effectués sur la même structure (poutre encastree-libre) et les trois scénarios présentés auparavant ainsi qu'à d'autres scénarios. Ces scénarios sont choisis afin d'englober plusieurs situations réelles d'endommagements, mais aussi des situations où les méthodes de détection peuvent s'avérer limitées (extrémités libre et encastree, plusieurs endommagements). De plus, une étude de sensibilité au bruit est présentée dans la dernière partie. La poutre est supposée soumise à une force de type choc ponctuelle appliqué à l'élément 11 dans tous les cas, et pour tester la sensibilité de la méthode à la position de la force, nous l'appliquons à l'élément 1 dans le cas de 3 éléments endommagés Tableau 3.1. Les endommagements sont considérés pareillement pour tous les cas avec une réduction de rigidité de 20 %. Les résultats seront présentés sous forme de courbes comportant, la réponse temporelle d'un élément de la structure (à titre illustratif élément 1), de son spectre pour la méthode fréquentielle et des valeurs de Z score pour la méthode MSE.

Cas test	Elément endommagé	Application au choc
1	1	1
2	9	11
3	6	21
4	21	11
5	3,10,19	11
6	3,10,19	1

Tableau 4.1 : Six cas tests et les éléments endommagées avec les applications en choc.

4.4. Application :

4.4.1. Premier cas :

Dans le premier cas, l'élément endommagé correspond à l'élément n°1. En observant les réponses temporelles pour l'état sain et l'état endommagé, aucune différence significative ne peut être observée directement entre les deux signaux, en raison de la densité des informations qu'ils contiennent.

L'analyse du spectre FFT met en évidence les trois pics principaux. Une légère variation des amplitudes est observée entre l'état sain et l'état endommagé, principalement autour de la fréquence de 5 Hz ainsi que dans la plage comprise entre 70 et 80 Hz. Malgré ces faibles écarts d'amplitude, les pics conservent pratiquement les mêmes positions dans les deux états. Concernant l'analyse énergétique, les résultats montrent clairement que la barre de variation associée à l'élément n°1 présente la valeur la plus élevée et dépasse le seuil fixé. Cette observation permet d'identifier correctement l'élément endommagé et confirme la bonne localisation du dommage. La représentation énergétique met également

en évidence les faibles variations d'énergie observées sur les autres éléments, ainsi que les variations nulles.

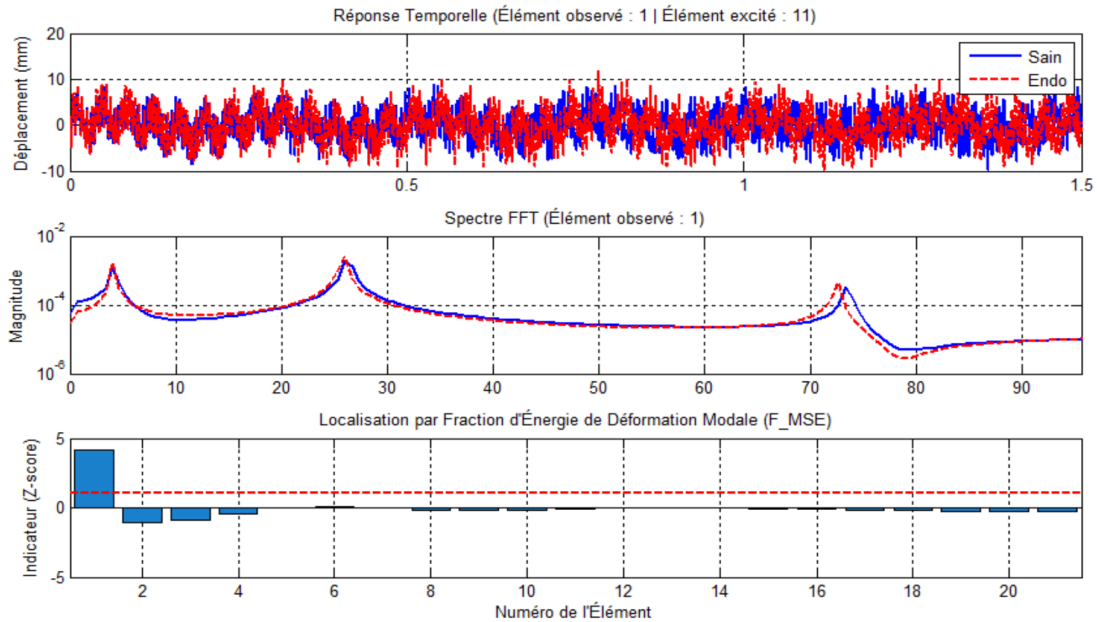


Figure 4.2 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 1.

4.4.2. Deuxième cas :

Dans le deuxième cas, l'élément endommagé correspond à l'élément n°9. L'analyse des réponses temporelles pour les états sain et endommagé ne permet pas de distinguer clairement la présence du dommage, les différences entre les deux signaux restant peu perceptibles.

L'analyse de la transformée de Fourier (FFT) met en évidence une modification du comportement dynamique de la structure. L'influence du dommage sur la réponse fréquentielle apparaît plus marquée que dans les cas précédents, ce qui peut s'expliquer par la proximité de l'élément endommagé avec l'élément excité (élément n°11). Bien que les pics principaux conservent pratiquement les mêmes positions dans les deux états, des écarts significatifs d'amplitude sont observés. Ces variations deviennent particulièrement visibles à

partir d'environ 11 Hz et se maintiennent sur les fréquences plus élevées. Ainsi, même en l'absence de déplacement des fréquences dominantes, la modification des amplitudes constitue un indicateur de la présence d'un endommagement et d'un changement du comportement dynamique de la structure. Concernant l'analyse énergétique présentée dans la figure 3, les résultats obtenus sont clairs et satisfaisants. La barre de variation associée à l'élément n°9 présente la valeur la plus élevée et dépasse nettement le seuil défini par l'indicateur Z-score. Cette observation permet d'identifier avec précision l'élément endommagé et confirme l'efficacité de la méthode proposée pour la localisation du dommage.

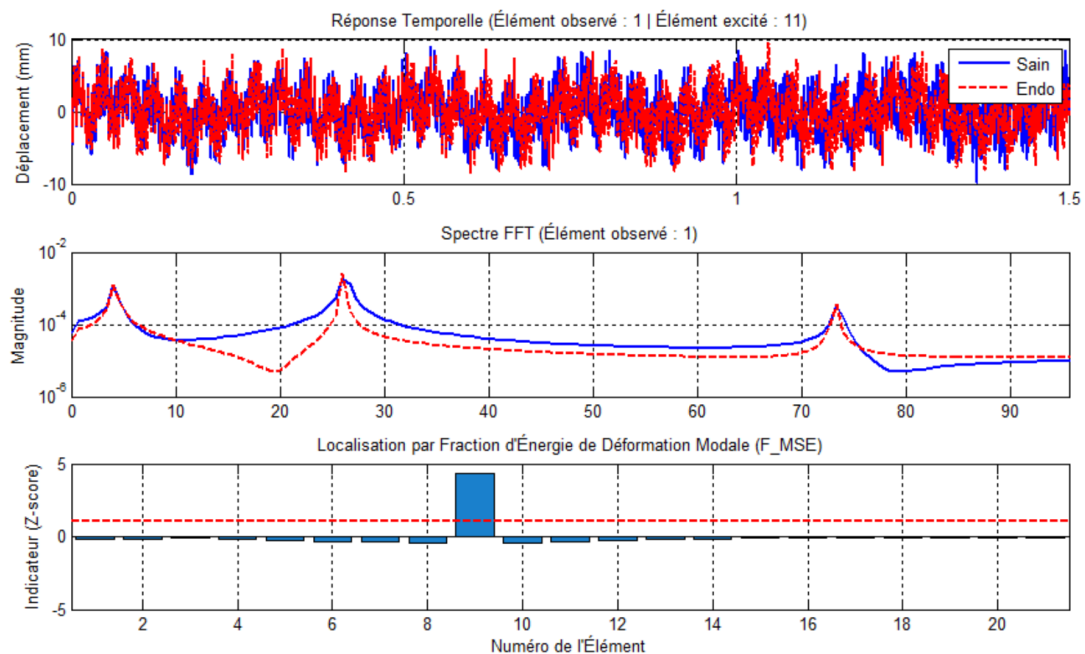


Figure 4.3 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 2.

