جامعة آكلي محند أولحاج -البويرة-

كلية العلوم الاقتصادية , والتجارية , وعلوم التسيير

قسم العلوم الاقتصادية

مطبوعة موجهة لطلبة السنة أولى جذع مشترك لمقياس

الرياضيات 01

موافقة لعرض التكوين في ميدان العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير المعتمد من طرف الوزارة الوصية

من إعداد:

د. عبد الرحمان قاري.

السنة الجامعية

2025-2024

جدول المحتويات:

المحور الأول: التحليل التوافقي في نظرية المجموعات.

المحور الثاني: المتتاليات العددية.

المحور الثالث: عموميات حول الدوال ذات المتغير الحقيقي.

المحور الرابع: الدوال الأسية واللوغاريتمية.

المحور الخامس: الاشتقاقية.

المحور السادس: الدوال الأصلية وحساب التكاملات.

المحور الأول: التحليل التوافقي في نظرية المجموعات:

يركز التحليل التوافقي على دراسة الخصائص العامة للمجموعات من خلال تحليل توافقياتها وبنياتها, ونركز من خلال هذا المحور على ثلاث مفاهيم أساسية "المجموعات, العلاقات, والتطبيقات"

1- تعريف المجموعات:

تعبر المجموعة عن تجمع من العناصر، والتي يمكن أن تكون: أعداد, كائنات, أو مجموعات أخرى, ويعبر عنها باستعمال الأقواس المعقوفة: "{}", وتعطى اسماً معيناً في العادة يكون حرفاً مختاراً من الحروف المعروفة, مثل:A={1,2,3} المعبرة عن مجموعة الأعداد, س={£,¥,€} المعبرة عن مجموعة العملات.

2- العلاقات بين المجموعات:

ومن أهم العلاقاتبين المجموعات:

أ) الانتماء ∉ ∈:

تعبر علاقة الانتماء عن العلاقة بين العناصر والمجموعات, بحيث يكون العنصر المراد دراسة علاقته بالمجموعة جزءً منها, ويقال عنه أنه ينتمي للمجموعة ويرمز له بالرمز∈, أو لا يكون كذلك ويقال عنه أنه لا ينتمي للمجموعة ويرمز له بالرمز∉.

مثال:

لدينا المجموعة: A={ 2 , 3 , 4 ,5 }؛
نقول عن العنصر5 أنه ينتمي إلى المجموعةA ونكتب A∈5 , ونقول عن العنصر 1 لأنه بل ينتمي إلى لمجموعة A ونكتب A∉1 .

ب)الاحتواء ⊄⊂:

تعبر علاقة الاحتواء عن العلاقة بين المجموعات, بحيث تكون المجموعة المراد دراسة علاقتها بالمجموعة الأخرى جزءً منها, ويقال عنها تحتويها ويرمز لها بالرمز⊂, أو لا يكون كذلك ويقال عنها لا تحتويها ويرمز له بالرمز⊄.

مثال:

لدينا المجموعات: A={ 2 , 3 , 4 ,5 }؛ B={ 2 , 3 , 6 , 7}؛ C={ 2 , 3 }؛

- نقول عن المجموعة A أنها تحتوي المجوعة C ونكتب $C\subset A$.
- نقول عن المجموعة A أنها لا تحتوي المجوعة B ونكتب $B\not\subset A$.
- نقول عن المجموعة B أنها تحتوي المجوعة C ونكتب $C\subset B$.
- نقول عن المجموعة B أنها لا تحتوي المجوعة A ونكتب $A\not\subset B$.

ج) التناظر R:

من أجل كل عنصرين x, y من A, إذا كان للعنصر "x" علاقة "R" بالعنصر "y", فإن للعنصر "y" نفس العلاقة "R" بالعنصر "x", ونكتب:" xRy" و "yRx". ونقول أن العنصرين x و y في علاقة تناظرية.

ملاحظة:-لا تكون هذه العلاقة صالحة في المقارنة باستخدام: < أو > أو المضاعف.

-إذا تحققت العلاقة "xRy" و"yRx" فهذا يعني أن x=y, ونقول أن x و y في علاقة ضد تناظرية أو انعكاسية

د) التعدي T:

من أجل العناصر x, y, z من A,إذا كان للعنصر "x" علاقة "R" بالعنصر "y", وللعنصر "y" علاقة "R" بالعنصر "z", فإن للعنصر "x" علاقة "T" بالعنصر "z", ونكتب xTz, ونقول أن x في علاقة بـz بالتعدي.

ه) التكافؤ ⇔:

نقول عن المجموعتين أنهما متكافئتين إذا وفقط إذا تحققت فيهم العلاقات "التعدي, التناظر والانعكاس", ونستخدم الرمز "⇔" للتعبير عن ذلك.

3- العمليات على المجموعات:

ومن أهم العمليات على المجموعات:

أ) الاتحاد ∪:

$$A\cup B= \{x/\ x\in A \text{ أو } x\in B\}.$$

يكون الاتحاد بين مجموعتين بإدخال جميع عناصر المجموعتين في مجموعة جديدة يعبر عنها باسم معين, أو باسم المجموعتين يتوسطهما رمز الاتحاد ∪.

مثال:

إذا كانت $A=\{ 2 , 3 , 4 ,5 \}$, و$B=\{ 2 , 3 , 6 , 7 \}$,

فإن: $A\cup B= \{2 ,3 ,4 ,5 ,6 ,7\}$.

ب)التقاطع ∩:

$$A\cap B= \{x/\ x\in A \text{ و } x\in B\}.$$

يكون التقاطع بين مجموعتين بإدخال العناصر المشتركة بين المجموعتين, أي المذكورة في كل من المجموعتين, في مجموعة جديدة يعبر عنها باسم معين, أو باسم المجموعتين يتوسطهما رمز التقاطع ∩.

مثال:

في نفس المثال السابق: وباعتبار أن:$A=\{ 2 , 3 , 4 ,5 \}$, و$B=\{ 2 , 3 , 6 , 7 \}$,

فإن: $A\cap B= \{2 ,3\}$.

ج)المجموعة المكملة \:

$$A\backslash B= \{x/\ x\in A \text{ و } x\notin B\}.$$

تكوّن العملية بين مجموعتين, بحيث تشمل جميع العناصر الموجودة في المجموعة الأولى وغير موجودة في المجموعة الثانية, ويرمز لها بالرمز \.

مثال:

في نفس المثال السابق؛ وباعتبار أن: $A=\{ 2 , 3 , 4 ,5 \}$, و$B=\{ 2 , 3 , 6 , 7 \}$,

فإن: $A\backslash B= \{4 ,5\}$, و$B\backslash A= \{6 ,7\}$.

د) الفرق التماثلي Δ:

$$A\Delta B= \{x/\ x\in A \text{ و } x\notin B \text{ و } x\in A \text{ و } x\notin B\}.$$

علاقة ثنائية تشكل مجموعة جديدة تشمل العناصر غير الموجودة في المجموعة الأولى وموجودة في المجموعة الثانية, والعناصر غير الموجودة في المجموعة الثانية وموجودة في المجموعة الأولى, بحيث تكون:

$$B\backslash A \cup A\backslash B.$$

مثال:

في نفس المثال السابق؛ وباعتبار أن: $A=\{2, 3, 4, 5\}$ و$B=\{2, 3, 6, 7\}$,

$A\Delta B= \{4, 5, 6, 7\}$.

ه) الجداء الديكارتي ×:

$$A\times B= \{(x,y)/x\in A, y\in B\}$$

يشكل الجداء الديكارتي جميع الثنائيات (x,y) الناتجة عن جداء كل عنصر x من A مع العنصر y من B.

مثال:

لتكن المجموعتين $A=\{1, 2, 3\}$ و$B=\{a, b, c\}$؛

تمثل المصفوفة التالية الجداء الديكارتي للمجموعة $A\times B$؛

A / B	a	b	c
1	(1 ,a)	(1 ,b)	(1 ,c)
2	(2 ,a)	(2 ,b)	(2 ,c)
3	(3 ,a)	(3 ,b)	(3 ,c)

$$A\times B= \{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c),(3,a),(3,b),(3,c)\}$$

وتمثل المصفوفة التالية الجداء الديكارتي للمجموعة $B\times A$؛

B / A	1	2	3
a	(a ,1)	(a ,2)	(a ,3)
b	(b ,1)	(b ,2)	(b ,3)
c	(c ,1)	(c ,2)	(c ,3)

$$B\times A= \{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3)\}$$

4- مجموعات الأعداد:

أ- مجموعة الأعداد الطبيعية:

تعبر مجموعة الأعداد الطبيعية عن كل عدد صحيح موجب ابتداءً من الصفر[....0,1,2,3], ويرمز لها بالرمز **N.**

ب- مجموعة الأعداد الحقيقية:

تعبر مجموعة الأعداد الحقيقية عن كل الأعداد المعروفة الموجبة منها والسالبة, الكاملة منها والعشرية , ويرمز لها بالرمز**R.**

ج- مجموعة الأعداد المركبة "التخيلية":

تعبر مجموعة الأعدادالمركبة عن مجموعة الأعداد الحقيقية بالإضافة إلى عنصر تخيلي يرمز له بالرمز: "i" بحيث $i^2=-1$, ويرمز للمجموعة بالرمز **C**

د-مجموعة الأعداد الصحيحة:

تعبر مجموعة الأعدادمجموعة الأعداد الصحيحة عن كل الأعداد الكاملة, الموجبة منها والسالبة بالإضافة إلى الصفر, [...2,1,0,1,2-,...-], ويرمز لها بالرمز**Z.**

ه-مجموعة الأعداد الكسرية "النسبية":

تعبر مجموعة الأعداد الكسرية أو النسبية عن كل الأعداد المكتوبة على شكل كسر بسطه عدد صحيح ومقامه كذلك, ويرمز لها بالرمز **Q**

المحور الثاني: المتتاليات العددية:

تعبر المتتاليات العددية عن سلسلة من الأعداد المرتبة وفق قاعدة معينة، بحيث يمكن تحديد كل عنصر في المتتالية بناءً على علاقة معينة مع العناصر السابقة, أو بواسطة صيغة رياضية ثابتة. وتعتبر المتتاليات أساسًا في الرياضيات ولها تطبيقات عديدة في علم الاقتصاد.

1-تعريف:

المتتالية العددية هي ترتيب خطي من الأعداد، حيث يُرمز لكل عنصر من عناصرها باسم المتتالية –عادة ما يكون حرف- متبوعاً بترتيب العنصر, ويُطلق على العنصر الأول من المتتالية الحد الأول، والعنصر الثاني الحد الثاني , وهكذا.

نسمي كل متتالية U_n ترفق بالأعداد المعرفة n على مجموعة الأعداد الطبيعية **N** صورة وفقها تنتمي إلى مجموعة الأعداد الحقيقية **R**؛ ونكتب : $\{\forall n\in \mathbf{N}:\exists U_n\in \mathbf{R}\}$.

وتكون المتتالية معرفة بـ: "مجموع عناصرها, علاقة الحد العام, علاقة تراجعية".

