



RÉPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE



UNIVERSITE AKLI MOHAND OULHADJ – BOUIRA
FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE MECANIQUE

Projet de Fin d'Etudes
Pour l'obtention du Diplôme de
Master en Construction Mécanique

Thème

*Torsion axisymétrique d'un bi-matériau élastique avec inclusion
interfaciale soumise à des disques rigides*

Proposé et encadré par :

DR. MADANI Fateh

Réalisé par :

ZIANE Amar Amir
KADDOURCHERIF Walid

Année universitaire 2025/2026

Remerciements

Au terme de ce travail, nous remercions Dieu Tout-Puissant de nous avoir accordé la réussite pour le mener à bien.

Nous adressons nos sincères remerciements à notre encadreur, Monsieur F. Madani, pour ses orientations précieuses et son suivi constant, qui ont grandement contribué à l'aboutissement de ce travail.

Nous exprimons également notre gratitude aux membres du jury pour avoir accepté d'examiner ce travail et pour l'intérêt qu'ils lui portent.

Enfin, nous tenons à remercier toutes les personnes ayant contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail.

Résumé

Dans ce travail, nous étudions le problème de la torsion axisymétrique d'un bi-matériau élastique contenant une inclusion interfaciale soumise à l'action de disques rigides circulaires. La formulation du problème est basée sur la théorie linéaire de l'élasticité en tenant compte des conditions aux limites et des conditions de continuité à l'interface entre les deux matériaux.

À l'aide de la transformation intégrale de Hankel et des propriétés des fonctions de Bessel, le problème aux limites mixtes est réduit à un système d'équations intégrales duales, puis transformé en équations intégrales de Fredholm de seconde espèce.

Une méthode numérique basée sur les formules de quadrature est ensuite utilisée pour transformer le système obtenu en un système d'équations algébriques linéaires. Cette approche permet de déterminer les déplacements, les contraintes et d'analyser l'influence des paramètres géométriques et mécaniques du bi-matériau sur le comportement en torsion de la structure.

Mots-clés :

Bi-matériau élastique, torsion axisymétrique, inclusion interfaciale, transformation de Hankel, fonctions de Bessel, équations intégrales duales, équations de Fredholm.

Abstract

In this work, we investigate the problem of axisymmetric torsion in an elastic bimaterial containing an interfacial inclusion subjected to circular rigid disks. The problem is formulated within the framework of the linear theory of elasticity while taking into account the boundary conditions and continuity conditions at the interface between the two materials.

By using the Hankel integral transform and the properties of Bessel functions, the mixed boundary value problem is reduced to a system of dual integral equations, which is then transformed into Fredholm integral equations of the second kind.

A numerical method based on quadrature formulas is subsequently employed to convert the resulting system into a system of linear algebraic equations. This approach makes it possible to determine the displacement and stress fields and to analyze the influence of the geometric and mechanical parameters of the bimaterial on the torsional behavior of the structure.

Keywords :

elastic bimaterial, axisymmetric torsion, interfacial inclusion, Hankel transform, Bessel functions, dual integral equations, Fredholm integral equations.

الملخص:

في هذا العمل، ندرس مشكلة الالتواء المحوري لمتوسط مرن ثنائي المادة يحتوي على حشوة بينية خاضع لتأثير أقرص صلبة دائرية. تم اعتماد نظرية المرونة الخطية لصياغة المشكلة مع مراعاة شروط الحدود وشروط الاستمرارية عند الواجهة الفاصلة بين المادتين.

باستخدام تحويل هانكل التكاملي وخصائص دوال بيسل، تم تحويل مسألة القيم الحدية المختلطة الى نظام من المعادلات التكاملية المزدوجة، ثم الى معادلات فريدهولم التكاملية من النوع الثاني.

بعد ذلك، تم اعتماد طريقة عددية قائمة على قواعد التربيع لتحويل النظام الى نظام من المعادلات الجبرية الخطية، مما يسمح بحساب الإزاحات والاجهادات وتحليل تأثير الخصائص الهندسية والميكانيكية للوسط ثنائي المادة على سلوك الالتوائي

الكلمات المفتاحية:

وسط مرن ثنائي المادة، الالتواء المحوري، الحشوة البينية، تحويل هانكل، دوال بيسل، المعادلات التكاملية المزدوجة، معادلات فريدهولم

Table des matières

Introduction générale.....	1
----------------------------	---

I Rappels sur l'élasticité

I.1	Introduction.....	6
I.2	Générale sur la mécanique de milieu continue	7
I.3	Domaines d'Étude Principaux	7
I.4	Domaines d'applications.....	8
I.5	Quelques définitions	8
I.6	Elasticité linéaire.....	9
	I.6.1 Module de Young	9
	I.6.2 Coefficient de Poisson	9
	I.6.3 Module de Coulomb	9
	I.6.4 Relations entre les modules.....	10
I.7	Les équations de l'élasticité.....	10
	I.7.1 La loi de Hooke.....	10
	I.7.2 Équations supplémentaires	10
	I.7.3 Élasticité tridimensionnelle en coordonnées cylindriques	11
I.8	Notion de mécanique de rupture	13
	I.8.1 Définition de la fatigue	13
	I.8.2 La rupture fragile	13
	I.8.3 La rupture ductile	14
	I.8.4 Définition d'une fissure.....	14

II Rappels mathématique

II.1	Introduction.....	17
	II.1.1 Définitions	17
	II.1.2 Équations de Fredholm	17
	II.1.3 Equations de Volterra	18

II.2 Équation intégrale d'Abel	18
II.3 Équation de Bessel.....	19
II.3.1 Fonction de Bessel de première espèce	19
II.3.2 Fonction de Bessel de seconde espèce.....	20
II.4 Transformée de Hankel.....	21
II.5 Méthodes d'intégration numérique	21
II.5.1 Méthode des trapèzes.....	22
II.5.2 Méthode de Simpson	22

III Résolution du problème

III.1 Introduction.....	24
III.2 Équations de base du problème.....	24
III.3 Conditions aux limites et conditions de continuité	25
III.4 Transformation des équations intégrale duales en un système algébrique linéaire et infini..	27
III.4.1 Introduction des Fonctions Auxiliaires (méthode Copson-Senddon)	27
III.4.2 Simplification par la Forme Explicite de $J_{1/2}$:.....	29
III.4.3 Transformation des Noyaux de Bessel J_1 en Noyaux Trigonométriques	29
III.4.4 Obtention des Équations de Fredholm de Seconde Espèce.....	31
III.5 Formulation Adimensionnelle du problème	33
III.5.1 Changement de variables et adimensionnement.....	33
III.5.2 Noyaux adimensionnels régularisés	33
III.5.3 Système de Fredholm final :.....	34
III.6 Conditions supplémentaires et quantités physiques.....	34
III.7 Vérification Asymptotique.....	35
III.8 Structure de transformation de système dual	35
III.9 Algorithme de Détermination de l'Inconnu ω_0	36
III.10 Note sur l'Intégration Numérique.....	36
III.11 Résolution numérique	37
III.11.1 Discrétisation par méthode de collocation	37
III.11.2 Calcul des noyaux	37

III.11.3 Traitement du rapport ω/ω_0 inconnu	39
III.11.4 Calcul du moment réel	41
III.12 Facteur d'intensité de contrainte :	41
III.13 Convergence et validation.....	44
III.13.1 FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE :	45
III.14 Vérification et validation	49
III.14.1 Validation par éléments finis	49
III.14.2 Etapes de la modélisation numérique	50
Lancement de la résolution :	53
III.15 Conclusion	59
Conclusion Générale.....	60

Introduction générale

Figure 1 : Problème de Dhawan	2
Figure 2 : Problème de Pak	3
Figure 3 : Problèmes de Madani et Kebli.....	4

I. Rappels sur l'élasticité

Figure I.1 : Domaines de la mécanique des milieux continus.....	7
Figure I.2 : Courbe rupture fragile.	13
Figure I.3 : Courbe rupture fragile.	14
Figure I.4 : Les différents modes de fissure.....	15

II. Rappels mathématique

Figure II.1 : Graphe de la fonction e Bessel de première espèce.....	19
Figure II.2 : Graphe de la fonction de Bessel de seconde espèce.	20
Figure II.3 : Méthode des trapèzes.....	22
Figure II.4 : Méthode de Simpson.	23

III. Résolution du problème

Figure III.1 : Configuration géométrique du problème de torsion axisymétrique d'un bi-matériau contenant une inclusion interfaciale circulaire et un disque rigide.....	25
Figure III.2 Facteur d'intensité de contrainte aux niveaux de l'inclusion	45
Figure III.3 : facteur d'intensité de contrainte aux niveaux de disque.....	46
Figure III.4 : la rotation relative normalisée	47
Figure III.5 : la rotation relative en fonction des paramètres géométriques	47
Figure III.6 : la rotation relative en fonction de rapport de rigidité	48
Figure III.7 : comparaison de rigidité	49
Figure III.8 : Les mailles éléments finis du demi-espace dans la simulation numérique des points de vue global (gauche) et local (droit).	50
Figure III.9 : Géométrie du modèle tridimensionnel étudié.	51
Figure III.10 : Maillage du modèle par éléments finis.	51
Figure III.11 : Raffinement local du maillage au voisinage de l'inclusion.	52
Figure III.12 : Conditions aux limites appliquées.	52
Figure III.13 : Champ de déplacement.	53
Figure III.14 : Champ de déplacement au niveau de disque.....	53
Figure III.15 : Champ de déplacement au niveau de l'inclusion.	54
Figure III.16 : comparaison entre le déplacement de disque et de l'inclusion.	54
Figure III.17 : Champ de déplacement par l'isolation des surfaces.....	55
Figure III.18 : Contrainte de cisaillement.....	55
Figure III.19 : Agrandissement du champ de contraintes au voisinage de l'inclusion.	56
Figure III.20 : Contrainte de cisaillement au niveau de disque.	56
Figure III.21 : Contrainte de cisaillement au niveau de l'inclusion.....	57
Figure III.22 : Contrainte de cisaillement au niveau de disque et de l'inclusion par l'isolation des autres volumes.....	57
Figure III.23 : Facteurs d'intensité de contrainte en mode III.	58

I. Rappels sur l'élasticité

Tableau I.1 : Relations entre les modules d'élasticité.....	10
--	----

III. Résolution du problème

Tableau III.1 : Convergence de la densité de contrainte $\phi(1)$ et de la rotation relative ω/ω_0	44
--	----

Introduction général

Introduction générale

L'analyse du comportement mécanique des inclusions circulaires rigides ancrées dans des milieux élastiques représente une problématique centrale en géomécanique, en génie civil et en mécanique appliquée. L'intérêt pour ce domaine est motivé par la richesse de ses applications, aussi bien théoriques qu'industrielles, touchant notamment la conception des disques de turbines, des conduites cylindriques et de divers composants mécaniques. Ces travaux contribuent également à l'amélioration de notre compréhension du comportement des structures de fondation soumises à des chargements extérieurs.

Dans le contexte de l'ingénierie des fondations, les problèmes d'interaction entre le sol et la structure conduisent fréquemment à modéliser les fondations par des inclusions de formes variées : circulaire, rectangulaire, en bande ou à géométrie quelconque. Par ailleurs, les matériaux composites tiennent aujourd'hui une position inévitable dans les domaines de la géomécanique et de l'ingénierie moderne, en raison notamment de leur vulnérabilité à divers types de défauts internes comme les fissures et les déformations locales.

En outre, plusieurs applications industrielles nécessitent l'analyse des contraintes dans des corps tridimensionnels présentant une symétrie axiale de géométrie et de chargement. Ce type d'étude apparaît dans des composants mécaniques comme les disques de turbines, les disques d'imprimantes, les arbres mécaniques, les tubes et d'autres éléments axisymétriques. En ingénierie, ces analyses trouvent également des applications dans le domaine des fondations profondes, des essais géotechniques in situ, ainsi que dans la mécanique des composites pour l'étude du transfert des charges mécaniques et la conception des structures

La question de la torsion exercée par une inclusion rigide profondément intégrée dans un milieu élastique infini a été traitée par Selvadurai [2,3], dont l'analyse repose sur les rigidités en rotation et en translation du disque enfoui. Le problème de torsion d'un demi-espace élastique a été abordé initialement par Reissner et Sagoci [4], qui ont analysé l'interaction statique entre un disque rigide et un demi-espace isotrope, parvenant à une solution exprimée en coordonnées sphéroïdales. Sneddon [5] a repris ce problème en recourant aux transformées de Hankel pour le ramener à un système d'équations intégrales duales. Collins [6] a quant à lui considéré la distribution de sources de déplacement sur la zone de contact entre le disque et la surface libre pour formuler la solution du problème de torsion. Gladwell [7] a donné la solution du problème des vibrations de torsion forcées d'une couche élastique d'épaisseur finie avec différentes conditions aux limites inférieures. Une formulation analytique complète du problème général de torsion d'un disque rigide noyé dans un demi-espace isotrope a été établie par Pak et Saphores [8]. Bacci et Bennati [9] ont étudié le cas d'un disque rigide circulaire en contact avec la surface supérieure d'une couche élastique reposant sur un support indéformable. Plus récemment, Singh et coll. [10] ont traité la rotation d'une portion circulaire de la surface d'un demi-espace isotrope non homogène, tandis que Cai et Zue [11] ont analysé les oscillations de torsion d'un disque attaché à un milieu poro-élastique multicouche. Yu [12] s'est intéressé aux vibrations de torsion forcées au sein d'un solide multicouche en utilisant la fonction de Green élastodynamique et une approche par charges ponctuelles

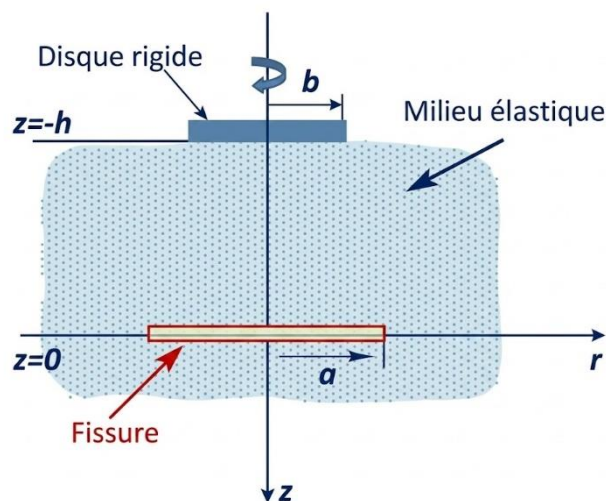


Figure 1 : Problème de Dhawan

Yu [12] a étudié les oscillations de torsion forcées à l'intérieur du solide multicouche. La fonction élastodynamique de Green du centre de rotation et une méthode de charge ponctuelle ont été utilisées pour résoudre le problème.

Pal et Mandal [13] ont étudié les oscillations de torsion forcées dans un demi-espace élastique transversalement isotrope soumis à l'action d'un disque intérieur rigide. Un cas analogue impliquant une rotation bascule a été résolu ultérieurement par Ahmadi et Eskandari [14] en s'appuyant sur une fonction de Green adaptée pour reformuler le problème aux limites mixtes sous la forme d'une équation intégrale double. L'ensemble de ces approches repose sur l'utilisation de la transformée intégrale de Hankel pour convertir le problème aux limites mixtes en un système d'équations intégrales duales, dont la résolution conduit à une équation intégrale de type Fredholm

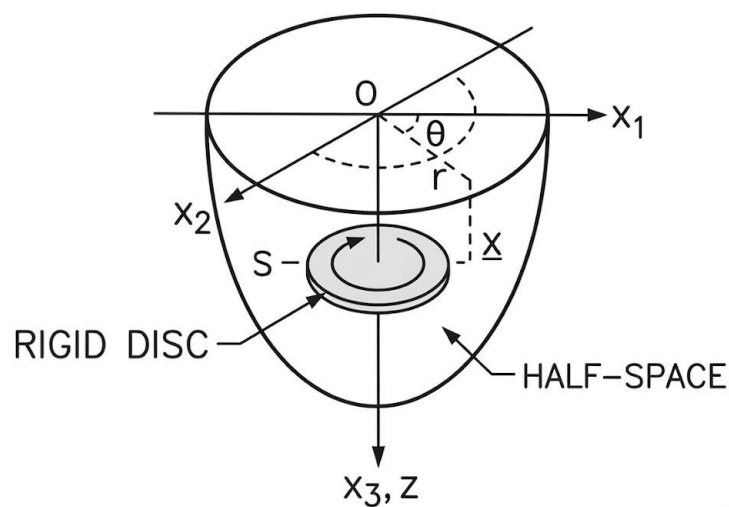


Figure 2 : Problème de Pak

La problématique de la torsion dans les couches élastiques présentant des fissures circulaires a également été abordée par plusieurs auteurs. Sih et Chen [15] ont examiné le cas d'une fissure circulaire dans un composite stratifié soumis à une contrainte de torsion uniforme, en déterminant les champs mécaniques par résolution d'une équation intégrale de Fredholm de seconde espèce. Low [16] a traité les effets de défauts enfouis, qu'il s'agisse d'une inclusion ou d'une fissure, dans un demi-espace élastique soumis à des déformations torsionnelles, en résolvant numériquement les équations intégrales de Fredholm correspondantes par une méthode de quadrature. Dhawan [17] a utilisé la même approche pour traiter le problème d'un disque rigide fixé à un demi-espace élastique contenant une fissure interne.

En utilisant les transformées de Hankel et Laplace et en prenant l'inversion numérique de la transformée de Laplace, Basu et Mandal [18] ont traité la charge de torsion sur une fissure en forme de penny dans une couche élastique prise en sandwich entre deux demi-espaces élastiques.

Des approches méthodologiques similaires ont été largement développées dans la littérature pour traiter des problèmes de torsion axisymétrique dans des milieux homogènes ou hétérogènes. En particulier, Madani et Kebli [19] ont étudié la torsion axisymétrique d'un milieu élastique fissuré par deux disques rigides encastrés. Ce type de problème a été étendu aux milieux multicouches, notamment à travers l'étude du problème de Reissner-Sagoci pour une fissure interfaciale dans un milieu bicouche sous la torsion d'un disque circulaire rigide encastré [40]. De plus, le cas d'une couche élastique prise en sandwich entre deux demi-espaces élastiques contenant deux fissures interfaciales a également été examiné sous torsion axisymétrique [41]. Récemment, des configurations encore plus proches de notre étude ont été abordées par Madani et al [42, 43], notamment le problème de la torsion axisymétrique d'un disque rigide parallèle à une fissure interne en forme de penny située à l'interface d'un milieu bicouche [42], ainsi que l'impact d'une charge de torsion soudaine appliquée à un disque rigide parallèle à une fissure interne en forme de penny dans un milieu élastique fini [43]. Ces travaux démontrent l'efficacité de la formulation par équations intégrales duales couplée à la méthode de Copson-Sneddon pour résoudre ce type de géométries complexes

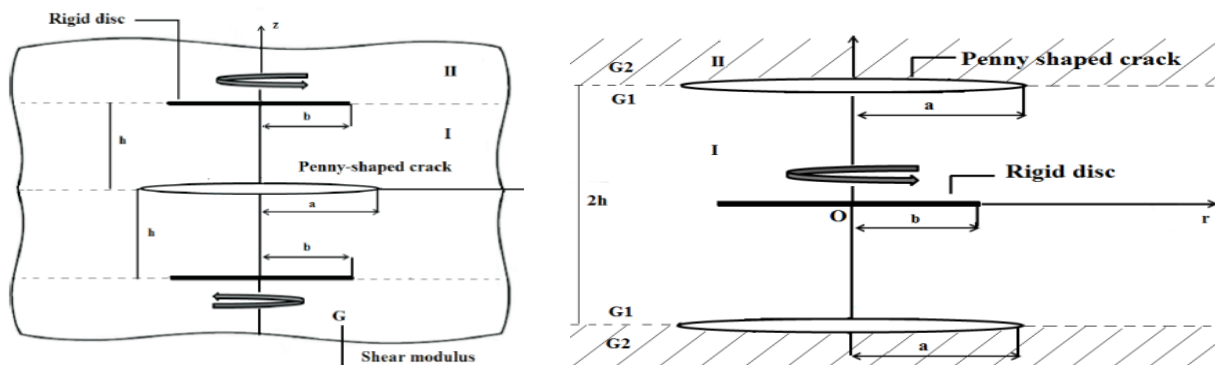


Figure 4 : Problèmes de Madani et Kebli

Le plan de ce travail est le suivant Dans le chapitre 2, nous avons donné un bref aperçu sur la mécanique des milieux continus et la théorie linéaire de l'élasticité en se concentrant sur la dérivation des équations de base qui sont utiles pour formuler un problème de valeur limite en élasticité linéaire. Ainsi, une présentation de quelques notions sur la mécanique de la rupture, en particulier les concepts de modes de rupture et facteurs d'intensité de contrainte. Le chapitre 3 est consacré à quelques rappels mathématiques sur les fonctions de Bessel et certaines de leurs propriétés, les équations intégrales de Fredholm et la transformation de Hankel. Quelques formules de quadrature pour la résolution numérique des équations intégrales de Fredholm sont également présentées. Le quatrième chapitre comprend la résolution du problème proposé. Ce problème concerne une inclusion interfaciale à l'intérieur d'un matériau élastique homogène

dans le plan de symétrie, sous une torsion axisymétrique par un disque rigide circulaire attaché symétriquement à la surface. Le disque tourne avec un angle dans une même direction autour de l'axe passant par leur centre. Le milieu est affaibli par une inclusion interfaciale située parallèlement au plan du disque.

Chapitre I

Rappels sur l'élasticité

I.1 Introduction

Dans le domaine du génie mécanique, l'étude du comportement des matériaux sous l'effet des sollicitations mécaniques constitue une étape fondamentale pour la compréhension et la modélisation des structures. Dans ce contexte, la mécanique des milieux continus offre un cadre théorique général permettant de décrire le comportement des solides et des fluides en considérant la matière comme un milieu continu, indépendamment de sa structure microscopique.

Parmi les différentes branches de cette discipline, l'élasticité linéaire occupe une place essentielle, notamment pour l'analyse des petites déformations, où la relation entre contraintes et déformations est supposée linéaire. Cette hypothèse simplificatrice permet d'établir des modèles mathématiques rigoureux décrivant le comportement mécanique des matériaux.

Dans ce cadre, les équations fondamentales de l'élasticité, en particulier celles formulées par la méthode de Navier, jouent un rôle central dans la résolution des problèmes aux limites. Elles permettent de déterminer les champs de déplacement, de déformation et de contrainte dans les milieux élastiques soumis à diverses sollicitations.

L'intérêt de cette étude se manifeste particulièrement dans l'analyse des structures complexes telles que les systèmes multi-matériaux. En effet, le cas de la torsion axisymétrique d'un bi-matériau élastique avec inclusion interfaciale soumise à des disques rigides représente un problème avancé, mettant en jeu des interactions mécaniques à l'interface de matériaux de propriétés différentes.

Enfin, afin de compléter cette étude, il est indispensable d'introduire les notions de mécanique de la rupture, qui permettent d'analyser l'initiation et la propagation des fissures dans les matériaux, et ainsi d'évaluer leur résistance et leur durabilité.

Ce chapitre a donc pour objectif de présenter les bases théoriques nécessaires à la compréhension de ces phénomènes, en abordant successivement les généralités sur la mécanique des milieux continus, l'élasticité linéaire, les équations fondamentales de l'élasticité, ainsi que les notions de mécanique de la rupture.

I.2 Générale sur la mécanique des milieux continus

La mécanique des milieux continus est une branche de la mécanique dédiée à l'étude des mouvements des corps déformables, qu'il s'agisse de gaz, de liquides ou de solides, en s'appuyant sur les principes et méthodes de la mécanique rationnelle. Elle s'intéresse aux corps matériels qui occupent l'espace de manière continue et homogène, dont les points varient de position lors du mouvement.

L'hypothèse des milieux continus consiste à supposer que les propriétés caractéristiques des milieux, telles que la densité, l'élasticité, etc., varient de manière continue. Cette hypothèse permet d'utiliser des outils mathématiques basés sur des fonctions continues et/ou dérivables.

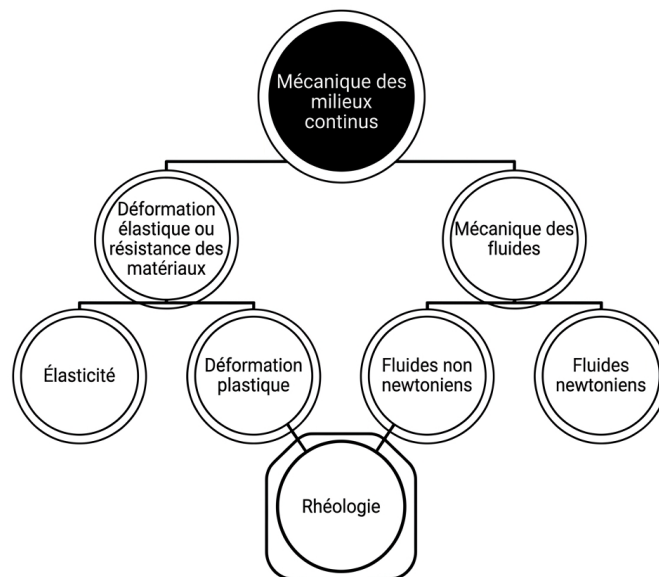


Figure I.1: Domaines de la mécanique des milieux continus.

I.3 Domaines d'Étude Principaux

La MMC se divise traditionnellement en plusieurs domaines d'étude, chacun se concentrant sur des aspects spécifiques du comportement des milieux continus :

- **Cinématique des Milieux Continus** : Ce domaine décrit le mouvement et la déformation des milieux sans prendre en compte les forces qui en sont la cause. Il s'intéresse aux concepts de déplacement, de vitesse, d'accélération et aux différentes mesures de déformation (tenseurs de déformation) [1].
- **Dynamique et Statique des Milieux Continus** : Cette partie étudie les relations entre les forces (internes et externes) et le mouvement ou l'équilibre des milieux. Elle introduit les notions de contraintes (tenseurs de contraintes) et applique les principes fondamentaux de la dynamique pour établir les équations du mouvement [1].

- **Lois de Comportement (ou Constitutives) :** Ces lois décrivent la réponse spécifique d'un matériau aux sollicitations mécaniques. Elles établissent une relation entre les contraintes et les déformations (ou leurs taux de variation). Les lois de comportement varient considérablement selon le type de matériau (élastique, visqueux, plastique)

I.4 Domaines d'applications

La Mécanique des Milieux Continus trouve des applications dans une multitude de domaines de l'ingénierie et des sciences, notamment :

- **Génie Civil :** Conception et analyse de structures (ponts, bâtiments, barrages), étude des sols et des roches.
- **Aéronautique et Automobile :** Conception de pièces résistantes, étude des écoulements aérodynamiques, crash tests.
- **Biomécanique :** Modélisation du comportement des tissus biologiques (os, muscles, vaisseaux sanguins), conception de prothèses.
- **Géophysique :** Étude des mouvements de la croûte terrestre, des déformations sismiques, de la dynamique des fluides géologiques.
- **Ingénierie des Matériaux :** Développement de nouveaux matériaux avec des propriétés mécaniques spécifiques, analyse de leur comportement sous diverses contraintes.

En résumé, la MMC fournit un cadre théorique et mathématique puissant pour comprendre et prédire le comportement des matériaux sous diverses sollicitations, jouant un rôle indispensable dans la conception et l'innovation technologique.

I.5 Quelques définitions

- **Continuité du milieu :** un milieu continu est un milieu dans lequel les propriétés physiques varient de manière continue d'un point à un autre. Par exemple, la masse m est une fonction continue des variables x , y , z , et t , à l'exception de certains points, lignes ou surfaces (appelés singularités).
- **Un matériau homogène :** est un matériau dont ses propriétés sont les mêmes en tout point.
- **Un matériau isotrope :** est un matériau dont ses propriétés ne dépendent pas du repère dans lequel elles sont observées ou mesurées.
- **La mécanique des solides déformables :** est une sous-discipline de la mécanique des milieux continus qui analyse le comportement des matériaux solides, notamment leurs déplacements et déformations sous l'effet de forces, de variations de température, de changements de phase ou d'autres influences internes ou externes.

I.6 Elasticité linéaire

I.6.1 Module de Young

Le module de Young est une constante élastique qui établit, pour un matériau homogène et isotrope, la relation entre la contrainte appliquée et la déformation produite. Introduit par Young vers 1800, ce paramètre est défini par la relation suivante :

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \quad (1)$$

Le coefficient représente la rigidité du matériau. Ainsi, sous une même contrainte, un matériau possédant un module d'élasticité élevé présente une déformation plus faible qu'un matériau caractérisé par un module d'élasticité réduit. Le module de Young E possède la dimension d'une contrainte et s'exprime généralement en GPa.

I.6.2 Coefficient de Poisson

Le Coefficient de Poisson ν est un nombre sans dimension compris dans l'intervalle $\{0; 1/2\}$,

Nous pouvons le définir par le coefficient positif de la proportion entre l'allongement ε_1 dans la direction de traction et le raccourcissement ε_2 dans les directions perpendiculaires.

$$\nu = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad (2)$$

Il faut noter que dans le cas de la plupart des matériaux isotropes continus le coefficient de Poisson est compris dans l'intervalle $\{0.25; 0.35\}$.

I.6.3 Module de Coulomb

Le module de Coulomb G ou parfois dit le module de cisaillement est défini par la proportion entre le glissement γ et le cisaillement appliqué τ .

$$G = \frac{\gamma}{\tau} \quad (3)$$

Le module de Coulomb a la dimension d'une contrainte et se mesure généralement en GPa. Il représente le cisaillement qu'il faudrait appliquer pour obtenir un glissement d'un radian.

I.6.4 Relations entre les modules

Module	Symbole	Équivalence
Coefficient de Lamé ou module de Coulomb	μ, G	$\frac{E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$
Deuxième coefficient de Lamé	λ	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$
Coefficient de Poisson	ν	$\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$
Module de Young	E	$\frac{\nu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda = \nu}$

Tableau I.1 : Relations entre les modules d'élasticité.

I.7 Les équations de l'élasticité

La résolution d'un problème d'élasticité consiste à déterminer un champ de déplacements ainsi qu'un champ de contraintes satisfaisant les équations d'équilibre ou du mouvement.

I.7.1 La loi de Hooke

La relation reliant les composantes du tenseur des contraintes à celles du tenseur des déformations a été déterminée de manière expérimentale et est connue sous le nom de loi de Hooke. Considérons un élément cubique soumis à des contraintes normales uniformément distribuées sur ses faces. Les essais expérimentaux ont montré que, pour un matériau isotrope, ces contraintes normales n'engendrent aucune distorsion angulaire de l'élément et s'expriment par la relation suivante :

$$\sigma = E\varepsilon \quad (4)$$

Où E est le module de Young et σ est la contrainte. Cette loi peut aussi être donnée sous forme indicielle comme suit :

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (5)$$

Où E est le module de Young et ν le coefficient de Poisson

I.7.2 Équations supplémentaires

La loi de Hooke fournit un nombre suffisant d'équations pour résoudre un problème d'élasticité. Toutefois, il est souvent avantageux d'utiliser des relations complémentaires exprimant les lois physiques sous une forme différente. Parmi ces formulations supplémentaires figurent notamment les équations de Navier et de Beltrami.

L'équation de Navier

Ces dernières ne sont en fait que la traduction des équations d'équilibre en termes de déplacement. Pour cela on utilise à la fois la loi de comportement et les relations déformations– déplacements.

$$\mu \Delta(\vec{u}) + (\mu + \lambda) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0} \quad (6)$$

$$(\lambda + 2\mu) \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div}(\vec{u})) - \mu \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{u})) + \vec{f} = \vec{0} \quad (7)$$

Équations de Beltrami

Lorsqu'on cherche à résoudre un problème en contraintes sans déterminer au préalable les champs de déplacements et de déformations, on adopte une approche dite « inverse ». Dans ce cas, outre la vérification des équations d'équilibre, il est nécessaire de s'assurer que l'état de contrainte obtenu engendre, à travers la loi de comportement, un état de déformation compatible avec l'existence d'un champ de déplacements.

$$\sigma_{ij} + \frac{1}{1 + \nu} \sigma_{kk} = 0 \quad (8)$$

Cette équation est appelée équation de Beltrami simplifiée, elle traduit les équations de compatibilité pour les contraintes dans le cas où les forces de volume sont nulles.

I.7.3 Élasticité tridimensionnelle en coordonnées cylindriques

Pour un solide décrit dans un système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) les relations reliant les composantes des tenseurs de déformation, de déplacement et de contrainte peuvent être exprimées comme suit : u_r, u_θ, u_z sont les composantes du déplacement, $\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}, \gamma_{r\theta}$ sont les composantes du tenseur déformation, et $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}, \tau_{rz}, \tau_{r\theta}$ sont les composantes de la contrainte [22].

Déformation - déplacement

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (9)$$

$$2\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \quad (10)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial \theta} + u_r \right) \quad (11)$$

$$2\gamma_{\theta z} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} \quad (12)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (13)$$

$$2\gamma_{zr} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \quad (14)$$

Contrainte – déformation

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_r + \nu(\varepsilon_{\theta} + \varepsilon_z)] \quad (15)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{\theta} + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_z)] \quad (16)$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_r + \varepsilon_{\theta})] \quad (17)$$

Contrainte tangentielle – déplacement

$$\tau_{r\theta} = G \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_{\theta}}{r} \right) \quad (18)$$

$$\tau_{\theta z} = G \left(\frac{\partial u_{\theta}}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \quad (19)$$

$$\tau_{rz} = G \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (20)$$

I.8 Notion de mécanique de rupture

La mécanique de la rupture est une discipline de la mécanique des matériaux qui étudie le comportement des corps contenant des fissures et vise à prévoir les conditions d'initiation et de propagation de ces fissures jusqu'à la rupture.

I.8.1 Définition de la fatigue

La fatigue des matériaux est le phénomène de dégradation progressive d'un matériau soumis à des chargements cycliques, conduisant à la formation et à la propagation de fissures, puis à la rupture, même lorsque les contraintes sont inférieures à la limite élastique

Le phénomène de fatigue est souvent caractérisé par :

- Les courbes S-N (Wöhler)
- La durée de vie en nombre de cycles
- Le seuil de propagation des fissures

Type de rupture

Il existe deux types principaux de rupture qui sont la rupture fragile et ductile

I.8.2 La rupture fragile

La rupture fragile se caractérise par une fracture qui se produit sans apparition de déformation plastique, ou avec une déformation plastique très limitée. Ainsi, la déformation observée avant la rupture reste principalement de nature élastique. L'énergie absorbée lors de la rupture, correspondant à l'aire située sous la courbe contrainte-déformation obtenue à partir d'un essai de traction, demeure faible.,

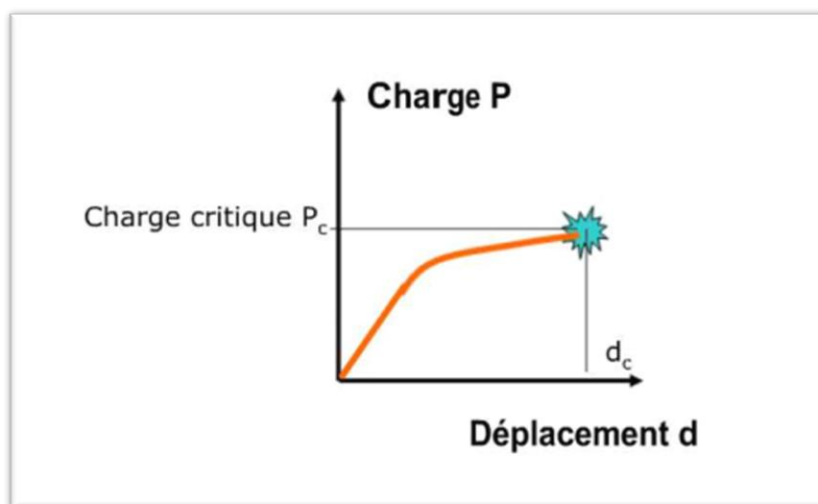


Figure I.2: Courbe rupture fragile.

