الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Appliquées

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
- البويرة -
كلية العلوم التطبيقية

جامعة البويرة

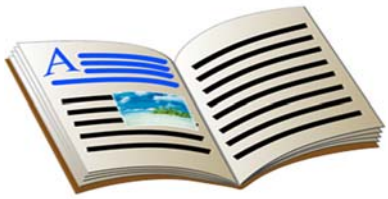
Département de génie électrique

Polycopié de cours

Filière : ELT

Spécialité : ELT

Niveau : *L3*



Systèmes asservis

Par Dr Mourad BENZIANE

Expertisé par:

Pr. Yacine BENSAFIA, Université de Bouira

Pr. Mouloud AYAD, Université de Sétif 1

Année :2025-2026

Semestre: 5
Unité d'enseignement: UEF 3.1.2
Matière 1: Systèmes Asservis
VHS: 45h00 (Cours: 1h30, TD: 1h30)
Crédits: 4
Coefficient: 2

Objectifs de l'enseignement:

Passer en revue les propriétés des structures de commande des systèmes linéaires continus, aborder les modèles des systèmes dynamiques de base, explorer les outils d'analyse temporelle et fréquentielle des systèmes de bases.

Connaissances préalables recommandées:

Mathématiques de base (Algèbre, Calcul intégral et différentiel, Analyse, complexes, …)
Notions fondamentales de traitement du signal, d'électronique de base (circuits linéaires).

Contenu de la matière:

Chapitre 1. Introduction aux systèmes asservis **(2 Semaines)**
Historique des systèmes de régulation automatique, Terminologie et définition,Concept de systèmes, Comportement dynamique, Comportement statique, Systèmes statiques, Systèmes dynamiques, Systèmes linéaires, Exemples introductifs, Systèmes en boucle ouverte, Systèmes en boucle fermée, Principaux éléments d'une chaîne d'asservissement, Raisonnement d'un asservissement, Performances des systèmes asservis.

Chapitre 2.Modélisation des systèmes **(4 Semaines)**
Représentation des systèmes par leurs équations différentielles, Transformée de Laplace, De l'équation différentielle à la fonction de transfert, Blocs fonctionnels et sous systèmes, Règles de simplification, Représentation des systèmes dynamiques par les graphes de fluence, Règle de Mason, Calcul des fonctions de transfert des systèmes bouclés.

Chapitre 3.Réponses temporelles des systèmes linéaires **(3 Semaines)**
Définition de la réponse d'un système, Régime transitoire, Régime permanent, Notions de stabilité, rapidité et précision statique, Réponse impulsionnelle (1er et 2ème ordre), Caractéristiques temporelles, Réponse indicielle (1er et 2ème ordre), Identification des systèmes du premier et du second ordre à partir de la réponse temporelle, Systèmes d'ordre supérieur, Influence des pôles et des zéros sur la réponse d'un système.

Chapitre 4. Réponses fréquentielles des systèmes linéaires **(3 Semaines)**
Définition, Diagramme de Bode et de Nyquist, Caractéristiques fréquentielles des systèmes dynamiques de base (1er et 2ème ordre), Marges de phase et de gain.

Chapitre 5.Stabilité et précision des systèmes asservis **(3 Semaines)**
Définition, Conditions de stabilité, Critère algébrique de Routh-Herwitz,Critères du revers dans les plans deNyquist et Bode, Marges de stabilité, Précision des systèmes asservis, Précision statique, Calcul de l'écart statique, Précision dynamique, Caractérisation du régime transitoire.

Mode d'évaluation:

Contrôle continu: 40%; Examen: 60%.