2-أنواع المتتاليات العددية:

نميز بين نوعين رئيسين من المتتاليات العددية:"المتتالية الحسابية والمتتالية الهندسية":

أولا: المتتاليات الحسابية:

نقول عن المتتالية أنها حسابية إذا كانالفرق بين حدودها المتتالية ثابتاً, بحيث: $U_{n+1}-U_n= \ldots =U_4-U_3=U_3-U_2=U_2-U_1$؛ أي أن: $U_{n+1} = U_n + r$ بحيث يعبر r عن الفرق بين الحدين المتتاللين ويسمى الأساس.

وتكون عبارة حدها العام من الشكل: $U_n=U_0+n\times r$, بحيث:

U_0: الحد الأول.

r: الأساس.

n: رتبة الحد.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية المعرفة على **N** بـ: $U_n=5+2n$؛

عند حساب الحدود الثلاثة الأولى نجد: $U_1 = 7, U_2 = 9 , U_3 = 11$,هنا نلاحظ أن الفرق بين كل حدين متتالين ثابت, وهو مقدار الأساس المعرفة به المتتالية: $U_2-U_1= 9-7 =$ **2**

و $U_3-U_2=11-9 =$ **2**

ولو أكملنا الحساب نجد أن هذا الفرق لا يتغير بين كل حدين متتاليين, ومنه نعتبر المتتالية U_n حسابية.

ثانياً: المتتاليات الهندسية:

نقول عن المتتالية أنها هندسية إذا كانت النسبة بين حدودها المتتالية ثابتة, بحيث يتضخم العدد –إيجاباً أو سلباً- في كل مرة, بالرجوع إلى رتبة الحد المراد حسابه, بحيث: $V_2-V_1 \leqslant V_3-V_2 \leqslant V_4-V_3 \leqslant \ldots \leqslant V_{n+1}-V_n$؛ أي أن: $V_{n+1} = V_n \times q$ بحيث يعبر q عن نسبة الفرق بين الحدين المتتاللين ويسمى الأساس.

وتكون عبارة حدها العام من الشكل: $V_n=V_0\times q^n$,بحيث:

V_0: الحد الأول.

q: الأساس.

n: رتبة الحد.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية المعرفة على **N** بـ: $V_n=5\times 2^n$؛

عند حساب الحدود الثلاثة الأولى نجد:$V_1=10 , V_2=20 , V_3=40$, هنا نلاحظ أن الفرق بين الحدين الثالث والثاني هو ضعف الفرق بين الحدين الثاني والأول أي أن النسبة ثابتة بين كل حدين متتاليين وهي 200%.

ولو أكملنا الحساب نجد أن هذه النسبة لا تتغير بين كل حدين متتاليين, ومنه نعتبر المتتالية V_nهندسية .

3- طبيعة المتتالية:

يطلق مصطلح طبيعة المتتالية, أو رتابة المتتالية, على دراسة اتجاه تغييرها:

أ- فإما أن تكون المتتالية رتيبة:

ويتم دراسة طبيعتها المتزايدة أو المتناقصة بالمقارنة بين حدين متتاليين, ونميز الحالات التالية:

- $U_{n+1} - U_n > 0 <=> U_n < U_{n+1}$ ؛ نقول عن المتتالية في هذه الحالة أنها متزايدة.
- $U_{n+1} - U_n < 0 <=> U_n > U_{n+1}$ ؛ نقول عن المتتالية في هذه الحالة أنها متناقصة.
- $U_{n+1} - U_n = 0 <=> U_n = U_{n+1}$؛ وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية ثابتة.

ملاحظة:

بالنسبة للمتتالية الهندسية؛ يمكن معرفة طبيعتها من خلال ملاحظة الأساس, فإذا كان الأساس:

- $q>1$ نقول أن المتتالية متزايدة.
- $q=1$ نقول أن المتتالية ثابتة.
- $0<q<1$ نقول أن المتتالية متناقصة.
- $q=0$ نقول أن المتتالية معدومة ابتداءً من الحد الثاني.
- $q<1$ نقول أن المتتالية غير رتيبة.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية المعرفة على **N**بـ: $U_n=5+2n$؛

$U_{n+1} - U_n=5+2(n+1)-(5+2n)$

$U_{n+1} - U_n=5+2n+2-5-2n$

$U_{n+1} - U_n=2>0$

نلاحظ أن الفرق $U_{n+1} - U_n>0$ ومنه المتتالية U_n**متزايدة**.

ب- وإما أن تكون المتتالية غير رتيبة:

وتكون بذلك تارة متزايدة والأخرى متناقصة على مجال تعريفها.

مثال:

لتكن لدينا المتتالية المعرفة على **N** بـ: $V_n=5(-1)^n$؛

نلاحظ أن العدد (1-) المرفوع بالأس (n) سالب, ومنه إذا كان الأس عدد زوجي فإن المتتالية تكون موجبة, وإذا كن الأس عدد فردي فإن المتتالية تكون سالبة.

وعليه فإن المتتالية تارة تكون موجبة والأخرى سالبة على حسب رتبة الحد n, وهنا نقول أن المتتالية V_n **غير رتيبة**.

4- محدودية المتتالية:

عند دراسة محدودية المتتالية نقصد بذلك مقارنتها مع الحدود التي يمكن أن تصل إليها مع تزايد n على N؛ ونقول عن المتتالية أنها **محدودة** إذا كانت قيم عناصرها تقتصر على مجال معين ولا تخرج عنه مع تزايد رتبة الحدود n, أما إذا لم تكن تقتصر على مجال معين, ويصل تزايدها إلى مالانهاية -بقيمتيها السالبة والموجبة- مع تزايد رتبة الحدود n, فإننا نقول عنها أنها **غير محدودة**, وعند دراسة المحدودية نميز الحالات التالية:

- نقول أن المتتالية محدودة من الأسفل "راجحة" إذا كان:

$$\forall n\in \mathbf{N}, \exists\, \ell \in \mathbf{R} \,/\, U_n > \ell$$

- نقول أن المتتالية محدودة من الأعلى "مرجوح عليها" إذا كان:

$$\forall n\in \mathbf{N}, \exists M \in \mathbf{R} \,/\, U_n < M$$

- نقول أن المتتالية أنها محدودة إذا كانت محدودة من الأعلى ومن الأسفل:

$$\forall n\in \mathbf{N}, \exists \ell, M \in \mathbf{R} \,/ \ell < U_n < M$$

5- تقارب وتباعد المتتالية:

نقصد بتقارب وتباعد المتتالية دراسة سلوك قيم الحدود, فإذا كانت:

- الحدود تقترب من قيمة معينة كلما ازداد n , نقول أن المتتالية متقاربة ونسمي هذه القيمة الحد النهائي.
- الحدود تبتعد عن بعضها البعض بالزيادة أو النقصان إلى مالا نهاية, نقول أن المتتالية متباعدة.

ويمكن دراسة تقارب وتباعد المتتالية بتطبيق القاعدة المخصصة لذلك, وذلك بالنظر إلى طبيعة المتتالية مع التركيز على محدوديتها, وهنا نميز الحالات التالية:

أ- تقارب المتتاليات:

في الصورة البسيطة يمكن معرفة تقارب المتتالية إذا كان:

- إذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى نقول عنا أنها **متقاربة**.
- إذا كانت المتتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل نقول عنها أنها **متقاربة**.

وإلا يجب إثبات ذلك باستعمال تعريف النهايات من خلال القانون:

باعتبار أن: $\lim\limits_{n\to\infty}(Un) = \ell$

$$\forall \varepsilon>0 \ ,\exists\ n_0\in \mathbf{N} : \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow |U_n-\ell|< \varepsilon$$

ب- تباعد المتتاليات:

في الصورة البسيطة يمكن معرفة تباعد المتتالية إذا كان:

- إذا كانت المتتالية متزايدة ومحدودة من الأسفل دون الأعلى, نقول عنها أنها **متباعدة**.
- إذا كانت المتتالية متناقصةومحدودة من الأعلى دون الأسفل, نقول عنها أنها **متباعدة**.

وإلا يجب إثبات ذلك باستعمال تعريف النهايات من خلال القانون:

باعتبار أن: $\lim\limits_{n\to\infty}(Un) = |\ell|$ **أو:** $\lim\limits_{n\to\infty}(Un) = |\infty|$

وهنا نميز حالتين :

أ- في حالة: $\lim_{n\to\infty}(Un) = +\infty$

$$\forall A>0\ ,\exists\ n_0\in \mathbf{N}: \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow U_n>A$$

ب- في حالة: $\lim_{n\to\infty}(Un) = -\infty$

$$\forall A>0\ ,\exists\ n_0\in \mathbf{N}: \forall\ n\geq n_0 \Rightarrow U_n<-A$$

6- تجاور المتتاليات:

يكون التجاور بين متتاليتين, ونقول عنهما أنهما متجاورتين إذا كان:

- إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة.
- نهاية الفرق بينهما عند ∞ معدومة.

مثال:

أدرس تجاور المتتاليتن :

$$V_n=(2)/(n+1)$$
$$U_n=(-1)/(n+2)$$

لدينا:

- أولاً: دراسة طبيعة المتتاليتين:

$$U_{n+1} - U_n=(1)/(n+1)(n+2)>0$$

ومنه المتتالية U_n متزايدة.

$$V_{n+1} - V_n=(-2)/(n+1)(n+2)<0$$

ومنه المتتالية V_n متناقصة.

وعليه فإن الشرط الأول محقق.

- ثانيا:حساب نهاية الفرق بين المتتاليتين:

$$U_n - V_n= (3n+5)/(n^2+3n+2)$$

لدينا :

$$\lim_{n\to\infty}(Un - Vn) = \lim_{n\to\infty}(3/n) = 0$$

وعليه فإن الشرط الثاني محقق.

إذاً المتتاليتين U_n و V_n **متجاورتين**.

7- المتتاليات التراجعية:

نقول عن المتتالية أنها تراجعية إذا كانت معرفة بعلاقة تربط الحد الحالي بالحد السابق له؛أي أن كل حد يعتمد على القيم السابقة له في المتتالية، وتكون هذه العلاقة رياضية واضحة يتم تمثيلها بصيغة معينة.

نكتب: $U_0=\mathbf{a}$ $\quad /\mathbf{a} \in \mathbf{R}$

$$U_{n+1} = f(U_n)$$

ومن أهم مميزات المتتالية التراجعية التطبيق المرافق لها أو الدالة المرافقة "$f(U_n)$" التي تستخدم في دراسة تفاصيل المتتالية, ويتضح ذلك من خلال:

أ- طبيعة المتتالية التراجعية:

يختلف الأمر عند دراسة رتابة المتتالية التراجعية عن الطريقة المتبعة في دراسة رتابة المتتالية المعرفة بعبارة الحد العام؛ أين لا نجد اعتماد المتتالية في دراسة رتابتها على دراسة اشارة الفرق بين: "U_nو U_{n+1}" وإنما تعتمد هذه المتتاليات على التطبيق المرافق "الدالة المرافقة ", وتكون الخطوات كالآتي:

دراسة اتجاه تغير الدالة $f(U_n)$, ونميز ثلاث حالات:

- إذا كانت الدالة $f(U_n)$ متزايدة, نقوم بمقارنة حدين متتاليين من حدود المتتالية U_0 و U_1؛
  - إذا كان: $U_0U_1<$ نقول أن: U_nمتزايدة.
  - إذا كان: $U_0U_1>$ نقول أن: U_nمتناقصة.
- إذا كانت الدالة $f(U_n)$ متناقصة, نقوم بدراسة اتجاه تغير الدالة $f \circ f$.