I.8.3 La rupture ductile

La rupture ductile se distingue par l'apparition d'une importante déformation plastique après le domaine élastique (figure (I.1)). Dans ce cas, l'énergie nécessaire à la rupture devient nettement plus importante. Ce type de rupture résulte de l'instabilité des grandes déformations locales qui se développent autour des défauts présents dans la structure cristalline. Au niveau de ces imperfections, les charges appliquées provoquent des concentrations de contraintes favorisant l'apparition de déformations plastiques élevées.

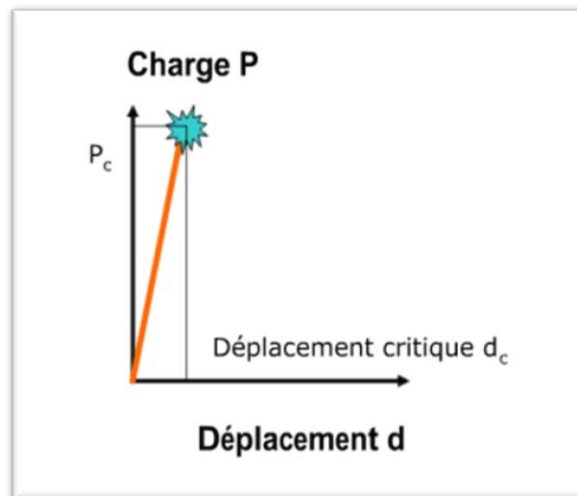


Figure I.3 : Courbe rupture ductile.

I.8.4 Définition d'une fissure

Une fissure correspond à une surface qui divise localement un matériau solide en deux parties distinctes. Au niveau de cette surface, le champ de déplacement présente une discontinuité, dont les trois composantes vectorielles définissent les trois modes de fissuration illustrés dans la figure :

- **Mode I** : mode d'ouverture de la fissure, caractérisé par des déplacements des lèvres de la fissure perpendiculaires à la direction de propagation,
- **Mode II** : mode de cisaillement plan, où les déplacements des lèvres de la fissure sont orientés parallèlement à la direction de propagation,
- **Mode III** : mode de cisaillement anti-plan, dans lequel les déplacements des lèvres de la fissure restent parallèles au front de fissure

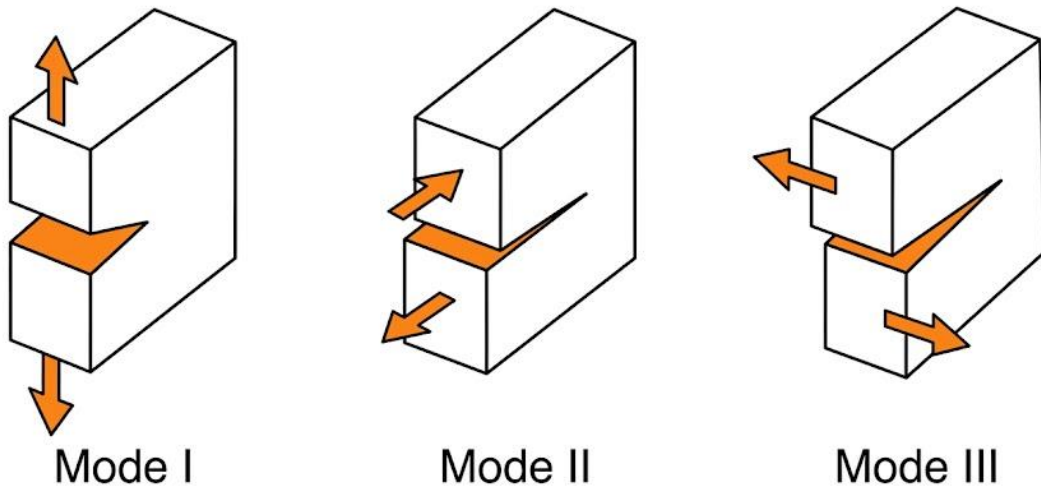


Figure I.4 : Les différents modes de fissure.

Le comportement à la rupture par fissuration dépend principalement de deux types de paramètres : mécaniques et métallurgiques.

Les premiers sont associés aux sollicitations subies par le matériau, telles que les contraintes, les déformations, les déplacements et les conditions thermiques.

Les seconds sont en relation avec les caractéristiques internes du matériau, comme les défauts métallurgiques, la taille des grains, la pureté et l'état de surface.

Conclusion

Ce chapitre a permis de présenter les notions essentielles ainsi que les principales relations associées à la mécanique de la rupture et à la théorie de l'élasticité, constituant ainsi une base nécessaire pour l'étude du problème considéré.

En se basant sur les équations de Navier et sur les lois de comportement du matériau, il est possible d'obtenir les relations reliant les champs de déplacements aux contraintes. De plus, le facteur d'intensité des contraintes sera évalué à partir des expressions liées au phénomène de propagation des fissures.

Chapitre II

Rappels mathématique

II.1 Introduction

II.1.1 Définitions

Une équation intégrale est un type d'équation où l'inconnue se trouve à l'intérieur de la fonction sous le signe d'intégration, c'est-à-dire dans l'expression que l'on intègre [24].

Exemple :

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (1)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (2)$$

Où φ est la fonction inconnue que l'on souhaite déterminer, f est le terme de source et K est appelé le noyau.

Nous pouvons classer les équations intégrales suivant les bornes d'intégrale en deux catégories :

Les équations intégrales dont les limites d'intégrale sont fixes, et ils sont appelés équations intégrales de Fredholm, (eq.1).

Les équations intégrales de Voltera où nous pouvons remarquer l'apparition d'un inconnu sur les bornes d'intégrale, (eq.2).

II.1.2 Équations de Fredholm

Étudiées pour la première fois par le mathématicien Erik Ivar Fredholm (1866– 1927), leur principale caractéristique est que les bornes d'intégration sont constantes.

Exemple :

$$f(x) = \int_a^b k(x, t)\varphi(t)dt \quad (3)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (4)$$

Les équations sont appelées équations de Fredholm de première espèce et de deuxième espèce respectivement. Dans la première équation, la fonction inconnue est introduite sous l'intégrale alors que dans la seconde équation, elle apparaît également à l'extérieur de l'intégrale [24].

II.1.3 Equations de Volterra

De manière analogue aux équations de Fredholm, les équations intégrales étudiées par le mathématicien italien Vito Volterra (1860–1940), et ont la forme :

$$f(x) = \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (5)$$

$$\varphi(x) = f(x) + \int_a^x k(x, t)\varphi(t)dt \quad (6)$$

Sont appelées équations de Volterra de première espèce et de deuxième espèce respectivement, contrairement aux équations de Fredholm ils ont un inconnu sur les bornes d'intégration. [24]

II.2 Équation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel a eu lieu comme l'une des premières équations intégrales de l'histoire des mathématiques, nous pouvons écrire sa forme générale d'après l'équation de Volterra suivante [24] :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[h(x) - h(t)]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < x < b \quad (7)$$

Si nous posons $h(\tau) = \tau^2$ dans, nous obtenons :

$$\int_a^x \frac{f(t)}{[x^2 - t^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b \quad (8)$$

Que l'on appelle l'équation intégrale d'Abel, dont la solution est de la forme :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\alpha} \frac{d}{dt} \left[\int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \quad a < t < b \quad (9)$$

Les équations ensemble sont connus par la transformation d'Abel intérieure.

Dans un autre cas, l'équation :

$$\int_x^b \frac{f(t)}{[t^2 - x^2]^\alpha} dt = g(x), \quad 0 < \alpha < 1, 0 < x < b \quad (10)$$

Et sa solution :

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\alpha)}{\pi} \frac{d}{dt} \left[\int_a^x \frac{\tau g(\tau)}{[t^2 - \tau^2]^{1-\alpha}} d\tau \right], \quad a < t < b \quad (11)$$

Sont connus par la transformation d'Abel extérieure.

II.3 Équation de Bessel

L'équation différentielle de second ordre donnée par :

$$r^2 \frac{dy^2}{dr^2} + r \frac{dy}{dr} + (r^2 - n^2)y = 0 \quad (12)$$

Est connu comme l'équation de Bessel, et la solution de cette équation donne les fonctions de Bessel de première et seconde espèce, comme suit [25] :

$$y(r) = C_1 J_n(r) + C_2 Y_n(r) \quad (13)$$

Où :

C_1 et C_2 sont des constantes arbitraires.

J_n et Y_n sont les fonctions de Bessel d'ordre n de première et seconde espèce respectivement.

II.3.1 Fonction de Bessel de première espèce

Les fonctions de Bessel de première espèce d'ordre n est obtenue à l'aide d'un développement en série de puissances, présenté sous la forme suivante [24] :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! \Gamma(n+k+1)} = \frac{1}{\Gamma(1+n)} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1(1+n)} \left(1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{2(2+n)} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{3(3+n)} (1 - \dots) \right) \quad (14)$$

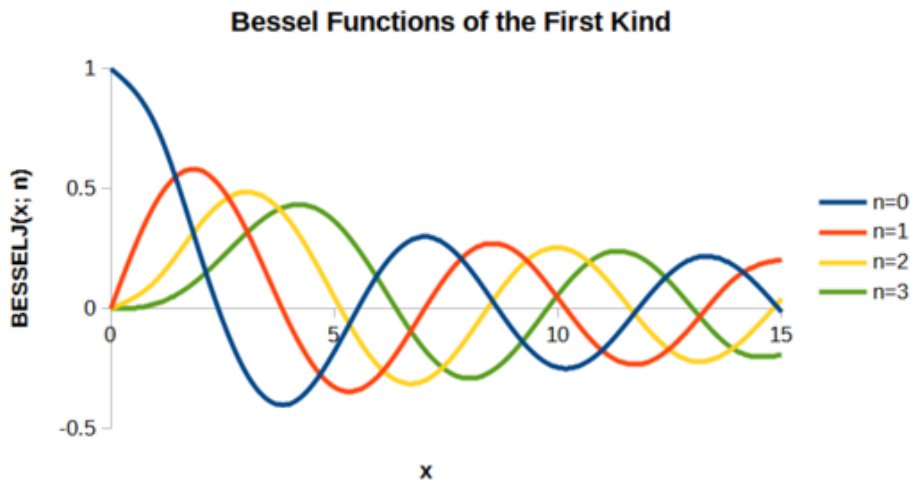


Figure II.1 : Graphe de la fonction e Bessel de première espèce.

Notons que $\Gamma(n + k + 1) = (n + k)!$, nous pouvons écrire :

$$J_n(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}}{k! (n+k)!} \quad (15)$$

Quelques propriétés de la fonction de Bessel de première espèce

$$J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} J_n(z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (16)$$

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), n = 1, 2, 3 \dots; J'_0(z) = -J_1(z) \quad (17)$$

$$\frac{d}{dz} [z^n J_n(z)] = z^n J_{n-1}(z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (18)$$

$$\frac{d}{dz} [z^{-n} J_n(z)] = -z^{-n} J_{n+1}(z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (19)$$

II.3.2 Fonction de Bessel de seconde espèce

La fonction de Bessel de seconde espèce $Y_n(x)$ et également appelée fonction de Weber ou fonction de Neumann (notée $N_n(x)$) est reliée à la fonction de Bessel de première espèce par la relation suivante [24] :

$$Y_n(x) = \frac{J_n(x) \cos(n\pi) - J_{-n}(x)}{\sin(n\pi)} \quad (20)$$

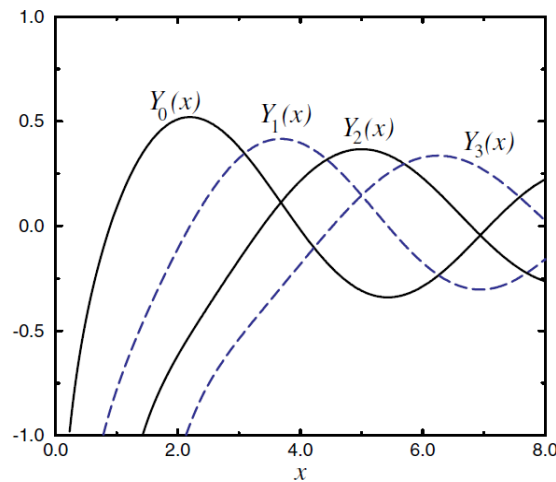


Figure II.2 : Graphe de la fonction de Bessel de seconde espèce.

Propriétés de la fonction de Bessel de seconde espèce :

$$Y_{n+1}(z) = \frac{2n}{z} Y_n(z) - Y_{n-1}(z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (21)$$

$$Y'_{n+1}(z) = \frac{1}{2} [Y_{n-1}(z) - Y_{n+1}(z)], n = 1, 2, 3 \dots \quad (22)$$

$$Y'_n(z) = Y_{n-1}(z) - \frac{n}{z} Y_n(z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (23)$$

$$Y'_n(z) = \frac{n}{z} Y_n(z) - Y_{n+1}(z), n = 1, 2, 3 \dots \quad (24)$$

II.4 Transformée de Hankel

La transformée de Hankel est une transformation intégrale introduite par le mathématicien Hermann Hankel. Elle est également connue sous le nom de transformée de Fourier-Bessel, puisqu'elle repose sur la transformée bidimensionnelle de Fourier. Cette transformation représente une fonction donnée (z) comme une combinaison pondérée d'une infinité de fonctions de Bessel $J_\nu(kz)$ de première espèce. Son expression est donnée par [26] :

$$F_\nu(k) = \int_0^\infty f(z) J_\nu(kz) z dz \quad (25)$$

Où F_ν c'est la fonction transformée et $J(kz)$ c'est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre ν avec $\nu \geq -1/2$.

Ainsi, la transformée inverse de Hankel $f(k)$ est définie comme suite :

$$f_\nu(z) = \int_0^\infty f_\nu(k) J_\nu(kz) k dk \quad (26)$$

Que l'on peut vérifier en utilisant la relation d'orthogonalité

Où δ_{mn} est le coefficient de Kronecker.

II.5 Méthodes d'intégration numérique

L'intégration numérique désigne une méthode de calcul visant à déterminer, avec la plus grande précision possible, une valeur approchée de l'intégrale au sens de Riemann.

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (27)$$

Et que a et b sont des nombre réels.

Les problèmes de quadrature numérique apparaissent lorsque la fonction (f) est continue sans posséder de primitive explicite connue, ou lorsqu'elle est uniquement définie par un ensemble fini de couples (x_i, y_i) , $1 \leq i \leq n$. Une approche couramment adoptée consiste à recourir à l'interpolation polynomiale, les primitives des fonctions polynomiales étant faciles à déterminer [27].

II.5.1 Méthode des trapèzes

La méthode des trapèzes repose sur le découpage de l'intervalle $[a, b]$ en n sous-intervalles de même longueur, puis sur l'approximation de l'aire de chaque portion par un trapèze défini à partir des valeurs de la fonction aux extrémités de chaque sous-intervalle. Ainsi, la fonction est remplacée par une interpolation linéaire sur chacun des sous-intervalles.

$$I \approx \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} \quad (28)$$

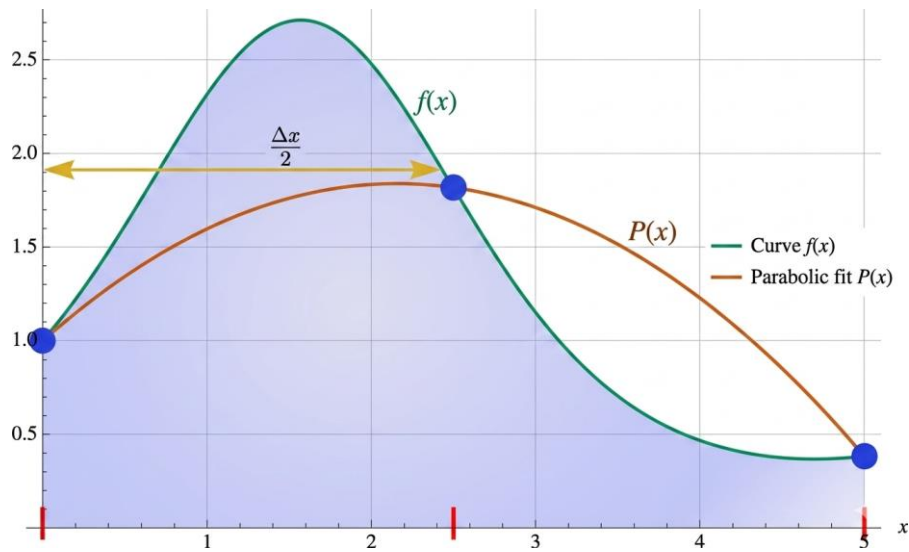


Figure II.3 : Méthode des trapèzes.

II.5.2 Méthode de Simpson

La méthode de Simpson consiste à subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles de même longueur, puis à approcher la fonction sur chaque portion par une parabole passant par les valeurs de la fonction aux extrémités ainsi qu'au point milieu de chaque sous-intervalle.

$$I \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n \left[f(x_{i-1}) + 4 \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} + f(x_i) \right] \quad (29)$$

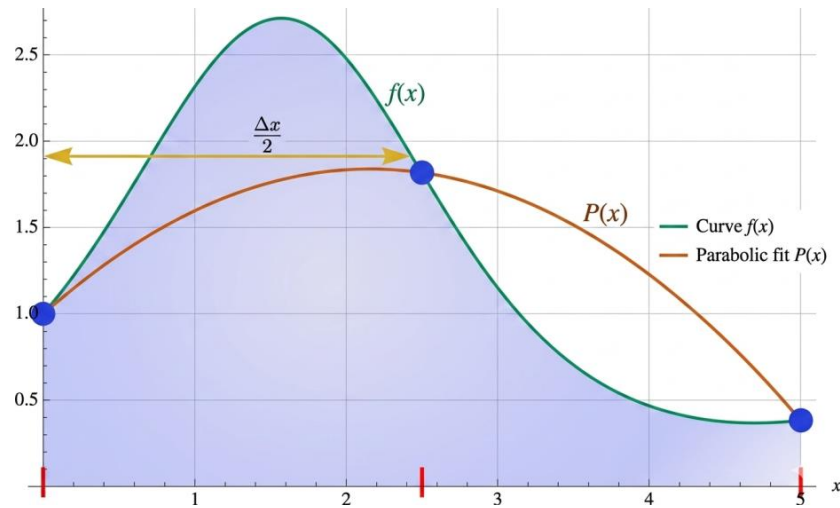


Figure II.4 : Méthode de Simpson.

Conclusion

L'étude des problèmes aux limites mixtes requiert la maîtrise des outils mathématiques appropriés. Elle repose sur l'utilisation des fonctions spéciales et des équations intégrales afin de simplifier la résolution et d'obtenir des expressions analytiques des déplacements et des contraintes, tout en faisant appel aux méthodes numériques à l'aide de l'ordinateur.

Chapitre III

Résolution du problème

III.1 Introduction

Ce chapitre présente l'étude analytique de la torsion axisymétrique d'un bi-matériaux isotrope et homogène, la configuration étudiée se fait sur un domaine cylindrique dont l'une des surfaces est munie d'un disque rigide. Intégrant une inclusion interfacial circulaire parallèle au plan du disque.

Une comparaison quantitative avec les résultats obtenus à l'aide du logiciel ANSYS Workbench est également présentée afin de valider le modèle analytique.

III.2 Équations de base du problème

Compte tenu de la symétrie axiale du problème, il est naturel de considérer (r, θ, z) des coordonnées polaires cylindriques. Nous considérons ici la torsion d'un disque circulaire rigide sur la surface libre ($z = 0$) de contrainte d'un bi-matériaux avec inclusion interfacial. L'inclusion est une fissure circulaire de type penny-shaped, de rayon a , située dans le plan $z=h$ qui sépare le matériau supérieur et le matériau inférieur. L'inclusion est supposée très rigide tandis que le disque subit une rotation d'angle ω autour de l'axe z passant par son centre, comme illustré sur la (figure III.1).

Dans ce cas de problème de torsion axisymétrique, le vecteur de déplacement prend la forme $(0, u_\theta, 0)$ dans le système de coordonnées polaires cylindriques (r, θ, z) . Il est commode d'identifier une région de couche (matériaux (1)) occupant la région $r \in (0; \infty); z \in (0; h^-)$ et une région de couche (matériaux (2)) occupant la région $r \in (0; \infty); z \in (h^+; \infty)$ et une inclusion très fine (matériaux (3)) située entre les deux régions précédant ($z = h$). Les signes h^+ et h^- désignent les variables dans la surface supérieure et la surface inférieure du plan ($z = h$) respectivement. Les seuls composants non nuls de la contrainte sont donnés par :

$$\tau_{\theta z}^i = G_i \frac{\partial u_\theta}{\partial z}; \tau_{\theta r}^i = G_i \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right); i = 1, 2 \quad (1)$$

Où $u_\theta = u_\theta(r; z)$ et G_i est le module de cisaillement du matériau. Comme la torsion de l'homogène matériau est statique, le déplacement $u_\theta(r; z)$ doit satisfaire :

$$\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{\partial u_\theta}{r \partial r} - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} = 0 \quad (2)$$

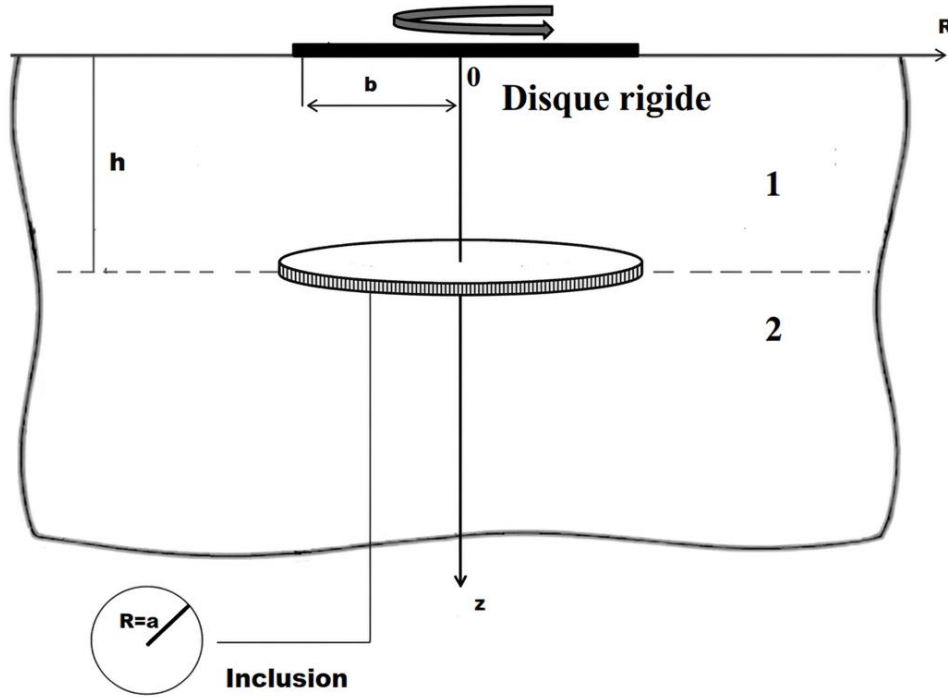


Figure III.1 : Configuration géométrique du problème de torsion axisymétrique d'un bi-matériau contenant une inclusion interfaciale circulaire et un disque rigide.

En utilisant la transformée de Hankel et sa transformée inverse données dans [28], on obtient :

$$F(\lambda; z) = \int_0^\infty f(r; z) r J_1(\lambda r) dr \quad (3)$$

Et

$$f(r; z) = \int_0^\infty F(\lambda; z) \lambda J_1(\lambda r) d\lambda \quad (4)$$

La solution pour les régions (1) ($0 \leq z \leq h$) et (2) ($z \geq h$) est exprimée en :

$$u_\theta^{(i)}(r; z) = \int_0^\infty [A_i(\lambda)e^{-\lambda z} + B_i(\lambda)e^{\lambda z}] J_1(\lambda r) d\lambda \quad ; i = 1; 2 \quad (5)$$

Où λ est la variable spectrale de transformation ; J_1 est la fonction de Bessel du premier type d'ordre un et A_i et B_i sont des fonctions inconnues.

III.3 Conditions aux limites et conditions de continuité

Le problème est soumis aux conditions de régularité à l'infini, à la condition de surface libre $z = 0$, qu'aux conditions de continuité et d'équilibre imposées aux interfaces $z = h -$ et $h +$. Les conditions aux limites et de continuité s'écrivent alors sous la forme suivante :

Ces conditions permettent de déterminer les fonctions inconnues apparaissant dans les représentations intégrales précédentes.

$$\lim_{r,z \rightarrow \infty} u_{\theta}^{(i)}(r; z) = 0, ; \quad \lim_{r,z \rightarrow \infty} \tau_{\theta z}^{(i)}(r; z) = 0. \quad (6)$$

$$\tau_{\theta z}^{(i)}(r; 0) = 0; \quad r > b \quad (7)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; h^-) - \tau_{\theta z}^{(2)}(r; h^+) = 0; \quad r \geq a \quad (8)$$

$$u_{\theta}^{(1)}(r; h^-) - u_{\theta}^{(2)}(r; h^+) = 0; \quad r \geq a \quad (9)$$

$$u_{\theta}^{(1)}(r; 0) = \omega r; \quad r \leq b \quad (10)$$

$$u_{\theta}^{(2)}(r; h) = \omega_0 r; \quad r \leq a \quad (11)$$

En appliquant les conditions de régularité à l'infini données dans (5), nous obtenons :

$$u_{\theta}^{(1)}(r; z) = \int_0^{\infty} [A_1(\lambda)e^{-\lambda z} + B_1(\lambda)e^{\lambda z}]J_1(\lambda r) d\lambda \quad (12)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; z) = G_1 \int_0^{\infty} \lambda [-A_1(\lambda)e^{-\lambda z} + B_1(\lambda)e^{\lambda z}]J_1(\lambda r) d\lambda \quad (13)$$

$$u_{\theta}^{(2)}(r; z) = \int_0^{\infty} [A_2(\lambda)e^{-\lambda z}]J_1(\lambda r) d\lambda \quad (14)$$

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r; z) = -G_2 \int_0^{\infty} \lambda [A_2(\lambda)e^{-\lambda z}]J_1(\lambda r) d\lambda \quad (15)$$

Où $A_1(\lambda)$, $B_1(\lambda)$ et $A_2(\lambda)$ sont des fonctions arbitraires qui doivent être déterminées en satisfaisant aux conditions de limite et de continuité.

Remplacent (12) et (14) dans (9) implique que :

$$A_2(\lambda) = A_1(\lambda) + B_1(\lambda)e^{2\lambda h} \quad (16)$$

En substituant l'équation (16) dans l'équation (15), on obtient :

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(2)}(r; h+) &= -G_2 \int_0^{\infty} \lambda [(A_1(\lambda) + B_1(\lambda)e^{2\lambda h})e^{-\lambda h}]J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= -G_2 \int_0^{\infty} \lambda [A_1(\lambda)e^{-\lambda h} + B_1(\lambda)e^{\lambda h}]J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (17)$$

De l'équation (8) on tire que :

$$\tau_{\theta z}^{(2)}(r; h^-) - \tau_{\theta z}^{(1)}(r; h^+) = 0 \quad (18)$$

Avec $\gamma = \frac{G_2}{G_1}$; on remplace (17) et (13) dans l'équation ci-dessus implique que :

$$\int_0^\infty \lambda [(1 - \gamma)A_1(\lambda)e^{-\lambda H} - (1 + \gamma)B_1(\lambda)e^{\lambda H}]J_1(\lambda r)d\lambda = 0. \quad r \geq a \quad (ED2)$$

Les conditions limitent mixtes (7), (8), (10) et (11) sont satisfaites si A_1 et

B_1 Sont des solutions de système d'équations intégrales duales doubles suivantes :

$$\int_0^\infty [A_1(\lambda)e^{-\lambda H} + B_1(\lambda)e^{\lambda H}]J_1(\lambda r)d\lambda = \omega_0 r. \quad 0 \leq r \leq a \quad (ED1)$$

$$\int_0^\infty \lambda [(1 - \gamma)A_1(\lambda)e^{-\lambda H} - (1 + \gamma)B_1(\lambda)e^{\lambda H}]J_1(\lambda r)d\lambda = 0. \quad r \geq a \quad (ED2)$$

$$\int_0^\infty (A_1(\lambda) + B_1(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda = \omega r. \quad 0 \leq r \leq b \quad (ED3)$$

$$\int_0^\infty \lambda (B_1(\lambda) - A_1(\lambda))J_1(\lambda r)d\lambda = 0. \quad r > b \quad (ED4)$$

III.4 Transformation des équations intégrale duales en un système algébrique linéaire et infini

III.4.1 Introduction des Fonctions Auxiliaires (méthode Copson-Sneddon)

Les équations ED2 et ED4 sont satisfaites si l'on introduire les représentations suivantes :

$$(1 - \gamma)A_1(\lambda)e^{-\lambda H} - (1 + \gamma)B_1(\lambda)e^{\lambda H} = \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \equiv F(\lambda) \quad (R1)$$

$$B_1(\lambda) - A_1(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \equiv G(\lambda) \quad (R2)$$

La méthode de Copson–Sneddon permet d'introduire ces fonctions auxiliaires afin de satisfaire automatiquement les conditions mixtes. L'introduction des fonctions ϕ et ψ permet de convertir les équations intégrales duales en un système plus facile à traiter.

Où $J_{1/2}$ est une fonction de Bessel du premier type d'ordre 1/2 ; et les deux fonctions inconnues $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions continues inconnues de (t) , définies sur les intervalles

$0 < t < a$ et $0 < t < b$ Respectivement.

Détermination des fonctions inconnues $A_1(\lambda)$ et $B_1(\lambda)$. Le système (R1) (R2) est un système linéaire en A_1 et B_1 . En le résolvant, on obtient :

$$A_1(\lambda) = \frac{F(\lambda) + (1 + \gamma)e^{\lambda H} G(\lambda)}{(1 - \gamma)e^{-\lambda H} - (1 + \gamma)e^{\lambda H}} \quad (19)$$

$$B_1(\lambda) = \frac{F(\lambda) + (1 - \gamma)e^{-\lambda H} G(\lambda)}{(1 - \gamma)e^{-\lambda H} - (1 + \gamma)e^{\lambda H}} \quad (20)$$

Pour simplifier les expressions obtenues, on introduit le dénominateur commun suivant :

$$D(\lambda) = (1 - \gamma)e^{-\lambda H} - (1 + \gamma)e^{\lambda H} \quad (21)$$

On substitue maintenant (19) et (20) et (21) dans les équations (ED1) et (ED3).

Substitution dans (ED1).

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty [A_1 e^{-\lambda H} + B_1 e^{\lambda H}] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \int_0^\infty \frac{F(\lambda)(e^{-\lambda H} + e^{\lambda H}) + G(\lambda)[(1 + \gamma) + (1 - \gamma)]}{D(\lambda)} J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= \omega_0 r \end{aligned} \quad (22)$$

En utilisant $\cosh(\lambda H) = \frac{e^{\lambda H} + e^{-\lambda H}}{2}$, on simplifie

$$\int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H) F(\lambda) + 2G(\lambda)}{D(\lambda)} J_1(\lambda r) d\lambda = \omega_0 r. \quad 0 \leq r \leq a \quad (23)$$

De même, pour (ED3)

$$\int_0^\infty (A_1 + B_1) J_1(\lambda r) d\lambda = \int_0^\infty \frac{2F(\lambda) + \Theta(\lambda, H)G(\lambda)}{D(\lambda)} J_1(\lambda r) d\lambda = \omega r. \quad 0 \leq r \leq b \quad (24)$$

Où $\Theta(\lambda, H) = (1 + \gamma)e^{\lambda H} + (1 - \gamma)e^{-\lambda H}$.

III.4.2 Simplification par la Forme Explicite de $J_{1/2}$:

Cette étape permet de remplacer les fonctions de Bessel d'ordre $1/2$ par des fonctions trigonométriques par la relation $J_{\frac{1}{2}}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$, ce qui simplifie considérablement le traitement analytique. On réécrit $F(\lambda)$ et $G(\lambda)$:

$$F(\lambda) = \sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) \sqrt{\frac{2}{\pi \lambda t}} \sin(\lambda t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \phi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (25)$$

$$G(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (26)$$

On définit les transformées en sinus :

$$\Phi(\lambda) = \int_0^a \phi(t) \sin(\lambda t) dt. \quad \Psi(\lambda) = \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \quad (27)$$

Ainsi, $F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(\lambda)$ et $G(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Psi(\lambda)$

III.4.3 Transformation des Noyaux de Bessel J_1 en Noyaux Trigonométriques

Afin d'obtenir des équations intégrales de Fredholm, on doit transformer le noyau $J_1(\lambda r)$ en un noyau en $\sin(\lambda x)$. On utilise pour cela une formule d'inversion due à **Schliömilch**.

Rappel de la formule d'inversion. Si une fonction $f(r)$ admet la représentation intégrale :

$$f(r) = \int_0^\infty F_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda \quad (3)$$

Alors sa transformée en sinus est donnée par :

$$\int_0^\infty F_1(\lambda) \sin(\lambda x) d\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r f(r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \quad (28)$$

Cette formule permet de passer d'une représentation en J_1 à une représentation en $\sin$.

Application de la formule d'inversion de Schliömilch à l'équation (23).

On pose $f(r) = \omega_0 r$ pour $0 \leq r < a$. Le membre de gauche de (23) est de la forme $\int_0^\infty F_1(\lambda) J_1(\lambda r) d\lambda$ avec $F_1(\lambda) = \frac{2 \cosh(\lambda H) F(\lambda) + 2G(\lambda)}{D(\lambda)}$.