4.4.3. Troisième cas :

Dans ce troisième cas, l'élément endommagé correspond à l'élément n°6. L'analyse des réponses temporelles pour les états sain et endommagé ne met en évidence aucune différence significative. Les deux signaux présentent un comportement très similaire, ce qui rend la détection du dommage difficile dans le domaine temporel.

L'analyse du spectre FFT révèle également une forte similitude entre les états sain et endommagé. Les courbes obtenues sont pratiquement identiques et les pics principaux conservent les mêmes positions. Seule une légère variation d'amplitude est observée autour de la plage de fréquences comprise entre 70 et 80 Hz. Toutefois, cette variation reste insuffisante pour conclure à la présence d'un endommagement ou à une modification significative du comportement dynamique de la structure. En revanche, l'analyse énergétique met clairement en évidence la présence du dommage. La fraction de variation de l'énergie associée à l'élément n°6 présente une valeur nettement plus élevée que celles des autres éléments, ce qui se traduit par une barre dominante dépassant le seuil défini par l'indicateur Z-score. Cette représentation permet non seulement d'identifier et de localiser correctement l'élément endommagé, mais également de visualiser les faibles variations d'énergie ainsi que les variations quasi nulles observées sur les autres éléments.

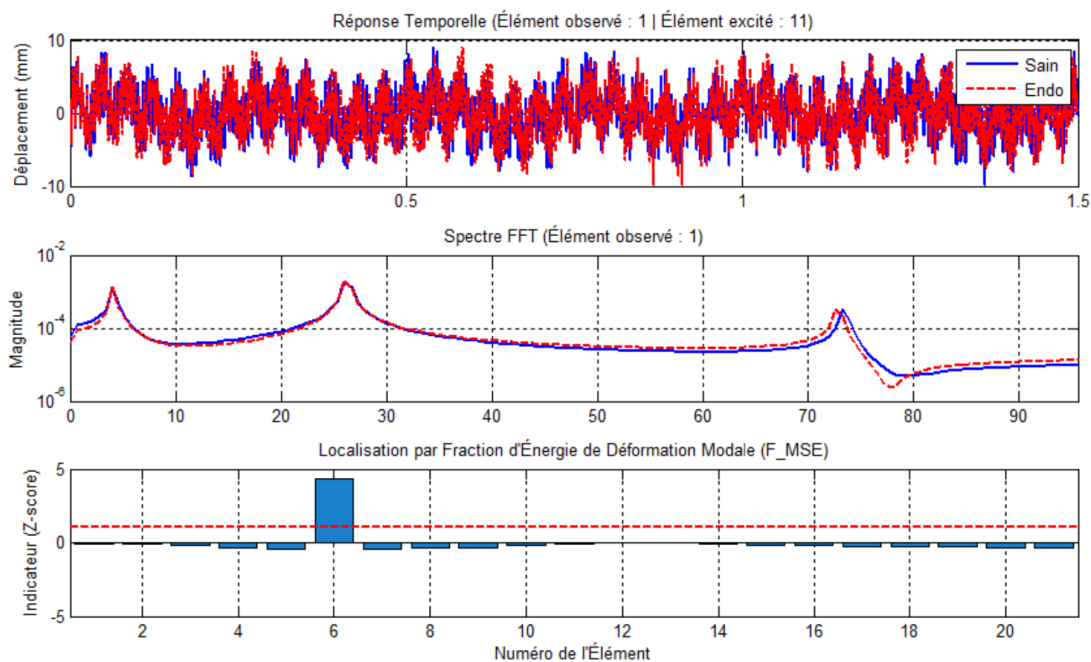


Figure 4.4 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 3.

4.4.4. Quatrième cas :

Dans ce quatrième cas, l'élément endommagé correspond à l'élément n°21, situé à l'extrémité libre de la poutre. L'objectif de cette étude est d'évaluer la

fiabilité de la méthode proposée pour la détection et la localisation des dommages situés aux extrémités de la structure. Pour cela, la force d'impact est appliquée au niveau de l'élément n°11, comme dans les cas précédents.

L'analyse des réponses temporelles ne fournit aucune information permettant de distinguer l'état sain de l'état endommagé. Les signaux obtenus présentent un comportement pratiquement identique, rendant la détection du dommage impossible dans le domaine temporel. L'analyse du spectre FFT conduit à la même conclusion. Les courbes correspondant aux états sain et endommagé sont quasiment superposées sur l'ensemble de la plage fréquentielle étudiée. Aucun déplacement des pics dominants ni variation significative des amplitudes n'est observé. Ainsi, l'analyse fréquentielle ne met en évidence aucun indice clair de la présence d'un endommagement. En revanche, l'analyse de la fraction de variation des énergies fournit des résultats clairs et fiables. La barre associée à l'élément n°21 présente la valeur la plus élevée et dépasse nettement le seuil défini par l'indicateur Z-score. Cette observation permet de localiser correctement l'élément endommagé et démontre que la méthode énergétique reste sensible même lorsque le défaut est situé à l'extrémité libre de la structure.

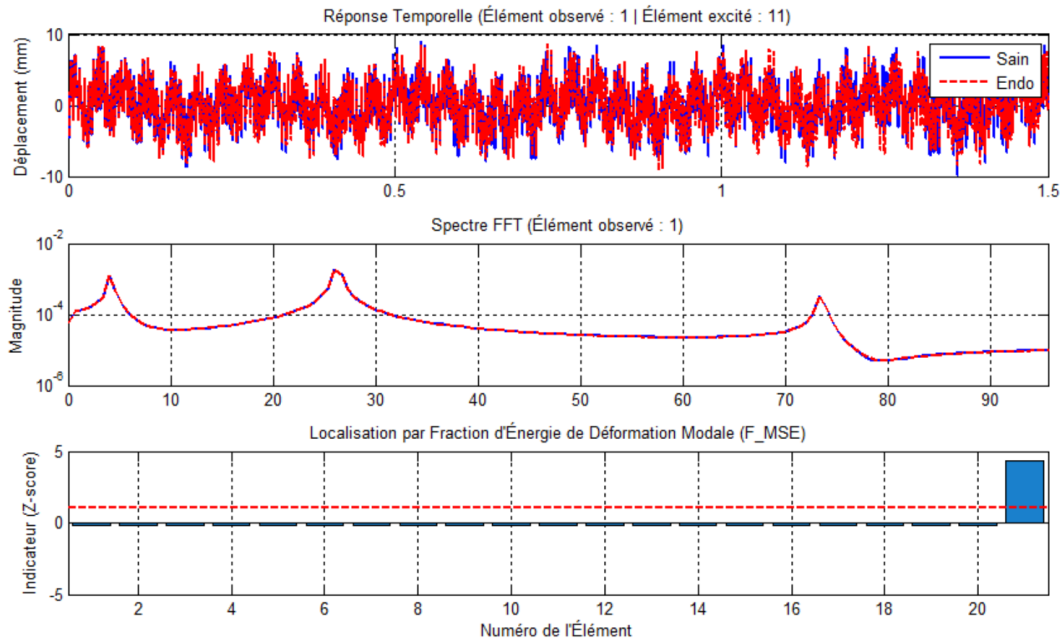


Figure 4.5 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 4.