ب-نهاية المتتالية التراجعية:

يمكننا التطبيق $f(U_n)$ من حساب نهاية المتتالية باستخدام تعريف النهايات, أين تكون نهاية المتتالية $f(\ell)=\ell$.

مثال:

لدينا المتتالية U_n معرفة كالآتي: $U_0=0$

$$U_{n+1} =\sqrt{Un + 6}$$

أولاً: دراسة طبيعة المتتالية U_n:

- نكتب التطبيق $f(U_n)$ بدلالة x, وندرس تغيراتها:

$f(x)=\sqrt{x+6}$

$f'(x)= 1/(2\sqrt{x+6})$

x	0	+∞
f '(x)	+	

ومنه دالة التطبيق موجبة تماماً على مجال تعريف المتتالية U_n.

ثانياً: حساب نهاية المتتالية:

باستخدام العلاقة $f(\ell)=\ell$ نجد: $f(\ell)=\sqrt{l+6}$

$\sqrt{l+6}=l$

$l^2-l-6=0$ **=>** $l_1=-2$; $l_2=3$

نقول أن: l_1 مرفوض لأن لا ينتمي إلى مجموعة التعريف.

و l_2 مقبول لأنه ينتمي إلى مجموعة التعريف.

ومنه : $\lim_{n\to\infty}(Un) = 3$

8- البرهان بالتراجع:

نقصد بـ"البرهان بالتراجع" ذلك الأسلوب الرياضياتي الذي يتم فيه فرض صحة فرضية معينة, والانطلاق من المسلمات الرياضية والعمليات الجبرية والتحليلية قصد الوصول إلى أصل الفرضية, وفي المتتاليات العددية نستخدم هذا الأسلوب باتباع خطوات معينة من أجل كل متتالية معرفة على **N** بدلالة n, بحيث يتم الانتقال من الفرضية P_n إلى الفرضية P_{n+1}, وتتمثل هذه الخطوات في:

- التأكد من صحة الفرضية P_0 من أجل U_0.
- فرض صحة الفرضية P_n من أجل $n_0 \geq n$ وإثبات صحة الفرضية P_{n+1}.

مثال:

لدينا المتتالية U_n معرفة كالآتي: $U_0=0$

$$U_{n+1} = \sqrt{Un + 6}$$

نبرهن باستخدام البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n \in N$ فإن $U_n<3$؛

<u>أولاً:</u> اختبار صحة الفرضية P_0:

لدينا $U_0=0<3$ ومنه الفرضية P_0 محققة.

<u>ثانياً:</u> نفرض صحة الفرضية P_n ونبرهن صحة الفرضية P_{n+1}.

نضع من أجل كل $n \in N$: $U_n<3$

$$U_n+6<3+6$$

$$\sqrt{Un + 6}<\sqrt{9}$$

$$U_{n+1}<3$$

وهنا نلاحظ صحة الفرضية P_{n+1},

وعليه نقول أنه: من أجل كل $n \in N$ فإن $U_n<3$.

9- مجموع المتتاليات:

تختلف طريقة حساب مجموع المتتالية باختلاف نوعها؛ فإذا كانت:

أ- المتتالية حسابية:

نستخدم القانون: $S_n=\frac{(n+1)}{2}[U_0+(U_0+nr)]$, بحيث:

- $n+1$: عدد الحدود.
- U_0 الحد الأول.
- r الأساس
- U_0+nr الحد الأخير.

ب- المتتالية هندسية:

نستخدم القانون: $S_n= U_0 \frac{(1-q^{n+1})}{(1-q)}$, بحيث:

- $n+1$: عدد الحدود.
- U_0 الحد الأول.
- q الأساس

ملاحظة:

في حالة ابتداء المجموع من عدد $p\neq 0$, يحسب عدد الحدود بالعلاقة: $n-p+1$.

10- نظريات:

أ- نظرية الحصر:

من أجل كل $n\in\mathbf{N}$, لدينا المتتاليات العددية: U_n, V_n, W_n؛

إذا كانت المتتاليتين: U_n, V_n متقاربتين نحو نفس العدد ℓ, وكان $U_n < W_n < V_n$.

فإن المتتالية W_n متقاربة نحو نفس العدد ℓ.ونكتب:

$$\lim_{n\to\infty}(Wn) = l.$$

ب-نظرية Inf, Sup:

في مجموعة التعريف A, المعرفة بـ:$A=\{U_n ; \forall n\in\mathbf{N}:\}$, إذا كانت:

- المتتالية U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فإن:

Inf A=U_0

Sup A=$\lim_{n\to\infty}(Un)$

- المتتالية U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن:

$$\mathbf{Inf\ A} = \lim_{n\to\infty}(Un)$$

Sup A=U_0

المحور الثالث: عموميات حول الدوال ذات المتغير الحقيقي:

1-تعريف:

نسمي دالة عددية؛ كل تطبيق من مجموعة التعريف الجزئية I من R نحو مجموعة الأعداد الحقيقية R, ونكتب:

$$f : D_f \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)=y$$

- نسمي المجموعة التي ينتمي إليها x: مجال التعريف, مدخلات الدالة f, أو مجموعة المنطلق.
- نسمي المجموعة التي ينتمي إليها العنصر $f(x)=y$, مخرجات الدالة f, أو مجموعة الوصول.
- نسمي العنصر x أصل أو سابقة y بواسطة الدالة f, والعنصر y صورة x بواسطة الدالة f.
- تسمى الدالة f تطبيق إذا وفقط إذا كان لكل عنصر من مجموعة المنطلق صورة واحدة فقط من مجموعة الوصول.

2-مجال التعريف:

يقصد بمجال التعريف تلك المجموعة من العناصر x التي تقبلها الدالة f(x) كسوابق للصور الناتجة عن تعويضها في الدالة.

ونقول أن الدالة f معرفة عند العنصر x من مجال التعريف D_f.

ونكتب:{ $D_f=\{\forall x\in R /f(x)$ existe $\}$, أو:{ $\forall x\in R: \exists y\in R\}$.

- جدول مجالات تعريف بعض الدوال المألوفة:

الدالة :f(x)	مجال تعريفها: D_f
كثير الحدود	R
e^x	R
Sin_x / Cos_x	R
$\frac{h(x)}{g(x)}$	$\{\forall x\in R /g(x)\neq 0\}$
$\sqrt{h(x)}$	$\{\forall x\in R /h(x)\geq 0\}$
Ln (h_x) / log (h_x)	$\{\forall x\in R /h(x)>0\}$

3-أنواع الدوال:

نميز بين أنواع رئيسية للدوال:

أ- الدالة الزوجية:

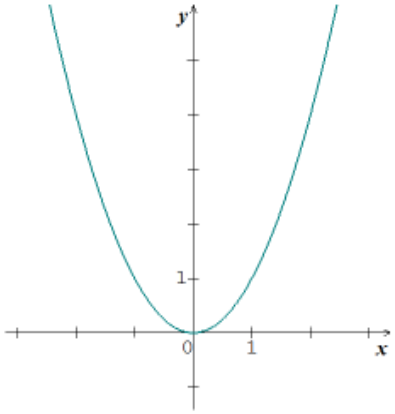
-نقول عن الدالة f(x) أنها زوجية إذا كانت متناظرة بالنسبة لمحور التراتيب, بحيث يكون تمثيلها البياني C_f ؛ $C_f=\{(x,f_{(x)})/x\in D_f\}$.

-ونقول أن الدالة زوجية إذا تحققت العلاقة:$\{\forall\ x,-x\in R: f(-x)=f(x)\}$.

مثال:

الدالة $f(x)=x^2$ دالة زوجية لأن: $f(x)=x^2$ و $f(-x)=x^2$

وتمثيلها البياني C_f متناظر بالنسبة لمحور التراتيب:



ب- الدالة الفردية:

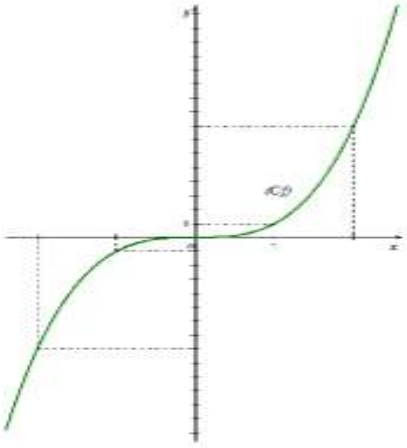
-نقول عن الدالة f(x) أنها فردية إذا كانت متناظرة بالنسبة للمبدأ O(0,0).

-ونقول أن الدالة فردية إذا تحققت العلاقة: $\{\forall\ x,-x\in R: f(-x)=-f(x)\}$.

مثال:

الدالة $f(x)=x^3$ دالة فردية لأن: $-f(x)=-x^3$ و $f(-x)=-x^3$

وتمثيلها البياني متناظر بالنسبة للمبدأ:



ج- الدالة الدورية:

-نقول عن الدالة f(x) أنها دورية إذا كانت صورها y تتكرر بشكل منتظم بتغير قيم سوابقها x.

-إذا كانت الدالة f(x)دورية، فهذا يعني أن هناك قيمة ثابتةTتمثل مجال معين من المجال D_fويسمى فترة الدورة.

-ونقول أن الدالة دورية إذا تحقق: $\{\forall x \in D_f , T\in D_f: f(x+T)= f(x)\}$.

-إذا كانت الدالة دورية دورها T؛ فإنه يكفي دراستها على مجال الدور T, وإسقاط النتائج على كافة مجال التعريف D_f

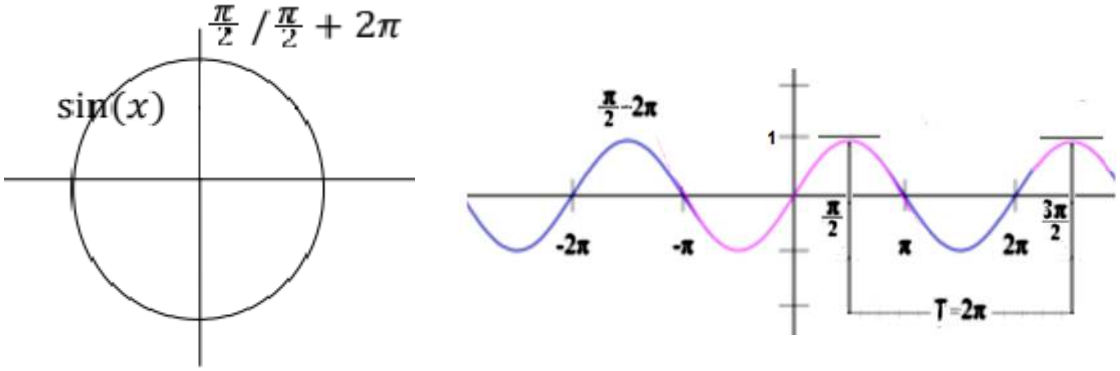
مثال:

الدالة Sin_x / Cos_xهي دوال دورية معرفة على R, ولها دور $T=2\pi$يحصر قيم مخرجات الدالة بين 1 و 1-.