En appliquant (28) au membre de gauche, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H) F(\lambda) + 2G(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda &= \frac{2}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r(\omega_0 r)}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \\ &= \frac{2\omega_0}{\pi} \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{r^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr \end{aligned} \quad (29)$$

L'intégrale se calcule avec le changement $r = x \sin \theta$:

$$\int_0^x \frac{r^2}{\sqrt{x^2 - r^2}} dr = x^2 \int_0^{\pi/2} \sin^2 \theta d\theta = x^2 \frac{\pi}{4} \quad (30)$$

Donc :

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\pi}{4} x^2 \right) = \frac{\pi}{2} x \quad (31)$$

On obtient :

$$\int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H) F(\lambda) + 2G(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda = \omega_0 x \quad (34)$$

En substituant $F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Phi(\lambda)$ et $G(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \Psi(\lambda)$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H) \Phi(\lambda) + 2\Psi(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda = \omega_0 x \quad (35)$$

On obtient finalement :

$$\int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H) \Phi(\lambda) + \Psi(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_0 x. \quad 0 \leq x < a \quad (36)$$

De même, avec $f(r) = \omega r$ pour $0 \leq r \leq b$, et $F_2(\lambda) = \frac{2F(\lambda) + \theta(\lambda; H)G(\lambda)}{D(\lambda)}$, on applique la formule d'inversion à (24) :

$$\int_0^\infty \frac{2F(\lambda) + \theta(\lambda; H)G(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda = \omega x \quad (37)$$

En substituant $F(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Phi(\lambda)$ et $G(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\Psi(\lambda)$:

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{2\Phi(\lambda) + \theta(\lambda.H)\Psi(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda = \omega x \quad (38)$$

On obtient finalement :

$$\int_0^\infty \frac{2\Phi(\lambda) + \theta(\lambda.H)\Psi(\lambda)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega r. \quad 0 \leq x \leq b \quad (39)$$

III.4.4 Obtention des Équations de Fredholm de Seconde Espèce

Les équations (36) et (39) sont des équations intégrales de première espèce pour Φ et Ψ . Pour les transformer en équations de seconde espèce (plus stables numériquement), on utilise une technique de régularisation.

Retour aux fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$. On rappelle que $\Phi(\lambda) = \int_0^a \phi(t) \sin(\lambda t) dt$ et $\Psi(\lambda) = \int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt$. On substitue ces expressions dans (36) et (39) :

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H)}{D(\lambda)} \left(\int_0^a \phi(t) \sin(\lambda t) dt \right) \sin(\lambda x) d\lambda \\ & + \int_0^\infty \frac{2}{D(\lambda)} \left(\int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \right) \sin(\lambda x) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_0 x \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \frac{2}{D(\lambda)} \left(\int_0^a \phi(t) \sin(\lambda t) dt \right) \sin(\lambda x) d\lambda \\ & + \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda.H)}{D(\lambda)} \left(\int_0^b \psi(t) \sin(\lambda t) dt \right) \sin(\lambda x) d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega x \end{aligned} \quad (41)$$

En intervertissant l'ordre des intégrations (justifiée par la convergence absolue), on obtient :

$$\int_0^a \phi(t) K_{11}(x.t) dt + \int_0^b \psi(t) K_{12}(x.t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_0 x \quad (41)$$

$$\int_0^a \phi(t) K_{21}(x.t) dt + \int_0^b \psi(t) K_{22}(x.t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega x \quad (42)$$

Avec :

$$K_{11}(x, t) = \int_0^\infty \frac{2 \cosh(\lambda H)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda \quad (43)$$

$$K_{12}(x, t) = \int_0^\infty \frac{2}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda = K_{21}(x, t) \quad (44)$$

$$K_{22}(x, t) = \int_0^\infty \frac{\theta(\lambda, H)}{D(\lambda)} \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda \quad (45)$$

Régularisation pour obtenir des équations de seconde espèce. Les noyaux K_{ij} sont singuliers. Pour obtenir des équations de Fredholm de seconde espèce, on utilise l'identité

$$\int_0^\infty \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda = \frac{\pi}{2} \delta(x - t) \quad (46)$$

On ajoute et retranche un terme approprié pour faire apparaître cette propriété.

Pour l'équation (41) : On remarque le comportement asymptotique :

$$\frac{2 \cosh(\lambda H)}{D(\lambda)} \sim -\frac{1}{1 + \gamma} \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty \quad (47)$$

On écrit alors :

$$K_{11}(x, t) = \int_0^\infty \left(\frac{2 \cosh(\lambda H)}{D(\lambda)} + \frac{1}{1 + \gamma} \right) \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda - \frac{1}{1 + \gamma} \int_0^\infty \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda \quad (48)$$

La première intégrale est maintenant convergente (régularisée). La seconde vaut $\frac{\pi}{2} \delta(x - t)$.

En substituant dans (48), on obtient :

$$-\frac{\pi}{2(1 + \gamma)} \phi(x) + \int_0^a \phi(t) K_{11}(x, t) dt + \int_0^b \psi(t) K_{12}(x, t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_0 x \quad (49)$$

Où $\tilde{K}_{11}$ représente la partie régularisée de noyau. En multipliant par $-\frac{2(1 + \gamma)}{\pi}$, on obtient une équation de Seconde espèce :

$$\begin{aligned} \phi(x) - \frac{2(1 + \gamma)}{\pi} \int_0^a \phi(t) K_{11} dt - \frac{2(1 + \gamma)}{\pi} \int_0^b \psi(t) K_{12}(x, t) dt \\ = -\frac{2(1 + \gamma)}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega_0 x \end{aligned} \quad (50)$$

Pour l'équation (42) : on utilise $\frac{\Theta(\lambda.H)}{D(\lambda)} \sim -1$ quand $\lambda \rightarrow \infty$:

$$K_{22}(x, t) = \int_0^\infty \left(\frac{\Theta}{D} + 1 \right) \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda - \int_0^\infty \sin(\lambda x) \sin(\lambda t) d\lambda \quad (51)$$

En substituant dans (51) :

$$-\frac{\pi}{2} \psi(x) + \int_0^a \phi(t) K_{21}(x, t) dt + \int_0^b \psi(t) K_{22}(x, t) dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega x \quad (52)$$

En multipliant par $-\frac{\pi}{2}$:

$$\psi(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^a \phi(t) K_{21}(x, t) dt - \frac{2}{\pi} \int_0^b \psi(t) K_{22}(x, t) dt = -\frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \omega x \quad (53)$$

III.5 Formulation Adimensionnelle du problème

Pour la mise en œuvre numérique, on introduit des variables adimensionnelles.

III.5.1 Changement de variables et adimensionnement

On définit :

Paramètres géométriques : $\beta = \frac{b}{a}$; $\eta = \frac{H}{a}$ (rapport des rayons et profondeur relative).

Variable d'espace : $\xi = \frac{x}{a} \in [0; 1]$ pour la surface ; $\zeta = \frac{x}{b} \in [0; 1]$ pour l'inclusion.

Variable spectrale : $u = \lambda a$.

Les fonctions de densité adimensionnelles sont introduites par :

$$\Psi(\xi) = \frac{\pi \phi(a\xi)}{4a\omega_0} ; \quad \Phi(\zeta) = \frac{\pi \psi(b\zeta)}{4b\omega_0} \quad (54)$$

III.5.2 Noyaux adimensionnels régularisés

Après substitution et régularisation ; on obtient les noyaux suivants :

$$\mathcal{K}_{11}(\xi; \tau) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\cosh(\eta u)}{uD(u)} + \frac{1}{2u(1+\gamma)} \right) \sin(u\xi) \sin(u\tau) du \quad (55)$$

$$\mathcal{K}_{12}(\xi; \zeta) = \frac{4\beta}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{uD(u)} \sin(u\xi) \sin(u\beta\zeta) du \quad (56)$$

$$\mathcal{K}_{21}(\zeta; \xi) = \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{1}{D(u)} \sin(u\beta\zeta) \sin(u\xi) du \quad (57)$$

$$\mathcal{K}_{22}(\zeta; v) = \frac{2\beta}{\pi} \int_0^\infty \left(\frac{\Theta(u)}{D(u)} + 1 \right) \sin(u\beta\zeta) \sin(u\beta v) du. \quad (58)$$

Avec $D(u) = (1 - \gamma)e^{-\eta u} - (1 + \gamma)e^{\eta u}$ et $\Theta(u) = (1 + \gamma)e^{\eta u} + (1 - \gamma)e^{-\eta u}$.

III.5.3 Système de Fredholm final :

Après résolution du système linéaire et utilisation de la formule d'inversion de Schiömilch, on obtient le système de Fredholm de seconde espèce :

$$\begin{cases} \Psi(\xi) + \int_0^1 \mathcal{K}_{11}(\xi; \tau) \Psi(\tau) d\tau + \int_0^1 \mathcal{K}_{12}(\xi; \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta = \frac{2(1+\gamma)}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_0}{\omega_0} \xi \\ \Phi(\zeta) + \int_0^1 \mathcal{K}_{22}(\zeta; v) \Phi(v) dv + \int_0^1 \mathcal{K}_{21}(\zeta; \xi) \Psi(\xi) d\xi = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega}{\omega_0} \zeta \end{cases} \quad (59)$$

En simplifiant les constantes :

$$\begin{cases} \Psi(\xi) + \int_0^1 \mathcal{K}_{11}(\xi; \tau) \Psi(\tau) d\tau + \int_0^1 \mathcal{K}_{12}(\xi; \zeta) \Phi(\zeta) d\zeta = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (1+\gamma) \xi; 0 \leq \xi \leq 1 \\ \Phi(\zeta) + \int_0^1 \mathcal{K}_{22}(\zeta; v) \Phi(v) dv + \int_0^1 \mathcal{K}_{21}(\zeta; \xi) \Psi(\xi) d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega_0} \zeta; 0 \leq \zeta \leq 1 \end{cases} \quad (60)$$

Ce système décrit le couplage mécanique entre la surface libre (indice 1) et l'inclusion rigide (indice 2) au moyen des noyaux croisés $\mathcal{K}_{12}$ et $\mathcal{K}_{21}$.

III.6 Conditions supplémentaires et quantités physiques

Le problème est complété par deux conditions essentielles.

➤ Condition d'équilibre de l'inclusion :

L'inclusion rigide n'est soumise à aucun couple externe, donc le moment total sur elle doit être nul. Cette condition détermine la rotation relative ω/ω_0 :

$$\int_0^1 \zeta \Phi(\zeta) d\zeta = 0 \quad (61)$$

➤ Relation entre le moment appliqué et la rotation imposée :

Le moment de torsion appliqué M est lié à la rotation ω_0 par l'intégrale de la densité Ψ :

$$\int_0^1 \xi \Psi(\xi) d\xi = \frac{M}{16\mu a^3 \omega_0} \quad (62)$$

Où μ est le module de cisaillement.

III.7 Vérification Asymptotique

Pour $u \rightarrow \infty$, on a les comportements suivants qui justifient la régularisation :

$$D(u) \sim -(1 + \gamma)e^{\eta u} \quad (63)$$

$$\frac{\cosh(\eta u)}{uD(u)} \sim -\frac{1}{2u(1 + \gamma)} \quad (64)$$

$$\frac{\theta(u)}{D(u)} \sim -1 \quad (65)$$

Ces comportements assurent la convergence exponentielle des intégrales définissant les noyaux régularisés.

III.8 Structure de transformation de système dual

Nous avons dérivé de manière exhaustive le système de Fredholm adimensionnel régissant le problème de torsion. Les étapes clés ont été :

1. Introduction des fonctions auxiliaires φ et ψ via les représentations de Copson-Sneddon.
2. Résolution pour A_1 et B_1 et substitution dans les équations de déplacement.
3. Simplification cruciale via la relation.
4. Transformation des noyaux J_1 en noyaux trigonométriques par la formule d'inversion de Schliomilch.
5. Régularisation pour obtenir des équations de Fredholm de seconde espèce numériquement stables.
6. Passage en variables adimensionnelles et définition des paramètres β et η .

Le système final (60) avec les conditions (61) et (62) est maintenant prêt pour une résolution numérique par méthode de quadrature ou de collocation.

III.9 Algorithme de Détermination de l'Inconnu ω_0

Dans les problèmes de torsion réelle, le couple (moment M) est généralement imposé par les conditions de chargement, tandis que la rotation à la surface ω_0 est une conséquence inconnue. Comme notre système d'équations (60) est linéaire, nous utilisons une méthode de mise à l'échelle pour trouver la valeur physique de ω_0 .

Méthode de Linéarité :

Le principe repose sur le fait que si $(\Psi, ; \Phi)$ est une solution pour ω_0 , alors $(k\Psi; k\Phi)$ est la solution pour $k\omega_0$. La procédure numérique se déroule en trois étapes :

Résolution du système test :

On fixe une valeur de rotation arbitraire $\omega_0^{(1)} = 1$.

On résout le système de Fredholm pour obtenir les fonctions de densité adimensionnelles tests $\Psi^{(1)}(\xi)$ et $\Phi^{(1)}(\zeta)$.

Calcul du moment résultant :

On calcule le moment de torsion théorique $M^{(1)}$ correspondant à cette rotation unitaire via l'intégrale de la densité $\Psi^{(1)}(\xi)$:

$$M^{(1)} = 16G_1 a^3 \omega_0^{(1)} \int_0^1 \xi \Psi^{(1)}(\xi) d\xi \quad (66)$$

Déduction de la valeur physique : Par linéarité du problème, la rotation réelle ω_0 correspondant au moment réel M imposé est obtenue par simple rapport :

$$\omega_0 = \omega_0^{(1)} \frac{M}{M^{(1)}} \quad (67)$$

III.10 Note sur l'Intégration Numérique

Pour calculer $M^{(1)}$ sous MATLAB après avoir résolu le système, il est recommandé d'utiliser la même règle de quadrature (par exemple, Gauss-Legendre) que celle utilisée pour les noyaux cette stratégie garantit la cohérence entre la discrétisation des équations intégrales et l'évaluation des grandeurs mécaniques :

$$\int_0^1 \xi \psi^1(\xi) d\xi \approx \sum_{i=1}^n \omega_i \xi_i \psi^1(\xi_i) \quad (68)$$

Où ξ_i sont les points de quadrature et w_i les poids associés.

III.11 Résolution numérique

III.11.1 Discrétisation par méthode de collocation

Le système d'équations intégrales de Fredholm est discrétisé par une méthode de collocation. Les intervalles $[0, 1]$ pour ξ et ζ sont discrétisés en N points de collocation. Nous utilisons les points de Gauss-Legendre ou de Gauss-Lobatto pour une meilleure précision numérique. Soient $\{xi\}_{i=1}^N$ les points de quadrature et $\{wi\}_{i=1}^N$ les poids associés sur l'intervalle $[0, 1]$. Les fonctions de densité inconnues sont approchées par leurs valeurs aux points de collocation : $\Psi_i = \Psi(x_i)$, $\Phi_i = \Phi(x_i)$. Les équations discrétisées s'écrivent :

$$\begin{aligned} \Psi(\xi_i) + \sum_{j=1}^N \omega_j \mathcal{K}_{11}(\xi_i, x_j) \Psi(x_j) + \sum_{j=1}^N \omega_j \mathcal{K}_{12}(\xi_i, x_j) \Phi(x_j) \\ = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} (1 + \gamma) \xi_i \end{aligned} \quad (69)$$

$$\Phi(\zeta_i) + \sum_{j=1}^N \omega_j \mathcal{K}_{22}(\zeta_i, x_j) \Phi(x_j) + \sum_{j=1}^N \omega_j \mathcal{K}_{21}(\zeta_i, x_j) \Psi(x_j) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \zeta_i \quad (70)$$

Pour $i = 1; \dots \dots \dots; N$

III.11.2 Calcul des noyaux

Calcul des noyaux Les noyaux $\mathcal{K}_{11}$, $\mathcal{K}_{12}$ et $\mathcal{K}_{22}$ sont définis par des intégrales infinies. En pratique, on intègre sur un intervalle fini $[0, U_{max}]$ où U_{max} est choisi suffisamment grand pour que l'intégrand soit négligeable. Grâce à la régularisation, la convergence est exponentielle.

Algorithme 1 Calcul du noyau $\mathcal{K}_{11}(\xi, \tau)$

```

1 : Définir  $U_{max} = 50$  (à adapter selon  $\eta$ )
2 : Définir  $N_u = 2000$  points d'intégration
3 :  $K \leftarrow 0$ 
4 : for  $k = 1$  à  $N_u$  do
5 :  $u \leftarrow u_k$  Points de quadrature
6 :  $I \leftarrow \left( \frac{\cosh(\eta u)}{u D(u)} + \frac{1}{2u(1+\gamma)} \right) \sin(u\xi) \sin(u\tau)$ 
7 :  $K \leftarrow K + \omega_u^{(k)} I$ 
8 : end for
9 :  $\mathcal{K}_{11} \leftarrow \frac{4}{\pi} K$ 
10 : return  $\mathcal{K}_{11}$ 

```

Algorithme 2 Calcul du noyau $\mathcal{K}_{12}(\xi, \zeta)$

```

1 : Définir  $U_{max} = 50$ 
2 : Définir  $N_u = 2000$  points d'intégration
3 :  $K \leftarrow 0$ 
4 : for  $k = 1$  à  $N_u$  do
5 :  $u \leftarrow u_k$ 
6 :  $I \leftarrow \frac{4\beta}{\pi} \frac{1}{u D(u)} \sin(u\xi) \sin(u\beta\zeta)$ 
7 :  $K \leftarrow K + \omega_u^{(k)} I$ 
8 : end for
9 : return  $K$ 

```

Algorithme 3 Calcul du noyau $\mathcal{K}_{22}(\zeta, v)$

```

1 : Définir  $U_{max} = 50$ 
2 : Définir  $N_u = 2000$  points d'intégration
3 :  $K \leftarrow 0$ 
4 : for  $k = 1$  à  $N_u$  do
5 :  $u \leftarrow u_k$ 
6 :  $I \leftarrow \frac{2\beta}{\pi} \left( \frac{\vartheta(u)}{D(u)} + 1 \right) \sin(u\beta\zeta) \sin(u\beta v)$ 
7 :  $K \leftarrow K + \omega_u^{(k)} I$ 
8 : end for
9 : return K

```

III.11.3 Traitement du rapport ω/ω_0 inconnu

Le système dépend du rapport inconnu ω/ω_0 . On utilise une procédure de mise à l'échelle basée sur la linéarité du problème. On réécrit (70) sous la forme :

$$\Phi(\zeta_i) + \sum_{j=1}^N \omega_j \mathcal{K}_{22}(\zeta_i; x_j) \Phi(x_j) + \sum_{j=1}^N \omega_j \mathcal{K}_{21}(\zeta_i; x_j) \Psi(x_j) = \alpha \zeta_i \quad (71)$$

Où $\alpha = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right) \frac{\omega}{\omega_0}}$ est une inconnue supplémentaire. On ajoute la condition d'équilibre discrétisée :

$$\sum_{j=1}^N \omega_j x_j \Phi(x_j) = 0 \quad (72)$$

On obtient alors un système linéaire de taille $(2N + 1) \times (2N + 1)$.

11.4 Algorithme global

Algorithme 4 Résolution complète du problème

1 : Entrées : $\gamma, \beta, \eta, N, M$ (moment appliqué)

2 : Sorties : $\Psi(\xi); \Phi(\zeta); \omega_0; K_{III}^{disque}; K_{III}^{inclusion}$

3 :

4 : $N_u \leftarrow 2000, U_{max} \leftarrow 50$ Points pour les noyaux

5 : Générer les points et poids de quadrature $\{x_i; \omega_i\}_{i=1}^N$ (Gauss-Legendre)

6 :

7 : for $i = 1$ à N do

8 : for $j = 1$ à N do

9 : Calculer $\mathcal{K}_{11}(x_i; x_j), \mathcal{K}_{12}(x_i; x_j), \mathcal{K}_{22}(x_i; x_j)$

10 : end for

11 : end for

12 :

13 : Assembler la matrice du système (69)-(71) de taille $(2N + 1)$

14 : Résoudre le système linéaire pour obtenir Ψ_i, Φ_i et α

15 : $\frac{\omega}{\omega_0} \leftarrow \alpha / \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

16 :

17 : Calculer $M_{calc} = 16 G_1 a^3 \omega_0 \sum_{j=1}^N \omega_j x_j \Psi_j$

18 : Ajuster ω_0 pour correspondre au moment imposé M (mise à l'échelle)

19 :

20 : Calculer les FIC : $K_{III}^{disque} = -\frac{4 G_1 \omega \sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} \Psi_N$

21 : $K_{III}^{disque} = -\frac{4 G_1 \omega \sqrt{a}}{(1 + \gamma)\sqrt{\pi}} \Phi_N$

22:

23: return $\Psi, \Phi, \omega_0, K_{III}^{disque}, K_{III}^{inclusion}$

III.11.4 Calcul du moment réel

Lorsque le moment M est imposé (et non ω_0), on utilise une mise à l'échelle supplémentaire :

1. Résoudre le système avec une valeur arbitraire $\omega_0^{(1)} = 1$, donnant $\Psi^{(1)}(\xi)$ et $\Phi^{(1)}(\zeta)$.

2. Calculer le moment correspondant :

$$M^{(1)} = 16 G_1 a^3 \int_0^1 \xi \Psi^{(1)}(\xi) d\xi \quad (73)$$

3. Par linéarité, le moment réel M correspond à :

$$\omega_0 = \frac{M}{M^{(1)}} \omega_0^{(1)} \quad (74)$$

4. Les densités réelles sont :

$$\psi = \frac{M}{M^{(1)}} \psi^{(1)}, \quad \phi = \frac{M}{M^{(1)}} \phi^{(1)}.$$

III.12 Facteur d'intensité de contrainte :

Les facteurs d'intensité des contraintes en mode III sont obtenus à partir du comportement asymptotique du champ de contraintes au voisinage des singularités et sont donnés par les relations suivantes :

$$K_{III}^a = \lim_{r \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi(r-a)} \tau_{z\theta}^1(r; z) \big|_{z=H} \quad (75)$$

$$K_{III}^b = \lim_{r \rightarrow b^-} \sqrt{2\pi(r-b)} \tau_{z\theta}^1(r; z) \big|_{z=0} \quad (76)$$

Pour le plan $z=H$ pour $r>a$, et $z=0$ pour $r>b$, les expressions de la contrainte sont :

$$\begin{aligned} \tau_{\theta z}^{(1)}(r; H) &= G_1 \int_0^\infty \lambda [-A_1(\lambda) e^{-\lambda H} + B_1(\lambda) e^{\lambda H}] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= G_1 \int_0^\infty \lambda \left[-\frac{F(\lambda) + (1+\gamma) e^{\lambda H} G(\lambda)}{(1-\gamma) e^{-\lambda H} - (1+\gamma) e^{\lambda H}} e^{-\lambda H} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F(\lambda) + (1-\gamma) e^{-\lambda H} G(\lambda)}{(1-\gamma) e^{-\lambda H} - (1+\gamma) e^{\lambda H}} e^{\lambda H} \right] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= G_1 \int_0^\infty \lambda \left[-\frac{F(\lambda) e^{-\lambda H} + (1+\gamma) G(\lambda)}{(1-\gamma) e^{-\lambda H} - (1+\gamma) e^{\lambda H}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{F(\lambda) e^{\lambda H} + (1-\gamma) G(\lambda)}{(1-\gamma) e^{-\lambda H} - (1+\gamma) e^{\lambda H}} \right] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= G_1 \int_0^\infty \lambda \left[\frac{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}}{(1-\gamma) e^{-\lambda H} - (1+\gamma) e^{\lambda H}} F(\lambda) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\gamma}{(1-\gamma) e^{-\lambda H} - (1+\gamma) e^{\lambda H}} G(\lambda) \right] J_1(\lambda r) d\lambda \end{aligned} \quad (77)$$

On pose que $p(\lambda) = 1 - \left(\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\right) e^{-2\lambda H}$ donc l'expression se simplifie comme suit :

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z}^{(1)}(r; H) &= G_1 \int_0^\infty \lambda \left[\frac{e^{-2\lambda H} - 1}{p(\lambda)(1+\gamma)} F(\lambda) + \frac{2\gamma e^{-\lambda H}}{p(\lambda)(1+\gamma)} G(\lambda) \right] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= G_1 \int_0^\infty \lambda \left[\frac{e^{-2\lambda H} - 1}{p(\lambda)(1+\gamma)} \left(\sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\gamma e^{-\lambda H}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \left(\sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \right) \right] J_1(\lambda r) d\lambda\end{aligned}\quad (78)$$

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z}^{(1)}(r; 0) &= G_1 \int_0^\infty \lambda [-A_1(\lambda) + B_1(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda = G_1 \int_0^\infty \lambda [-G(\lambda)] J_1(\lambda r) d\lambda \\ &= -G_1 \int_0^\infty \lambda \left[\sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \right] J_1(\lambda r) d\lambda\end{aligned}\quad (79)$$

La deuxième partie des intégrales (78) et (79) convergent rapidement, leurs limites comme $r \rightarrow a^-$ et $r \rightarrow b^-$ devient négligeable, bien que les limites des deux autres intégrales analysées asymptotiquement comme suit :

En utilisation de la relation suivante $J_1(\lambda R) = -\frac{1}{R} \frac{d}{dR} J_0(\lambda; R)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\tau_{\theta z}^{(1)}(r; H) &= -G_1 \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) dt \int_0^\infty \lambda^{1/2} \frac{-1}{p(\lambda)(1+\gamma)} J_{1/2}(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda \\ &\quad + G_1 \int_0^\infty \lambda \left[\frac{e^{-2\lambda H}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \left(\sqrt{\lambda} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\gamma e^{-\lambda H}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \left(\sqrt{\lambda} \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{1/2}(\lambda t) dt \right) \right] J_1(\lambda r) d\lambda\end{aligned}\quad (80)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; 0) = G_1 \int_0^b \sqrt{t} \psi(t) dt \int_0^\infty \lambda^{1/2} J_{1/2}(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (81)$$

Pour les grandes valeurs de λ , nous utilisons le comportement asymptotique de la fonction

Bessel du premier type $J_v \cong \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \cos\left(\lambda - v\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$, alors on trouve :

$$J_{1/2} \cong \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \cos\left(\lambda - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \cos\left(\lambda - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\lambda\pi}} \sin \lambda \quad (82)$$

Ensuite, en utilisant les formules intégrales suivantes pour la première partie intégrante infinie de la partie droite de (74) et de (75) :

$$\int_0^\infty \sin(\lambda t) J_0(\lambda r) d\lambda = \begin{cases} 0 & t < r \\ \frac{1}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} & t > r \end{cases} \quad (83)$$

Et que $p(\lambda) = 1$ pour $\lambda \rightarrow +\infty$ les équations deviennent :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; H) = \frac{G_1}{(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\phi(t)}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dt + R_1(r) \quad (84)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; 0) = G_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dr} \int_0^a \frac{\psi(t)}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dt \quad (85)$$

Avec :

$$R_1(r) = \int_0^\infty \lambda^{\frac{3}{2}} \left[\left(\frac{e^{-2\lambda H}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \int_0^a \sqrt{t} \phi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \right) - \frac{2\gamma e^{-\lambda H}}{p(\lambda)(1+\gamma)} \left(\int_0^b \sqrt{t} \psi(t) J_{\frac{1}{2}}(\lambda t) dt \right) \right] J_1(\lambda r) d\lambda$$

Maintenant, en intégrant les deux équations par parties, nous obtenons :

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; H) = -\frac{G_1}{(1 + \gamma)} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\phi(a)}{r\sqrt{(a^2 - r^2)}} - \int_r^a \frac{t\phi'(t)}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dt + R_1(r) \quad (86)$$

$$\tau_{\theta z}^{(1)}(r; 0) = -G_1 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b\psi(b)}{r\sqrt{(b^2 - r^2)}} - \int_r^b \frac{t\psi'(t)}{\sqrt{(t^2 - r^2)}} dt \quad (87)$$

Nous remarquons que les intégrales infinies dans les expressions précédentes sont convergentes sur l'ensemble du domaine sauf aux points singuliers $r \rightarrow a^-$ et $r \rightarrow b^-$ qui occupent le bord de l'inclusion et le bord de disque rigide respectivement.

En utilisant les transformations suivantes :

$$\phi(a) = \frac{4a\omega_0}{\pi} \Phi(N) \quad (88)$$

$$\psi(b) = \frac{4b\omega_0}{\pi} \Psi(N) \quad (89)$$

Les facteurs d'intensité de contrainte (FIC) de mode III sont donnés par :

$$K_{III}^{inclusion} = -\frac{4G_1\omega\sqrt{a}}{(1 + \gamma)\sqrt{\pi}} \Phi(1) \quad (90)$$

$$K_{III}^{disque} = -\frac{4G_1\omega\sqrt{b}}{\sqrt{\pi}} \Psi(1) \quad (91)$$

III.13 Convergence et validation

Dans cette partie, nous étudions la convergence et la précision de la méthode numérique proposée pour résoudre les équations intégrales de Fredholm régissant le problème de torsion. L'analyse porte sur la densité de contrainte sans dimension $\phi(1)$ et la rotation relative ω/ω_0 en fonction des paramètres géométriques a/b et $\eta=h/a$.

Les équations intégrales sont discrétisées par une méthode de collocation avec $N=101$ points de Gauss-Lobatto. La règle de Simpson avec les poids $\mathbf{W}$ est utilisée pour la quadrature. La variable spectrale u est échantillonnée sur $[10^{-6}; 1200]$ avec 4000 points, assurant une résolution précise des noyaux oscillants.

Le tableau 1 présente la convergence de $\phi(1)$ et ω/ω_0 en fonction de N pour des valeurs sélectionnées de a/b et $\eta=h/a$. Les résultats se stabilisent à quatre chiffres significatifs pour $N \geq 40$ ce qui est cohérent avec les observations de Kebli et Baka [43].

N	$\phi(1)$	ω/ω_0	$\Delta\phi(1)$
3	0,6521	3,142	/
4	0,6412	3,108	1,67
8	0,6305	3,075	1,67
16	0,6214	3,051	1,44
25	0,6172	3,042	0,68
30	0,6158	3,039	0,23
35	0,6150	3,037	0,13
40	0,6147	3,036	0,05
42	0,6147	3,036	0,00
45	0,6147	3,036	0,00
50	0,6147	3,036	0,00
101	0,6147	3,036	0,00

Tableau III.1 : Convergence de la densité de contrainte $\phi(1)$ et de la rotation relative ω/ω_0 .

III.13.1 FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE :

La fonction sans dimension $\phi(1)$, équivalant à $\phi(a)$, représente l'amplitude dominante du champ singulier apparaissant au voisinage de bord de l'inclusion par conséquent toute variation des paramètres géométriques et $\eta=h/a$ influençant se répercute directement sur le facteur d'intensité des contrainte KIII. Ainsi, l'étude paramétrique de la densité de contrainte normalisée permet de caractériser l'évolution du comportement asymptotique et de la concentration locale des contraintes.

Le même raisonnement s'applique également à la fonction de densité $\psi(1)$ l'équivalent de $\psi(b)$ au voisinage des limite de disque rigide, où le champ mécanique présente un comportement similaire caractérisé par une concentration de locale des contrainte.

La figure (III.2) représente l'évolution du facteur d'intensité de contrainte normalisée au bord de l'inclusion en fonction de $\beta = b/a$ pour différentes valeurs de ($\eta=h/a$). On observe que les valeurs du facteur d'intensité de contrainte augmentent et atteignent ses valeurs maximales à $\beta = 1$, et avec l'augmentation de la valeur de β , le facteur d'intensité de contrainte diminue. De plus, l'effet de la distance axiale entre l'inclusion et le disque η sur l'intensité du facteur est également indiqué sur cette figure. L'augmentation du paramètre η induit la diminution du facteur d'intensité de contrainte pour l'ensemble des valeurs du rapport β .

Cette évolution traduit le renforcement de la concentration des contraintes lorsque les dimensions relatives de l'inclusion et du disque deviennent comparables.

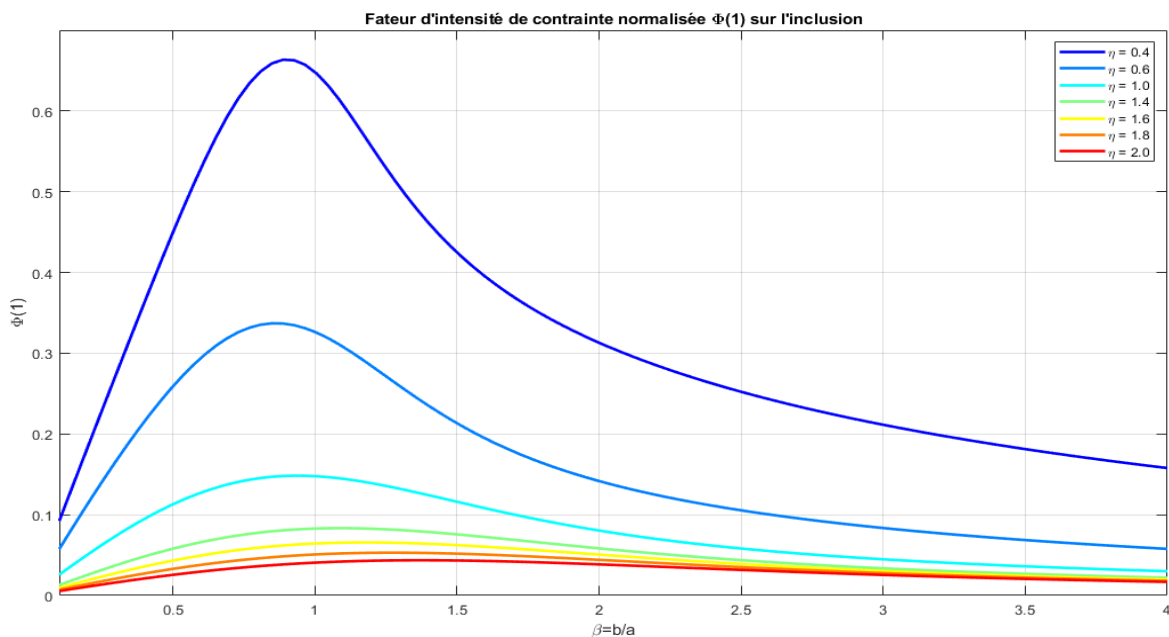


Figure III.2 : Facteur d'intensité de contrainte aux niveaux de l'inclusion.

La figure (III.3) représente l'évolution du facteur d'intensité de contrainte normalisée au bord du disque en fonction de β pour différentes valeurs de η . On observe que les valeurs du facteur d'intensité de contrainte augmentent avec l'augmentation du rapport β . De plus, l'effet de la distance axiale entre l'inclusion et le disque η sur l'intensité du facteur est également indiqué sur cette figure. L'augmentation du paramètre η induit la diminution du facteur d'intensité de contrainte pour l'ensemble des valeurs du rapport β .

Le même comportement est observé pour toutes les valeurs de η , bien que l'intensité globale diminue lorsque la distance entre l'inclusion et le disque augmente.