4.4.5. Cinquième cas :

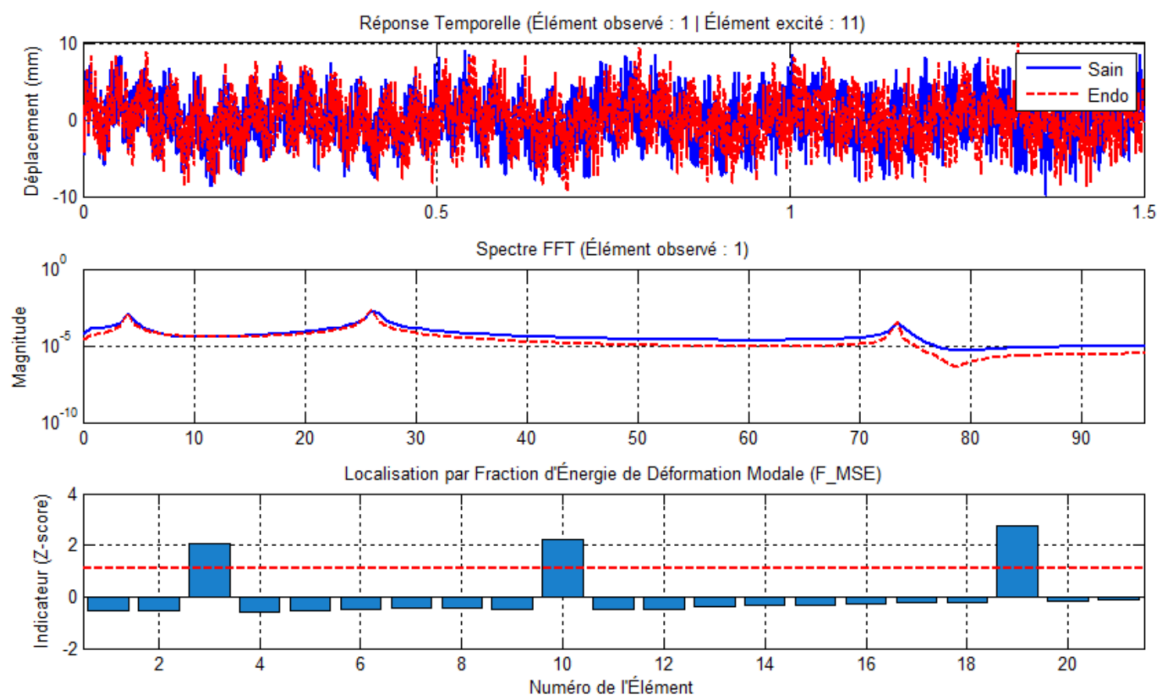
Après avoir validé la fiabilité de la méthode FMSE pour des cas d'endommagement situés aux extrémités et au milieu de la structure, deux cas supplémentaires comportant des scénarios d'endommagement multiples ont été étudiés afin d'évaluer davantage sa robustesse.

Le cinquième cas considère la présence simultanée de trois éléments endommagés, à savoir les éléments n°3, 10 et 19. L'analyse des réponses temporelles ne permet pas de mettre en évidence des différences significatives entre l'état sain et l'état endommagé.

L'analyse du spectre FFT montre que les pics principaux conservent leurs positions, avec de très faibles variations d'amplitude observées au début du spectre, ainsi qu'une diminution plus marquée dans la plage de fréquences comprise entre 75 et 80 Hz. Toutefois, ces modifications restent limitées et ne permettent pas, à elles seules, de localiser les dommages de manière fiable. En revanche, l'analyse basée sur la fraction de variation des énergies permet une identification claire des éléments endommagés. Les trois éléments n°3, 10 et 19

présentent des valeurs de variation nettement plus élevées que celles des autres éléments, avec une hiérarchie des amplitudes allant de l'élément 19 vers l'élément 10, puis l'élément 3. Les autres éléments présentent des variations d'énergie faibles voire négligeables.

Ces résultats montrent que la méthode de fraction de variation des énergies est particulièrement sensible, notamment lorsqu'elle est associée à des indicateurs de détection tels que le MSEBI ou le Z-score, qui permettent de définir un seuil clair pour l'identification des éléments endommagés.



4.4.6. Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 5.

4.4.7. Sixième cas :

Le sixième cas correspond au même scénario que le cas précédent, à la différence près que la position de l'élément excité a été modifiée. Dans ce cas, l'excitation est appliquée à l'élément n°1.

L'analyse du spectre FFT montre que les résultats restent globalement similaires à ceux du cas 5. Les pics principaux conservent leurs positions, et les variations d'amplitude restent très faibles. Dans ce contexte, les légères

différences observées peuvent être considérées comme négligeables, ce qui montre que le changement de position d'excitation n'influence pas significativement la réponse fréquentielle globale et même elle reste plus faible pour l'excitation dans l'extrémité encasturé. En revanche, l'analyse basée sur la fraction de variation des énergies demeure stable et performante. Elle permet toujours d'identifier clairement les éléments endommagés, avec des barres de variation nettement plus élevées pour les éléments défectueux. Ainsi, cette méthode assure à la fois la détection et la localisation précise des défauts, indépendamment de la position de l'excitation.

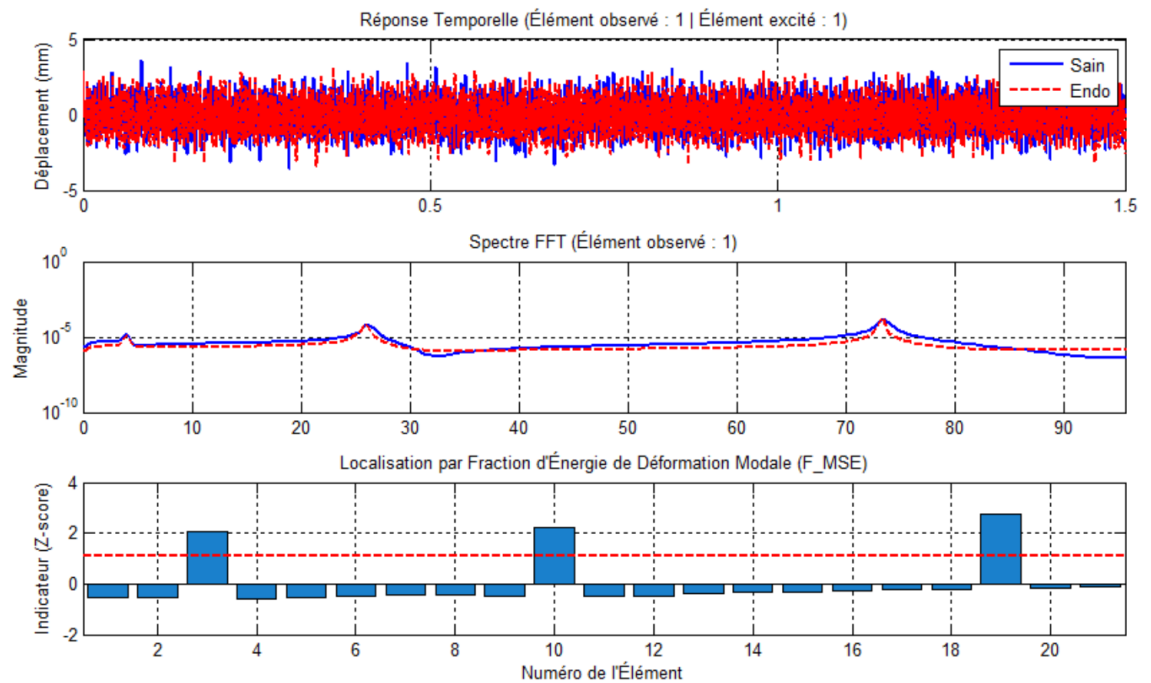


Figure 4.7 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score pour le Cas 6.

Deux cas supplémentaires ont été étudiés en introduisant un bruit de mesure afin d'évaluer la robustesse de la méthode FMSE face aux perturbations. Deux niveaux de bruit ont été considérés : un bruit faible (0,004) et un bruit plus élevé (0,01).

Cas test	Elément endommagé	Application au choc	Bruit
1	9	1	0.004
2	3,10,19	1	0.01

Tableau 4.2 : Deux cas d'étude des éléments endommagés avec ajout de bruit.