ونكتب : $Sin(x+2\pi)=Sin(x)$

وبتطبيق القيمة: $x=\pi/2$ نجد:

$Sin(\pi/2)= Sin(3\pi/2)= Sin(5\pi/2)=...= Sin(\pi/2+2T\pi) = 1$



د-الدالة المركبة:

- هي كل دالة يتم تعريفها عن طريق تركيب دالتين. وتنتج عن تطبيق دالة على ناتج دالة أخرى, ويرمز لها بالرمز ∘
- نعتبر الدالتين: f(x) المعرفة على D_f, وg(x) المعرفة على D_g, نسمي الدالة المركبة من g نحو f بالعبارة $(g \circ f)$ كل تطبيق للدالة fعلى g؛ بحيث تشكل لنا $g(f_{(x)})$, تكون معرفة على $D_{g\circ f}$بحيث:

$$D_{g\circ f}=\{\forall x \in R/ x \in D_f , f(x)\in D_g\}$$

مثال:

إذا كانت لدينا الدالتين: $f(x)=x^2$ المعرفة على $D_f=\mathbf{R}$ و $g(x)=\ln(x)$ المعرفة على $D_g=]0,+\infty[$؛

فإن الدالة: $(g \circ f)=\ln(x^2)$ المعرفة على: $D_{g\circ f}=\mathbf{R}-\{0\}$ هي الدالة g تركيب الدالة f.

4- نهايات الدوال:

يستخدم مفهوم النهاية في التحليل الرياضياتي عند دراسة سلوك الدالة عند اقترابها من قيمة معينة: "مضبوطة, مجال, مالانهاية", حيث تحدد قيمة الدالة عند هذه اقترابها من هذه القيمة حتى وإن لم تكن معرفة عندها.

نرمز بـ L للقيمة التي تعطى لـ $f(x)$ عندما يقترب x من قيمة معينة α, بحيث كلما زاد اقتراب x من α زاد اقتراب $f(x)$ من L, ونكتب:

$$\lim_{x\to\alpha}(f(x)) = L$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة: $f(x)=\ln(x)$ المعرفة على $D_f=]0,+\infty[$؛

نقول أن L نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة $\alpha=1$, هي القيمة 0؛ ونكتب:

$$\lim_{x\to 1}(f(x)) = 0$$

أي أن الدالة f تقترب من العدد 0 كلما اقترب المتغير x من العدد 1 ضمن المجال D_f

ومن هنا يجب ضبط معنى النهاية عل طرفي القيمة α , حيث تجب دراسة نهاية الدالة عند α بقيم أكبر, وقيم أصغر وتسمى النهاية من يمين α والنهاية من يسار α.

أ- النهاية من اليمين والنهاية من اليسار:

- نقصد بالنهاية من اليمين؛ دراسة سلوك الدالة f(x) عندما تقترب قيم x من القيمة α بقيم أكبر منها ولا تساويها, ونعبر عن ذلك بـ"نهاية الدالة f(x) عندما يؤول x إلى α بقيم أكبر, أو نهاية f(x) من اليمين", ونكتب:

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = L_d \quad \text{أو} \quad \lim_{x>\to\alpha} f(x) = L_d$$

- نقصد بالنهاية من اليسار؛ دراسة سلوك الدالة f(x) عندما تقترب قيم x من القيمة α بقيم أصغر منها ولا تساويها, ونعبر عن ذلك بـ"نهاية الدالة f(x) عندما يؤول x إلى α بقيم أصغر, أو نهاية f(x) من اليسار", ونكتب:

$$\lim_{x\to\alpha-} f(x) = L_g \quad \text{أو} \quad \lim_{x<\to\alpha} f(x) = L_g$$

- نقول أن الدالة f(x) تقبل نهاية عند α , إذا وفقط إذا كانت النهاية من اليمين واليسار عند α متساويتين؛

$$\lim_{x\to\alpha-} f(x) = \lim_{x\to\alpha+} f(x) = L$$
$$L_g = L_d$$

مثال:

لتكن لدينا الدالة: $f(x)=\ln(x)$ المعرفة على $D_f=]0,+\infty[$؛

عند حساب نهاية الدالة عند أي قيمة من قيم مجال التعريف نلاحظ التساوي من الطرفين اليمين واليسار؛ مثلاً عند حساب النهاية عند 1 بقيم كبرى وقيم صغرى نجد:

$$\lim_{x\to1-} f(x) = \lim_{x\to1+} f(x) = 0$$

بينما عند حساب نهاية الدالة f(x) عند 0 بقيم كبرى وقيم صغرى نجد

$\lim_{x\to0+} f(x) = -\infty$ ؛ و $\lim_{x\to0-} f(x)$ غير موجودة.

وهنا نقول أن الدالة f لا تقبل نهاية عند 0 لعدم وجود النهاية من يسار 0, ونقول أن الدالة غير مستمرة عند 0.

ب- نهايات بعض الدوال المألوفة:

الدالة: f(x)	مجال تعريفها: D_f	النهاية	
		عند	تساوي
x	R	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$-\infty$
كثير الحدود	R	$+\infty$	نهاية الحد الأعلى درجة
		$-\infty$	نهاية الحد الأعلى درجة
1/x	$\{\forall x \in R / x \neq 0\}$	$+\infty$	$0+$
		$-\infty$	$0-$
		$0+$	$+\infty$
		$0-$	$-\infty$
$\frac{h(x)}{g(x)}$	$\{\forall x \in R / g(x) \neq 0\}$	$g(x) \to +\infty$	نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة
		$g(x) \to -\infty$	نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة
		$g(x) \to 0+$	$+\infty$؛ $h(x)>0$
			$-\infty$؛ $h(x)<0$
		$g(x) \to 0-$	$-\infty$؛ $h(x)>0$
			$+\infty$؛ $h(x)<0$
$\sqrt{h(x)}$	$\{\forall x \in R / h(x) \geq 0\}$	$+\infty$	$+\infty$
		$0+$	$0+$
Ln (h_x) / log (h_x)	$\{\forall x \in R / h(x) > 0\}$	$+\infty$	$+\infty$
		$0+$	$-\infty$
e^x	R	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	0
x^n	$n \in N^* / x \in R$	$+\infty$	$+\infty$
		$-\infty$	$+\infty$ ؛n زوجي
			$-\infty$:n فردي

ج- العمليات على النهايات:

نهاية النتيجة	العملية	نهاية الدالة	
		g(x)	f(x)
α' + α	+	α′	α
α' - α	-		
α' ×α	×		
α' ÷α	÷		
+∞	+	+∞	0<α
+∞	-		
+∞	×		
0	g(x)÷f(x)		
+∞	f(x)÷g(x)		
+∞	+	+∞	0>α
+∞	-		
-∞	×		
0	g(x)÷f(x)		
-∞	f(x)÷g(x)		
-∞	+	-∞	0<α
-∞	-		
-∞	×		
0	g(x)÷f(x)		
-∞	f(x)÷g(x)		
-∞	+	-∞	0>α
-∞	-		
+∞	×		
0	g(x)÷f(x)		
+∞	f(x)÷g(x)		
+∞	+	+∞	+∞
حالة عدم تعيين	-		
+∞	×		
حالة عدم تعيين	÷		
-∞	+	-∞	-∞
حالة عدم تعيين	-		

		×	+ω
		÷	حالة عدم تعيين
+ω	-ω	+	حالة عدم تعيين
		g(x) - f(x)	+ω
		f(x) - g(x)	-ω
		×	-ω
		g(x)÷f(x)	حالة عدم تعيين
		f(x)÷g(x)	حالة عدم تعيين
0	+ω	+	+ω
		-	-ω
		×	حالة عدم تعيين
		g(x)÷f(x)	0
		f(x)÷g(x)	+ω
0	0	+	0
		-	0
		×	0
		÷	حالة عدم تعيين

د- المستقيمات المقاربة:

من أهم ما ينتج عن دراسة نهايات الدوال استنتاج ما يسمى بالمستقيمات المقاربة؛ ونقصد بها , الدوال ذوات المعادلات "العامودية, الأفقية, أو المائلة" التي تقترب منها الدالة عند مستوى معين ولا تلامسها.

وتختلف أنواع المستقيمات المقاربة باختلاف النهاية المتوصل إليها؛ وفيما يلي بيان لذلك:

<table>
<tr><th>الحالة</th><th colspan="4">النتيجة</th></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)) = a$</td><td colspan="4">وجود مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y=a$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to a}(f(x)) = \pm\infty$</td><td colspan="4">وجود مستقيم مقارب عامودي بجوار $\pm\infty$ معادلته: $x=a$</td></tr>
<tr><td>$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b)) = 0$</td><td colspan="4">وجود مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y=ax+b$ $\forall a,b\ x\in R$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)) = \pm\infty$</td><td colspan="4">احتمال وجود مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$؛ نقوم بحساب: $\lim_{n\to\pm\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$</td></tr>
<tr><td>$=\pm\infty$</td><td>$=0$</td><td colspan="2">$=a$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">وجود قطع مكافئ في اتجاه محور التراتيب.</td><td rowspan="2">وجود قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل</td><td colspan="2">نقوم بحساب: $\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax))$</td></tr>
<tr><td>$=0$</td><td>$=b$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>وجود قطع مكافئ في اتجاه المستقيم: $y=ax$</td><td>وجود مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$ معادلته: $y=ax+b$</td></tr>
</table>

5-الاستمرارية:

نقول عن الدالة أنها مستمرة إذا لم تنقطع قيم مخرجاتها في مجموعة الوصول, عند الاقتراب من قيمة معينة في مدخلاتها من مجموعة الانطلاق.

ونعبر عن ذلك رياضياً إذا اعتبرنا أن الدالة f(x) المعرفة عند النقطة α تحقق العلاقة: $\lim_{x\to\alpha}(f(x)) = f(\alpha)$,

ونكتب: $\forall x\in D_f : \exists \alpha\in D_f \backslash \lim_{x\to\alpha}(f(x)) = f(\alpha)$

مثال:

لدينا الدالة $\mathbf{f(x)=x^2}$؛ ونريد أن ندرس استمراريتها عند النقطة $\boldsymbol{\alpha=2}$.

أولاً: الدالة f(x) معرفة على **R** و$2\in R$, وعليه يمكن دراسة استمراريتا عن 2.

ثانياً: حساب النهاية عند 2؛ $\lim_{x\to 2}(f(x)) = 4$

ثالثاً: حساب قيمة الدالة عندما x=2 ؛ $\mathbf{f(2)=4}$

نلاحظ أن: $\lim_{x\to 2}(f(x)) = f(2) = 4$

وعليه نقول أن الدالة f مستمرة عند النقطة x=2.