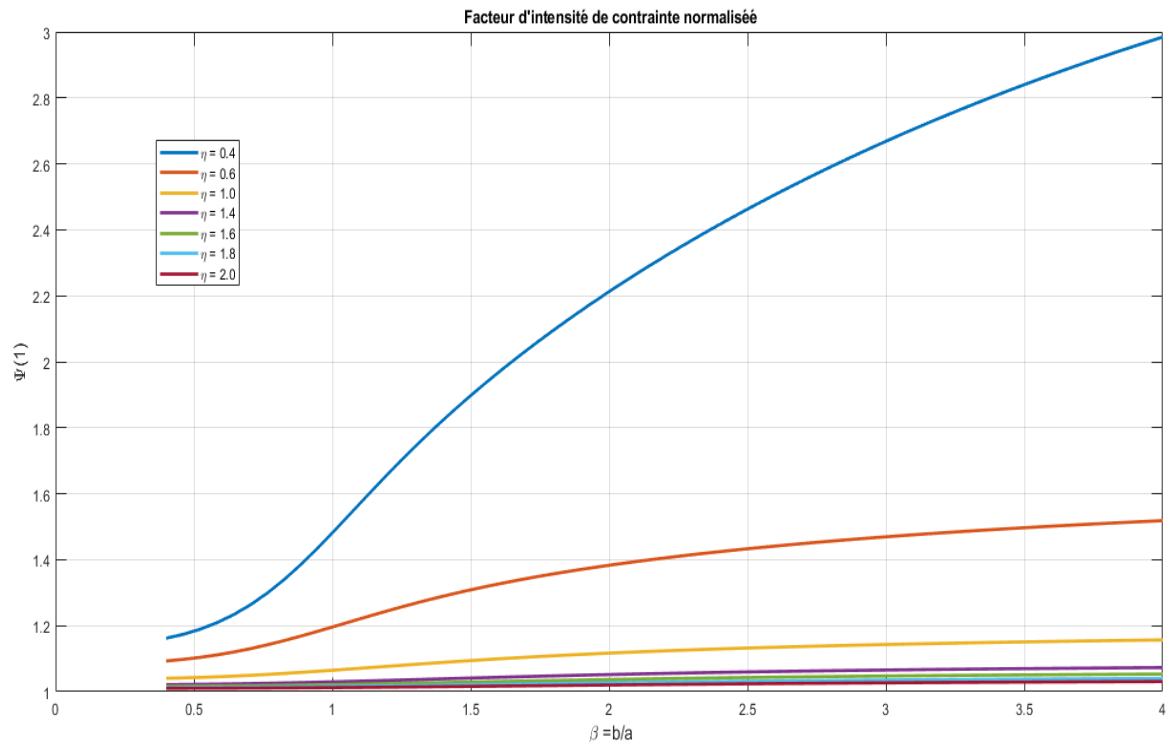


Figure III.3 : facteur d'intensité de contrainte aux niveaux de disque.

14.2 La rotation relative du disque :

Le rapport représente la rotation relative normalisée de l'inclusion par rapport au disque rigide. Il caractérise le degré d'interaction mécanique entre les deux hétérogénéités.

La rotation relative normalisée est représentée sur la figure (III.4) en fonction du paramètre b/a . Pour ce problème de cisaillement pur, on observe que les valeurs de la rotation relative diminuent avec l'augmentation du rapport β . De plus, l'effet de la distance axiale entre l'inclusion et le disque η sur la rotation est également indiqué sur cette figure. L'augmentation du paramètre η induit l'augmentation de la rotation relative pour l'ensemble des valeurs du

rapport b/a . Cette tendance s'explique par la diminution de l'interaction mécanique lorsque la distance entre les deux singularités augmente

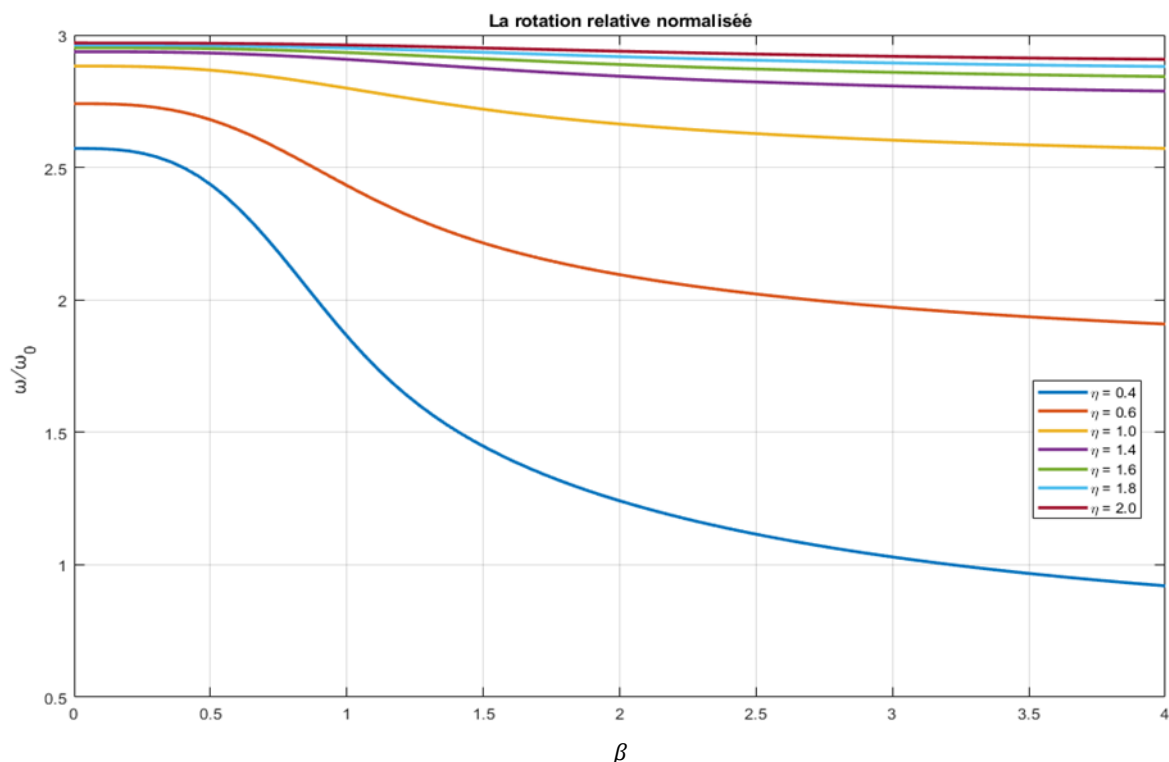


Figure III.4 : la rotation relative normalisée.

Afin de mieux mettre en évidence l'influence des paramètres géométriques (β et η) ainsi que du rapport de rigidité γ sur l'interaction mécanique entre le disque rigide et l'inclusion, les figures suivantes sont présentées.

- 1) La rotation relative normalisée est représentée sur la figure (III.5) en fonction des deux rapports géométriques b/a et η (pour un rapport de rigidité $\gamma=0.5$). On observe que l'effet

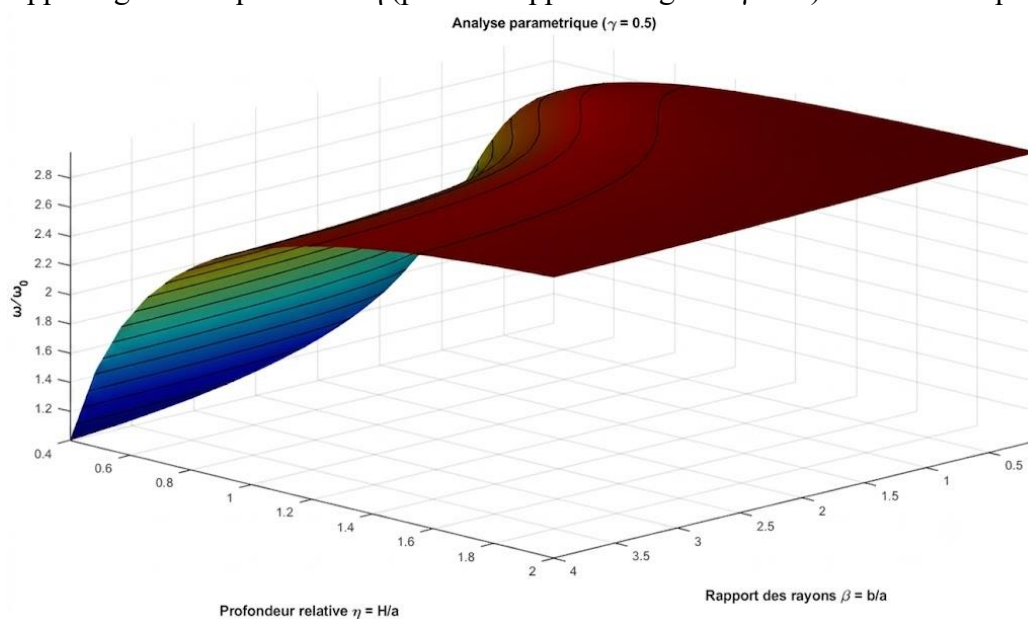


Figure III.5 : la rotation relative en fonction des paramètres géométriques.

du paramètre de profondeur relatif η est nettement plus prédominant que celui du rapport des rayons β .

- 2) La rotation relative normalisée est représentée sur la figure (III.6) en fonction de rapport de rigidité $\gamma = \frac{G_2}{G_1}$. On observe que pour $\beta = 0.6$ les valeurs de la rotation relative augmente avec l'augmentation du rapport γ . De plus, l'effet de la distance axiale entre l'inclusion et le disque η sur la rotation est également indiqué sur cette figure. L'augmentation du paramètre η induit l'augmentation de la rotation relative pour l'ensemble des valeurs du rapport γ .

Une augmentation du rapport de rigidité favorise le transfert des efforts de torsion entre les deux matériaux, ce qui explique l'augmentation observée de la rotation relative.

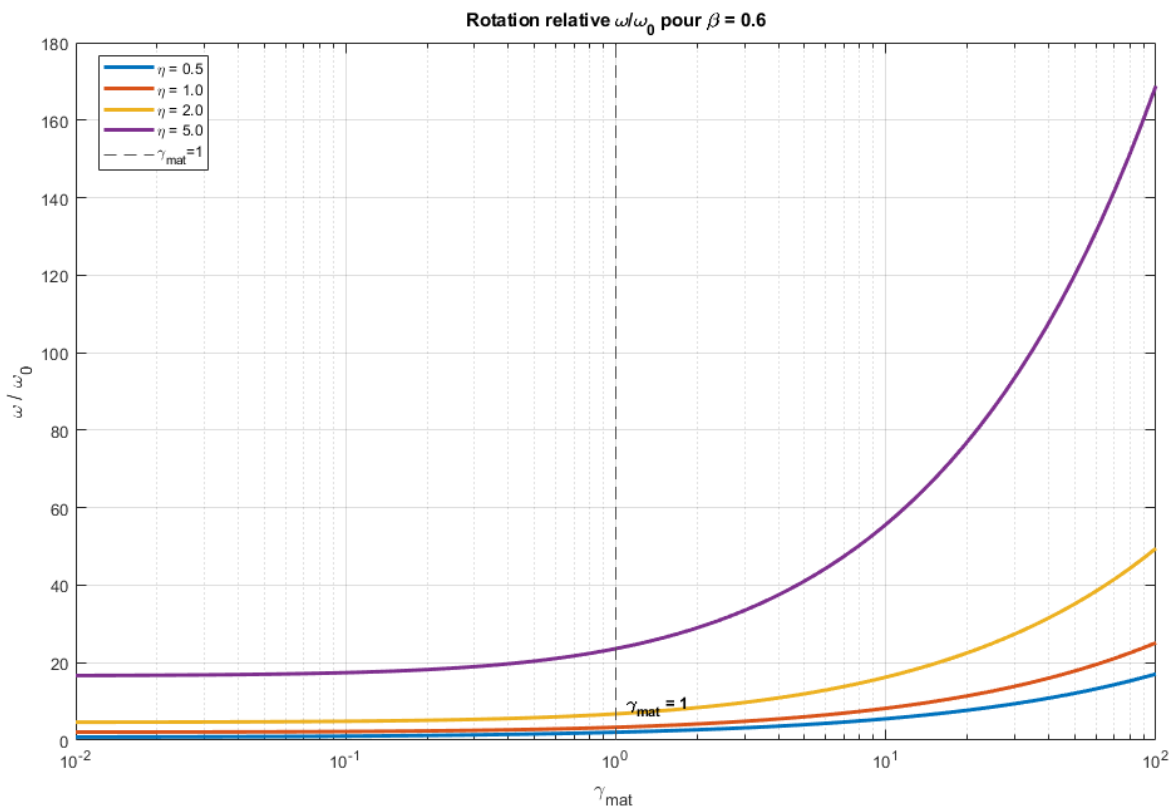


Figure III.6 : la rotation relative en fonction de rapport de rigidité.

- 3) La figure (III.7) présente une comparaison de l'évolution de la rotation relative normalisée en fonction des rapport géométriques b/a et η entre deux matériaux de rigidité différente (souple $\gamma = 0.5$ et rigide $\gamma=2$). On observe que pour le matériau rigide présente en bleu la surface est presque plate ($2.7 < \omega/\omega_0 < 3$) se qui signifie que les paramètres géométriques n'ont presque aucune influence sur la rotation relative. D'autre

part, le matériau souple présenté en rouge semble d'être sensible aux changements des paramètres géométriques.

Cette comparaison montre que les matériaux rigides sont moins sensibles aux paramètres géométriques, tandis que les matériaux plus souples présentent une interaction mécanique nettement plus marquée.

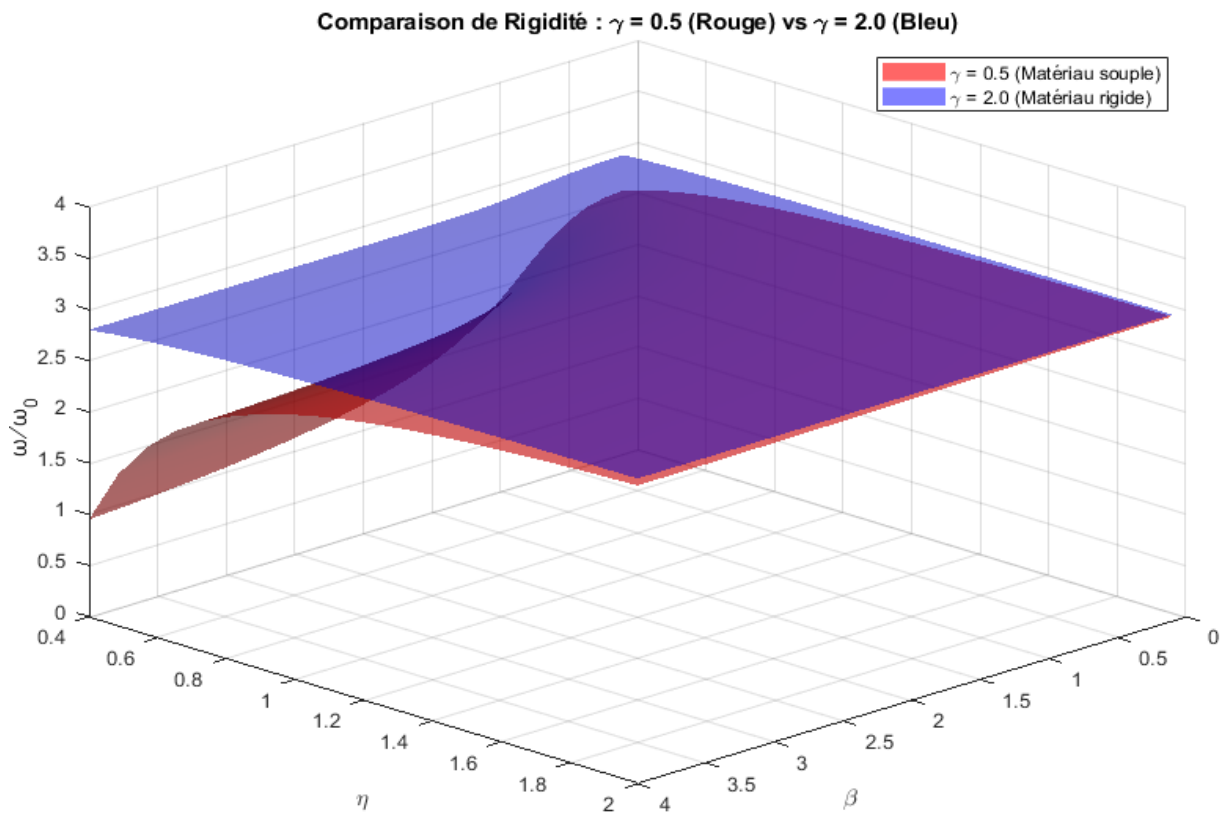


Figure III.7 : comparaison de rigidité.

III.14 Vérification et validation

III.14.1 Validation par éléments finis

Pour valider notre approche, nous comparons nos résultats avec ceux obtenus par une simulation par éléments finis utilisant le logiciel ANSYS Workbench. La validation numérique constitue une étape essentielle afin d'évaluer la précision du modèle analytique développé. Le modèle éléments finis est construit à partir des caractéristiques suivantes :

- Éléments tétraédriques quadratiques à nœuds médians
- Taille de maille : 0.5 mm autour de l'inclusion avec raffinement aux bords
- Taille de maille : 1.5 mm pour le reste du domaine

— Conditions aux limites : rotation imposée $\omega = 4^\circ$ sur le disque, déplacements nuls sur les frontières extérieures

Par la comparaison des résultats analytiques avec les résultats de calculs obtenus à partir de l'élément fini basé sur le code multi-physique, ANSYS Workbench, on a observé un excellent accord entre les résultats analytiques et numériques, avec un écart relatif inférieur à 2% sur l'ensemble du domaine. Cette concordance confirme la validité du développement analytique proposé.

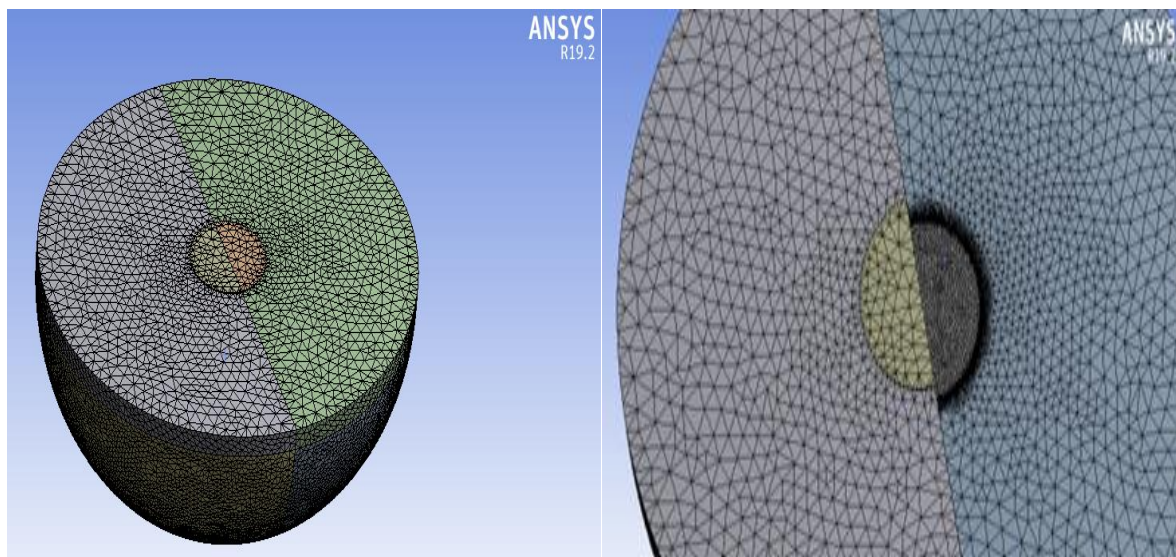


Figure III.8 : Les mailles éléments finis du demi-espace dans la simulation numérique des points de vue global (gauche) et local (droit).

III.14.2 Etapes de la modélisation numérique

➤ ANSYS Workbench

Cette plateforme adopte une approche différente pour la création des modèles en s'appuyant sur le code de calcul d'ANSYS. Elle est particulièrement destinée aux géométries complexes comportant plusieurs corps, ainsi qu'aux utilisateurs disposant d'une expérience limitée en simulation numérique. Dans cet environnement, l'utilisateur interagit principalement avec la géométrie plutôt qu'avec le modèle éléments finis. La plateforme traduit automatiquement les opérations réalisées par l'utilisateur en commandes ANSYS avant d'exécuter le calcul. Le modèle éléments finis obtenu reste toutefois accessible et peut être personnalisé grâce à l'ajout de commandes spécifiques au langage ANSYS. Elle permet de réaliser divers types d'analyses, notamment structurales, thermiques, fluidiques et électromagnétiques. L'ensemble du processus de simulation est organisé autour d'un schéma de projet offrant une interaction entre les applications natives d'ANSYS Workbench et les outils intégrés de gestion des données. En

outre, ANSYS Workbench intègre une connectivité bidirectionnelle avec les logiciels de CAO, un maillage largement automatisé, un système de mise à jour des projets, une gestion centralisée des paramètres ainsi que des fonctionnalités d'optimisation intégrées [31].

➤ **Géométrie du modèle**

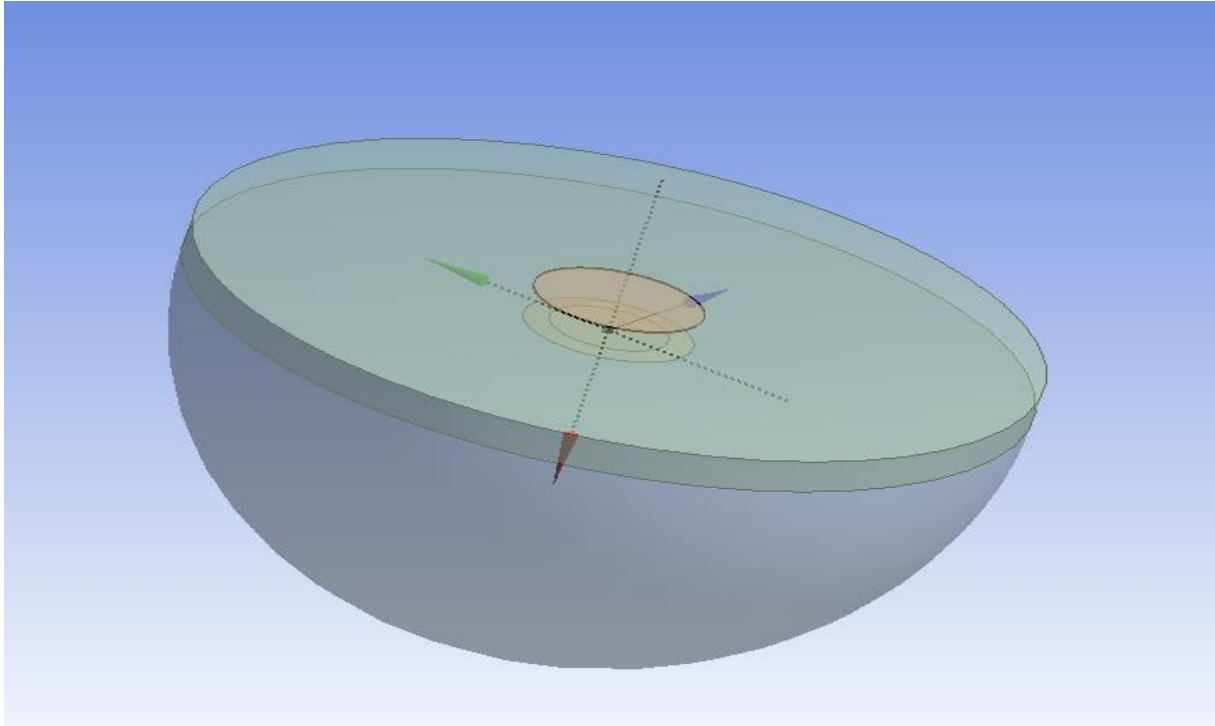


Figure III.9 : Géométrie du modèle tridimensionnel étudié.

➤ **Maillage du modèle**

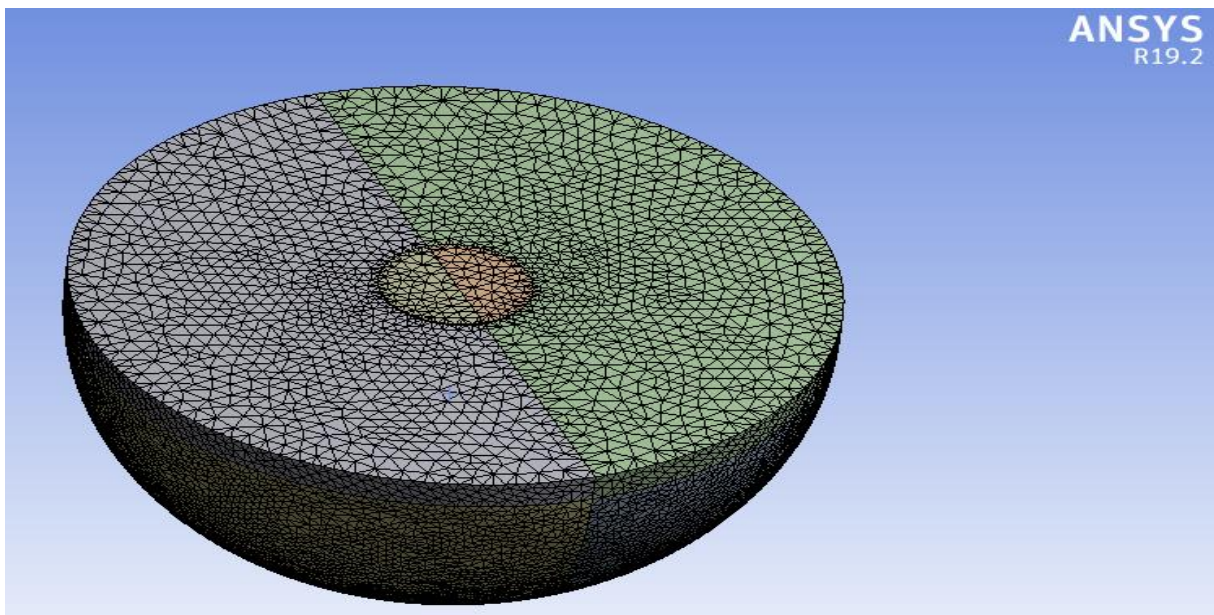


Figure III.10 : Maillage du modèle par éléments finis.

➤ **Raffinement de maillage aux bords de l'inclusion**

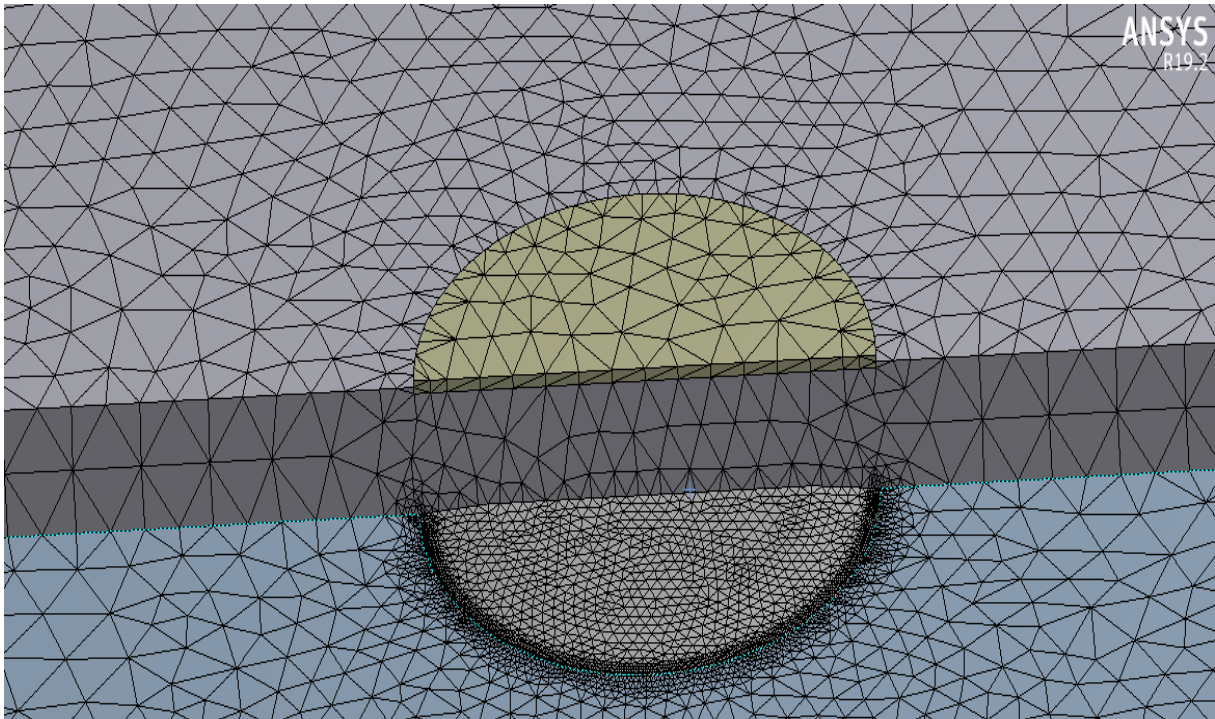


Figure III.11 : Raffinement local du maillage au voisinage de l'inclusion.

➤ **Conditions aux limites**

On applique une rotation sur le disque et on annule les déplacements de la demi espace.

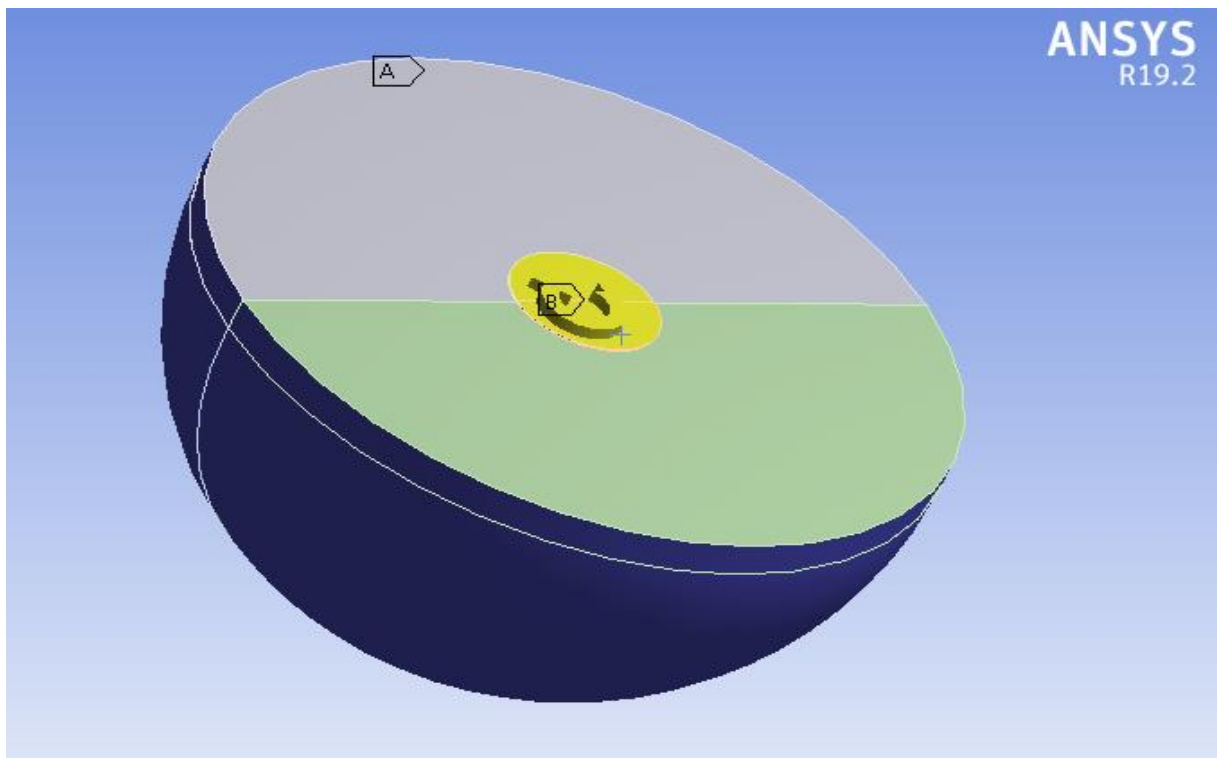


Figure III.12 : Conditions aux limites appliquées.

III.14.3 Lancement de la résolution :

➤ Déplacement

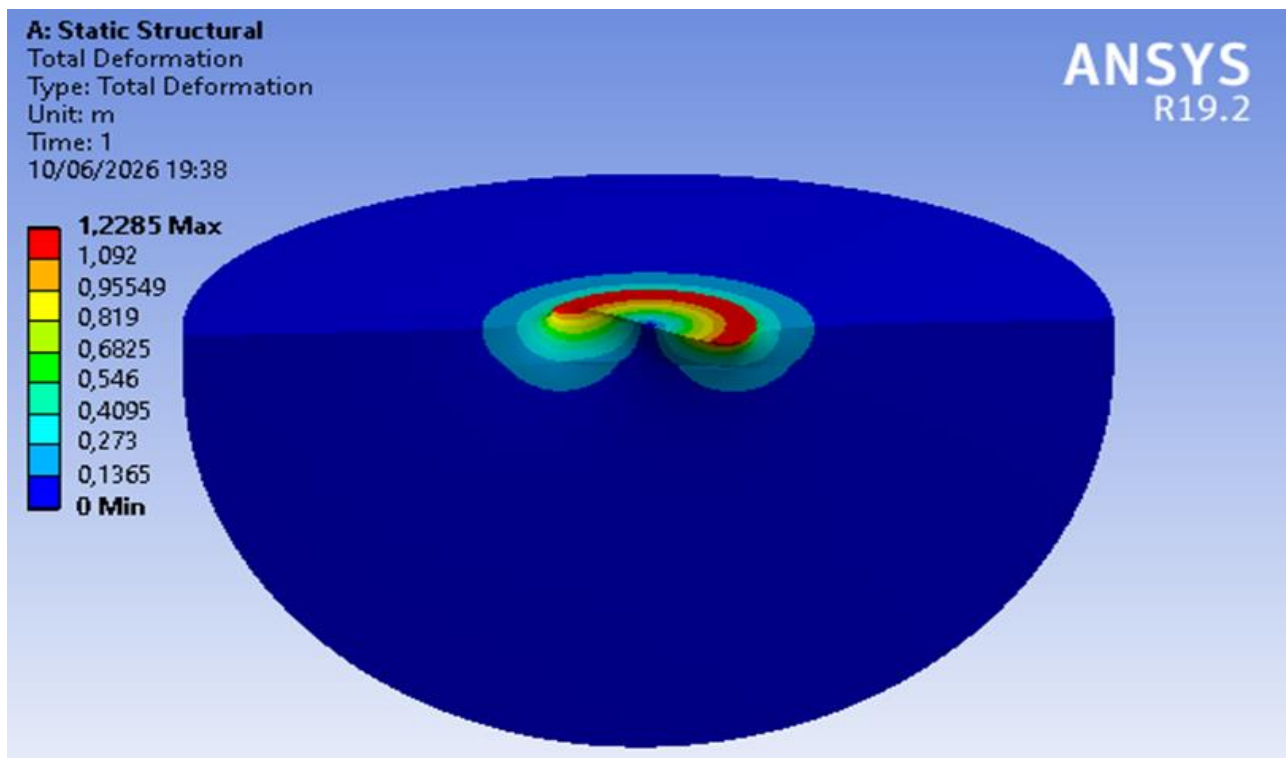


Figure III.13 : Champ de déplacement.