Cas 1 :

Pour cette analyse, un bruit de niveau 0.004 a été introduit dans les signaux de réponse ainsi que dans les modes propres. L'endommagement est localisé au niveau de l'élément 9, tandis que l'excitation par impact est appliquée sur l'élément 1. Les réponses temporelles des structures saines et endommagées restent très proches malgré la présence du bruit. Les différences observées au niveau des amplitudes sont faibles et ne permettent pas de distinguer clairement l'état saine. Le bruit masque ainsi les faibles variations induites par l'endommagement et rend sa détection particulièrement difficile à partir des réponses temporelles.

L'analyse fréquentielle conduit à la même conclusions. Les principaux pics du spectre demeurent localisés aux mêmes fréquences pour les deux états. Quelques écarts d'amplitudes peuvent être observés, notamment autour de 25Hz et 73 Hz, mais ces variations restent insuffisantes pour constituer un indicateur fiable de l'endommagement. En revanche, les résultats obtenus à partir de l'indicateur FMSE montrent une forte dégradation de ses performances sous l'effet du bruit. La zone réellement endommagée n'est plus correctement identifiée et un pic parasite apparaît au niveau de l'élément 21, alors que celui-ci n'est pas affecté par l'endommagement. Cette fausse détection traduit la sensibilité de l'indicateur au bruit et met en évidence une perte significative de sa capacité de localisation dans ces conditions. Ces résultats montrent que

l'introduction du bruit perturbe fortement la distribution des énergies modales et peut conduire à des erreurs d'interprétation de l'état de la structure.

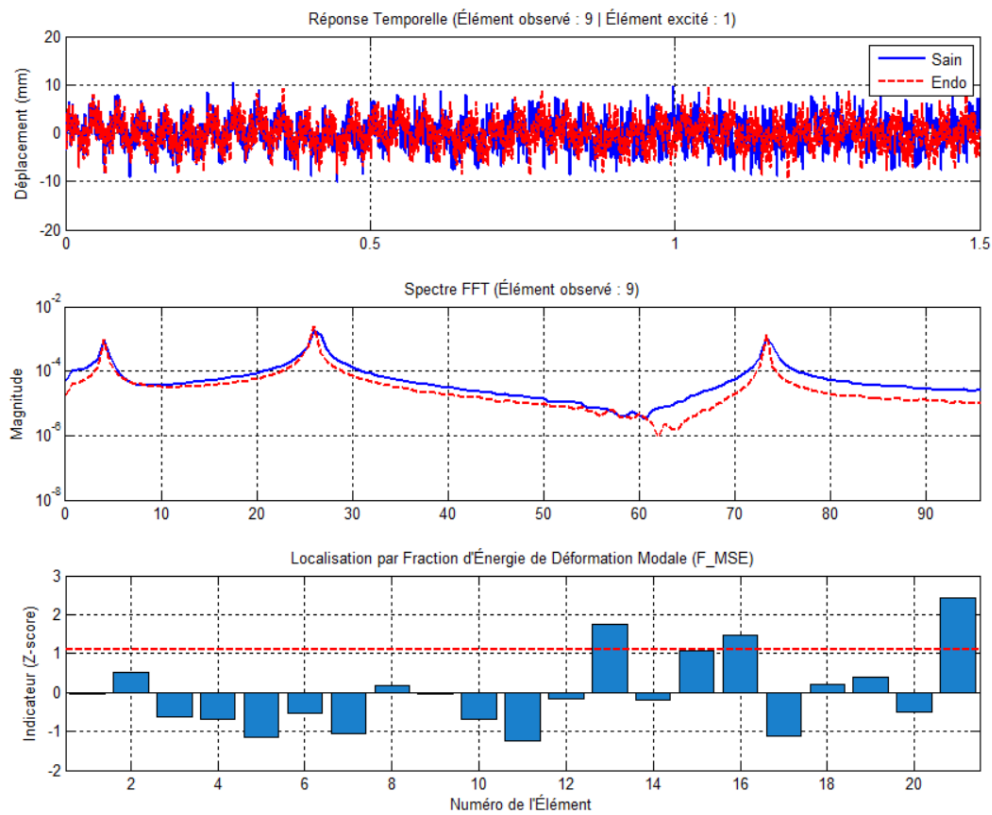


Figure 4.8 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score sous l'effet d'un bruit pour le Cas 1.

Cas 2 :

Dans le deuxième test, trois zones endommagées ont été considérées simultanément aux niveau des éléments 3,10,19. Un bruit de niveau 0.01 a été ajouté aux données afin d'évaluer l'influence de perturbations plus importantes sur les performances des différentes méthodes. L'excitation par impact est appliquée sur l'élément 1, tandis que la réponse est observée au niveau de l'élément 9. L'analyse des réponses temporelles montre que les signaux des structures saine et endommagée demeurent très proches malgré la présence simultanée de plusieurs endommagements et d'un niveau de bruit relativement élevé. Les différences d'amplitude restent faibles et ne permettent ni d'identifier

clairement l'existence des endommagements ni de localiser les zones affectées. Les résultats de l'analyse fréquentielle conduisent à la même conclusion. Les spectres FFT présentent uniquement de légères variations d'amplitude autour des pics dominants, alors que leurs positions fréquentielles demeurent pratiquement inchangées. Ces faibles écarts ne fournissent pas d'informations suffisantes pour détecter ou quantifier le nombre d'endommagements présents dans la structure. Les méthodes basées sur les réponses temporelles et fréquentielles apparaissent ainsi peu sensibles à la présence simultanée de plusieurs endommagements, particulièrement dans un environnement bruité. Concernant l'indicateur FMSE, des variations significatives sont observées et certaines valeurs dépassent le seuil de détection (SE). Toutefois, les pics obtenus ne correspondent pas aux positions réelles des endommagements situés aux éléments 3,10,19. Au contraire, des pics parasites apparaissent au niveau des éléments 13,15,16 et surtout 21, où l'amplitude maximale est enregistrée. Cette mauvaise localisation conduit à des diagnostics erronés et empêche l'identification correcte des zones endommagées.

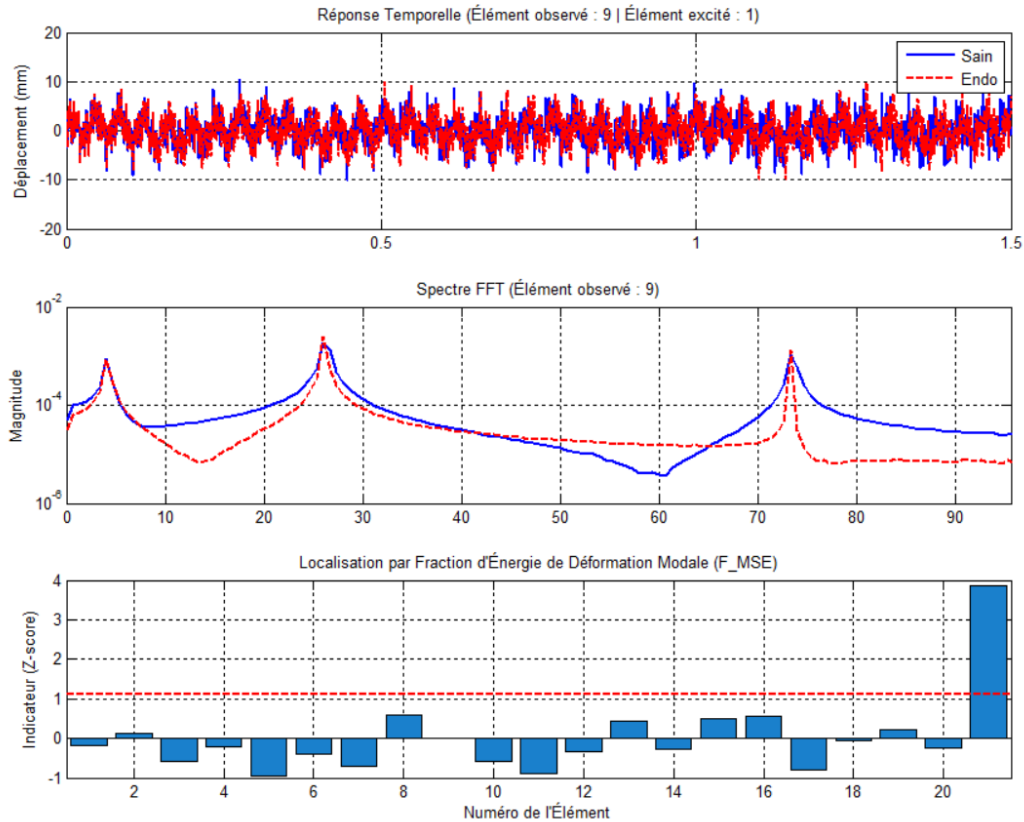


Figure 4.9 : Réponses temporelle et le spectre FFT, Z-score sous l'effet d'un bruit pour le Cas 2.