أ- الاستمرارية من اليمين الاستمرارية واليسار:

- نقصد بالاستمرارية من اليمين؛ دراسة استمرار الدالة f(x) عندما تقترب قيم x من القيمة α بقيم أكبر منها وتساويها, ونكتب:

$$\lim_{x\to\alpha+} f(x) = f(\alpha) \quad \text{أو} \quad \lim_{x>\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$$

- نقصد بالاستمرارية من اليسار؛ دراسة استمرار الدالة f(x) عندما تقترب قيم x من القيمة α بقيم أصغر منها وتساويها, ونكتب:

$$\lim_{x\to\alpha-} f(x) = f(\alpha) \quad \text{أو} \quad \lim_{x<\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$$

مثال:

لدينا الدالة: f(x) ؛ المعرفة بـ:

$$\begin{cases} f(x)=x-2 & si\ x<1 \\ f(x)=x^2+x-3 & si\ x\geq 1 \end{cases}$$

ندرس إستمرارية الدالة f(x) عند القيمة x=1؛

- الاستمرارية من اليمين:

$\lim_{x\to 1+} f(x) = -1$ و $f(1)=1^2+1-3=-1$

ومنه الدالة مستمرة على يمين الـ1

-الاستمرارية من اليسار:

$\lim_{x\to 1-} f(x) = -1$ و $f(1)=1-2=-1$

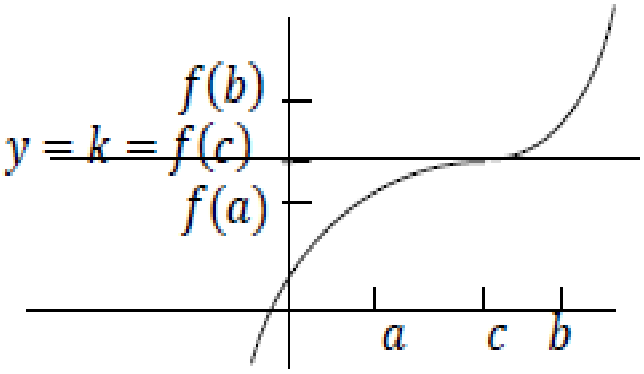
ومنه الدالة مستمرة على يسار الـ1

نقول؛ بما أن: 1- = $\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1-} f(x)$ فالدالة مستمرة عند 1.

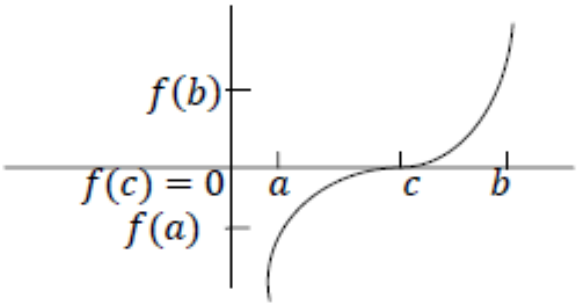
ب-نظرية القيم المتوسطة:

- إذا كانت الدالة f(x) معرفة ومستمرة على المجال [a,b], فإنه من أجل كل عدد حقيقي $k\in[f(a),f(b)]$, يوجد على الأقل عدد $c\in[a,b]$, يحقق العلاقة: $f(c)=k$.

- نفسر ذلك بيانياً بأنه إذا كانت الدالة معرفة ومستمرة على المجال [a,b], فإن المستقيم ذو المعادلة y=k يقطع منحنى الدالة في نقطة على الأقل c؛ إذا كانت الدالة رتيبة تماماً على المجال [a,b], أو أكثر من نقطة $c_1,c_2,c_3\ldots$؛ إذا كانت الدالة غير رتيبة تماماً على المجال [a,b], بحيث يكون c محصوراً بين a و b .



- إذا كان k=0 فإن الدالة تقطع محور الفواصل في النقطة c, أي أن الدالة f(x) تنعدم عند c, ونكتب: f(c)=0.



ملاحظة:

- **إذا كانت الدالة رتيبة تماماً "متزايدة أو متناقصة" على طول المجال** [a,b] فإنها تقبل c وحيد.
- **إذا كانت الدالة غير رتيبة "تغير اجاه تغيرها" على طول المجال** [a,b] فإنها تقبل أكثر من c.

المحور الرابع: الدوال الأسية واللوغاريتمية:

أولاً: الدالة الأسية:

1) تعريف:

نسمي كل دالة معرفة على R التي ترفع كل عدد e في الأس قوة المتغير x, ونكتب $f(x)=e^x$ حيث:

- **e:** يعبر عن الثابت النيبيري "Euler's number" وهو عدد يساوي بالتقريب 2.71828.
- يرمز للدالة الأسية بـ e ,أو exp.

وتكون الدالة الأسية معرفة بـ:

$$f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}_+^*$$
$$x \rightarrow f(x)=y$$

2) خواص الدالة الأسية:

من أجل كل $x,y\in\mathbf{R}$ و $n\in\mathbf{N}$, لدينا:

- $e^0=1$
- $(e^x)'=e^x$
- $e^{x+y} = e^x\times e^y$
- $e^{x-y} = e^x\backslash e^y$
- $(e^x)^n=e^{nx}$
- $e^{-x} = 1\backslash e^x$
- $x > y \Rightarrow e^x > e^y$
- $x < 0 \Rightarrow 0 < e^x < 1$
- $x > 1 \Rightarrow 1 < e^x$

3) دراسة الدالة الأسية:

ونميز حالتين؛ الأس عنصر e^x , أو الأس دالة $e^{f(x)}$:

أ) حالة $f(x)=e^x$:

-إتجاه التغير:

نعلم أن الدالة e^x معرفة على **R**, وعليه وجب دراسة تغيراتها عند أطراف مجموعة التعريف: $-\infty,+\infty$.

من خواص الدالة الأسية أنها موجبة تماماً؛ وأنها في المجال $]-\infty,0[$ تكون $0 < e^x < 1$, ونعلم أن $(e^x)'=e^x$, وعليه فإن الدالة الأسية موجبة ومتزايدة تماماً على **R**.

-النهايات:

تتميز الدالة الأسية بنهايات شهيرة وهي:

$$\lim_{x\to+\infty}(exp(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(exp(x)) = 0$$

$$\lim_{x\to 0}(exp(x)) = 1$$

-جدول التغيرات:

ليصبح جدول تغيراتها من الشكل:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$(e^x)'$	+		
e^x	0	1	$+\infty$
		0	

-المستقيمات المقاربة:

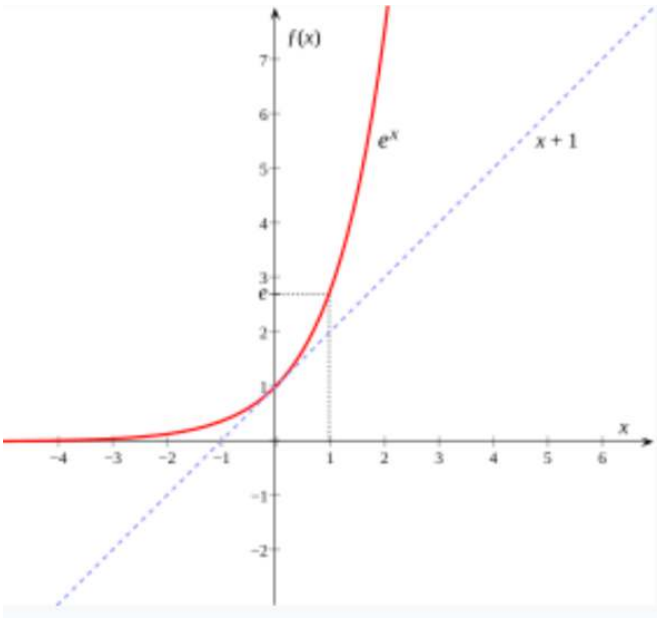
بما أن: $\lim_{x\to-\infty}(exp(x)) = 0$, فإن المنحنى الممثل للدالة $f(x)=e^x$ يقبل مستقيم مقارب أفقي عند $-\infty$ معادلته $y=0$ وهو محور الفواصل.

-معادلة المماس:

تقبل الدالة exp مماس عند النقطة $x_0=0$, معادلته من الشكل:

$$y:T=e^0(x-0)+e^0= x+1$$

-التمثيل البياني:



ب)حالة $f(x)=e^{h(x)}$:

-إتجاه التغير:

نعلم أن الدالة e^xمعرفة على **R**, ومنه فإن مجال تعريف $f(x)$ هو نفسه مجال تعريف $h(x)$, وعليه وجب دراسة تغيرات الدالة $h(x)$ لمعرفة تغيرات الدالة f, فإذا كانت:

-$h(x)>0$, فإن: $1 <h(x)$

-$h(x)<0$, فإن:$0 <h(x)< 1$

-

-النهايات:

إذا اعتبرنا أن الدالة $f(x)=e^{h(x)}$ مركبة من دالتين: $g(x)=e^x$ و $h(x)$, نستعمل نهايات الدالة المركبة؛

لتكن لدينا الأعداد الحقيقية a و b و c, إذا كانت:

$$\lim_{x \to a}(h(x)) = b$$

و: $$\lim_{x \to b}(g(x)) = c$$

فإن: $$\lim_{x \to a}(g_0 h)) = c$$

-المشتقة:

إذا كانت $h(x)$ قابلة للاشتقاق على D_h فإن $f(x)$ قابلة للاشتقاق على D_h ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=h'(x).e^{h(x)}$$

ثانياً: الدوال اللوغاريتمية:

1) تعريف:

نسمي كل دالة معرفة على $]0,+\infty[$ وتستعمل معاكس مفهوم الدالة الأسيةe,

ويرمز لها بالرمز ln, ونكتب $f(x)=\ln(x)$حيث:

- **ln:** يعبر عن اللوغاريتم النيبيري

وتكون الدالة اللوغاريتمية معرفة بـ:

$$f: \mathbf{R}_+^* \longrightarrow \mathbf{R}$$
$$x \longrightarrow f(x)=y$$

2) خواص الدالة اللوغاريتمية:

من أجل كل $x,y\in\mathbf{R}$ و $n\in\mathbf{N}$, لدينا:

- $\ln(1)=0$
- $\ln(e)=1$
- $\ln(e^x)=x$
- $e^{\ln(x)}=x$
- $(\ln_{(x)})'=1\backslash x$
- $\ln(x.y)=\ln(x)+\ln(y)$
- $\ln(x\backslash y)=\ln(x)-\ln(y)$
- $\ln(1\backslash x)=-\ln(x)$
- $x>y \Rightarrow \ln(x)>\ln(y)$
- $0<x<1 \Rightarrow \ln(x)<0$
- $x>1 \Rightarrow \ln(x)>0$
- $\ln(x^n)=n.\ln(x)$

3) دراسة الدالة اللوغاريتمية:

ونميز حالتين؛ المجهول عنصر $\ln(x)$, أو المجهول دالة $\ln(f_{(x)})$:

أ) حالة $f(x)=\ln(x)$:

-إتجاه التغير:

نعلم أن الدالة $\ln(x)$معرفة على $\mathbf{R}_{+}^{*}$, وعليه وجب دراسة تغيراتها عند أطراف مجموعة التعريف: $0^{+},+\infty$.

من خواص الدالة اللوغاريتمية أنها سالبة تماماً على المجال $]0,1[$؛ وأنها على المجال $]1,+\infty[$ موجبة تماماً, وتنعدم عند $x=1$.

ونعلم أن: $(\ln_{(x)})'=1\backslash x$, وعليه فإن الدالة المشتقة موجبة تاماً على مجال التعريف $]0,+\infty[$, وينتج عن ذلك أن الدالة $\ln(x)$ متزايدة تماماً على مجال تعريفها $]0,+\infty[$.