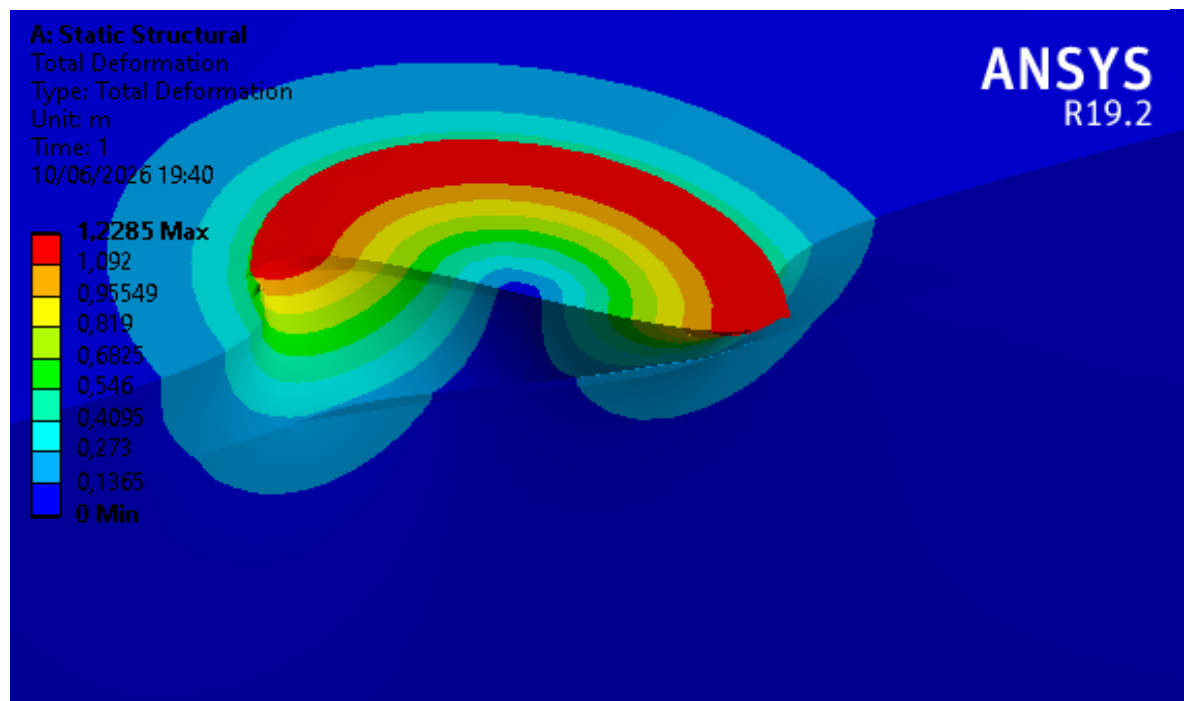


Figure III.14 : Champ de déplacement au niveau de disque.

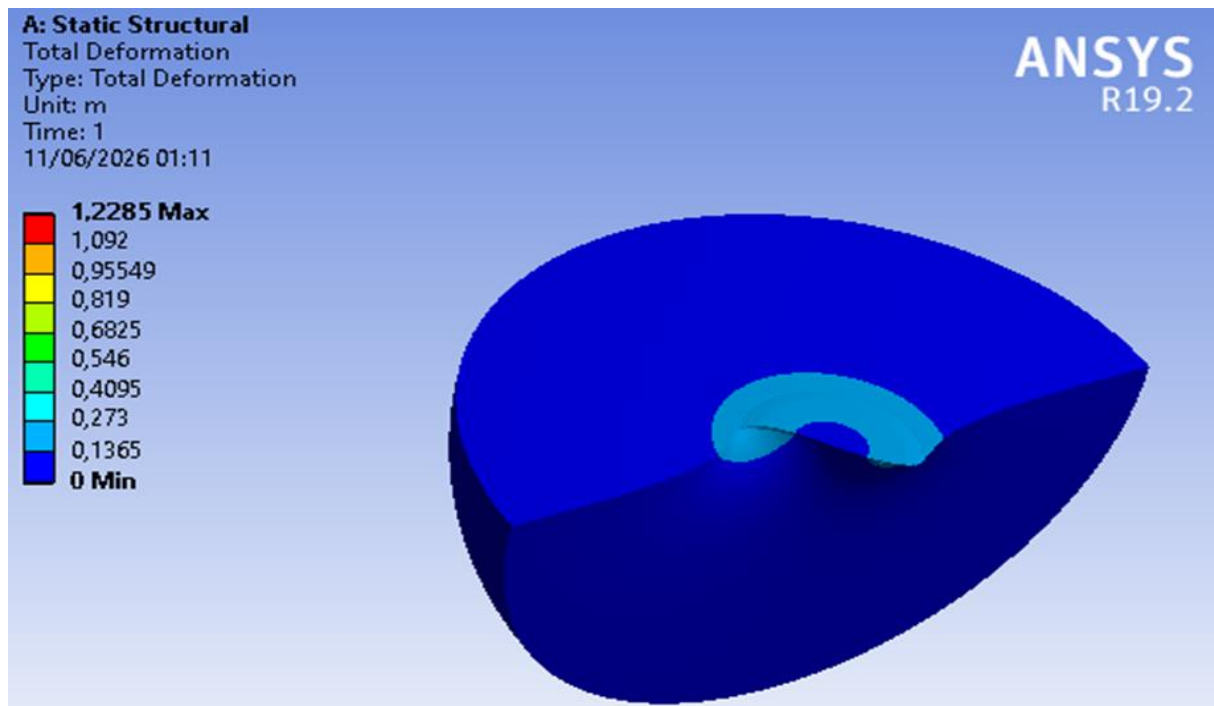


Figure III.15 : Champ de déplacement au niveau de l'inclusion.

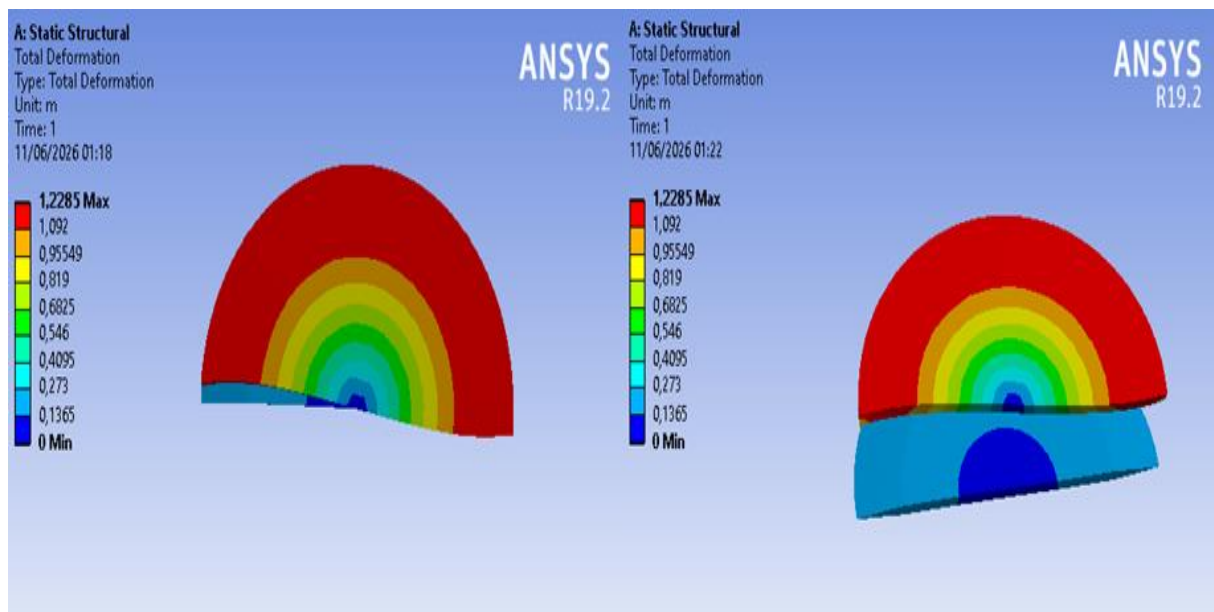


Figure III.16 : comparaison entre le déplacement de disque et de l'inclusion.

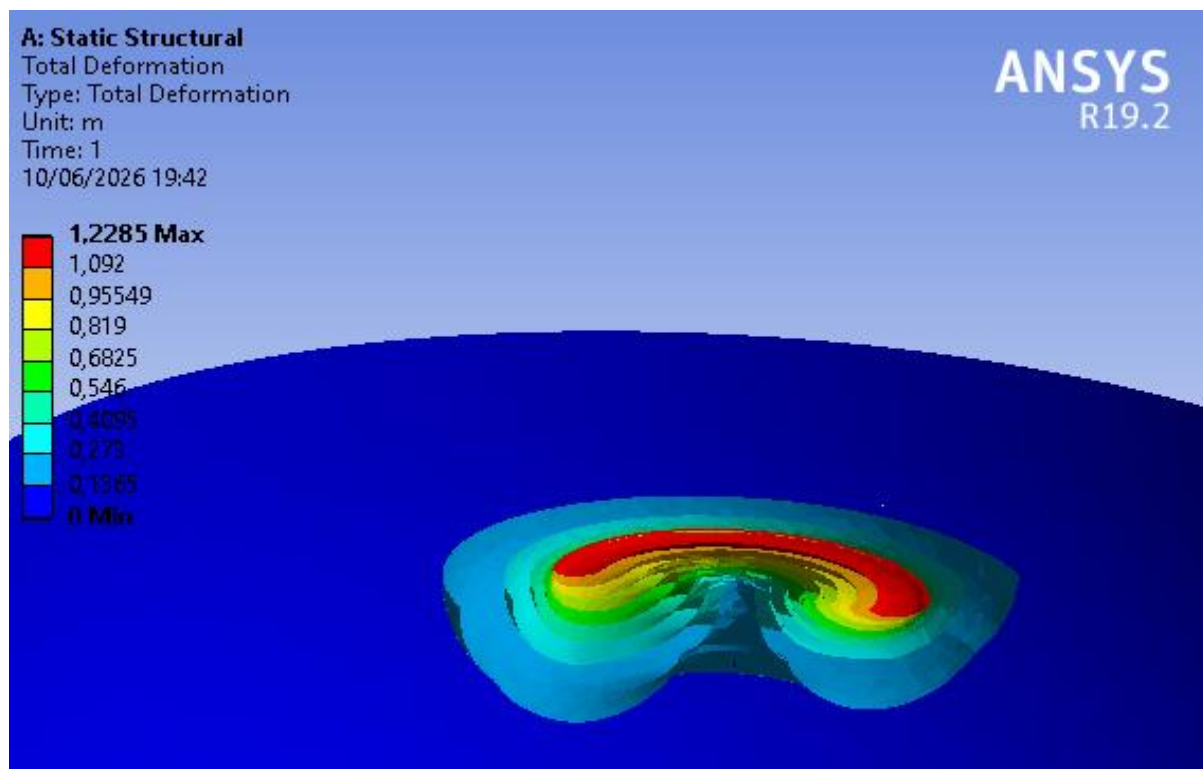


Figure III.17 : Champ de déplacement par l'isolation des surfaces.

➤ **Contrainte de cisaillement :**

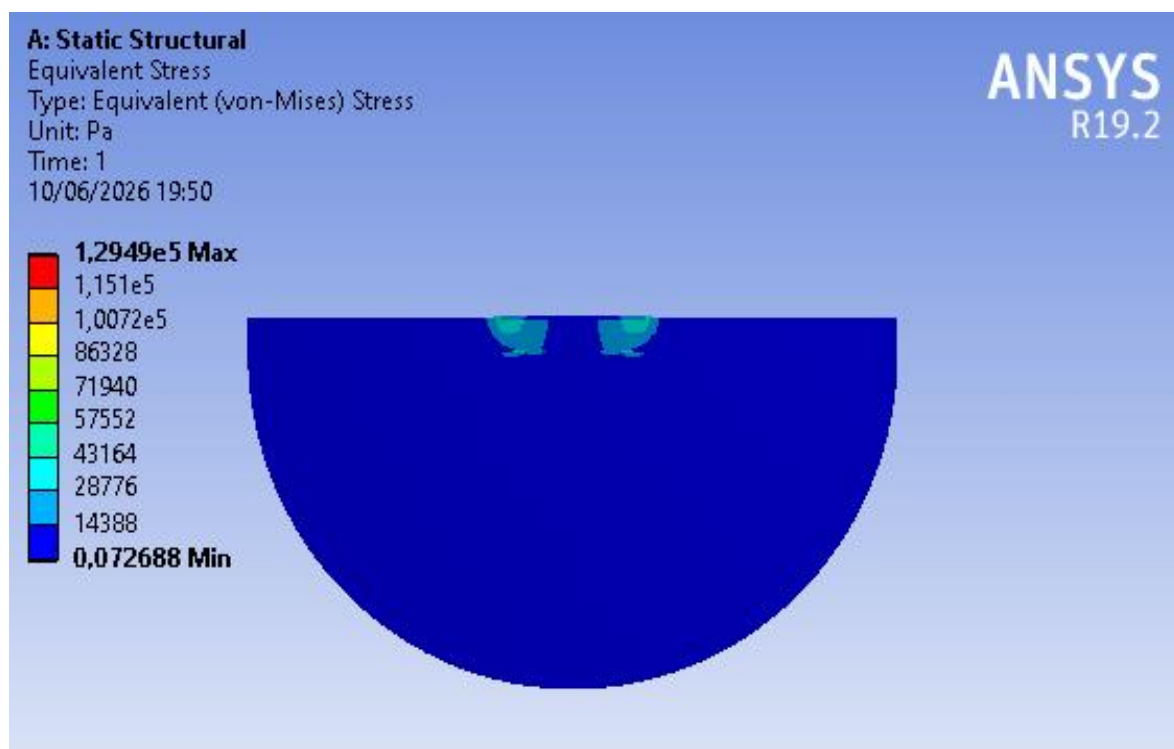


Figure III.18 : Contrainte de cisaillement.

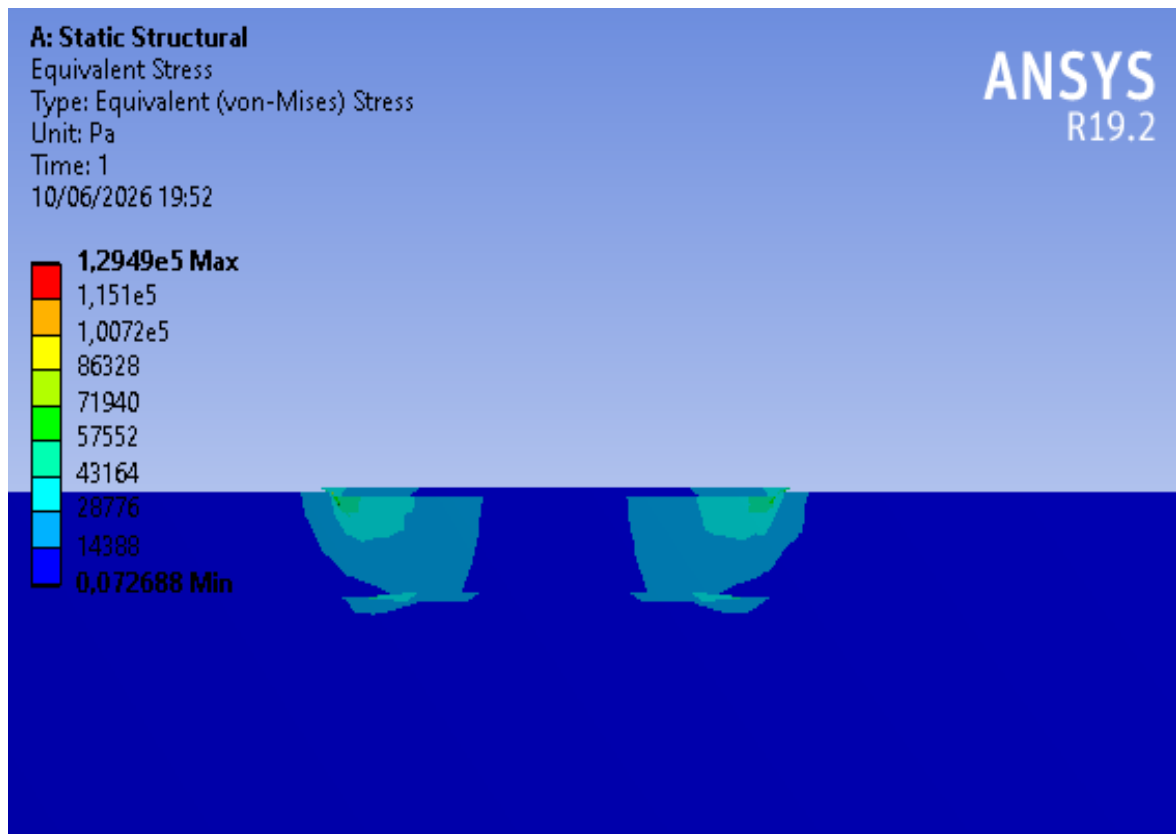


Figure III.19 : Agrandissement du champ de contraintes au voisinage de l'inclusion.

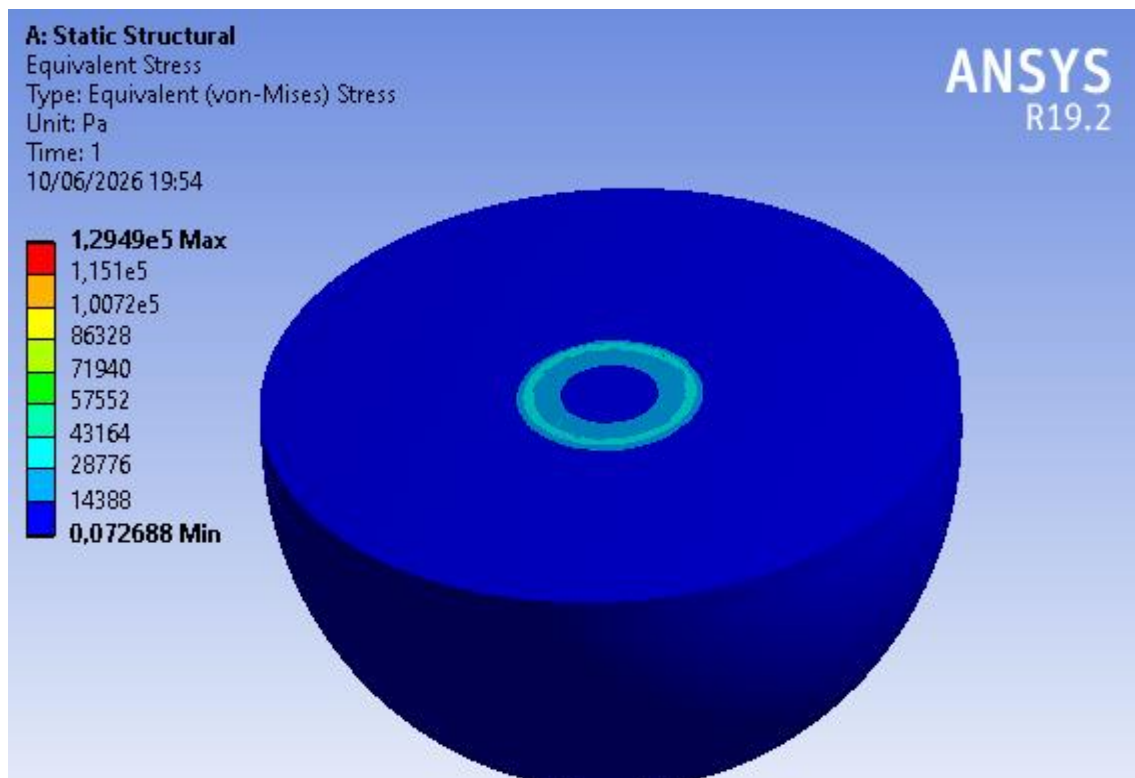


Figure III.20 : Contrainte de cisaillement au niveau de disque.

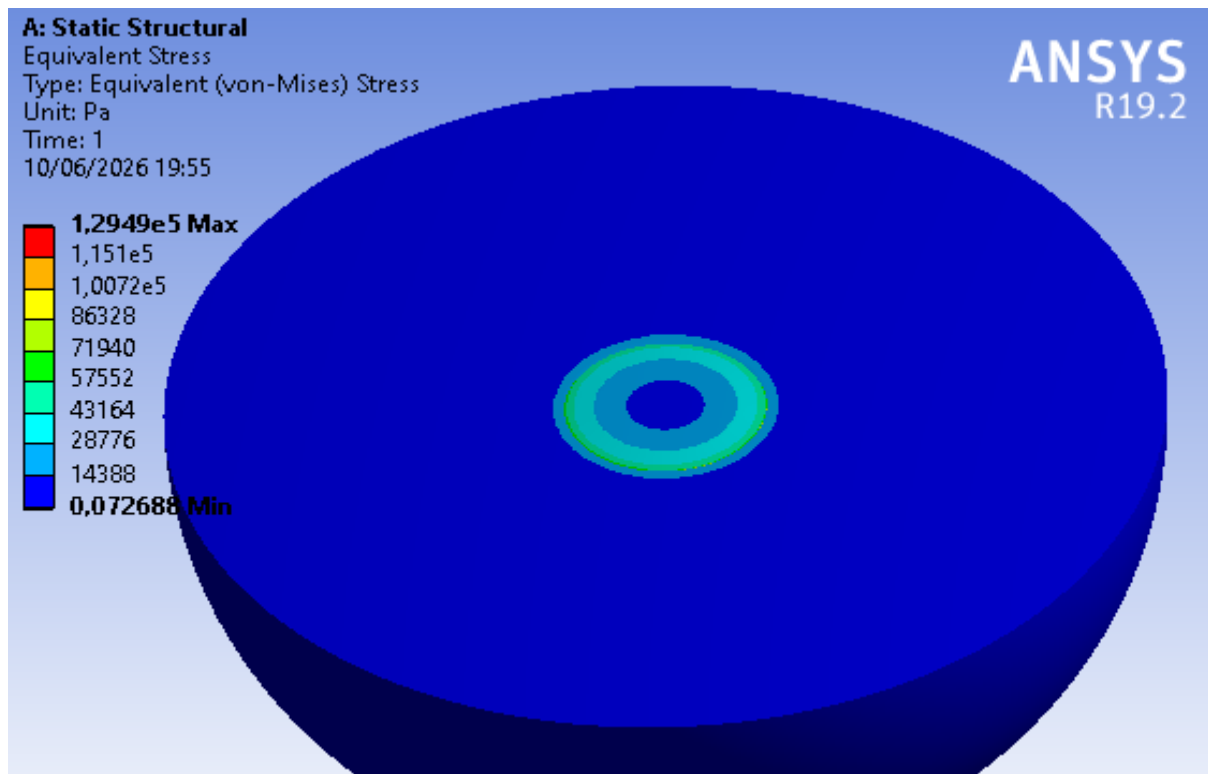


Figure III.21 : Contrainte de cisaillement au niveau de l'inclusion.

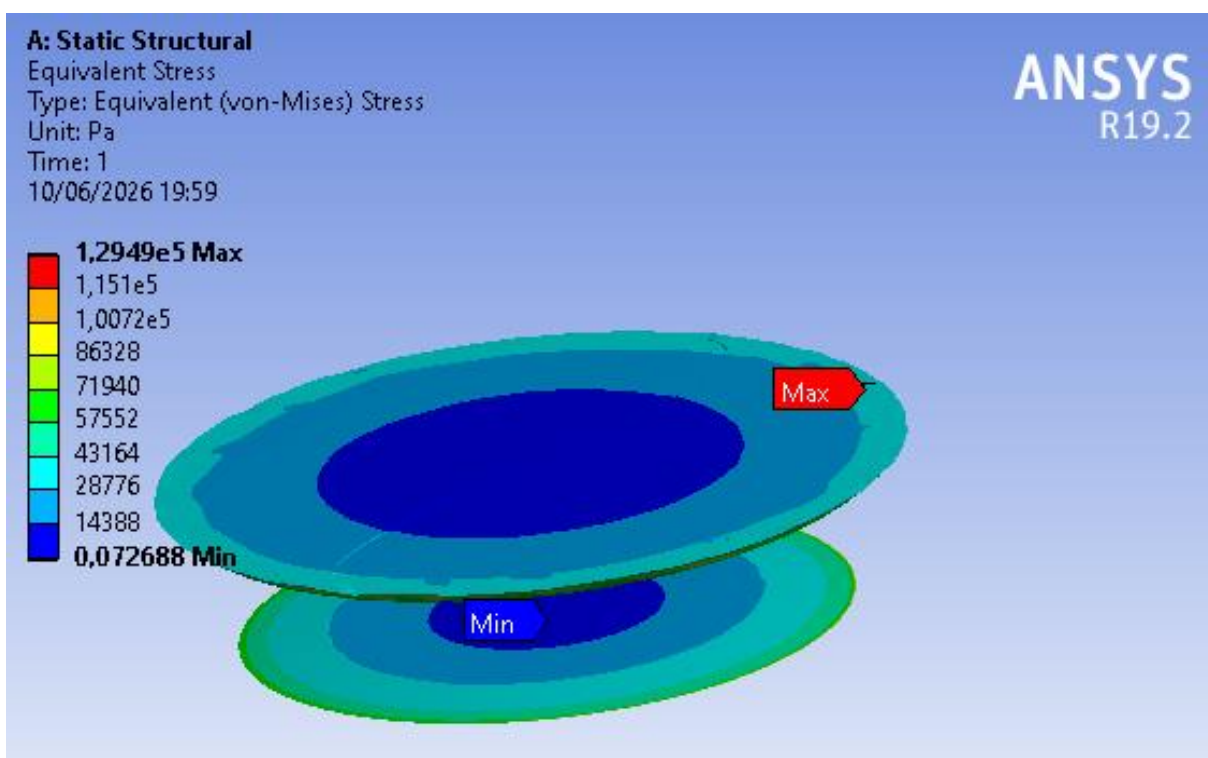


Figure III.22 : Contrainte de cisaillement au niveau de disque et de l'inclusion par l'isolation des autres volumes.

➤ Facteurs d'intensité du contrainte :

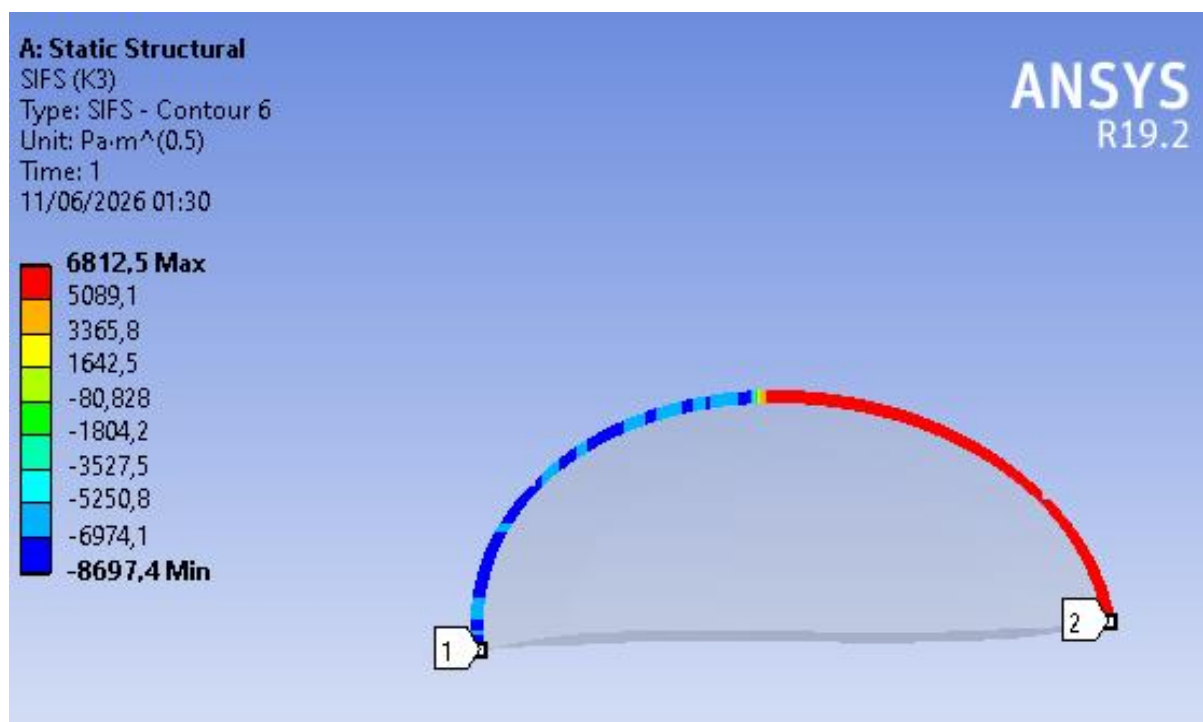


Figure III.23 : Facteurs d'intensité de contrainte en mode III.

III.15 Conclusion

Nous avons développé une méthode analytique et numérique pour résoudre le problème de torsion axisymétrique d'un bi-matériau avec inclusion interfaciale. Les points clés sont :

1. Formulation du problème sous forme d'équations intégrales duales
2. Introduction des fonctions auxiliaires selon la méthode de Copson-Sneddon
3. Transformation en un système de Fredholm de seconde espèce
4. Discrétisation par collocation avec quadrature de Gauss-Legendre
5. Résolution du système linéaire couplé pour obtenir les densités et le rapport ω/ω_0
6. Calcul des facteurs d'intensité de contrainte et du moment appliqué

La validation par éléments finis montre une excellente concordance, confirmant la robustesse et la précision de l'approche proposée. Cette méthode peut être étendue à des configurations plus complexes, telles que des inclusions multiples ou des matériaux anisotropes.

Conclusion Générale

Ce travail a été consacré à l'étude de la torsion axisymétrique d'un bi-matériau élastique contenant une inclusion interfaciale soumise à l'action d'un disque rigide circulaire, un problème qui trouve son intérêt dans de nombreuses applications de génie civil, de géomécanique et de mécanique des structures axisymétriques.

Dans un premier temps, nous avons posé les bases théoriques nécessaires à cette étude, en rappelant les notions fondamentales de la mécanique des milieux continus, de l'élasticité linéaire et de la mécanique de la rupture. Les outils mathématiques indispensables à la résolution du problème, à savoir les fonctions de Bessel, la transformation intégrale de Hankel, les équations intégrales de Fredholm ainsi que les formules de quadrature, ont ensuite été présentés et discutés.

La formulation du problème physique a permis de réduire le problème aux valeurs limites mixtes à un système d'équations intégrales duales, lequel a été transformé, grâce à l'introduction de fonctions auxiliaires selon la méthode de Copson-Sneddon, en un système d'équations intégrales de Fredholm de seconde espèce. La résolution numérique de ce système, par une méthode de collocation couplée à la quadrature de Gauss-Legendre, a permis de déterminer les champs de déplacement et de contrainte, ainsi que les facteurs d'intensité de contrainte caractérisant le comportement de la structure en torsion.

Afin de valider l'approche analytique et numérique développée, une simulation par éléments finis a été réalisée sous ANSYS Workbench. La comparaison des résultats issus des deux approches a montré une excellente concordance, confirmant ainsi la fiabilité, la robustesse et la précision de la méthode proposée pour l'analyse de ce type de problème en présence d'un bi-matériau et d'une inclusion interfaciale.

Perspectives

En perspective, ce travail pourrait être étendu à l'étude de configurations plus complexes, telles que la présence d'inclusions multiples, de fissures externes aux disques rigides, ou de matériaux à comportement plus complexes (viscoélasticité ou piézoélectricité). Il serait également intéressant d'examiner l'effet de chargements dynamiques ou cycliques sur le comportement du bi-matériau, ainsi que l'extension de la méthode à des géométries non axisymétriques.

Références bibliographiques

- [1]. **Menshykov, O.V., Menshykov, V.A. and Guz, I.A.:** The contact problem for an open Penny-shaped crack under normally incident tension-compression wave. *Eng. Fract. Mech.* 75(5), 1114-1126 (2008).
- [2]. **Selvadurai, A.P.S.:** Asymmetric displacements of a rigid disc inclusion embedded in a transversely isotropic elastic medium of infinite extent. *Int. J. Sci.* 18, 979-686 (1980).
- [3]. **Selvadurai, A.P.S.:** Rotary oscillations of a rigid disc inclusion embedded in an isotropic elastic infinite space. *Int. J. Solids. Struct.* 17, 493-498 (1981).
- [4]. **Reissner E., Sagoci H.F.:** Forced torsion oscillation of a half-space I, *Int. J. Appl. Phys.*, 15, (1944), 652–654.
- [5]. **Sneddon I.N.:** Note on a boundary value problem of Reissner and Sagoci, *Int. J. Appl. Phys.*, 18, (1947), 130–132.
- [6]. **Collins W.D.:** The forced torsional oscillations of an elastic halfspace and an elastic Stratum, *Pro. London. Math. Society*, 12, (1962), 226–244.
- [7]. **Gladwell G.M.L.:** The forced torsional vibration of an elastic stratum, *Int. J. Eng. Sci.*, 7, (1969), 1011–1024.
- [8]. **Pak R.Y.S., Saphores J.D.M.:** Torsion of a rigid disc in a half-space, *Int. J. Engng Sci.*, 29, (1991), 1–12.
- [9]. **Bacci A., Bennati, S.:** An approximate explicit solution for the local torsion of an elastic Layer, *Mech. Struct. Mach.*, 24, (1996), 21–38.
- [10]. **Singh B.M., Danyluk H.T., Vrbik J., Rokne J., Dhaliwal R.S.:** The Reissner-Sagoci Problem for a Non-homogeneous Half-space with a Surface Constraint, *Meccanica*, 38, (2003), 453–465.
- [11]. **Guo-cai W., Long-zhu C.J.:** Torsional oscillations of a rigid disc bonded to multilayered poroelastic medium, *Int. Zheijang. Univ.Sci.*, 6(3), (2005), 213–221.
- [12]. **Yu H.Y.:** Forced torsional oscillations of multilayered solids, *Int. J. Eng. Sci.*, 46, (2008), 250–259.
- [13]. **Pal P.C., Mandal D., Sen B.:** Torsional Oscillations of a Rigid Disc Embedded in a Transversely Isotropic Elastic Half-Space, *Adv. Theor. Appl. Mech.*, 4, (2011), 177–188.