4.5. Conclusion :

Dans ce travail, les trois niveaux d'analyse (temporel, fréquentiel et énergétique) ont été exploités afin d'évaluer la performance de la méthode FMSE pour la détection et la localisation des endommagements, en comparaison avec l'état sain de la structure. Six scénarios ont été étudiés, dont quatre cas avec un seul endommagement et deux cas avec des endommagements multiples. Les positions des défauts ont été variées, notamment au milieu de la structure et aux extrémités, afin de tester la robustesse de la méthode dans différentes configurations.

Les résultats montrent que les analyses temporelle et fréquentielle (FFT) restent globalement peu sensibles aux endommagements. Dans plusieurs cas, les

signaux temporels ne permettent pas de distinguer clairement l'état sain de l'état endommagé, tandis que le spectre fréquentiel présente généralement une superposition des pics avec de faibles variations d'amplitude. En revanche, la méthode basée sur la fraction de variation des énergies (FMSE) s'avère particulièrement efficace et robuste. Elle permet de détecter et de localiser avec précision les zones endommagées dans tous les scénarios étudiés, y compris dans les cas complexes et en présence de plusieurs défauts.

Les deux derniers cas ont permis de confirmer la fiabilité de la méthode face à des configurations plus complexes ainsi que son indépendance vis-à-vis de la position de l'endommagement et de la position d'excitation. L'utilisation d'indicateurs tels que le MSEBI ou le Z-score facilite la définition d'un seuil de détection clair, permettant d'identifier précisément les éléments endommagés. Ainsi, la méthode FMSE se distingue par sa sensibilité et sa fiabilité, offrant une localisation efficace des dommages dans l'ensemble des cas étudiés.

Les résultats montrent que la méthode FMSE reste capable de détecter une variation dans les énergies, ce qui indique la présence d'un changement dans le comportement de la structure. Toutefois, l'introduction du bruit affecte fortement sa performance en localisation. En effet, bien que l'indicateur énergétique mette toujours en évidence une variation globale, la présence du bruit dégrade la sensibilité de la méthode et empêche une localisation fiable et précise des éléments endommagés. Les barres associées aux éléments endommagés ne se distinguent plus clairement du reste des éléments, ce qui rend l'identification des zones endommagées incertaine. Ainsi, il est constaté que la méthode FMSE conserve une capacité de détection qualitative du changement, mais perd en efficacité pour la localisation lorsque le niveau de bruit augmente, ce qui met en évidence l'influence directe des perturbations sur la robustesse de la méthode.

Conclusion générale

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de la capacité des énergies modales à détecter et localiser les endommagements dans une structure, en comparaison avec l'approche basée sur les fréquences propres. Pour ce faire, différents scénarios d'endommagement ont été modélisés à l'aide de la méthode des éléments finis.

Les résultats obtenus ont montré que les variations des fréquences naturelles entre l'état sain et l'état endommagé restent relativement faibles, ce qui limite leur efficacité pour la détection des dommages. En revanche, l'analyse des énergies modales a révélé une sensibilité nettement plus importante à la présence d'endommagements. Les différences observées entre les énergies de l'état sain et celles de l'état endommagé ont permis de mettre en évidence l'existence de modifications structurelles dans tous les scénarios étudiés. Cependant, bien que la variation des énergies modales soit efficace pour détecter un changement dans l'état de la structure, elle ne permet pas à elle seule de localiser précisément les éléments endommagés. En effet, des variations significatives peuvent également apparaître sur des éléments non endommagés en raison des erreurs numériques, de la redistribution énergétique ou d'autres perturbations.

Afin d'améliorer la localisation des dommages, la méthode FMSE (*Fraction Modale de l'Énergie de Déformation*) a été appliquée. Les résultats obtenus ont montré l'apparition de pics plus prononcés au niveau des zones susceptibles d'être endommagées. Néanmoins, la présence de plusieurs pics rend difficile la distinction entre les dommages réels et les faux dommages. Pour remédier à cette limitation, l'indicateur MSEBI a été introduit. Grâce à l'utilisation d'une limite de seuil, cet indicateur permet de distinguer les véritables endommagements des fausses indications. Les différents cas étudiés, y compris les scénarios comportant plusieurs dommages simultanés, ont montré que cette

approche permet une localisation plus précise et plus fiable des éléments endommagés.

Enfin, l'étude de l'influence du bruit a mis en évidence une diminution importante des performances de la méthode. En présence de bruit, l'approche reste capable de détecter une variation globale entre l'état sain et l'état endommagé, mais elle perd sa capacité à localiser correctement les éléments ou les zones endommagées. Cette sensibilité au bruit constitue ainsi l'une des principales limites de la méthode étudiée et ouvre la voie à de futures améliorations visant à renforcer sa robustesse dans des conditions réelles d'exploitation.

Références bibliographiques

1. N. Stubbs, J. T. Kim & K. Topole (1992). *An Efficient and Robust Algorithm for Damage Localization in Offshore Platforms*. Proceedings of the ASCE 10th Structures Congress, San Antonio, Texas, USA.
2. C. R. Farrar, N. Stubbs & J. T. Kim (1994). *Damage Detection in Structures Using Modal Strain Energy*. Proceedings of the International Modal Analysis Conference (IMAC).
3. S. Choi & N. Stubbs (2004). *Damage Identification in Plates Using Changes in Modal Strain Energy and Generic Elements*. Journal of Sound and Vibration, 280(1–2), 213–232.
4. P. J. Cornwell, S. W. Doebling & C. R. Farrar (1999). *Application of the Strain Energy Damage Detection Method to Plate-Like Structures*. Journal of Sound and Vibration, 224(2), 359–374.
5. N. Stubbs & J. T. Kim (1996). *Damage Localization in Structures Without Baseline Modal Parameters*. AIAA Journal, 34(8), 1644–1649.
6. Z. Y. Shi & N. Stubbs (1999). *A Damage Localization Method Using Modal Strain Energy and Modal Frequency Changes*. Journal of Engineering Mechanics, 125(12), 1356–1363.
7. Shi, Z. Y., Law, S. S., & Zhang, L. M. (2000). *Structural Damage Detection from Modal Strain Energy Change*. Journal of Engineering Mechanics, 126(12), 1216–1223.
8. Hu, S.-L. J., Wang, S. Q., & Li, H. J. (2006). *Cross-modal strain energy method for estimating damage severity*. Journal of Engineering Mechanics, 132(4), 429–437.
9. Law, S. S., Ni, Y. Q., Lam, H. F., & Yang, Z. J. (2004). *Damage Diagnosis for a Benchmark Steel Truss Structure Using Modal Strain Energy Decomposition Method*.