-النهايات:

تتميز الدالة اللوغاريتمية بنهايات شهيرة وهي:

$$\lim_{x\to+\infty}(ln(x)) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1}(ln(x)) = 0$$

$$\lim_{x\to 0+}(ln(x)) = -\infty$$

-جدول التغيرات:

ليصبح جدول تغيراتها من الشكل:

x	0	1	$+\infty$
$(\ln(x))'$		+	
ln(x)	$-\infty$	0	$+\infty$

-المستقيمات المقاربة:

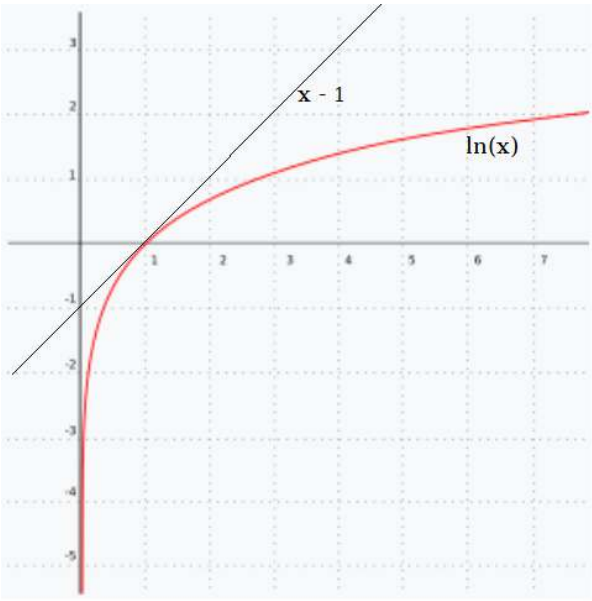
بما أن :$\lim_{x\to 0}(ln(x)) = -\infty$, فإن المنحنى الممثل للدالة f(x)=ln(x) يقبل مستقيم مقارب عامودي عند ∞- معادلته x=0وهو محور التراتيب.

-معادلة المماس:

تقبل الدالة exp مماس عند النقطة $x_0=1$, معادلته من الشكل:

y:T=1\1(x-1)+ln(1)= x-1

-التمثيل البياني:



ب) حالة $f(x)=\ln(h_{(x)})$:

-إتجاه التغير:

نعلم أن الدالة ln(x)معرفة على $\mathbf{R}_+^*$, ومنه:

- إذا كان: $0 < h(x) < 1$, فإن$f(x) < 0$
- إذا كان: $1 < h(x)$, فإن: $0 < f(x)$

-النهايات:

إذا اعتبرنا أن الدالة $\mathbf{f(x)=\ln(h_{(x)})}$مركبة من دالتين: g(x)=ln(x)و h(x), نستعمل نهايات الدالة المركبة؛

لتكن لدينا الأعداد الحقيقية a و b و c, إذا كانت:

$$\lim_{x\to a}(h(x)) = b$$

و: $\lim_{x\to b}(g(x)) = c$

فإن: $\lim_{x\to a}(g_0 h)) = c$

-المشتقة:

إذا كانت h(x)موجبة وقابلة للاشتقاق على D_h فإن f(x) قابلة للاشتقاق على D_h ودالتها المشتقة:

$$f'(x)=h'(x)\backslash h(x)$$

4) الدالة اللوغاريتم العشري log:

نسمي كل دالة معرفة على]0,+∞[, ويرمز لها بالرمز log, ونكتب f(x)=log(x)حيث:

$$\mathbf{\log(x)=\ln(x)\backslash \ln(10)}$$

أهم خاصية للدالة اللوغاريتم العشري هي: log 1=0, و log 10= 0 .

ملاحظة: كل الخواص الجبرية للدالة ln تنطبق وتتحقق على الدالة log(x).من أجل كل :]0,+∞[x∈.

المحور الخامس: الاشتقاقية:

1- تعريف:

إذا كانت الدلة f معرفة على المجال: $D_f \in R$, ومن أجل كل عدد: $a \in D_f$؛

نقول أن الدلة f قابلة للاشتقاق عند a, إذا كانت: $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right)$

- نسمي النسبة: $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ العدد المشتق لـf عند a, ونرمز لها بـ"f'(a)".
- نكتب: $\lim_{x \to a} \left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \right)$ f'(a).
- إذا قبلت الدلة f الاشتقاق عند كل $x \in D_f$, نقول أن الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f, ونسمي الدالة "f'(x) " الدالة المشتقة لـf.
- إذا قبلت الدلة f الاشتقاق على D_f فهي مستمرة على هذا المجال.

2- الاشتقاق من اليمين والاشتقاق من اليسار:

لكل دالة قابلة للاشتقاق على D_f يمكن تمييز جانبين للاشتقاق: "أيمن وأيسر", تفصيلهما كالتالي:

أ) الاشتقاق من اليمين:

نقول أن الدالةf قابلة للاشتقاق من اليمين, إذا قبل العدد المشتق "$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$" نهاية محدودة عندما: $x > a$ "x يؤول إلى a بقيم أكبر" ونرمز لها بالرمز: $f_d'(a)$, ونكتب:

$$\lim_{x \to >a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right)$$

ب)الاشتقاق من اليسار:

نقول أن الدالةf قابلة للاشتقاق من اليسار, إذا قبل العدد المشتق "$\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$" نهاية محدودة عندما:$x < \alpha$ "x يؤول إلى α بقيم أصغر" ونرمز لها بالرمز:$f_g'(\alpha)$, ونكتب:

$$\lim_{x\to<\alpha}\left(\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right)$$

- تكون الدالة f قابلة للاشتقاق عندα إذا كان: العدد المشتق من اليمين والعدد المشتق من اليسار للدالة متساويان؛

$$f_d'(\alpha)f_g' =(\alpha)$$

3- مماس منحنى الدالة:

لديناالدلة fالمعرفة على المجال: $D_f \in R$, وC_fتمثيلها البياني؛

إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق عند α, فإن المنحنىC_f يقبل المماس T عند النقطة $A(\alpha, f_{(\alpha)})$, معامل توجيهه $f'(\alpha)$, ومعادلته؛

$$\mathbf{T: y=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)}$$

4- مشتقات بعض الدوال المألوفة:

- من أجل كل دالة:f معرفة على D_f,وg معرفة على D_g

- ومن أجل كل عدد:$k\in R$, و$n\in N$, لدينا؛

الحالة العامة		الحالات الخاصة	
الدالة	المشتق	الدالة	المشتق
k	0		
$[f(x)]^n$	$n.f'(x).f(x)^{n-1}$	x^n	$n.x^{n-1}$
		x	1
$\frac{1}{[f(x)]^n}$	$-\frac{n.f'(x)}{[f(x)]^{n+1}}$	$\frac{1}{f(x)}$	$-\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$
		$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
		$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{f(x)}$	$\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$e^{f(x)}$	$f'(x).e^{f(x)}$	e^x	e^x
$Ln(f(x))$	$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$Ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$k.f(x)$	$k.f'(x)$	$k.x$	k
$f(g(x))$	$g'(x).f'(g(x))$		
$f(x)+g(x)$	$f'(x)+g'(x)$		
$f(x).g(x)$	$f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$		
$f(x)/g(x)$	$\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{[g(x)]^2}$		
$sin(x)$	$cos(x)$		
$cos(x)$	$-sin(x)$		

5- المشتقات المتتابعة:

نسمي كل دالة f قابلة للاشتقاق على D_f ودالتها المشتقة ‘f قابلة للاشتقاق على $D_{f'}$الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بـ f'', والدالة المشتقة للدالة f'' الدالة المشتقة الثالثة ويرمز لها بـf''', وهكذا إلى أن يصل الاشتقاق إلى القيمة 0.

مثال:

لدينا الدالة f المعرفة على R, بـ: $f(x)=4x^5+2x^4+x^3+3x^2+x+1$؛ تكون دوالها المشتقات على التوالي كالآتي:

$$f'(x)=20x^4+8x^3+3x^2+6x+1$$
$$f''(x)=80x^3+24x^2+12x+6$$
$$f'''(x)=240x^2+48x+12$$
$$f''''(x)=480x+48$$
$$f'''''(x)=480$$
$$f''''''(x)=0$$

6- اتجاه تغير الدالة:

يرتبط اتجاه تغير الدالة f بإشارة الدالة المشتقة لها f', وبينها كالآتي:

لتكن لدينا الدالة f المعرفة على D_f $\in R$, ومن أجل كل عدد: $\alpha \in D_f$:

- إذا كانت $f'(x)>0$؛ فهذا يعني أن الدالة f متزايدة تماماً على المجال D_f .
- إذا كانت $f'(x)<0$ ؛ فهذا يعني أن الدالة f متناقصة تماماً على المجال D_f .
- إذا كانت $f'(x)=0$, هذا يعني أن مماس المنحنى عند النقطة $(\alpha, f_{(\alpha)})$ موازي لمحور الفواصل, وهنا نميز حالتين ؛ انعدمت المشتقة وبدلت اتجاه تغيرها نقول أن الدالة f تقبل قيمة حدية "صغرى, كبرى", انعدمت المشتقة ولم تغير اتجاه تغيرها نقول أن الدالة f تمر بنقطة الانعطاف.

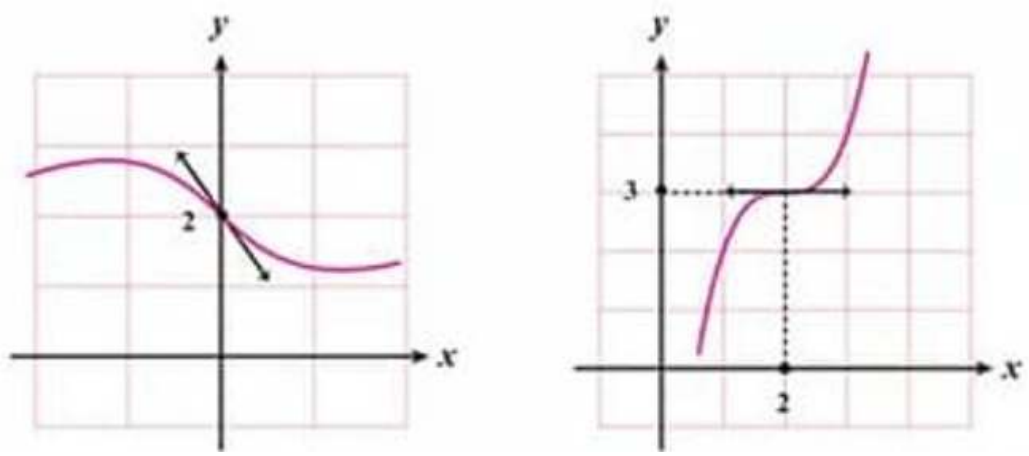
7- نقطة الانعطاف والقيم الحدية:

أ) نقطة الانعطاف:

إذا كانت الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق مرتين على المجال: $D_f \in \mathbb{R}$, ومن أجل العدد: $a \in D_f$ ؛

نقول أن الدالة f الممثلة بيانياً بـ C_f تقبل نقطة انعطاف احداثياها $(a, f(a))$ إذا انعدمت المشتقة الأولى f'' عند a ولم تغير إشارتها.

نقول أن الدالة f الممثلة بيانياً بـ C_f تقبل نقطة انعطاف احداثياها $(a, f(a))$ إذا انعدمت المشتقة الثانية f'' عند a وغيرت اشارتها , وعند هذه النقطة يخترق المماس منحنى الدالة f.