- [14]. **Ahmadi S.F.; Eskandari M.:** Rocking rotation of a rigid disk embedded in a transversely isotropic half-space, *Civil Eng. Infra. J.*, 47, (2014), 125–138.
- [15]. **Sih G.C., Chen E.P.:** Torsion of a laminar composite debonded over a penny-shaped Area, *J. Franklin Inst.*, 293, (1972), 251–261.
- [16]. **Low R. D.:** On the torsion of elastic half space with embedded penny-shaped flaws, *J. Appl. Mech.*, 39, (1972), 786–790.
- [17]. **Dhawan G. K.:** On the torsion of elastic half-space with penny-shaped crack, *Defense. Sci. J.*, 24, (1974), 15–22.
- [18]. **Basu S.; Mandal S.C.:** Impact of Torsional Load on a Penny-Shaped Crack in an Elastic Layer Sandwiched Between Two Elastic Half-Space, *Int. J. Appl. Comput. Math*, 2, (2016), 533–543.
- [19]. **Madani, F., Kebli, B.:** Axisymmetric Torsion of an Internally Cracked Elastic Medium By Two Embedded Rigid Discs, *Mechanics and Mechanical Engineering*, 21, (2017), 363–377.
- [20]. **I. Mandel.** *Cours de mécanique des milieux continus.* Jacques Gabay, 1994.
- [21]. **J.C. Charmet.** *Mécanique de solide et des matériaux.* Dunod, 2004.
- [22]. **S. Timoshenko et J. Goodier.** *Theory of elasticity.* McGraw-Hill, 1970.
- [23]. **B. Barthélémy.** *Notions pratique de mécanique de la rupture.* Eyrolles, 1980.
- [24]. **Dean G. Duffy.** *Mixed boundary value problems.* Chapman Hall/CRC, 2008.
- [25]. **F. Bowman.** *Introduction to Bessel function.* Doverpublication Inc, 1985.
- [26]. **L.T. Rachdi et A. Rouz.** Fourier Hankel Transform and the Riemannian Spaces in the Half Space. *Int. J. Math. Analysis Sci.* Vol.22, 2008.
- [27]. **P Viot.** *Méthodes d’analyse numérique.* Dunod, 2003.
- [28]. **Debnath, L., Bhatta, D.:** *Integral transforms and their applications,* Chapman Hall, CRC, (2007).
- [29]. **Kythe, P. K.; Puri, P.:** *Computational methods for linear integral equations.* Birkhäuser, Boston (2002)
- [30]. **Atkinson, K.:** *The numerical solution of integral equations of the second kind.* Cambridge, University Press. New York (1997)

- [31] **Timoshenko, S. P., & Goodier, J. N.** (1951). *Theory of Elasticity*. 2nd ed. New York McGraw-Hill.
- [32] **Landau, L. D., & Lifshitz, E. M.** (1986). *Theory of Elasticity*. 3rd ed. Course of Theoretical Physics, Vol. 7. Oxford : Pergamon Press.
- [33] **Barber, J. R.** (2010). *Elasticity*. 3rd ed. Solid Mechanics and Its Applications, Vol. 172. Dordrecht: Springer.
- [34] **Ugural, A. C., & Fenster, S. K.** (2011). *Advanced Mechanics of Materials and Applied Elasticity*. 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- [35] **Mase, G. E., & Mase, G. T.** (1999). *Continuum Mechanics for Engineers*. 2nd ed. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [36] **Suo, Z.** (2000). *Mechanics of Materials*. Cambridge, MA: Harvard University.
- [37] **Dundurs, J.** (1969). *Elastic constants of bimaterial systems*. Vol. 36, pp. 650–652. Journal of Applied Mechanics.
- [38] **Anderson, T. L.** (2017). *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. 4th ed. Boca Raton, FL: CRC Press.
- [39] **Broek, D.** (1986). *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. 4th ed. Dordrecht: Martinus Nijhoff Publishers.
- [40] **F. Madani, B. Kebli.** (2020). The Reissner-Sagoci problem for an interfacial crack in an elastic bilayer medium under torsion of an embedded rigid circular disc. *Theoretical and Applied Fracture Mechanics*, 110, 102825.
- [41] **F. Madani, B. Kebli.** (2019). Axisymmetric torsion of an elastic layer sandwiched between two elastic half-spaces with two interfaced cracks. *Studia Geotechnica et Mechanica*, 41(2).
- [42] **L. Zeddami, A. Kirad, F. Madani, BGN.Muthanna.** (2024). The problem of axisymmetric torsion of a rigid disk parallel to an internally penny crack and interface in a bilayer medium. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 31(29), 11191-11205.
- [43] **L. Zeddami, A. Kirad, F. Madani, BGN.Muthanna.** (2025). Impact of sudden torsional load of a rigid disk parallel to an internal penny-shaped crack in a finite elastic medium. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 32(14), 3382-3392.
- [43] **B.Kebli, Z.Baka.** (2019). Annular crack in an elastic half-space. *International Journal of Engineering Science* 134, 117-147.
- [44]. Help ANSYS version 17.1

Annexe 01

1. Equations intégrales linéaires et leurs classifications

On appelle équation intégrale linéaire une équation où la fonction inconnue figure sous le signe $\int$. C'est en générale l'équation par rapport à φ .

$$\theta(x) = f(x) + \lambda \int_T K(x, t) \varphi(t) dt \quad (01)$$

Avec $f(x)$, $K(x; y)$ des fonctions connues, λ est un paramètre numérique et $\varphi(x)$ la fonction inconnue. T un ensemble borné fermé d'un espace euclidien à n dimensions (x et t des points de cet espace), elles peuvent se mettre en première espèce comme en seconde espèce, homogène ou non homogène, aussi elles peuvent être de Fredholm ou bien de Volterra.

1.1 Equations intégrales de Fredholm :

On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce une équation de la forme :

$$\theta(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (02)$$

Où $\varphi(x)$ est la fonction inconnue, $K(x; y)$ et $f(x)$ des fonctions données. Si $f(x) = 0$, l'équation (2) est dite non homogène, dans le cas contraire, l'équation intégrale (2) s'écrit :

$$\theta(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (03)$$

Et on dit qu'elle est homogène. Une équation intégrale de la forme :

$$f(x) = \int_a^b K(x, t) \varphi(t) dt \quad (04)$$

Où la fonction inconnue $\varphi(t)$ n'intervient que sous le signe d'intégration, s'appelle équation intégrale de Fredholm de première espèce.

1.2 Équations intégrales de Volterra :

Une équation à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (05)$$

Est appelée équation intégrale de Volterra de seconde espèce ; en fait c'est un cas particulier de l'équation intégrale de Fredholm, il suffit de prendre le noyau $K(x, t) = 0$ pour $x < t$. Si $f(x) =$

0, l'équation (4) s'écrit :

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (06)$$

Et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce. Une équation, à une inconnue $\varphi(x)$, de la forme :

$$f(x) = \lambda \int_a^x K(x, t) \varphi(t) dt \quad (07)$$

Est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

2. Résolution numérique des équations intégrale du second type

Indiquons quelques méthodes classiques de résolution numérique des équations intégrales, pour des données assez régulières, en suite on prend la formule de quadrature suivante :

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{j=0}^N A_j \varphi(x_j) \quad (08)$$

Donc l'idée est de remplacer l'intégrale par une somme finie, avec une subdivision de $[a, b] = \{x_j, j=1, 2, \dots, N\}$, et $A_1, \dots, A_N$: sont des coefficients indépendants de la forme de la fonction φ , on pose $x = x_j$ dans l'équation (1) et en utilisant la formule quadratique précédente, on obtient l'équation suivante :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^N A_j K(x_i, t_j) \varphi(t_j), i = 0, 1 \dots N \quad (09)$$

Il s'agit donc d'un système linéaire algébrique de $N+1$ équations à $N+1$ inconnues et $f(x)$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$, sont les valeurs approchées de la solution $f(x)$. Les coefficients A_j sont déterminés par l'une des formules suivantes :

1) La formule des rectangles

$$x_i = a + ih; i = 0, 1, 2 \dots N, \text{ on a } A_0 = A_1 = \dots A_N = h = \frac{b-a}{N} \quad (10)$$

2) La formule des trapèzes

$$x_i = a + ih; i = 0, 1, 2 \dots N, \text{ on a } A_0 = A_N = \frac{h}{2}, A_1 = \dots = A_{N-1} = h \quad (11)$$

3) La formule de Simpson (N est pair).

Pour les points $x_i = a + ih$, $i = 0, 1, 2, \dots, N$, on a

$$A_0 = A_N = \frac{h}{3}, A_1 = A_3 = A_5 \dots A_{N-1} = \frac{2h}{3}, \quad A_2 = A_4 = A_6, A_{N-2} = \frac{4h}{3} \quad (12)$$

2.1 Méthode de Simpson

Le calcul approché de l'intégrale se fait par la méthode de Simpson :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^N A_j K(x_i, t_j) \varphi(t_j), \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (13)$$

$$A_0 = A_N = \frac{h}{3}, A_1 = A_3 = A_5 \dots A_{N-1} = \frac{2h}{3}, \quad A_2 = A_4 = A_6, A_{N-2} = \frac{4h}{3} \quad (14)$$

Où N est pair et $h = (b - a) / N$

Si bien que pour chaque i, l'équation du problème approché s'écrit

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \frac{h}{3} \left(k(x_i, t_0) \varphi_0 + 2 \sum_{j=0}^{\frac{N}{2}-1} K(x_i, t_{2j+1}) \varphi_{2j+1} + 4 \sum_{j=1}^{\frac{N}{2}-1} (x_i, t_{2j}) \varphi_{2j} + k(x_i, t_n) \varphi_n \right), i = 0, 1 \dots N \quad (15)$$

Où φ_j est l'approximation de $\varphi(x_j)$, ce qui conduit au problème approché :

$$\left(I - \frac{h}{3} A_N \right) \Phi = F \quad (16)$$

A_N : Est la matrice $K(x_i, x_j)$, K est une fonction définie et continue sur R :

$$A_N = \begin{pmatrix} k(x_0, x_0) & 2k(x_0, x_1) & 4k(x_0, x_2) & \dots & k(x_0, x_N) \\ k(x_1, x_0) & 2k(x_1, x_1) & 4k(x_1, x_2) & \dots & k(x_1, x_N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(x_N, x_0) & 2k(x_N, x_1) & 4k(x_N, x_2) & \dots & k(x_N, x_N) \end{pmatrix} \quad (17)$$

Où I est la matrice identité.

$$F = (f(x_1), f(x_2) \dots f(x_{N+1}))^T \quad (18)$$

Et :

$\Phi = (\Phi_0, \Phi_2 \dots \Phi_N) \in R^{N+1}$ Est l'inconnue.

2.2 Méthode de trapèze

Ainsi la formule générale de l'intégrale par la méthode de trapèze :

$$\int_a^b \varphi(t) dt = \frac{h}{2} \left(\varphi(0) + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \varphi(x_j) + \varphi(N) \right) \quad (19)$$

Si bien que pour chaque i , l'équation du problème approché s'écrit :

$$\varphi_i = f(x_i) + \frac{h}{2} \left(k(x_i, x_0)u_0 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} k(x_i, x_j)\varphi_j + k(x_i, x_N)u_N \right), \quad i = 0, 1, 2 \dots N \quad (20)$$

Où φ_j est l'approximation de $\varphi(x_j)$, ce qui conduit au problème approché :

$$\left(I - \frac{h}{2} A_N \right) \Phi = F \quad (21)$$

A_N : Est la matrice $K(x_i, x_j)$, K est une fonction définie et continue sur

$$A_N = \begin{pmatrix} k(x_0, x_0) & 2k(x_0, x_1) & \dots & k(x_0, x_N) \\ k(x_1, x_0) & 2k(x_1, x_1) & \dots & k(x_1, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(x_N, x_0) & 2k(x_N, x_1) & \dots & k(x_N, x_N) \end{pmatrix} \quad (22)$$

Où I est la matrice identité.

$$F = (f(x_1), f(x_2) \dots f(x_{N+1}))^T \quad (23)$$

Et : $\Phi = (\Phi_0, \Phi_2, \dots \Phi_N) \in R^{N+1}$ est l'inconnue.

2.3 Méthode des rectangles

La formule générale de l'intégrale par la méthode de rectangle :

$$\varphi(x_i) = f(x_i) + \lambda \sum_{j=0}^N A_j K(x_i, t_j) \varphi(t_j), \quad i = 0, 1 \dots N \quad (24)$$

$$A_0 = A_1 = \dots = A_N = h = \frac{b - a}{N} \quad (25)$$

Pour chaque i , l'équation du problème approché s'écrit :

$$\varphi_i = f(x_i) + h \left(\sum_{j=0}^N k(x_i, x_j) \varphi_j \right), \quad i = 0, 1, 2 \dots N \quad (26)$$

Où φ_j est l'approximation de $\varphi(x_j)$, ce qui conduit au problème approché :

$$(I - h A_N) \Phi = F \quad (27)$$

A_N : Est la matrice $K(x_i, x_j)$, K est une fonction définie et continue sur R

$$A_N = \begin{pmatrix} k(x_0, x_0) & k(x_0, x_1) & \dots & k(x_0, x_N) \\ k(x_1, x_0) & k(x_1, x_1) & \dots & k(x_1, x_N) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ k(x_N, x_0) & k(x_N, x_1) & \dots & k(x_N, x_N) \end{pmatrix} \quad (28)$$

Où I est la matrice identité.

$$F = (f(x_1), f(x_2) \dots f(x_{N+1}))^T \quad (29)$$

Et : $\Phi = (\Phi_0, \Phi_2 \dots \Phi_N) \in R^{N+1}$ est l'inconnue.

3 Résultats numériques

3.1 Exemple 1

Équation intégrale de Love, est généralement définis comme suit :

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{d}{d^2 + (x-t)^2} \varphi(t) dt, \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (30)$$

On Considère cette équation en particulier le cas lorsque $d = 1$ et $f(x) = 1$. Nous avons résolu cette équation avec la méthode de Simpson. Les tableaux suivants présentent la solution approximative de $x = 0$, $x = \pm 1/4$, $x = \pm 1/2$, $x = \pm 3/4$, $x = \pm 1$. Les résultats trouvés ont été comparés avec le travail de J. *Saberi-Nadjafi*, M. *Heidari* qui utilise la méthode de trapèze modifiée. Après exécution du programme

3.2 Le programme de résolution de l'équation de Fredholm sous Matlab par la méthode de Simpson, trapèze et rectangle.

```
a=-1;
b=1;
N=64;
h=(b-a)/N;
%----- méthode de simpson -----
for i=1:N+1
for j=1:N+1
    x=a+(i-1)*h
    t=a+(j-1)*h;
    K(i,j) = 1/(1+(x-t)^2);
end
f(i)=1
F=f';
end
K(:,2:2:N)=(1/pi)*4*K(:,2:2:N);
K(:,3:2:N-1)=(1/pi)*2*K(:,3:2:N-1);
U=(eye(N+1)-h*K/3)\F
```

	N=16		N=32		N=64	
x	Simp	Tra.mod	Simp	Tra.mod	Simp	Tra.m
-1	1.7337	1.63969	1.6854	1.63969	1.6622	1.63970
-3/4	1.8513	1.75195	1.8002	1.75195	1.7625	1.75195
-1/2	1.9425	1.84238	1.8911	1.84238	1.8568	1.84238
-1/4	1.9989	1.89961	1.9479	1.89961	1.9183	1.89962
0	2.0178	1.91903	1.9671	1.91903	1.9424	1.91903
1/4	1.9989	1.89961	1.9479	1.89961	1.9183	1.89962
1/2	1.9425	1.84238	1.8911	1.84238	1.8568	1.84238
3/4	1.8513	1.75195	1.8002	1.75195	1.7625	1.75195
1	1.7337	1.63969	1.6854	1.63969	1.6622	1.63970

Tableau1 : solution de l'équation de love par la méthode se Simpson

3.3 Exemple 2

On considère l'équation (exemple de livre 'Linear and Nonlinear Integral Equations' Abdul-Majid Wazwaz), suivant :

$$\varphi(x) = -2 - 3x + \int_0^1 (3x + t)\varphi(t)dt$$

La solution exacte de l'équation est $\square(x) \square 6x$ n = 16 et h=1/16, on applique dans Matlab le programme des méthodes de Simpson, trapèze et rectangles suivant :

```
clear all
a=0;
h=1;

N= 16
h=(b-a)/N;
%----- SIMPSON -----
for i=1:N+1
for j=1:N+1
x=a+(i-1)*h
t=a+(j-1)*h;
K(i,j) = 3*x+t;

end
f(i)=-2-3*x;
F=f';
end
K(:,2:2:N)-4*K(:,2:2:N);
K(:,3:2:N-1)-2*K(:,3:2:N-1);
U=(eye(N+1)-h*K/3)\F

%-----RECTANGLE-----
for i=1:N+1
for j=1:N+1
x=a+(i-1)*h
t=a+(j-1)*h;
K(i,j) = 3*x+t;
f(i)=-2-3*x;
F=f';
end
end
V=(eye(N+1)-h*K)\F

%-----trapèze-----
for i=1:N+1
for j=1:N+1
x=a+(i-1)*h
t=a+(j-1)*h;
K(i,j) = 3*x+t;
f(i)=-2-3*x;
F=f';
end
end
K(:,2:N)-2*K(:,2:N);
W=(eye(N+1)-h*K/2)\F
%-----
x=a:h:b;
y=6*x;
% plot(x,cos(x),'-ro',x,sin(x),'-.b')
plot(x,U,'ro',x,W,'r+',x,V,'-.b',x,y,'-.b')
```

x, N=16	La solution numérique par Simpson	La solution numérique par Trapèze	La solution numérique par rectangles	La solution exacte
0,0000	0.0000000000000000	00.001560062402496	-0.06363713294406	0
0.0625	0.3750000000000000	0.375975039001560	0.27350427350427	0.3750000000000000
0.1250	0.7500000000000000	0.750390015600624	0.61064567995261	0.7500000000000000
0.1875	1.1250000000000000	1.124804992199688	0.94778708640094	1.1250000000000000
0.2500	1.5000000000000000	1.499219968798752	1.28492849284928	1.5000000000000000
0.3125	1.8750000000000000	1.873634945397816	1.62206989929762	1.8750000000000000
0.3750	2.2500000000000000	2.248049921996879	1.95921130574595	2.2500000000000000
0.4375	2.6250000000000000	2.622464898595945	2.29635271219429	2.6250000000000000
0.5000	3.0000000000000000	2.996879875195007	2.63349411864263	3.0000000000000000
0.5625	3.3749999999999998	3.371294851794071	2.97063552509096	3.3750000000000000
0.6250	3.7499999999999998	3.745709828393138	3.30777693153930	3.7500000000000000
0.6875	4.1250000000000004	4.120124804992194	3.64491833798764	4.1250000000000000
0.7500	4.5000000000000001	4.494539781591253	3.98205974443598	4.5000000000000000
0.8125	4.8750000000000003	4.868954758190330	4.31920115088432	4.8750000000000000
0.875	5.2500000000000000	5.243369734789395	4.65634255733265	5.2500000000000000
0.9375	5.6249999999999996	5.617784711388463	4.99348396378099	5.6250000000000000
1	5.9999999999999998	5.992199687987519	5.33062537022932	6.0000000000000000

Tableau02 : solution de l'équation (24) par la méthode se Simpson, trapèze et rectangles

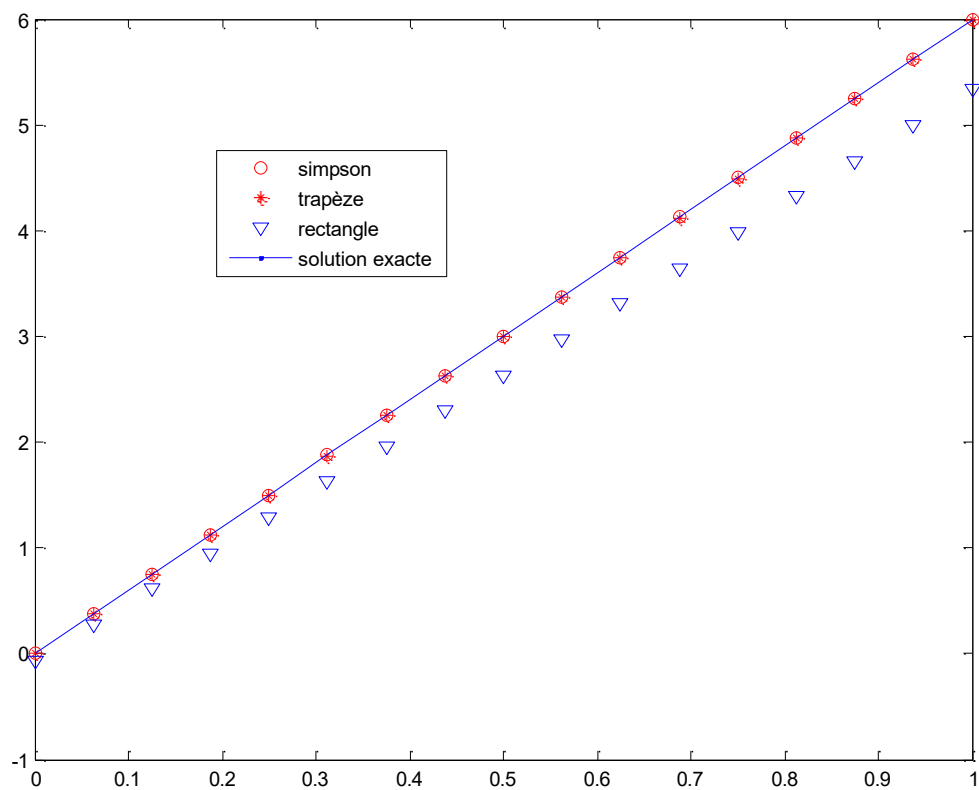


Figure 01 : Solution de l'équation (24) par la méthode se Simpson, trapèze et rectangle

Annexe 02

1. Les étapes du logiciel

1.1 Création d'un nouveau projet – Analyse Statique Structurale

Ouverture d'ANSYS Workbench. Dans la fenêtre « **Project Schematic** », on sélectionne le module « **Static Structural** » depuis la boîte à outils « **Analysis Systems** » (panneau gauche) et le fait glisser dans l'espace de travail. Ce module regroupe toutes les étapes nécessaires : Engineering Data, Geometry, Model, Setup, Solution et Results.

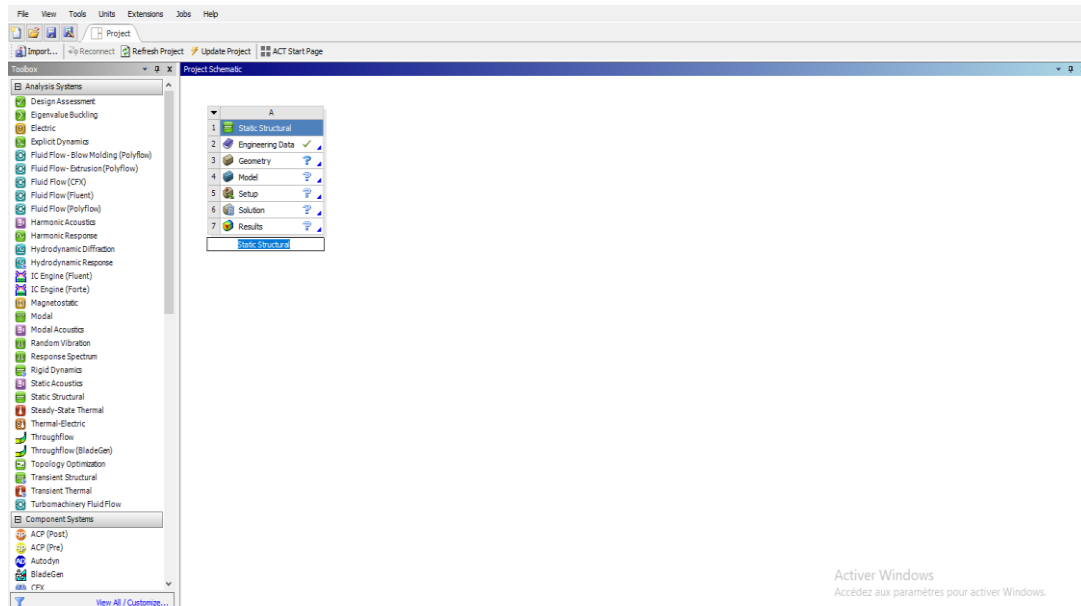


Figure 01 : interface de la création d'un projet

1.2 Accès aux données matériaux (Engineering Data)

Un clic droit sur la cellule « **Engineering Data** » (ligne 2 du projet) affiche un menu contextuel. Choisit « **Edit...** » pour ouvrir l'éditeur de matériaux et commencer à définir les propriétés mécaniques des matériaux de la simulation.

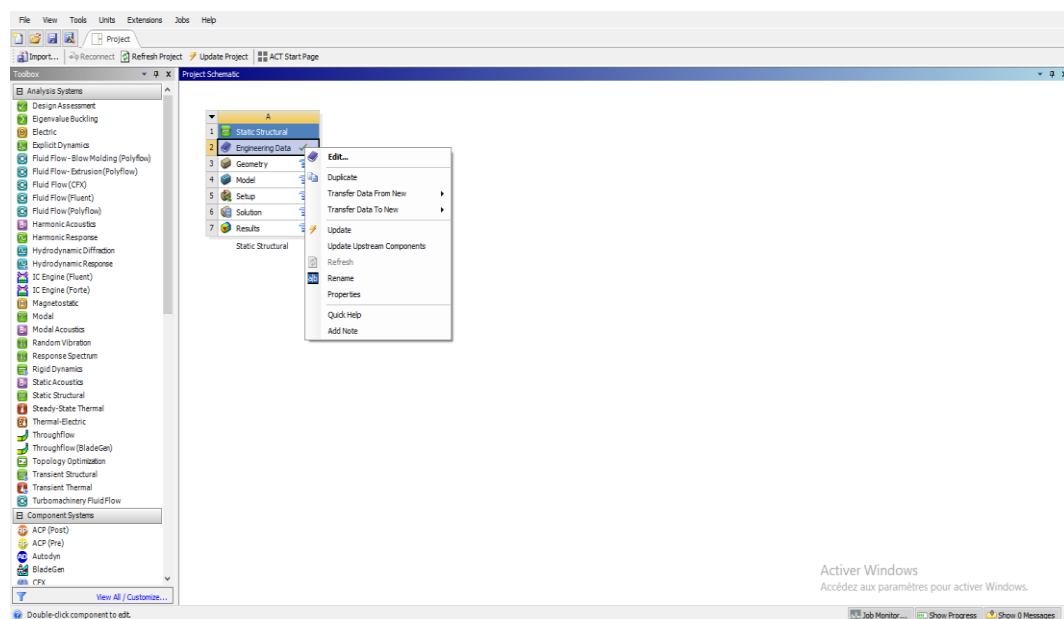


Figure 02 : la cellule Engineering Data pour définir les propriétés des matériaux.

1.3 Définition de trois matériaux

Trois matériaux sont ajoutés dans la liste : « **material 1** », « **material 2** » et « **material 3** ». Chaque matériau correspond à une couche ou un composant différent du modèle géologique ou structural étudié. Le bouton « Click here to **add a new material** » permet d'en ajouter d'autres si nécessaire.

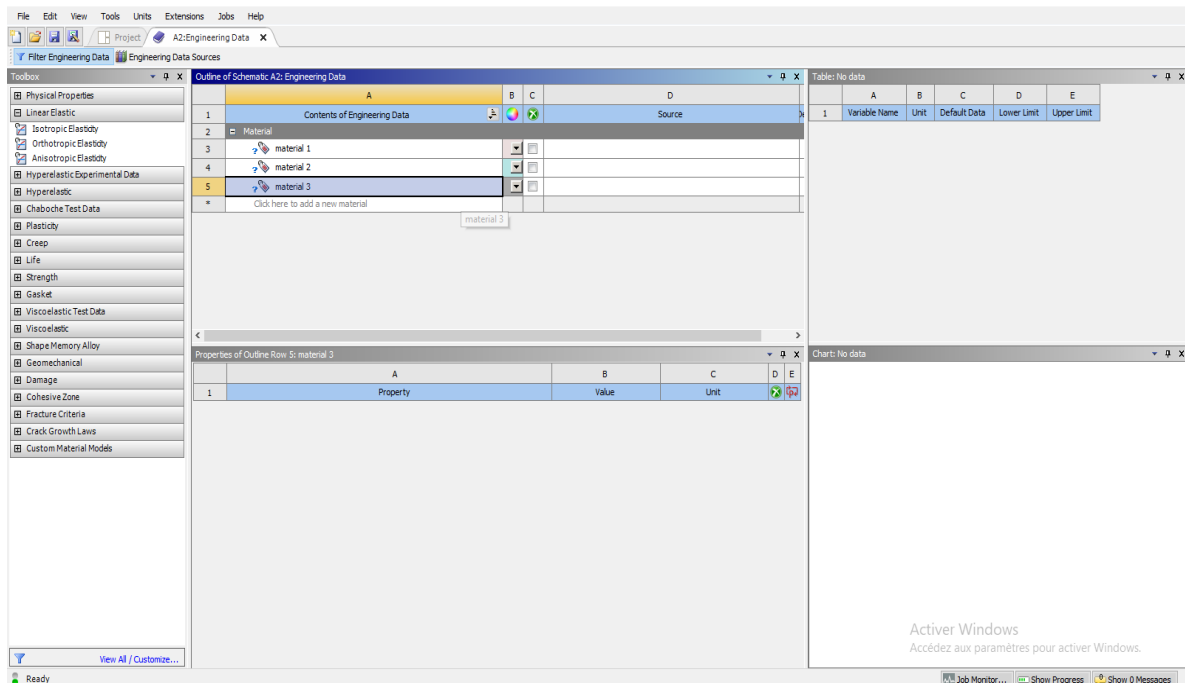


Figure 03 : Interface de l'éditeur Engineering Data pour la création des matériaux.

1.4 Sélection des propriétés : matériel 1 (Isotropic Elasticity)

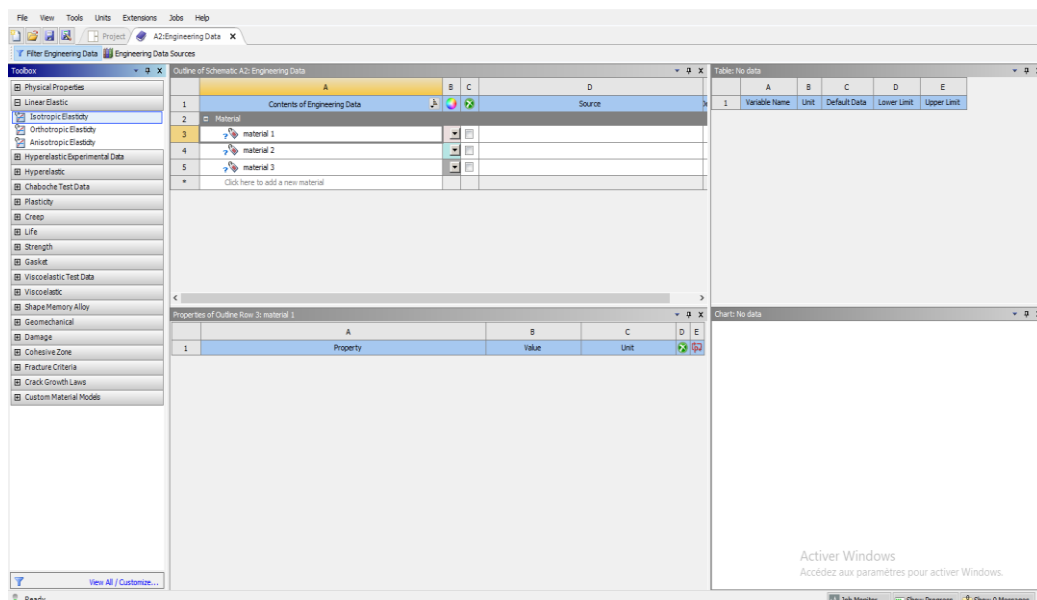


Figure 04 : Définition de trois matériaux

Pour le matériau 1, on sélectionne « **Isotropic Elasticity** » dans la catégorie « **Linear Elastic** » de la boîte à outils. Cette action associe un comportement élastique isotrope au premier matériau, faisant apparaître les champs de saisie des propriétés mécaniques dans le panneau inférieur.

1.5 Propriétés mécaniques de matériel 1 : Module de Young et Poisson

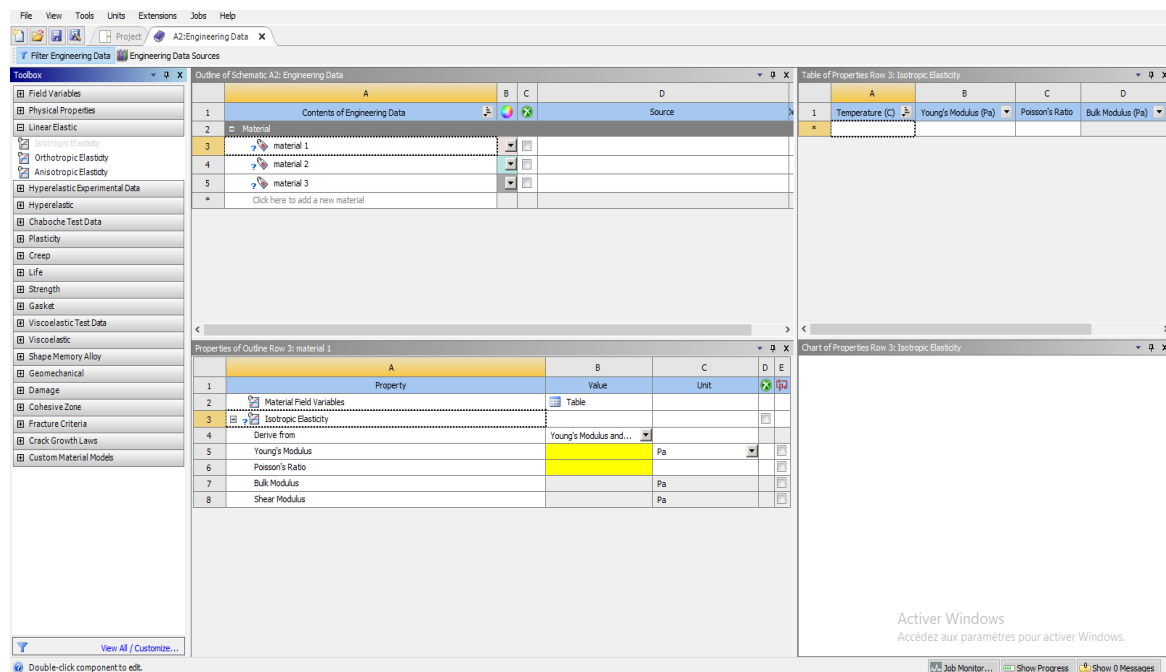


Figure 05 : Sélection des propriétés pour trois matériaux

Après l'affectation d'Isotropic Elasticity, les propriétés détaillées apparaissent dans le panneau inférieur. Les propriétés mécaniques de **matériel 1** sont saisies : **Module de Young** = 2×10^5 Pa, **Coefficient de Poisson** = 0,3. ANSYS calcule automatiquement le Module de compressibilité (**Bulk Modulus** = $1,6667 \times 10^5$ Pa) et le **Module de cisaillement** (**Shear Modulus** = 76923 Pa). Ces valeurs définissent un matériau relativement souple, similaire à un sol ou à une roche sédimentaire.

Les propriétés mécaniques de **matériel 2** sont saisies : **Module de Young** = 4×10^5 Pa, **Coefficient de Poisson** = 0,3. Les valeurs dérivées calculées automatiquement sont : **Bulk Modulus** = $3,3333 \times 10^5$ Pa et **Shear Modulus** = $1,5385 \times 10^5$ Pa. Ce matériau est deux fois plus rigide que le matériau 1.