10. Shi, Z. Y., Law, S. S., & Zhang, L. M. (1998). Structural damage localization from modal strain energy change. *Journal of Sound and Vibration*, 218(5), 825-844.
11. Yan, W. J., & Ren, W. X. (2011). Structural damage detection by combined use of element modal strain energy sensitivity and genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration*, 330(13), 3230-3244.
12. Yan, W. J., Huang, T. L., & Ren, W. X. (2010). Damage detection method based on element modal strain energy sensitivity. *Advances in Structural Engineering*, 13(6), 1075-1088.
13. Dessì, D., & Camerlengo, G. (2015). Damage identification of beam-like structures based on peak extraction from modal curvature differences. *Journal of Sound and Vibration*, 340, 123-144
14. file:///C:/Users/BIO/Documents/Mod%C3%A8les%20Office%20personnalis%C3%A9s/Vibration_analysis_of_the_simply_supported_RC_beam%20(1)%20(2).pdf
15. Cao, M., Radzieński, Polishchuk, A., & Ostachowicz, W. (2017). A novel closed-form wavelet analysis for damage identification in beam structures using modal curvature. *Journal of Sound and Vibration*.
16. Zhu, S., & Li, Y. (2019). Damage detection of structures using modal strain energy and curvature: A review of noise sensitivity and mitigation strategies.
17. Rucka, M. (2017). Damage detection in beams using wavelet transform of modal curvature.
18. Quaranta, G., Carboni, B., & Lacarbonara, W. (2020). On the noise sensitivity of modal curvature-based damage identification in beams. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 138, 106579.
19. Li, X. Y., & Law, S. S. (2010). Damage detection of structures under uncertain conditions using modal strain energy and artificial neural networks. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 24(7), 2182-2197.

- 20.Doebling, S. W., Farrar, C. R., & Prime, M. B. (1998). A summary review of vibration-based damage identification methods. *The Shock and Vibration Digest*, 30(2), 91-105. (Note : J'ai juste corrigé le verbe "ont contribué" par "a contribué" puisque vous citez Doebling seul).
- 21.Ng, C. T., & Ni, Y. Q. (2012). Structural damage detection using modal strain energy and neural networks with application to large-scale bridges. *Structural Engineering and Mechanics*, 41(3), 321-339.
- 22.Yan, W. J., & Ren, W. X. (2011). Structural damage detection by combined use of element modal strain energy sensitivity and genetic algorithms. *Journal of Sound and Vibration*, 330(13), 3230-3244.
- 23.Bofang Zhu. The finite element method: fundamentals and applications in civil, hydraulic, mechanical and aeronautical engineering by Zhu B. - PDF Drive. <https://www.pdfdrive.com/the-finite-element-method-fundamentals-and-applications-in-civil-hydraulic-mechanical-and-aeronautical-engineering-e189901258.html> (2018).
- 24.Oudin, H., *Méthodes des éléments finis (MEF)*. 2008.
- 25.Cazenave, M., *Méthode des éléments finis (Approche pratique en mécanique des structures)*. DUNOD, 2010.
- 26.J.-F. IMBERT. « Analyse des structures par éléments finis » CEPAD 1995.3e édition.
- 27.Dimitrios G. Pavlou, PhD. Essentials of the finite element method: for mechanical and structural engineers - PDF Drive. <http://www.pdfdrive.com/essentials-of-the-finite-element-method-for-mechanical-and-structural-engineers-e175823068.html> (2015).
- 28.[Hervé Oudin, *Méthode des éléments finis*, HAL, Nantes, France, 26 mai 2011.
- 29.G. Lakshmi Narasaiah, *Finite Element Analysis*, BS Publications, Vikasnagar, Hyderabad, 2008, pages 92-94.

- 30.Lardeur, P. (2008). *Méthode des éléments finis pour l'analyse vibratoire des structures*. Techniques de l'Ingénieur, Référence BM5012. G. R. Liu, S. S. Quek, *The finite element method*, Butterworth-Heinemann, Oxford, England, 2003, pages 67-71.
- 31.Rahmani, O. and S. Kebdani, *Introduction à la méthode des éléments finis pour les ingénieurs*. 1988 : Office des publications universitaires.
- 32.Zienkiewicz, O. C., Taylor, R. L., & Zhu, J. Z. (2013). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier.
- 33.Doebling, S. W., Farrar, C. R., Prime, M. B., & Shevitz, D. W. (1996). *Damage identification and health monitoring of structural and mechanical systems from changes in their vibration characteristics: a literature review*. Los Alamos National Laboratory Report, LA-13070-MS.
- 34.Imbert, J. F. (1995). *Analyse des structures par éléments finis (3e Édition)*. Cépaduès-Éditions.
- 35.Stubbs, N., Kim, J. T., & Topole, K. (1992). *An efficient and robust algorithm for damage localization in structural systems*. Proceedings of the 10th International Modal Analysis Conference (IMAC), Vol. 1, pp. 491-498.
- 36.Heylen, W., Lammens, S., & Sas, P. (2007). *Modal Analysis Theory and Testing*. Katholieke Universiteit Leuven.
- 37.Salawu, O. S. (1997). *Detection of structural damage through changes in frequency: a review*. Engineering Structures, 19(9), pp. 718-723.
- 38.Rytter, A. (1993). *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Ph.D. dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- 39.Messina, A., Williams, E. J., & Contursi, T. (1998). *Structural damage detection by a sensitivity and statistical-based method*. Journal of Sound and Vibration, 216(5), 791-808.

- 40.Yeo, I., Shin, S., Lee, H. S., & Chang, S. P. (2000). *Statistical damage assessment method for structures using frequency changes*. Journal of Engineering Mechanics, 126(10), 1082-1085.
- 41.Pandey, A. K., Biswas, M., & Samman, M. M. (1991). *Damage detection from changes in curvature mode shapes*. Journal of Sound and Vibration, 145(2), 321-332.
- 42.Rytter, A. (1993). *Vibrational Based Inspection of Civil Engineering Structures*. Ph. D. dissertation, Aalborg University, Denmark.
- 43.Kim, J. T., & Stubbs, N. (2002). *Improved damage identification method based on modal strain energy*. Journal of Sound and Vibration, 252(2), 223-238.
- 44.Alvandi, A., & Cremona, C. (2006). *Assessment of vibration-based damage identification techniques*. Journal of Sound and Vibration, 292(1-2), 179-202.
- 45.Shi, Z. Y., Law, S. S., & Zhang, L. M. (2000). *Damage Localization by Directly Using Incomplete Mode Shapes*. Journal of Engineering Mechanics (ASCE), 126(6), 656-660.

Annexe

```

function [Resultats] = F_MSE(ne, elements_endommages, severite, typeForce,
paramForce,niveau_bruit)
% ANALYSEVIBRATIONPOUTRE_COMPLETE_F_MSE
%
%
=====
=====
%
%          HELP / AIDE
%
=====
=====
% Cette fonction réalise une analyse dynamique complète par éléments finis
% d'une poutre en console (Acier) saine et endommagée. Elle intègre le calcul
% temporel, l'analyse fréquentielle (FFT) et la localisation du dommage par
% la méthode de la Fraction d'Énergie de Déformation Modale (F_MSE).
%
% ENTRÉES :
% ne          : Nombre d'éléments finis (ex: 20).
% elements_endommages : Vecteur des indices des éléments défectueux (ex:
[5 6]).
% severite     : Perte de rigidité flexionnelle EI (0 à 1) (ex: 0.4 = 40%).
% typeForce    : 'impulsion' (choc bref) ou 'sinus' (force harmonique).
% paramForce   : Si 'impulsion' : [Amplitude (N.s)]
%              Si 'sinus'    : [Amplitude (N), Frequence_Excitation (Hz)]
%

```

%

=====
=====

% AIDE THÉORIQUE ET TECHNIQUE : LA MÉTHODE F_MSE
(CIBLEE)

%

=====
=====

%

% 1. PRINCIPE PHYSIQUE :

% Lorsqu'une structure vibre selon l'un de ses modes propres, elle stocke
% de l'énergie sous deux formes : l'énergie cinétique (liée à la vitesse/masse)
% et l'énergie de déformation (liée à la courbure/rigidité).

% La méthode MSE se base sur le fait que si un élément fini subit une perte
% de rigidité (fissure, corrosion), sa courbure locale va augmenter pour
% transmettre les mêmes efforts. Cette anomalie de courbure modifie de
% façon flagrante la distribution de l'énergie de déformation.