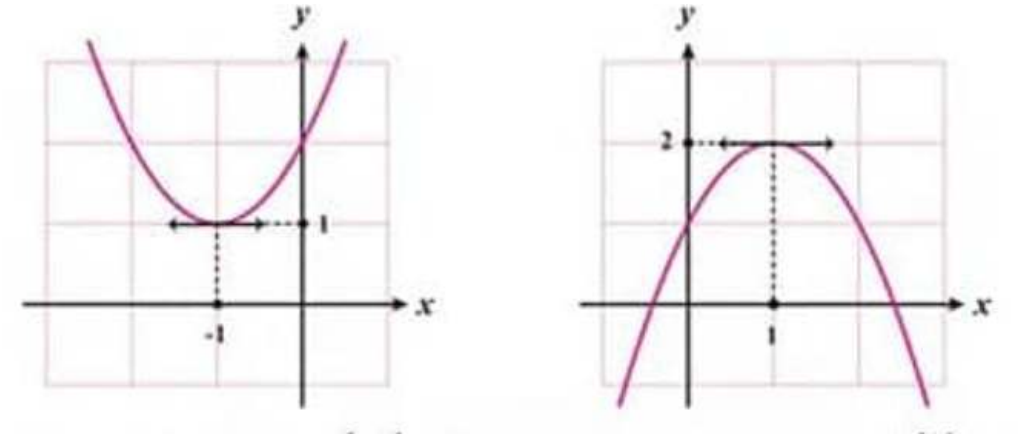
ب)القيم الحدية:

إذا كانت الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال: $D_f \in \mathbb{R}$, ومن أجل العدد: $a \in D_f$ ؛

نقول أن الدالة f تقبل قيمة حدية "محلية" إذا انعدمت المشتقة الأولى, وبدلت اتجاه تغيرها, ونميز حالتين:

-تتغير اشارتها من الموجب إلى السالب, وهنا نقول أن الدالة تقبل عند النقطة $(a, f(a))$ قيمة حدية كبرى.

-تتغير اشارتها من السالب إلى الموجب, وهنا نقول أن الدالة تقبل عند النقطة $(a, f(a))$ قيمة حدية صغرى.



8- قاعدة أوبيتال:

تقنية رياضية تُستخدم لحساب النهاية في حالة عدم التعيين من الشكل الكسري " $\frac{0}{0}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$ "

من أجل كل دالة:f معرفة وقابلة للاشتقاق على D_f,و g معرفة وقابلة للاشتقاق على D_g, حيث $D_g, D_f \in R$.و من أجل العدد a , بحيث $a \in D_f$, و $a \in D_g$.

- **وإذا كانت :** $\lim_{x \to a}(f(x)) = 0$ و $\lim_{x \to a}(g(x)) = 0$.

- **أو:** $\lim_{x \to a}(f(x)) = \infty$ و $\lim_{x \to a}(g(x)) = \infty$.

فإن : $$\lim_{x \to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{x \to a}\left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

9- نظرية رووول:

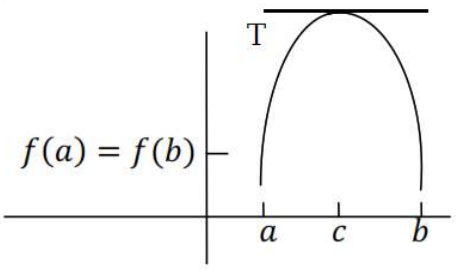
تنص نظرية رووول على أنه من أجل كل دالة: f معرفة $D_f=[a,b]$, بحيث $D_f \in R$, وكانت الدالة:

- مستمرة على المجال $D_f=[a,b]$,
- قابلة للاشتقاق على المجال $]a,b[$
- وكان: $f(a)=f(b)$.

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي $c \in]a,b[$, بحيث $f'(c)=0$.

التحليل البياني:

إذا كانت الدالة المعرفة على $[a,b]$ تحقق الشرط $f(a)=f(b)$, فإن هذا يعني أن الدالة تقبل قيمة حدية "كبرى, صغرى", وهذا لأن المنحنى C_f الممثل للدالة f يمر بنفس القيمة a مرتين على التوالي, وإذا تحقق هذا الشرط فهذا يعني أن المماس في نقطة معينة c من المجال $[a,b]$, يكون موازياً لمحور الفواصل أي أن معامل توجيه المماس يساوي 0 , ونعلم أن معامل توجيه المماس هو الدالة المشتقة عند نقطة معينة تنتمي للمجال $[a,b]$؛ فإن $f'(c)=0$.



المحور السادس: الدوال الأصلية وحساب التكاملات:

أولاً: الدوال الأصلية:

1) تعريف:

إذا كانت الدلة f معرفة على المجال: $D_f \in R$, ومن أجل كل $x \in D_f$؛

نقول أن: الدلة f تقبل دالة أصلية F على المجال D_f, إذا كانت الدالة F قابلة للاشتقاق على نفس المجال وتحقق: $f(x)=F'(x)$.

- إذا كانت الدالة f مستمرة على D_f فهي تقبل دوالاً أصلية على D_f.
- إذا كانت الدالة F الدالة الأصلية لـ f على D_f, فإن كل الدوال الأصلية F لـ f على D_f؛ هي الدوال: $x \longrightarrow F(x)+c$, حيث $c \in R$.
- دالتان أصليتان لنفس الدالة f تختلفان فقط في الثابت c.

2) الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة:

- من أجل كل دالة: f معرفة على D_f.
- ومن أجل كل عدد: $a \in R$, و $n \in N$, لدينا؛

الدالة	الدالة الأصلية
0	c
a	$a.x + c$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\| + c$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$
e^x	$e^x + c$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + c$
lnx	$xlnx - x + c$
$\ln(x-a)$	$(x-a)\ln(x-a) - x + c$

$f'(x).f(x)$	$\frac{[f(x)]^2}{2}+c$
$f'(x).[f(x)]^n$	$\frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1}+c$
$\frac{f'(x)}{[f(x)]^2}$	$-\frac{1}{f(x)}+c$
$\frac{f'(x)}{[f(x)]^n}$	$-\frac{1}{(n-1)[f(x)]^{n-1}}+c$
$\frac{f'(x)}{\sqrt{f(x)}}$	$2\sqrt{f(x)}+c$
$f'(x)e^{f(x)}$	$e^{f(x)}+c$
$\frac{f'(x)}{f(x)}$	$ln\|f(x)\|+c$
$cos(x)$	$sin(x)+c$
$sin(x)$	$-cos(x)+c$

أمثلة:

حدد الدالة الأصلية لكل من الدوال الآتية:

أ- $f(x)=2$

$F(x)=2x+C \;/\; C\in\mathbb{R}$

ب- $f(x)=x$

$F(x)=\frac{1}{2}x^2+C$

ج- $f(x)=x^3$

$F(x)=\frac{1}{4}x^4+C$

د- $f(x)=x^n \;/\; n\in\mathbb{N}^*$

$F(x)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

هـ- $f(x)=(x^2+1)^3(2x)$

$F(x)=\frac{1}{4}(x^2+1)^4+C$

ملاحظة:

توجد دالة أصلية وحيدة لكل دالة f معرفة على D_f, وتحقق الشرط $f(x_0)=y_0$ بحيث: $x_0 \in D_f$ و $y_0 \in R$.

مثال:

حدد الدالة الأصلية للدالة f التي تحقق الشرط $f(x_0)=y_0$:

أ-

$$f(x) = x + 1 \qquad F(2) = 1$$

لدينا :
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$$

وبما أن :
$$F(2) = 1$$

فإن :
$$\frac{1}{2}x^2 + x + C = 1$$

$$2 + 2 + C = 1$$

ومنه :
$$C = -3$$

ومنه :
$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 3$$

ب-

$$f(x) = \cos 2x \qquad F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

لدينا :
$$F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$$

وبما أن :
$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

فإن :
$$C = 0$$

ومنه :
$$F(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$$

ثانياً: التكامل:

1) تعريف:

يعبر التكامل عن حساب التفاضل بين حدين من الدالة,أي: الكمية الإجمالية أو المساحة تحت منحنى الدالة, ويرمز له بالرمز " ∫ ".

وللتكامل علاقة قوية بالدوال الأصلية إذ أنه يستخدمها في حساب ذات التفاضل.

ويستخدم رمز التكامل أثناء التعبير عن الدالة الأصلية , بحيث: إذا كانت الدالة F تعبر عن الدالة الأصلية للدالة f؛ فإنه يمكننا كتابة العلاقة بين F و f برمز التكامل مع عدم تعيين الحدود, وتكون العبارة كالآتي:

$$F(x)=\int f(x)$$

ونميز بين نوعين رئيسيين من التكاملات؛

أ) **التكامل المحدود:**

نقول عن التكامل المحدود أنه فرق التفاضل بين قيمة الدالة الأصلية F عند نقطتين a,b حيث $a,b\in D_f$, بحيث يعبر العدد F(b)-F(a) عن التكامل من a إلى b, ويعبر عنه رياضياً بـ:

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b = F(b)-F(a)$$

ب) **التكامل غير المحدود:**

وهو عملية إيجاد الدالة الأصلية F للدالة f, وما يميزه عدم احتوائه على حدود a,b ويعطى دالة محددة مضاف إليها عدد ثابت c -كما تمت الإشارة في الجدول السابق-.

2) خواص التكامل:

لتكن لدينا الدالتين: f المعرفة والمستمرة على D_f,وg المعرفة والمستمرة على D_g, و $a,b,c,k\in R$, **لدينا:**

1) $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$,"علاقة شال" حيث $c\in[a,b]$
2) $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$
3) $\int_a^a f(x)dx=0$
4) $\int_a^b [f(x)dx+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$
5) $\int_a^b k\,f(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$

6) $\int_a^b k\,dx = (b-a)$

7) إذا كان: $f(x)\geq 0$, فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

8) إذا كان: $f(x)\geq g(x)$ فإن: $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$

3) التكامل وحساب الحيز المحدد بمنحنى:

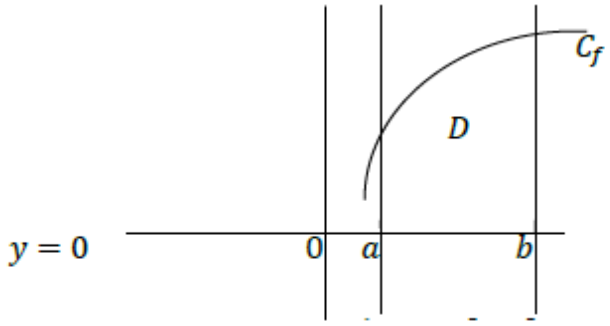
لدينا الدالة f المستمرة على مجال $D_f=[a,b]$, و F دالتها الأصلية, و a و b و c أعداد حقيقية من D_f . حيث: $a<c<b$, و C_f تمثيلها البياني:

نميز الحالات التالية:

أ) الحالة الأولى:

f موجبة على المجال **[a,b]**؛ التكامل من a إلى b للدالة f هو المساحة **A** للحيز المستوي D المحدد بالمنحنى C_f و بالمستقيمات التي معادلاتها x=a و x=b و Y=0 (محور الفواصل). أي:

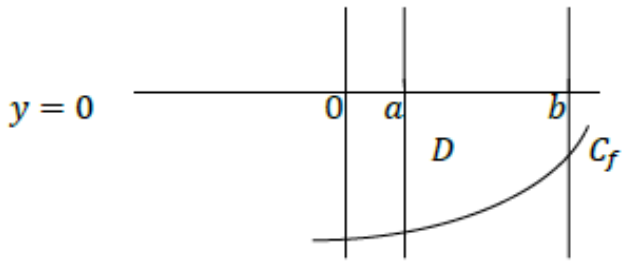
$$A= \int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a$$



ب)الحالة الثانية:

f سالبة على المجال **[a,b]**؛ التكامل من a إلى b للدالة f هو المساحة **A** للحيز المستوي D المحدد بالمنحنى C_f و بالمستقيمات التي معادلاتها x=a و x=b و Y=0 (محور الفواصل). أي:

$$A= -\int_a^b f(x)dx = \int_b^a f(x)dx = F(a)-F(b)$$



ج) **الحالة الثالثة:**

f تأخذ قيم موجبة و قيم سالبة على المجال **[a,b]** ؛

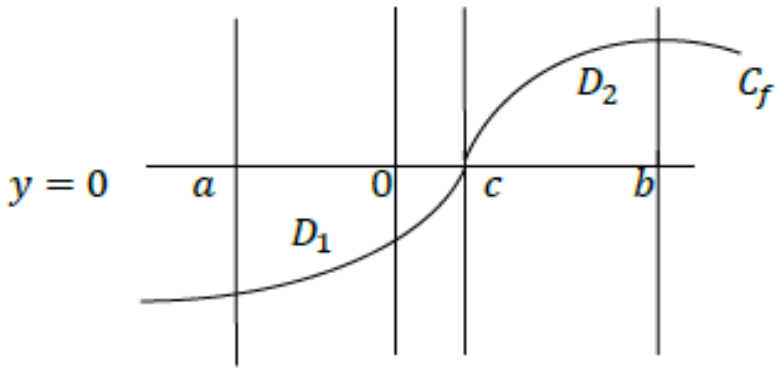
لحساب المساحة A للحيز المستوي D المحدد بالمنحنى C_f ، نقوم بتحديد المجالات أين تكون الدالة موجبة و المجالات أين تكون سالبة، ثم نحسب التكامل المناسب لكل مجال؛

إذا وضعنا؛ A_1: مساحة الحيز المستوي D_1 أين تكون الدالة سالبة.

وA_2: مساحة الحيز المستوي D_2 أين تكون الدالة موجبة.

فإن المساحة A للحيز المستوي المحدد بالمنحنى C_f و بالمستقيمات التي معادلاتها x=a و x=b و Y=0 تساوي إلى:

$$\mathbf{A=A_1+A_2=-\int_a^b f(x)dx+\int_a^b f(x)dx}$$

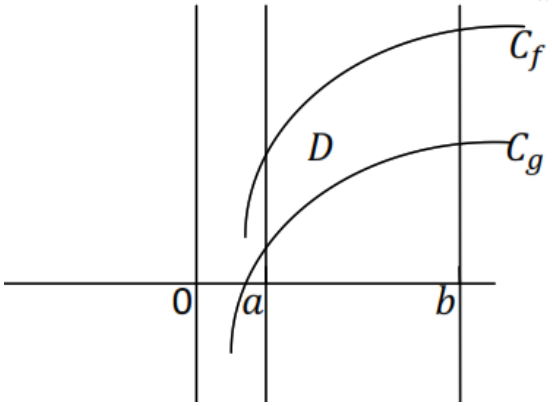


د) **الحالة الرابعة:**

g دالة مستمرة على المجال [a,b] , و C_g تمثيلها البياني . بحيث من أجل كل **x** من **[a,b]** فإن **$f(x)\geq g(x)$.**

المساحة A للحيز المستوي D المحدد بالمنحنيين Cf وCg و بالمستقيمات التي معادلاتها x=a و x=b تساوي إلى:

$$\mathbf{A=\int_a^b [f(x)-g(x)]dx}$$



4) طرق حساب التكامل:

نميز عدة حالات لحساب الدوال الأصلية قصد حساب التكامل والمساحات وتختلف باختلاف الحالة, وبيانها كالآتي:

أ) التكامل بالتحليل المباشر:

إذا كانت الدالة f مألوفة؛ ونقصد بأن الدالة مألوفة أي أنها من الدوال المعلومة المذكورة في الجدول السابق, فإننا نستنتج الدالة الأصلية مباشرة ثم نحسب التكامل.

مثال:

إذا كانت الدالة: $f(x)=\frac{\sqrt{5}}{2x^4}$ نقوم باستنتاج تكامل الدالة باستخدام التحليل المباشر كما يلي:

$$\int \frac{\sqrt{5}}{2x^4}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int \frac{1}{x^4}dx = \frac{\sqrt{5}}{2}\int x^{-4}\,dx = \frac{\sqrt{5}}{2}.\frac{x^{-4+1}}{-4+1}+c = -\frac{\sqrt{5}}{6x^3}+c$$

ب)التكامل بالتجزئة:

وتعتمد هذه الطريقة على قاعدة التكامل بالتجزئة التي تنص على:

من أجل الدالة u المعرفة والقابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة u', والدالة v المعرفة والقابلة للاشتقاق على I ودالتها المشتقة v', وI مجال تعريفهما من R, ومن أجل كل عدد: "$a,b\in I$", فإن:

$$\int_a^b u(x).v'(x)dx = [u(x).v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x).v(x)dx$$

$$\int u\,dv = u.v - \int v.du$$

مثال:

إذا كانت الدالة: $f(x)=\ln(x)$ نقوم باستنتاج تكامل الدالة بالتجزئة كما يلي:

نضع: $u=\ln_x$ و $dv=dx$

$$du=\frac{dx}{x} \quad \text{و} \quad v=x$$

بالتعويض في: $\int u\,dv = u.v - \int v.du$

نجد: $\int ln_x\, dx = x.ln_x - \int x.\frac{dx}{x} = x.ln_x - \int dx$

ومنه: $\int ln_x\, dx = x\, ln_x - x + c$

ج) التكامل بالتعويض, بتبديل المتغير:

يستخدم التكامل باستخدام طريقة التعويض أو "تبديل المتغير", قصد تحويل التكامل إلى شكل أبسط باستخدام تغيير في المتغيرات، مما يسهل حساب التكامل عندما يكون صعبًا أو معقدًا , ولحساب التكامل "$\int f(x)dx$" نقوم باتباع الخطوات الموضحة أسفله قصد تشكيل العبارة:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)\, dt$$

- **خطوات التكامل باستخدام تحويل المتغير:**

1. **اختيار المتغير الجديد** :في البداية، نختار المتغير الجديد "φ" بحيث يحول التكامل إلى صيغة أبسط, وعليه يجب ايجاد علاقة بين المتغير القديم"x" والمتغير الجديد "φ".
2. **حساب التفاضل** :نأخذ مشتقة المتغير الجديد "φ'" بالنسبة للمتغير الأصلي"x"، ثم نحلها لإيجاد dx أو dt في حالة المتغير الآخر.
3. **استبدال المتغيرات في التكامل** :نحل محل جميع العبارات المتعلقة بـ"x" المتغير الأصلي بالمتغير الجديد"φ"، بما في ذلك الحدود في التكامل إذا كانت موجودة.
4. **إجراء التكامل** : بعد تحويل التكامل إلى صيغة جديدة، نكمل عملية التكامل باستخدام القواعد المعتادة.
5. **الرجوع إلى المتغير الأصلي** :بعد حل التكامل، نقوم بإرجاع المتغير إلى الصيغة الأصلية.

مثال:

عند حساب التكامل: $\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx$

نتبع الخطوات:

1. اختيار المتغير الجديد:

نختار $\varphi = x^2+1$، لتبسيط التعبير تحت الجذر, فتصبح المعادلة على الشكل: $\sqrt{\varphi}$

2. حساب التفاضل:

حساب مشتقة المتغير الجديد φ بالنسبة لـx: $\varphi' = (x^2+1)' = 2x$

ومنه التفاضل يُنْتِج العلاقة: $\frac{d\varphi}{dx} = 2x \Rightarrow d\varphi = 2x\,dx$

3. استبدال المتغيرات:

بما أن $d\varphi = 2x\,dx$, فإنه يمكننا استبدال "$d\varphi$", بـ "$2x\,dx$" في التكامل, كما أنه يمكننا كتابة الدالة محل التكامل على الشكل: $\sqrt{\varphi} = \sqrt{x^2+1}$, فتصبح عبارة التكامل:

$$\int \sqrt{\varphi}\,d\varphi$$

4. إجراء التكامل:

تصبح عبارة التكامل:

$$\int \sqrt{\varphi}\,d\varphi = \int \varphi^{1/2}\,d\varphi = 2/3\varphi^{2/3}$$

5. الرجوع إلى المتغير الأصلي:

نقوم بإرجاع المتغير الأصلي: $\varphi = x^2+1$, لتصبح عبارة التكامل:

$$\int 2x\sqrt{x^2+1}\,dx = 2/3\,(x^2+1)^{2/3}+c$$

البيان صفحة

المحور الأول: التحليل التوافقي في نظرية المجموعات 01
تعريف المجموعات..... 01
العلاقات بين المجموعات..... 01
العمليات على المجموعات..... 03
مجموعات الأعداد..... 05
المحور الثاني: المتتاليات العددية 06
تعريف..... 06
أنواع المتتاليات العددية..... 06
طبيعة المتتالية..... 08
محدودية المتتالية..... 09
تقارب وتباعد المتتالية..... 10
تجاور المتتاليات..... 11
المتتاليات التراجعية..... 12
البرهان بالتراجع..... 14
مجموع المتتاليات..... 15
نظريات..... 16
المحور الثالث: عموميات حول الدوال ذات المتغير الحقيقي 17
تعريف..... 17
مجال التعريف..... 17
أنواع الدوال..... 18
نهايات الدوال..... 20
الاستمرارية..... 26
المحور الرابع: الدوال الأسية واللوغاريتمية 29
أولاً: الدوال الأسية..... 29
تعريف..... 29
خواص الدالة الأسية..... 29
دراسة الدالة الأسية..... 30
ثانياً: الدوال اللوغاريتمية..... 33
تعريف..... 33
خواص الدالة اللوغاريتمية..... 33
دراسة الدالة اللوغاريتمية..... 34
الدالة اللوغاريتم العشري log..... 36
المحور الخامس: الاشتقاقية 37
تعريف..... 37
الاشتقاق من اليمين والاشتقاق من اليسار..... 37
مماس منحنى الدالة..... 38
مشتقات بعض الدوال المألوفة..... 39
المشتقات المتتابعة..... 39
اتجاه تغير الدالة..... 40
نقطة الانعطاف والقيم الحدية..... 41
قاعدة أوبيتال..... 42
نظرية رووِل..... 43

المحور السادس: الدوال الأصلية وحساب التكاملات 44
أولاً: الدوال الأصلية..... 44
تعريف..... 44
الدوال الأصلية لبعض الدوال المألوفة..... 44
ثانياً: التكامل..... 47
تعريف..... 47
خواص التكامل..... 47
التكامل وحساب الحيز المحدد بمنحنى..... 48
طرق حساب التكامل..... 50

.