Les propriétés mécaniques de **matériel 3** (le plus rigide des trois) sont saisies : **Module de Young** = 2×10^6 Pa, **Coefficient de Poisson** = 0,3. Les valeurs calculées automatiquement sont : **Bulk Modulus** = $1,6667 \times 10^6$ Pa et **Shear Modulus** = $7,6923 \times 10^5$ Pa. Ce matériau représente typiquement une roche dure ou un matériau de fondation compact.

1.6 Interface Design Modeler : Espace de travail initial

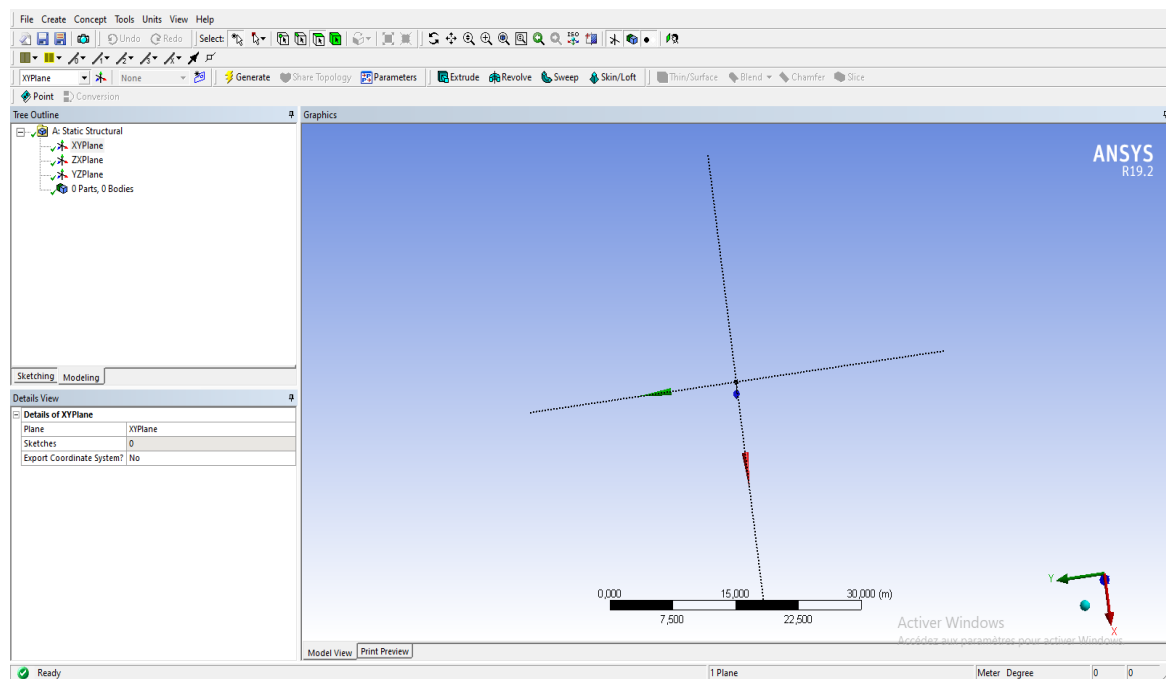


Figure 06 : Interface initiale de DesignModeler

Le menu contextuel sur « **Geometry** » propose également l'option « **New DesignModeler Geometry...** ». Dans cette simulation, on choisit finalement **DesignModeler** (indication dans la barre de statut en bas : « **Starting DesignModeler...** »).

L'environnement **DesignModeler** s'ouvre avec un espace de travail vide. L'arbre de structure (Tree Outline) affiche les trois plans de référence : **XYPlane**, **ZXPlane** et **YZPlane**. L'échelle (0 à 30 m) indique que la simulation se situe à l'échelle métrique, cohérente avec un modèle géologique.

1.7 Choix de la Sphère

Menu Create > Primitives

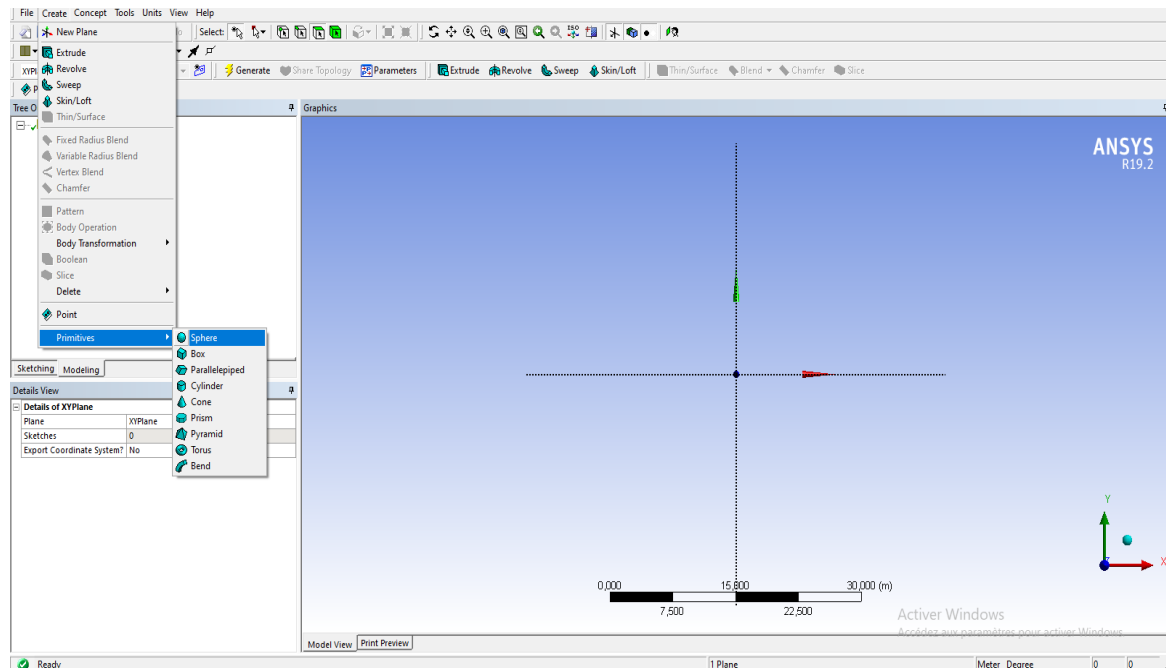


Figure 07 : Sélection de la primitive Sphere.

Dans le menu « **Create** », on accède à « **Primitives** » pour créer une forme géométrique de base. Parmi les primitives disponibles (Sphere, Box, Parallelepiped, Cylinder, Cone, Prism, Pyramid, Torus, Bend), l'option « **Sphere** » est mise en surbrillance bleue et sélectionnée.

1.8 Paramètres de la première sphère (Sphere1)

La sphère est créée et apparaît dans l'arbre sous le nom « **Sphere1** ». Dans le panneau Details View, les paramètres sont définis : Base Plane = **XYPlane**, Origin = **(0, 0, 0)**, **Radius** = 50 m (en cours de saisie). La sphère représentera le volume extérieur du modèle (sol environnant).

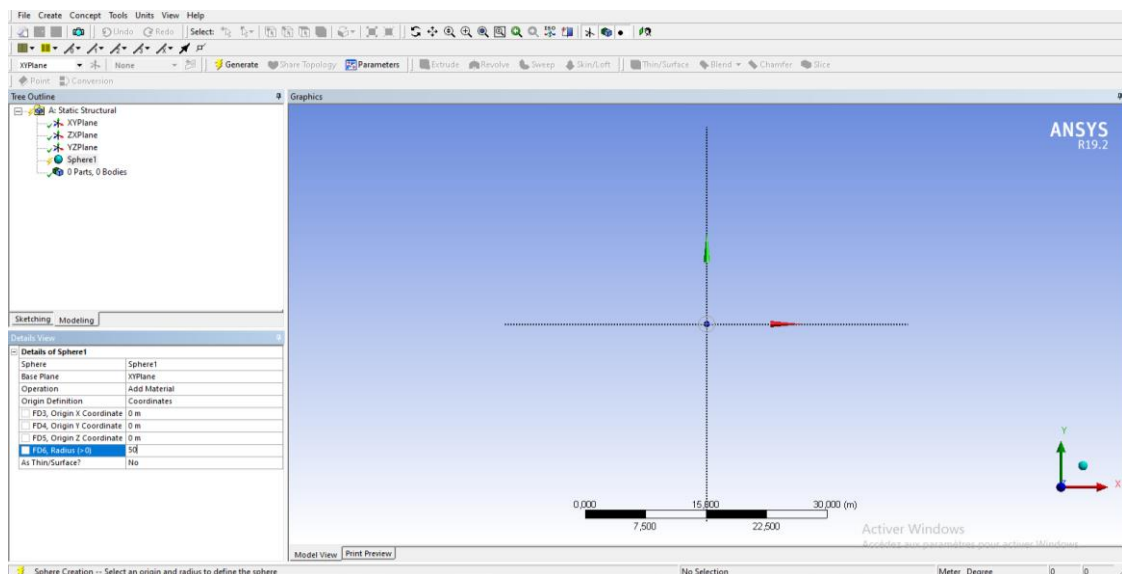


Figure 08 : Paramétrage de la première sphère

Après validation du rayon de 50 m, le cercle représentant la coupe 2D de la sphère est visible dans l'espace de travail. Le contour circulaire en filigrane montre les dimensions de la sphère centrée à l'origine. L'échelle confirme un rayon de ~50 m.

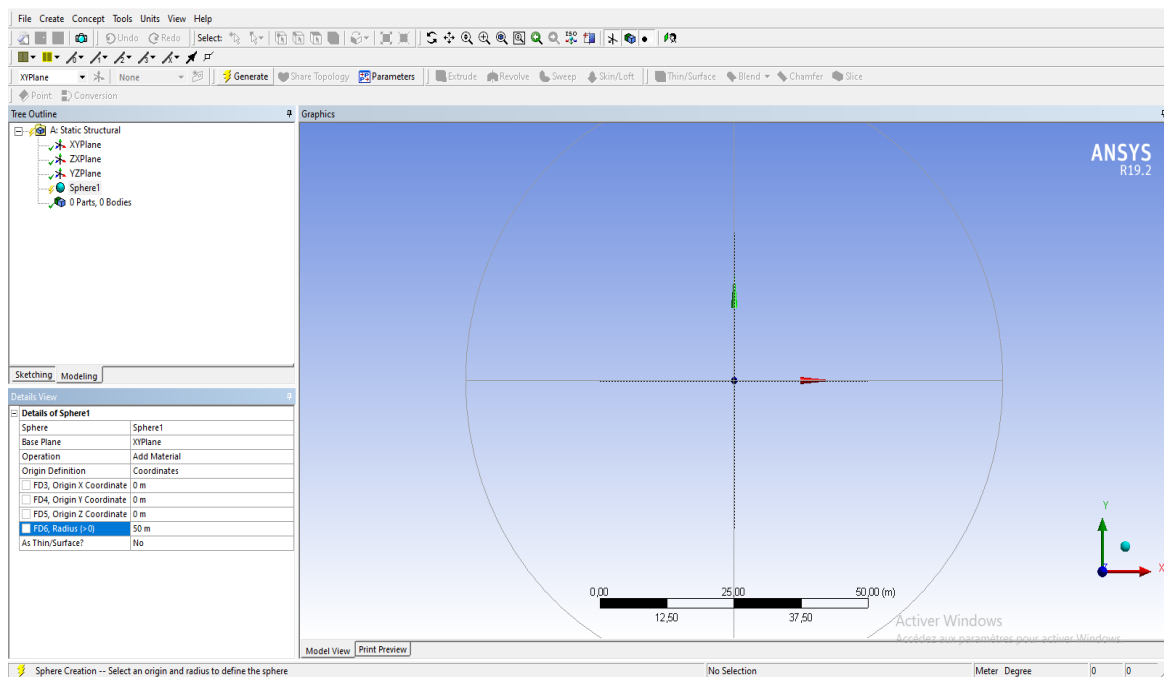


Figure 09 : Prévisualisation de la sphère.

Un sketch (Sketch11) est créé sur le plan **YZPlane** pour définir le profil transversal du modèle. Le sketch montre un rectangle symétrique par rapport à l'axe horizontal, avec les cotes : **H16 = H17 = 3 m** (largeur) et **V14 = V15 = 0,25 m** (hauteur). Ce profil servira à créer un tore ou un tube via l'opération Revolve.

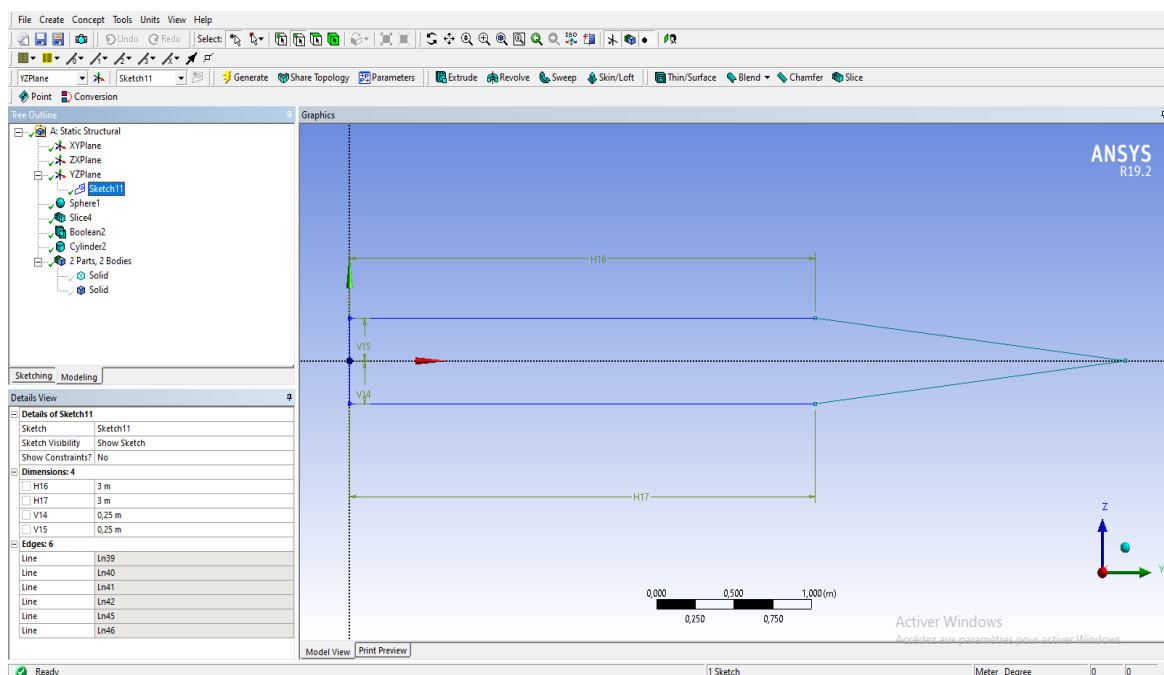


Figure 10 : Création d'un sketch sur le plan YZ.

Après l'opération Revolve8 appliquée sur **Sketch11** autour de l'axe Z du plan YZ, un corps solide de forme discoïdale est généré. Les propriétés affichées dans Details View confirment : **Volume** = 114,67 m³, Surface **Area** = 629,43 m², 4 faces, 3 arêtes. Ce corps représente l'inclusion ou la discontinuité dans le milieu.

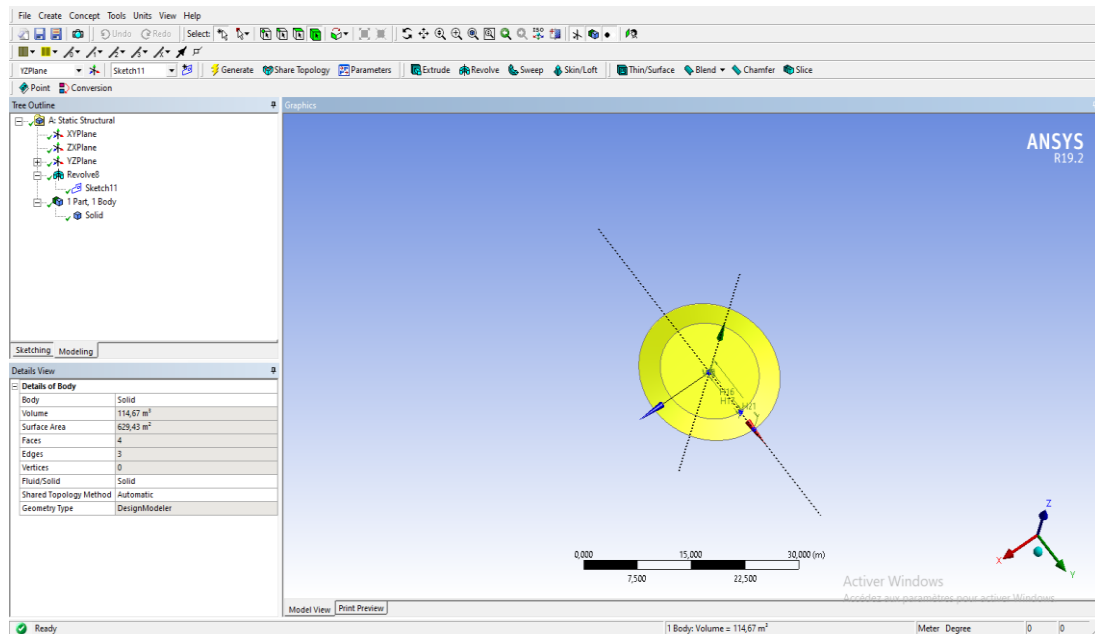


Figure 11 : Résultat de l'opération Revolve.

1.9 Ajout d'une deuxième sphère via Primitives

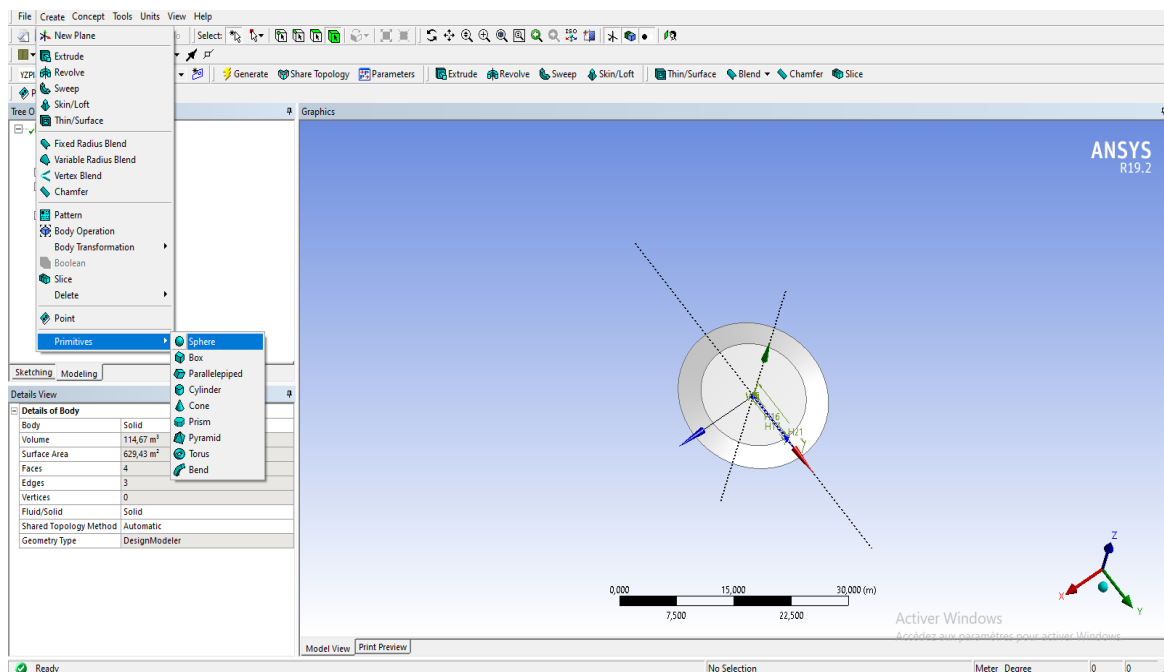


Figure 12 : Ajout d'une deuxième sphère.

Le menu **Create > Primitives > Sphere** est à nouveau utilisé pour créer une deuxième sphère. Dans la vue 3D, le corps toroïdal (disque) créé à l'étape précédente est visible en transparence. La nouvelle sphère sera centrée à l'origine pour englober ou interagir avec la géométrie existante.

1.10 Paramétrage de Sphere3

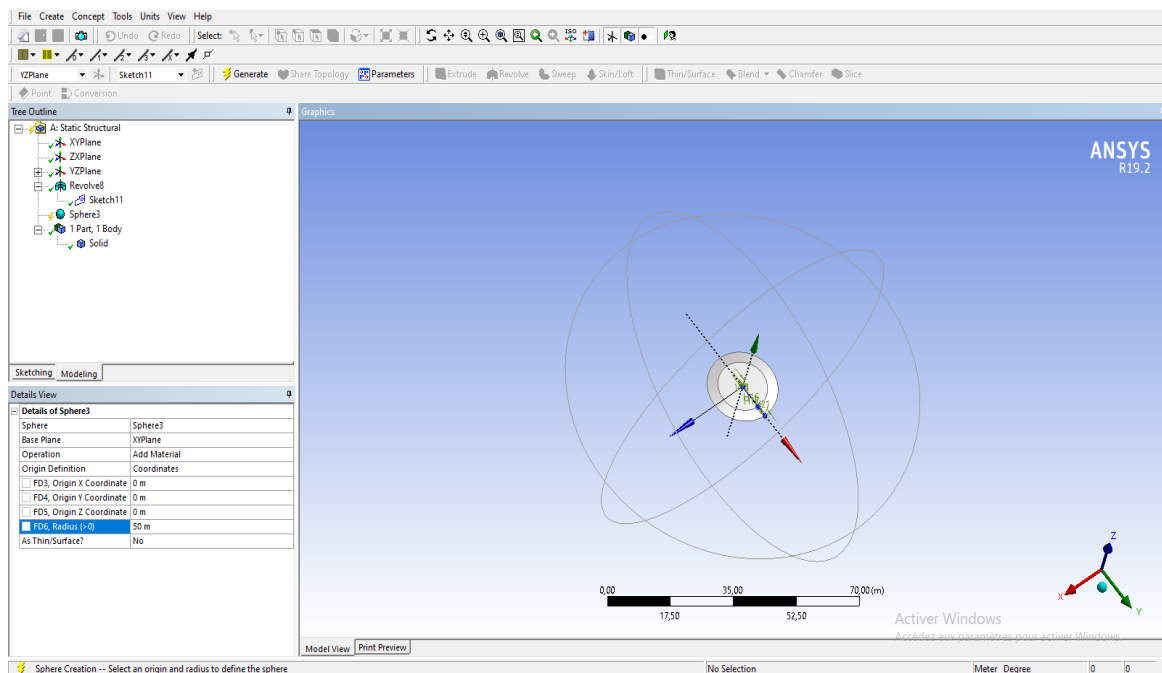


Figure 13 : Paramétrage de Sphere3.

Une troisième sphère nommée « Sphere3 » est ajoutée dans l'arbre (après Revolve8). Ses paramètres sont : Base Plane = **XYPlane**, Origin = (0, 0, 0), **Radius** = 50 m, opération = **Add matériel**. Le contour sphérique en filigrane est visible dans la vue 3D montrant la sphère de grande taille.

1.11 Vue 3D Sphere3 englobant le disque

Vue 3D montrant Sphere3 (sphère complète de rayon 50 m) englobant le corps discoïdal créé précédemment. L'arbre de structure confirme : 1 Part, 1 Body. La structure en coupe permet de visualiser la relation géométrique entre la grande sphère et l'inclusion discoïdale.

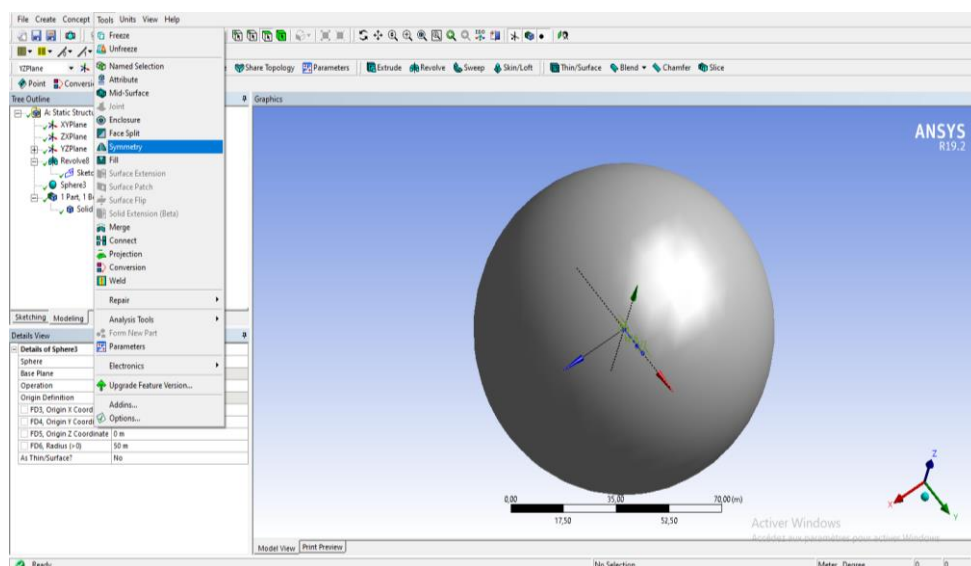


Figure 14 : Vue 3D de la sphère englobante.

1.12 Opération Add Frozen : Définition des zones indépendantes

Pour Sphere3, l'opération est changée de « **Add Material** » à « **Add Frozen** ». Cette option est cruciale : elle crée un nouveau corps sans le fusionner avec les corps existants, permettant d'affecter des matériaux différents à chaque corps. La liste déroulante montre les options disponibles : Add Frozen, Add Material, Cut Material, Imprint Faces, Slice Material.

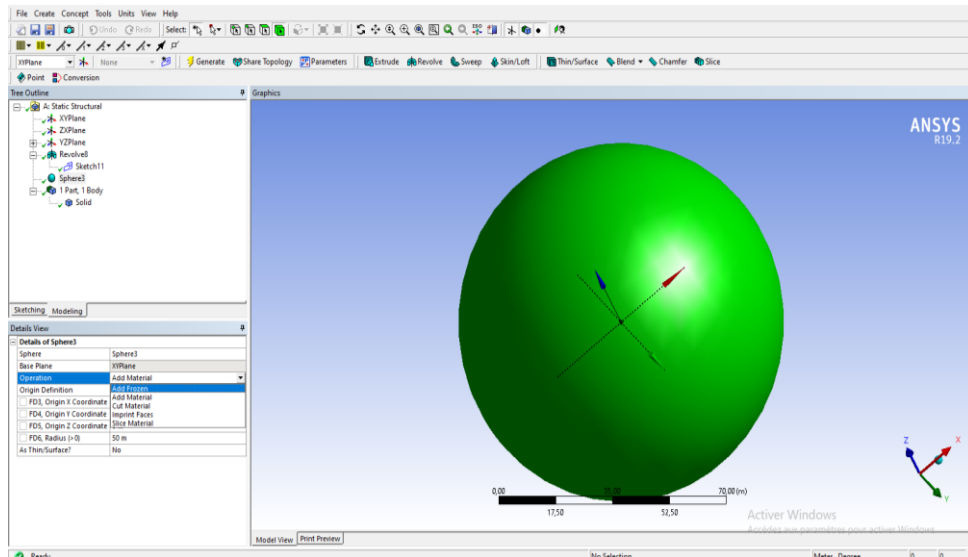


Figure 15 : Application de l'opération *Add Frozen*

1.13 Ajout d'un cylindre (Cylinder5) – Demi-espace inférieur

Un cylindre (Cylinder5) est ajouté sur la base **XYPlane** avec les paramètres : Origin = (0, 0, 0), Axis Z Component = -5 m (orientation vers le bas), **Radius** = 50 m. Dans la vue 3D, le résultat est un demi-espace hémisphérique (bowl shape) correspondant à la partie inférieure du modèle. L'arbre montre : 2 Parts, 2 Bodies.

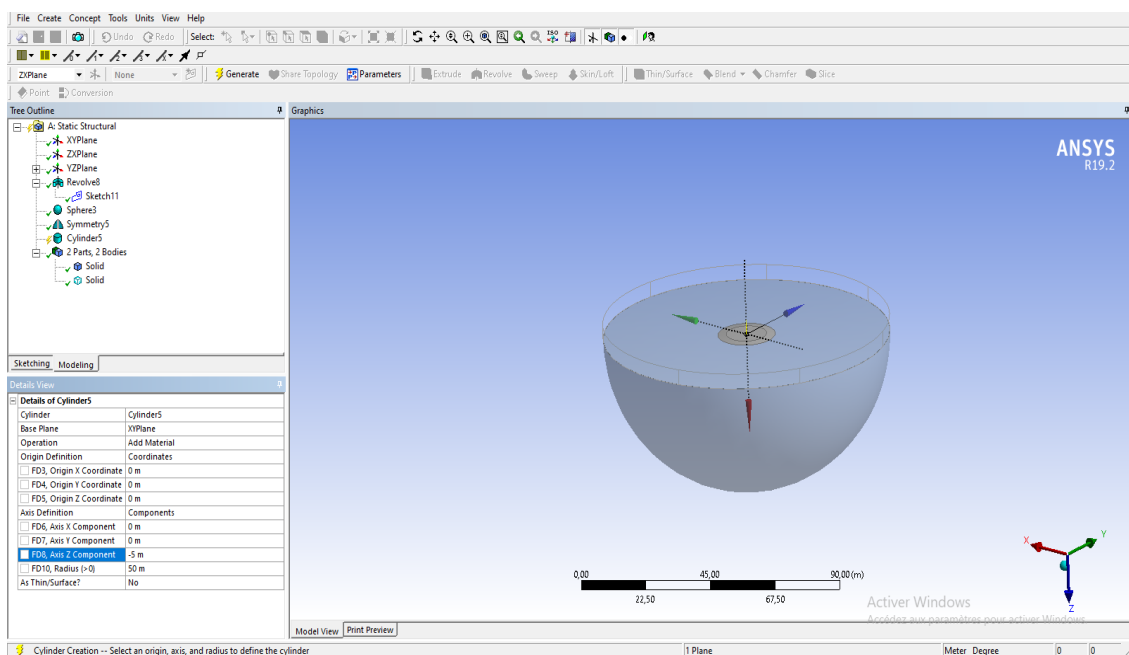


Figure 16 : Ajout d'un cylindre

1.14 Opération Boolean – Soustraction pour créer les cavités

L'opération Boolean7 de type « **Subtract** » est appliquée. La boîte de dialogue indique : 2 Target Bodies (les corps à modifier) et Tool Bodies en cours de sélection. Cette opération soustrait le cylindre de la sphère pour créer des couches géologiques distinctes. L'arbre montre alors 3 Parts, 3 Bodies.

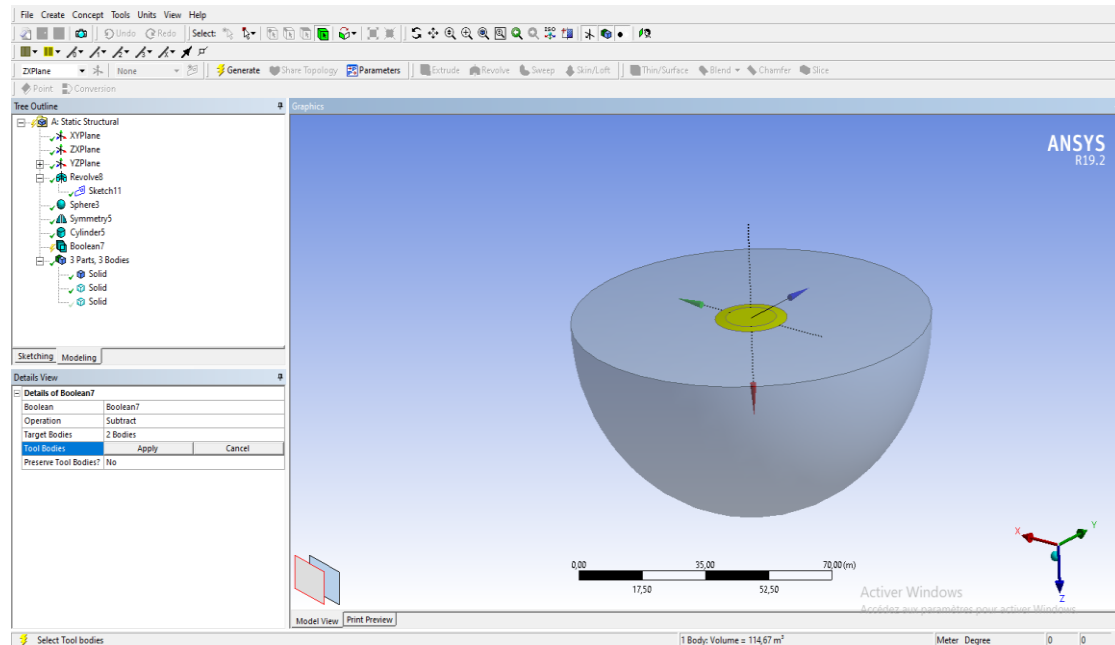


Figure 17 : Opération booléenne.

1.15 Ajout du cylindre de forage (Cylinder6)

Un nouveau cylindre (Cylinder6) est ajouté en mode « Add Frozen » : Origin Y = -5,1 m, Axis Z = 0,2 m, Radius = 10 m. Ce petit cylindre de rayon 10 m représente le puits de forage ou la zone d'inclusion. Dans la vue 3D, il apparaît comme un petit disque jaune au centre de la demi-sphère grise. Le menu Create > Boolean est sur le point d'être utilisé.

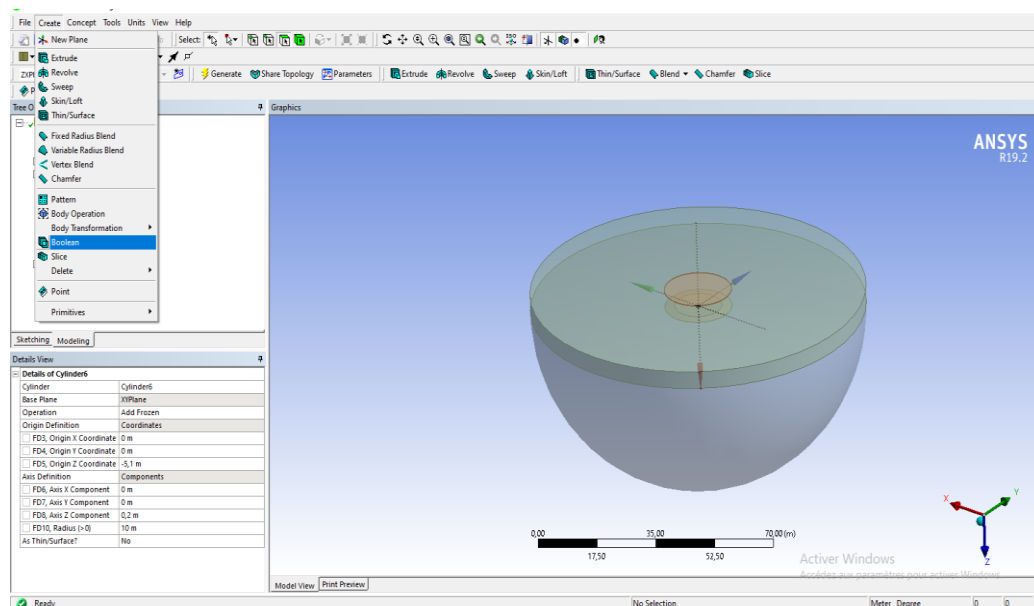


Figure 18 : cylindre de forage

1.16 Résultat du découpage (Slice8) – Modèle en 7 corps

Après les opérations Boolean et Slice8 (Slice by ZXPlane), le modèle est découpé en 7 corps solides (1 Part, 7 Bodies) représentant les différentes zones géologiques. La vue 3D montre clairement la section transversale du modèle sphérique avec le cylindre d'inclusion visible au centre. Les différentes couches sont distinguables par leur géométrie.