%

% 2. FORMULATION MATHÉMATIQUE (PAR ÉLÉMENT ET PAR
MODE) :

% Pour un élément 'i' et un mode 'm', l'énergie de déformation modale brute
% est calculée à partir de la matrice de raideur élémentaire de l'état sain
% [ke_sain] et du vecteur de déplacement modal local {phi_m,i} :

%

% $MSE(i,m) = 0.5 * \{phi_m,i\}' * [ke_sain] * \{phi_m,i\}$

%

% 3. POURQUOI LA "FRACTION" D'ÉNERGIE (F_MSE) ?

% Dans la pratique (essais réels), l'amplitude absolue des modes mesurés
% peut varier entre la structure saine et endommagée (changement de force,

% sensibilité des capteurs). Pour s'affranchir de ce problème d'échelle,
 % on calcule la *Fraction* d'énergie stockée par l'élément par rapport à
 % l'énergie totale de toute la structure pour ce mode :
 %
 %
$$F_MSE(i,m) = MSE(i,m) / \text{Somme_sur_tous_les_elements_j}(MSE(j,m))$$

 %
 % La somme des F_MSE sur tous les éléments d'un même mode est donc
 toujours
 % égale à 1 (ou 100%).
 %
 % 4. INDICATEUR DE DOMMAGE (DI) ET SÉLECTION DES MODES :
 % Le dommage altère différemment chaque mode (un défaut placé sur un
 point
 % nodal du mode 1 ne sera pas vu par le mode 1, mais sera vu par le mode 2).
 % On fait donc la somme des fractions sur les 'M' premiers modes :
 %
 %
$$DI(i) = \frac{\text{Somme_sur_m_1_à_M}(F_MSE_endommagé(i,m))}{\text{Somme_sur_m_1_à_M}(F_MSE_sain(i,m))}$$

 %
 % - Si $DI(i) \leq 1$: L'élément a un comportement sain.
 % - Si $DI(i) > 1$: L'élément stocke une part d'énergie anormalement élevée,
 % il est suspecté d'être endommagé.
 %
 % 5. NORMALISATION STATISTIQUE (Z-SCORE) :
 % À cause des approximations numériques des Éléments Finis, même les
 éléments
 % sains subissent de micro-variations de ratio (bruit numérique).

% Pour isoler mathématiquement le vrai défaut, on applique un Z-score :

%

% $Z(i) = (DI(i) - Moyenne(DI)) / \text{Écart_type}(DI)$

%

% Selon la loi normale, une valeur de $Z > 2$ indique une anomalie statistique

% majeure avec plus de 95% de confiance. C'est le seuil tracé en pointillé

% rouge sur le graphique : l'élément dont la barre dépasse ce seuil est

% localisé comme étant le siège de l'endommagement.

%

%

=====

=====

%

=====

=====

%% 1. Propriétés Physiques (Acier)

L = 2.0; E = 210e9; rho = 7800;

b = 0.05; h = 0.02; A = b*h; I = (b*h^3)/12;

n_noeuds = ne + 1; le = L/ne; ndof = 2*n_noeuds;

x = linspace(0, L, n_noeuds);

%% 2. Saisie de la Position de la Force (Interaction 1)

fprintf("\n=====\
n');

fprintf('CONFIGURATION DE L'EXCITATION\n');

elem_force = input(sprintf('Entrez le numéro de l'élément où appliquer la
force/choc (1 à %d) : ', ne));

```

if isempty(elem_force) || elem_force < 1 || elem_force > ne
    warning('Saisie invalide. Force appliquée à l'extrémité (Élément %d) par
    défaut.', ne);
    elem_force = ne;
end
% Le ddl de translation verticale associé au noeud droit de l'élément choisi :
ddl_force = 2 * (elem_force + 1) - 1;

%% 3. Assemblage des Matrices Globales (Sain et Endommagé)
ke_s = (E*I/le^3)*[12, 6*le, -12, 6*le; 6*le, 4*le^2, -6*le, 2*le^2; -12, -6*le,
12, -6*le; 6*le, 2*le^2, -6*le, 4*le^2];
me = (rho*A*le/420)*[156, 22*le, 54, -13*le; 22*le, 4*le^2, 13*le, -3*le^2; 54,
13*le, 156, -22*le; -13*le, -3*le^2, -22*le, 4*le^2];

K_sain = zeros(ndof); K_endo = zeros(ndof); M = zeros(ndof);
for i = 1:ne
    idx = (2*i-1):(2*i+2);
    k_act = ke_s;
    if ismember(i, elements_endommages), k_act = (1 - severite) * ke_s; end
    K_sain(idx,idx) = K_sain(idx,idx) + ke_s;
    K_endo(idx,idx) = K_endo(idx,idx) + k_act;
    M(idx,idx) = M(idx,idx) + me;
end
ddl_1 = 3:ndof; % Encastrement

%% 4. Analyses Modales
[V_sain, f_sain] = resoudre_et_normaliser(K_sain(ddl_1,ddl_1), M(ddl_1,ddl_1),
ndof, ddl_1);

```

```
[V_endo, f_endo] = resoudre_et_normaliser(K_endo(ddl_1,ddl_1),
M(ddl_1,ddl_1), ndof, ddl_1);
```

```
%% 5. Réponses Temporelles Dynamiques (Prise en compte de la position de la
force)
```

```
fs = 2000; t = 0:1/fs:1.5; L_sig = length(t);
```

```
U_temp_sain = zeros(ndof, L_sig); U_temp_endo = zeros(ndof, L_sig);
```

```
Amp = paramForce(1);
```

```
n_modes_calcul = min(8, length(ddl_1));
```

```
for i = 1:n_modes_calcul
```

```
    phi_s = V_sain(:, i); wi_s = 2*pi*f_sain(i);
```

```
    phi_e = V_endo(:, i); wi_e = 2*pi*f_endo(i);
```

```
    if strcmpi(typeForce, 'impulsion')
```

```
        qi_t_sain = (phi_s(ddl_force) * Amp / wi_s) * sin(wi_s * t);
```

```
        qi_t_endo = (phi_e(ddl_force) * Amp / wi_e) * sin(wi_e * t);
```

```
    else
```

```
        wf = 2*pi*paramForce(2);
```

```
        qi_t_sain = (phi_s(ddl_force) * Amp / (wi_s^2 - wf^2)) * (sin(wf * t) -
(wf/wi_s)*sin(wi_s * t));
```

```
        qi_t_endo = (phi_e(ddl_force) * Amp / (wi_e^2 - wf^2)) * (sin(wf * t) -
(wf/wi_e)*sin(wi_e * t));
```

```
    end
```

```
    U_temp_sain = U_temp_sain + phi_s * qi_t_sain;
```

```
    U_temp_endo = U_temp_endo + phi_e * qi_t_endo;
```

```
end
```

%% 5. Réponses Temporelles Dynamiques (Prise en compte de la position de la force)

```
fs = 2000; t = 0:1/fs:1.5; L_sig = length(t);
```

```
U_temp_sain = zeros(ndof, L_sig); U_temp_endo = zeros(ndof, L_sig);
```

```
Amp = paramForce(1);
```

```
n_modes_calcul = min(8, length(ddl_1));
```

```
for i = 1:n_modes_calcul
```

```
    phi_s = V_sain(:, i); wi_s = 2*pi*f_sain(i);
```

```
    phi_e = V_endo(:, i); wi_e = 2*pi*f_endo(i);
```

```
    if strcmpi(typeForce, 'impulsion')
```

```
        qi_t_sain = (phi_s(ddl_force) * Amp / wi_s) * sin(wi_s * t);
```

```
        qi_t_endo = (phi_e(ddl_force) * Amp / wi_e) * sin(wi_e * t);
```

```
    else
```

```
        wf = 2*pi*paramForce(2);
```

```
        qi_t_sain = (phi_s(ddl_force) * Amp / (wi_s^2 - wf^2)) * (sin(wf * t) -  
(wf/wi_s)*sin(wi_s * t));
```

```
        qi_t_endo = (phi_e(ddl_force) * Amp / (wi_e^2 - wf^2)) * (sin(wf * t) -  
(wf/wi_e)*sin(wi_e * t));
```

```
    end
```

```
    U_temp_sain = U_temp_sain + phi_s * qi_t_sain;
```

```
    U_temp_endo = U_temp_endo + phi_e * qi_t_endo;
```

```
end
```