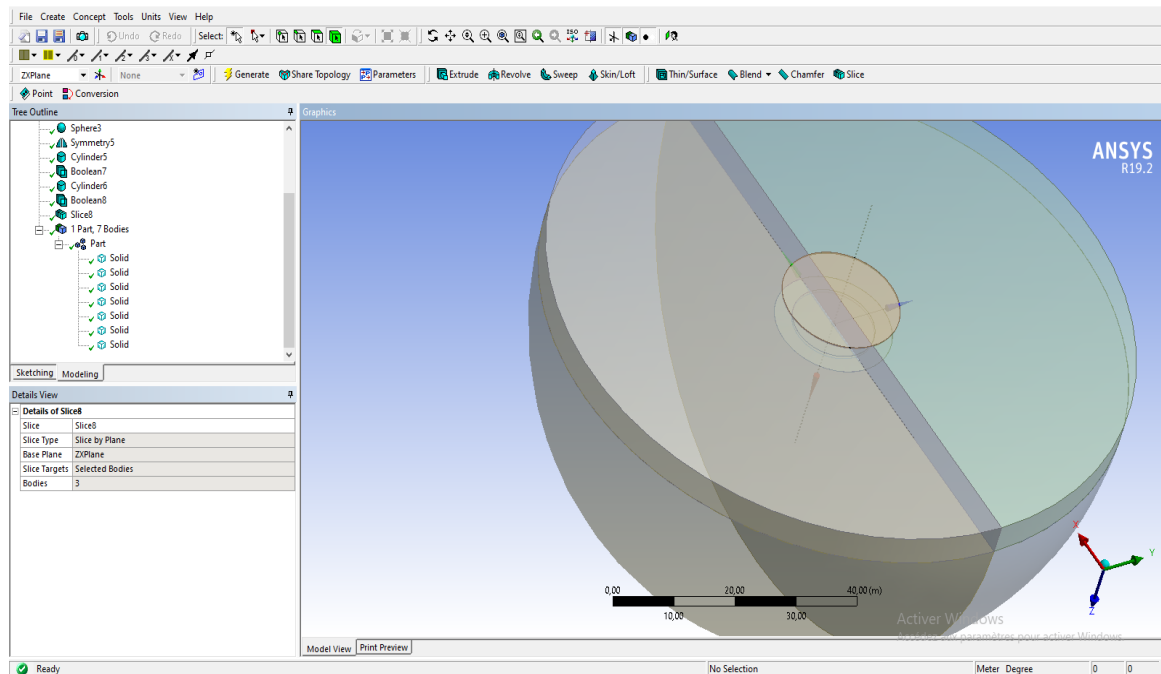


Figure 19 : Les différentes couches par leur géométrie.

1.17 Passage à Mechanical – (paramètre de Maillage)

les paramètres généraux du maillage après définition de la taille d'élément, juste avant la génération effective du maillage. C'est une étape de vérification avant de lancer le processus de maillage.

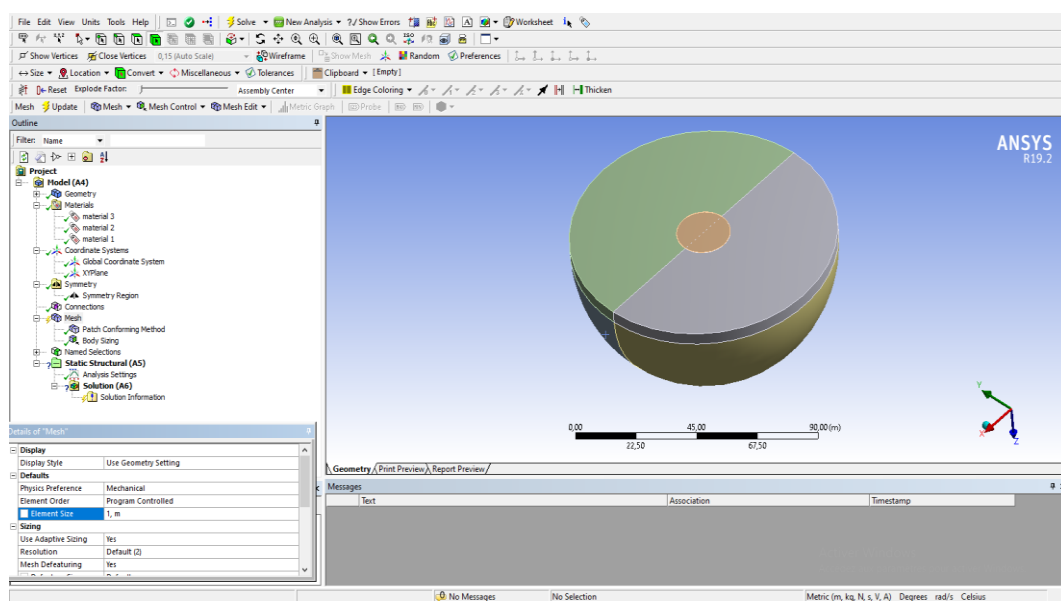


Figure 20: Paramètres généraux du maillage

1.18 Ajustement fin de la taille du maillage

Le contrôle **Body Sizing** est toujours actif et la taille d'élément est réduite à **0,05 m**, ce qui traduit un raffinement supplémentaire du maillage sur les corps sélectionnés pour une plus grande précision.

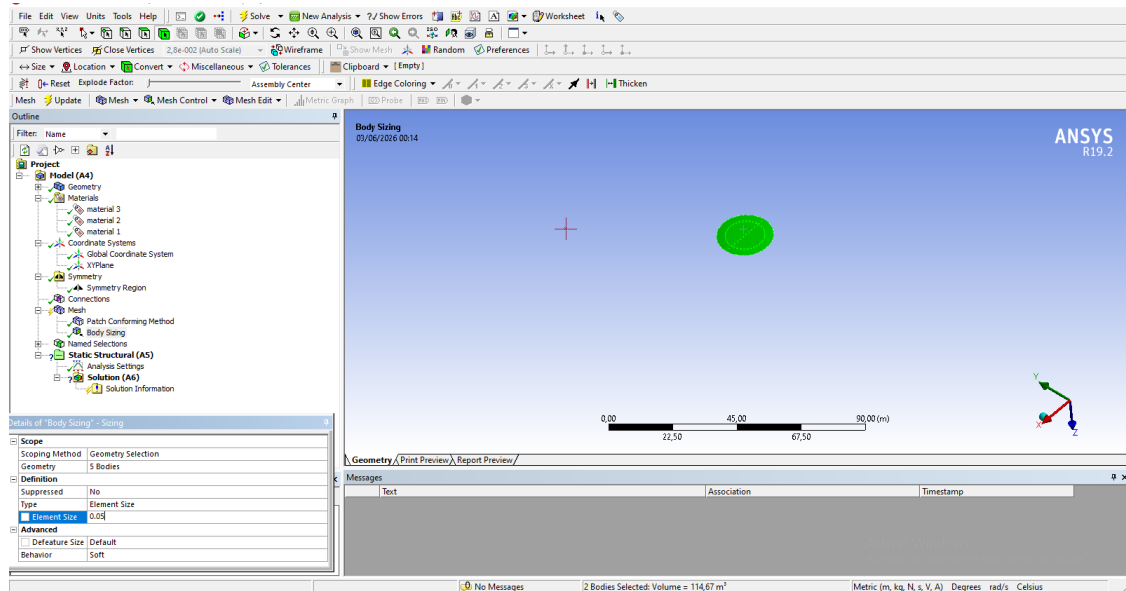


Figure 21: la taille du maillage

1.19 Sélection locale de corps pour l'affinage du maillage

la sélection locale de deux corps autour de la zone centrale. Cette sélection est effectuée avec une logique d'affinage progressif pour obtenir une discrétisation plus précise dans une région jugée sensible pour l'analyse.

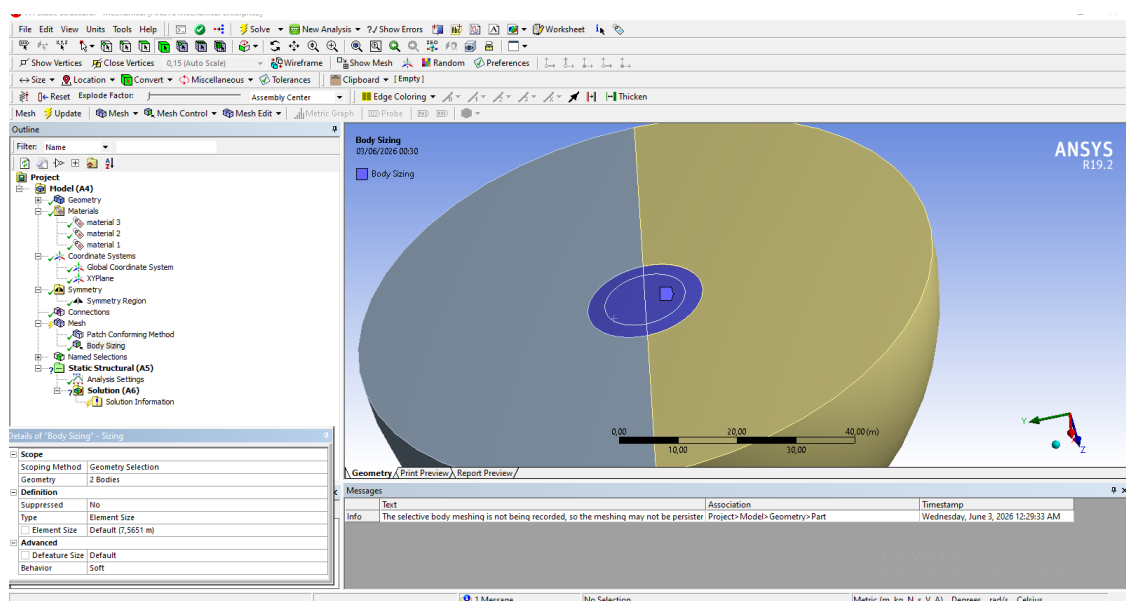


Figure 22: la sélection locale des corp

1.20 Affinage du maillage sur des corps spécifiques

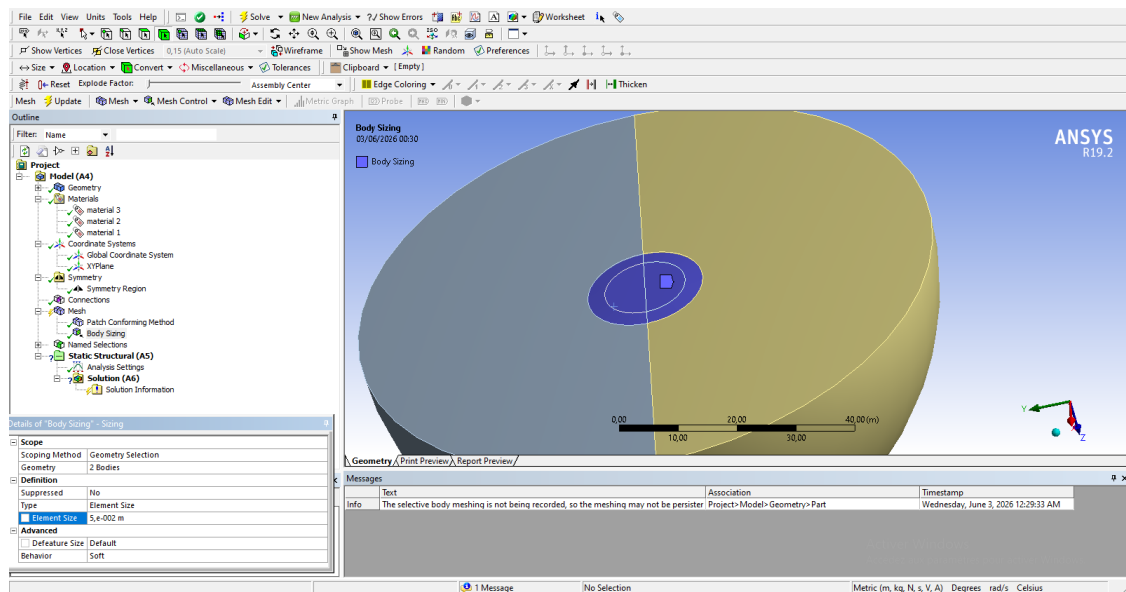


Figure 23: Affinage du maillage

1.21 Génération du maillage et vérification initiale

On quitte DesignModeler et passe à l'environnement ANSYS Mechanical. L'interface Mechanical s'ouvre avec la géométrie importée. Le panneau de gauche (Outline) est en cours de chargement. La vue 3D montre la géométrie du modèle en coupe, composée de plusieurs couches de matériaux. Une opération « Body Sizing » est en cours de définition (annotation en haut à gauche).

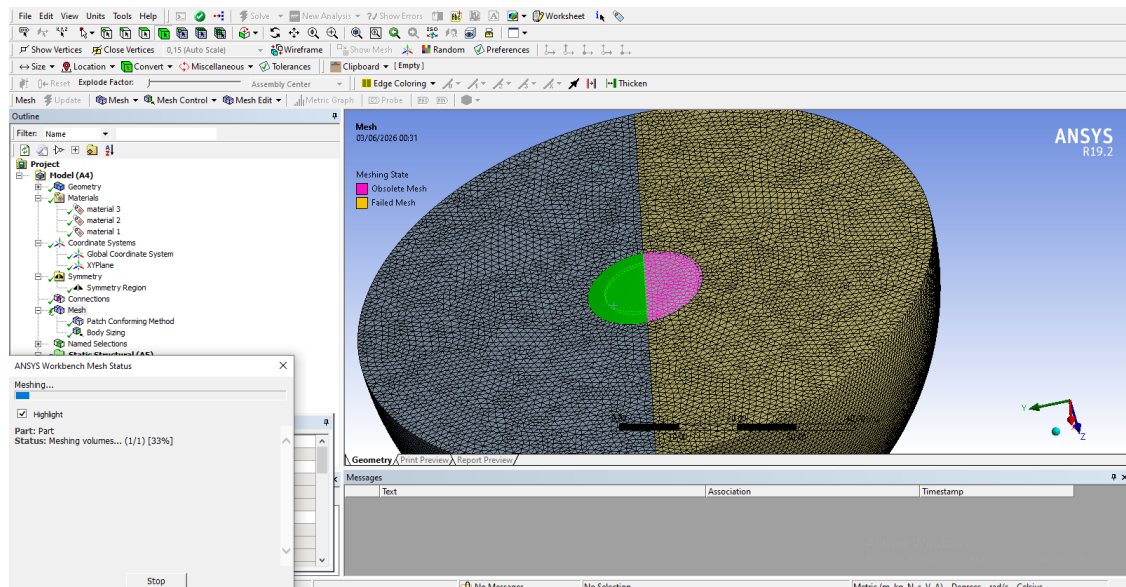


Figure 24: maillage et vérification initiale

1.22 la qualité du maillage après génération

une vérification détaillée de la qualité du maillage après génération. Le modèle est affiché avec un zoom important sur la zone centrale afin d'observer le raffinement local autour de l'ouverture interne.

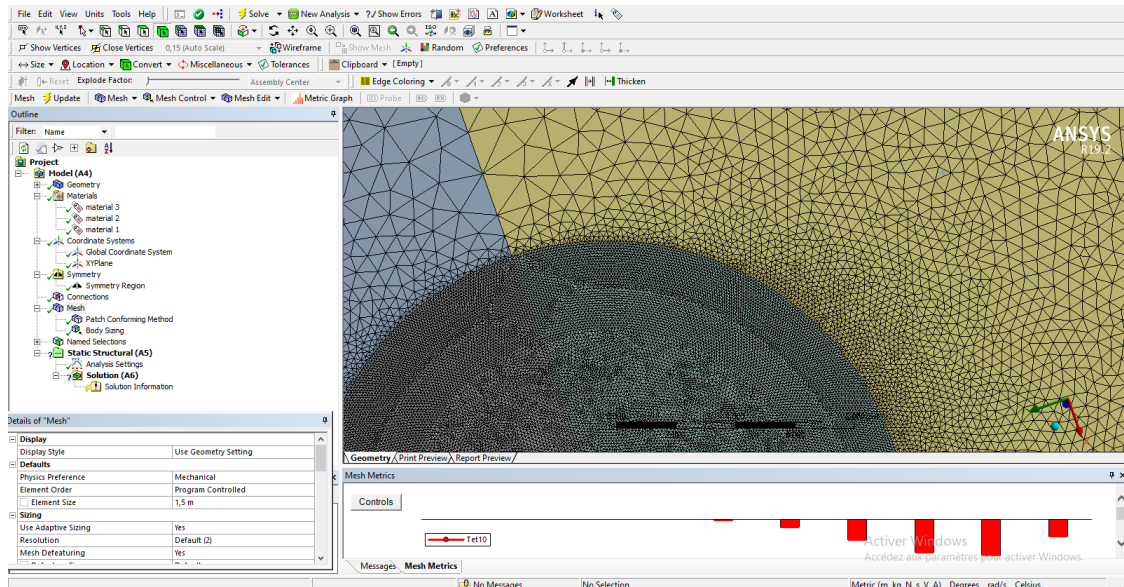


Figure 25 : maillage après génération

1.23 Configuration du maillage – Patch Conforming et Body Sizing

Dans l'arbre Outline (section Mesh), deux paramètres de maillage sont définis : « Patch Conforming Method » (méthode de maillage adaptée aux géométries courbes) et « Body Sizing » (contrôle de la taille des éléments par corps). Ces paramètres garantissent un maillage conforme et raffiné dans les zones critiques.

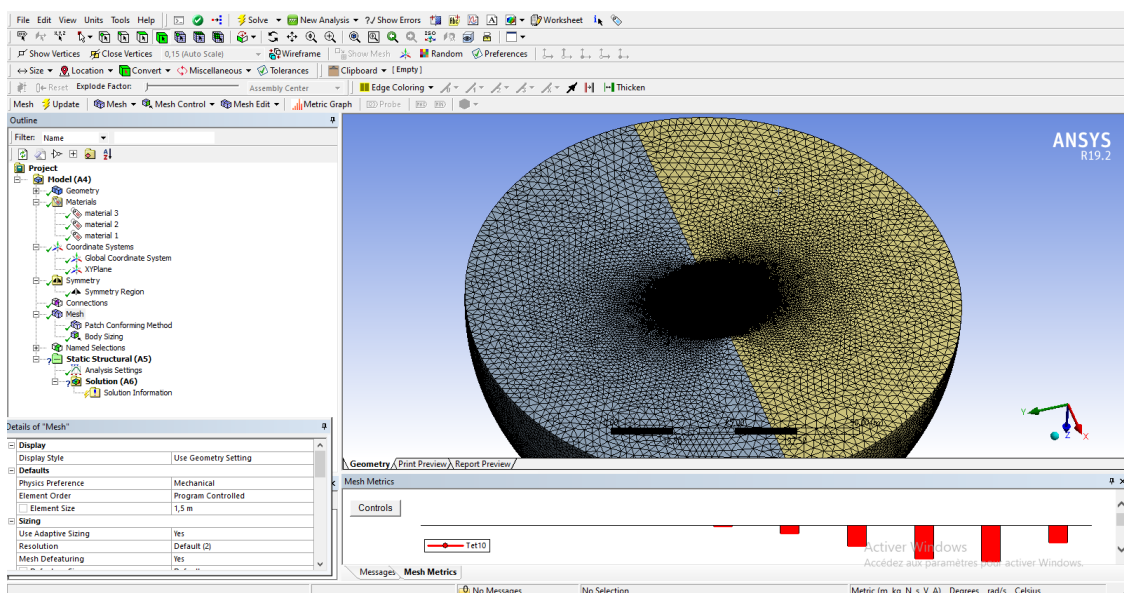


Figure 26 : un maillage conforme et raffiné dans les zones critiques.

1.24 Aperçu du modèle complet dans Mechanical

Vue complète du modèle dans ANSYS Mechanical. L'arbre Outline est entièrement développé et montre la hiérarchie complète : Geometry (3 matériaux affectés), Symmetry (Symmetry Region), Mesh (Patch Conforming + Body Sizing), Named Selections (Symmetry:XYPlane, Selection, Selection 2), et Static Structural A5 (Analysis Settings, Solution A6). Le modèle en 3D affiche les différentes couches avec leurs couleurs distinctives.

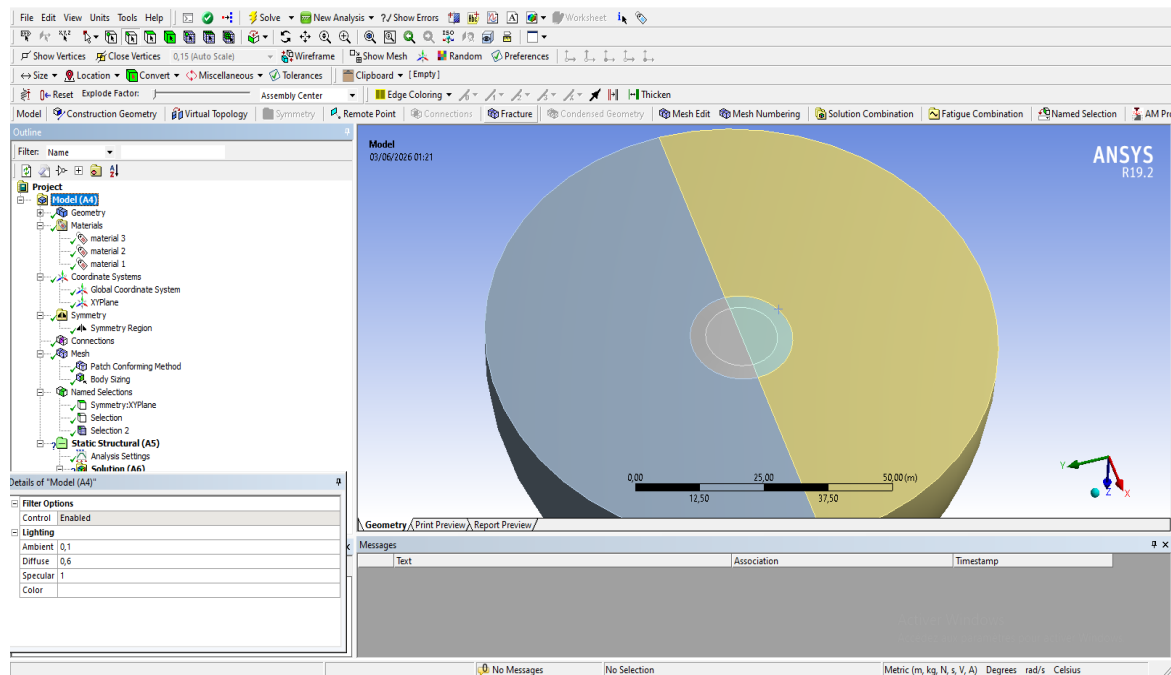


Figure 27 : Vue complète du modèle

1.25 Génération du maillage et vérification

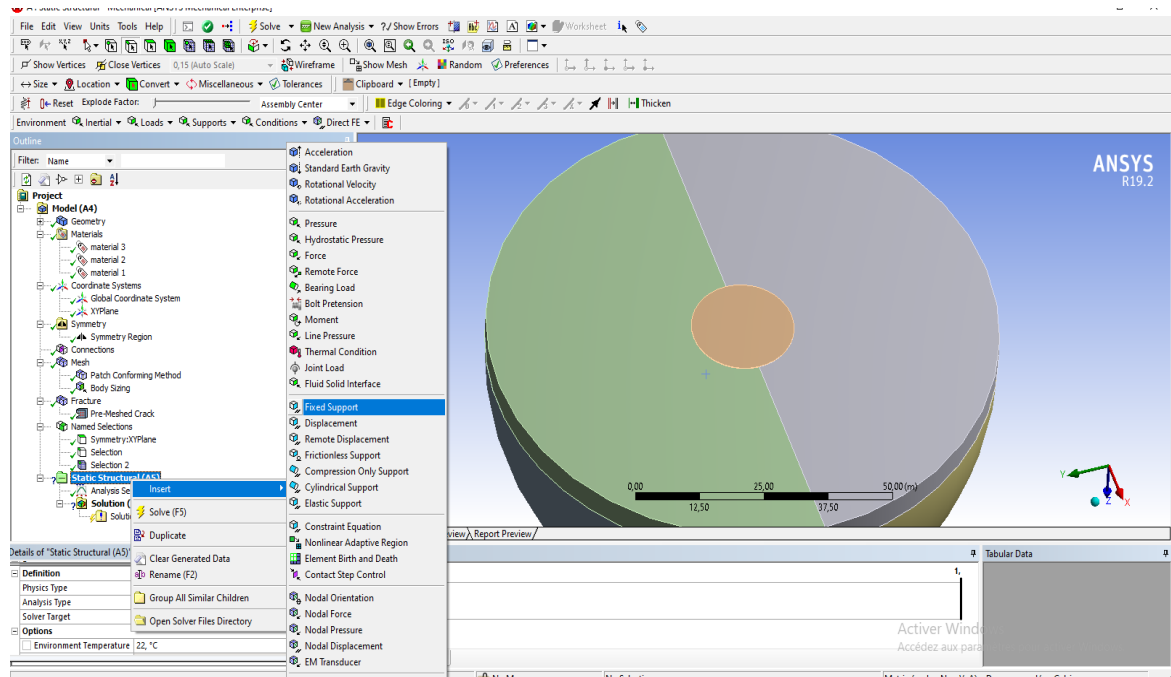


Figure 28 : vue 3D montre la discrétisation en éléments finis des différentes couches

Le maillage est généré sur l'ensemble du modèle. La vue 3D montre la discrétisation en éléments finis des différentes couches géologiques. Le maillage est plus raffiné dans les zones d'interface et autour de l'inclusion cylindrique. La qualité du maillage est contrôlée via les indicateurs dans le panneau inférieur.

1.26 Conditions aux limites Remote Displacement (Rotation)

Dans l'onglet Static Structural (A5), une condition aux limites de type « Remote Displacement » est appliquée sur la face supérieure (disque jaune). Les détails indiquent : X, Y, Z Components = Free (aucune contrainte de translation), Rotation X = Rotation Y = Free, Rotation Z = 5° (ramped). Un graphique tabula confirme une rotation progressive de 0 à 5° appliquée à la face circulaire du forage. Cette condition simule une torsion imposée.

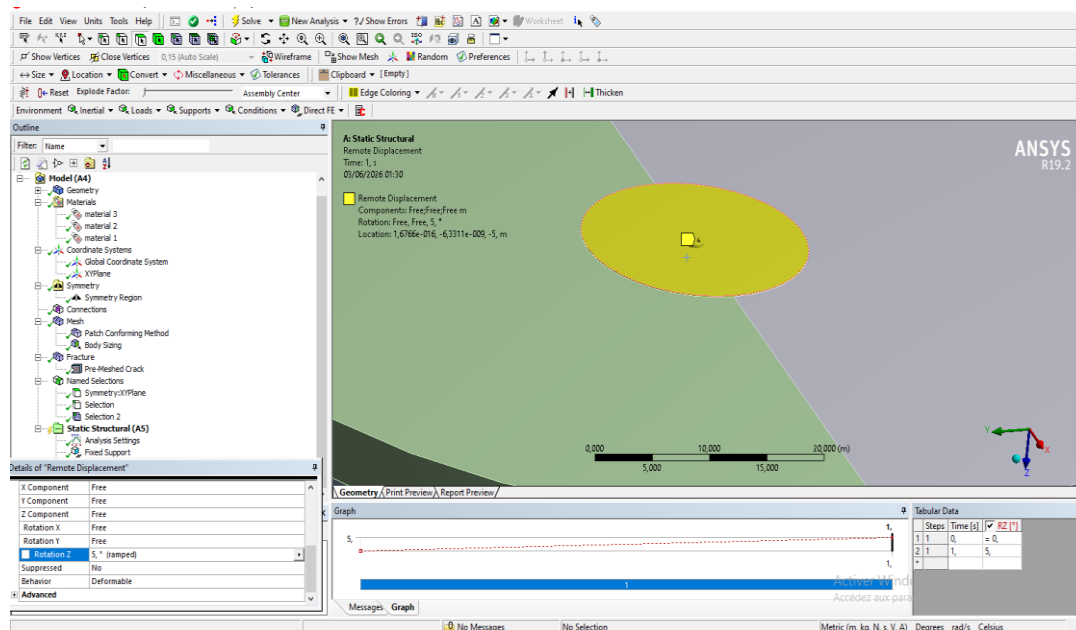


Figure 29 : une condition aux limites de type « Remote Displacement »

1.27 Application du support fixe (Fixed Support)

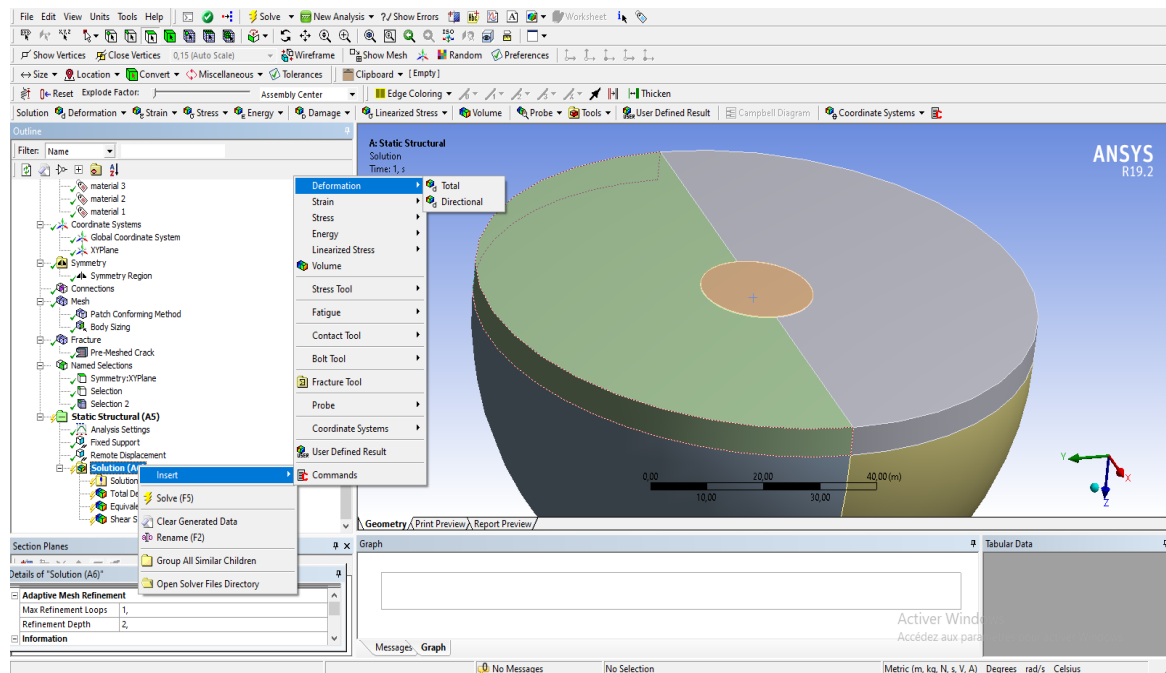


Figure 30 : Application du Fixed Support

Une condition de support fixe (Fixed Support) est appliquée sur la surface hémisphérique extérieure du modèle. Cette condition bloque tous les degrés de liberté (translations et rotations) sur la surface externe, simulant un sol infini ou une frontière rigide. Combinée avec le Remote Displacement, ce setup simule correctement un essai de torsion sur un pieu ou un forage.

1.28 Lancement du calcul – Solve (F5)

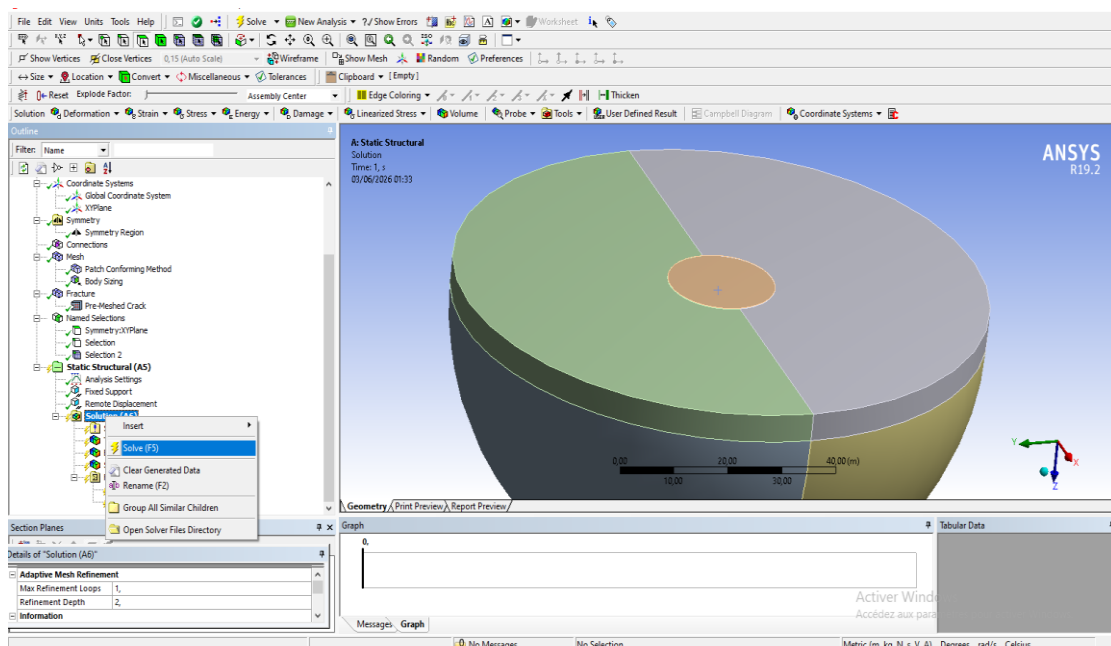


Figure 31 : Lancement du calcul.

Étape finale : un clic droit sur « **Solution (A6)** » dans l'arbre affiche le menu contextuel. On clique sur « **Solve (F5)** » pour lancer le solveur. ANSYS résout le système d'équations par éléments finis (FEA) pour calculer les champs de déplacement, de contrainte et de déformation résultant de la rotation imposée au forage. Le modèle 3D en coupe confirme la géométrie finale avec les 3 couches de matériaux et l'inclusion cylindrique.