% --- AJOUT DU BRUIT BLANC GAUSSIEN (Niveau : 0.01 ou 1%) ---

% Corrigé sans l'utilisation de la fonction 'rms' de la toolbox

```
for d = 1:ndof
```

```

% Pour le signal sain
% Équivalent natif de rms(X) -> sqrt(mean(X.^2))
rms_sain = sqrt(mean(U_temp_sain(d, :).^2));
if rms_sain > 1e-12 % Évite les divisions/bruits sur les DDL fixes
(encastrement)
    bruit_sain = niveau_bruit * rms_sain * randn(1, L_sig);
    U_temp_sain(d, :) = U_temp_sain(d, :) + bruit_sain;
end

% Pour le signal endommagé
rms_endo = sqrt(mean(U_temp_endo(d, :).^2));
if rms_endo > 1e-12
    bruit_endo = niveau_bruit * rms_endo * randn(1, L_sig);
    U_temp_endo(d, :) = U_temp_endo(d, :) + bruit_endo;
end
end

% -----
% -----

%% 6. Traitement du Signal (FFT de tous les DDL)
f_axe = fs * (0:(floor(L_sig/2))) / L_sig;
FFT_sain = zeros(ndof, length(f_axe)); FFT_endo = zeros(ndof, length(f_axe));
for d = 1:ndof
    Y_s = fft(U_temp_sain(d, :)); P2_s = abs(Y_s/L_sig); P1_s =
P2_s(1:floor(L_sig/2+1)); P1_s(2:end-1) = 2*P1_s(2:end-1); FFT_sain(d, :) =
P1_s;
    Y_e = fft(U_temp_endo(d, :)); P2_e = abs(Y_e/L_sig); P1_e =
P2_e(1:floor(L_sig/2+1)); P1_e(2:end-1) = 2*P1_e(2:end-1); FFT_endo(d, :) =
P1_e;

```

end

%% 7. MÉTHODE DE LA FRACTION D'ÉNERGIE DE DÉFORMATION
MODALE (F_MSE)

n_modes_MSE = 3;

F_MSE_sain = zeros(ne, n_modes_MSE);

F_MSE_endo = zeros(ne, n_modes_MSE);

% --- AJOUT DU BRUIT BLANC SUR LES VECTEURS MODAUX (Niveau
: 0.01) ---

% Copie locale pour ne pas corrompre les vecteurs originaux (utilisés ailleurs)

V_sain_bruite = V_sain;

V_endo_bruite = V_endo;

for m = 1:n_modes_MSE

 % Bruitage du mode m - Sain

 rms_mode_s = sqrt(mean(V_sain(ddl_l, m).^2)); % RMS uniquement sur les
DDL libres

 bruit_s = niveau_bruit * rms_mode_s * randn(ndof, 1);

 V_sain_bruite(:, m) = V_sain(:, m) + bruit_s;

 V_sain_bruite(1:2, m) = 0; % Force à zéro les DDL de l'encastrement

 % Bruitage du mode m - Endommagé

 rms_mode_e = sqrt(mean(V_endo(ddl_l, m).^2));

 bruit_e = niveau_bruit * rms_mode_e * randn(ndof, 1);

 V_endo_bruite(:, m) = V_endo(:, m) + bruit_e;

 V_endo_bruite(1:2, m) = 0; % Force à zéro les DDL de l'encastrement

end

% -----

```

for m = 1:n_modes_MSE
    MSE_s_elem = zeros(ne, 1);
    MSE_e_elem = zeros(ne, 1);

    for i = 1:ne
        idx = (2*i-1):(2*i+2);
        % On utilise désormais les vecteurs bruités pour le calcul de l'énergie
        phi_s_local = V_sain_bruite(idx, m);
        phi_e_local = V_endo_bruite(idx, m);

        MSE_s_elem(i) = 0.5 * phi_s_local' * ke_s * phi_s_local;
        MSE_e_elem(i) = 0.5 * phi_e_local' * ke_s * phi_e_local;
    end

    % Calcul des énergies totales de la structure pour le mode m
    MSE_s_totale = sum(MSE_s_elem);
    MSE_e_totale = sum(MSE_e_elem);

    % Fractions d'énergie (F_MSE)
    F_MSE_sain(:, m) = MSE_s_elem / MSE_s_totale;
    F_MSE_endo(:, m) = MSE_e_elem / MSE_e_totale;
end

% Indicateur de dommage basé sur les fractions (F_MSE)
DI_F_MSE = sum(F_MSE_endo, 2) ./ sum(F_MSE_sain, 2);
DI_F_MSE_norm = (DI_F_MSE - mean(DI_F_MSE)) / std(DI_F_MSE); % Z-
score

```

%% 8. Saisie de l'Élément à Afficher Graphiquement (Interaction 2)

```
fprintf('\n-----\n');
fprintf('VISUALISATION DES RÉSULTATS\n');
elem_graphe = input(sprintf('Entrez le numéro de l'élément à afficher sur les
graphes (1 à %d) : ', ne));
if isempty(elem_graphe) || elem_graphe < 1 || elem_graphe > ne, elem_graphe =
ne; end
d_graphe = 2 * (elem_graphe + 1) - 1;
```

%% 9. Stockage dans la structure Resultats

```
Resultats.x = x; Resultats.t = t; Resultats.f_axe = f_axe;
Resultats.f_sain = f_sain; Resultats.f_endo = f_endo;
Resultats.U_temp_sain = U_temp_sain; Resultats.U_temp_endo =
U_temp_endo;
Resultats.FFT_sain = FFT_sain; Resultats.FFT_endo = FFT_endo;
Resultats.F_MSE_Damage_Index = DI_F_MSE_norm;
```

%% 10. Graphiques de Synthèse

```
figure('Color', 'w', 'Position', [50, 50, 1000, 750]);
```

% --- Graphe 1 : Temporel ---

```
subplot(3,1,1);
plot(t, U_temp_sain(d_graphe, :)*1000, 'b-', t, U_temp_endo(d_graphe, :)*1000,
'r--', 'LineWidth', 1.5);
title(sprintf('Réponse Temporelle (Élément observé : %d | Élément excité : %d)',
elem_graphe, elem_force));
ylabel('Déplacement (mm)'); grid on; legend('Sain','Endo');
```

```
% --- Graphe 2 : FFT ---
subplot(3,1,2);
semilogy(f_axe, FFT_sain(d_graphe, :), 'b-', f_axe, FFT_endo(d_graphe, :), 'r--',
'LineWidth', 1.5);
title(sprintf('Spectre FFT (Élément observé : %d)', elem_graphe));
ylabel('Magnitude'); xlim([0 max(f_sain(3))*1.3]); grid on;

% --- Graphe 3 : Localisation F_MSE ---
subplot(3,1,3);
bar(1:ne, DI_F_MSE_norm, 'FaceColor', [0.1 0.5 0.8]); hold on;
plot([0 ne+1], [1.1 1.1], 'r--', 'LineWidth', 1.5); % Seuil statistique
title('Localisation par Fraction d'Énergie de Déformation Modale (F\MSE)');
xlabel('Numéro de l'Élément'); ylabel('Indicateur (Z-score)');
xlim([0.5 ne+0.5]); grid on;

end

% --- Sous-fonction interne ---
function [V, f] = resoudre_et_normaliser(K_r, M_r, ndof, ddl_l)
    [V_r, D] = eig(K_r, M_r); [val, idx] = sort(diag(D)); f = sqrt(val) / (2*pi);
    V = zeros(ndof, length(ddl_l)); V(ddl_l, :) = V_r(:, idx);
    for i = 1:size(V,2)
        V(:, i) = V(:, i) / sqrt(V(ddl_l, i)' * M_r * V(ddl_l, i));
    end
end
```