Références bibliographiques:

1. E. K. Boukas, Systèmes asservis, Editions de l'école polytechnique de Montréal, 1995.

Université Badji Mokhtar de Annaba
CPNDST

Table des matières

CHAPITRE 1
Introduction aux systèmes asservis

1. Introduction 1
2. Généralités sur les systèmes asservis 1
   2.1. Introduction à l'automatique 1
   2.2. Bref historique des systèmes de régulation automatique 1
   2.3. Généralités sur les systèmes 2
   2.4. Comportement des systèmes 3
   2.5. Classification des systèmes 4
      2.5.1. Système linéaire 4
      2.5.2. Systèmes invariants 5
      2.5.3. Systèmes causaux 5
      2.5.4. Systèmes continus et systèmes discrets 5
3. Architecture et fonctionnement des systèmes asservis 5
   3.1. Systèmes en boucle ouverte 5
   3.2. Systèmes en boucle fermée 7
   3.3. Asservissement et régulation 8
4. Performances des systèmes asservis 9
   4.1. Stabilité 9
   4.2. Rapidité 10
   4.3. Précision 10
   4.4. Compromis entre performances 11
5. Conclusion 11

CHAPITRE 2
Modélisation des systèmes

1. Introduction 12
2. Mise en équations d'un système linéaire 12
3. Transformée de Laplace (Rappel) 14
   3.1. Définition 14
   3.2. Propriétés essentielles 15
      3.2.1. Linéarité 15
      3.2.2. Dérivation 15
      3.2.3. Intégration 15

3.2.4. Retard – Translation 16
3.2.5. Fonction amortie 16
3.2.6. Multiplication par t 16
3.3.1. Théorème de la valeur initiale 16
3.3.2. Théorème de la valeur finale 16
3.3.3. Théorème de Duhamel (ou de Borel) - Intégrale de convolution 16
3.4. Transformée inverse de Laplace 16
3.4.1. Si F(p) ne contient que des pôles distincts 17
3.4.2. Si F(p) contient des pôles multiples 17
3.4.3. Si F(p) contient des pôles complexes conjugués 18
4. Notion de fonction de transfert 18
4.1. Définition 18
4.2. Pôles et zéros d'une fonction de transfert 19
4.3. Intérêt de la fonction de transfert 19
5. Représentation des systèmes par schémas-blocs 19
5.1. Définition d'un schéma-bloc 20
5.2. Bloc fonctionnel 20
5.3. Sommateur 20
5.4. Point de prélèvement 20
5.5. Intérêt des schémas-blocs 21
6. Simplifications des schémas-blocs 21
6.1. Fonction de transfert équivalente d'un ensemble de sous-systèmes 21
6.1.1. Mise en série (ou cascade) 21
6.1.2. Mise en parallèle 22
6.1.3. Cas d'un système à n entrées indépendantes 22
6.1.4. Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) 23
6.1.5. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO) 23
6.2. Règles de simplifications 24
6.2.1. Déplacement des points de prélèvement 24
6.2.2. Déplacement de sommateurs 25
6.2.3. Permutation de deux points de prélèvement successifs 25
6.2.4. Permutation de deux sommateurs successifs 25
7. Exercice d'application 27
8. Conclusion 28

CHAPITRE 3
Réponses temporelles des systèmes linéaires

1. Introduction 30
2. Systèmes du premier ordre 30
   2.1. Définition 30
   2.2. Réponse à une impulsion unité 31
   2.3. Réponse indicielle (à un échelon) 32
   2.4. Réponse à une rampe (échelon de vitesse) 32
   2.5. Influence du gain statique et de la constante de temps 33
3. Systèmes du second ordre 34
   3.1. Définition 34
   3.2. Etude des pôles 35
   3.3. Réponse à un échelon unité 36
   3.4. Réponse à une impulsion unité 38
   3.5. Influence du coefficient d'amortissement 39
4. Caractéristiques temporelles 40
   4.1. Temps de montée 40
   4.2. Temps de réponse à 5 % 40
   4.3. Dépassement maximal 40
   4.4. Temps du premier maximum 40
   4.5. Erreur statique 40
5. Identification à partir de la réponse temporelle 41
   5.1. Identification d'un système du premier ordre 41
   5.2. Identification d'un système du second ordre 41
6. Systèmes d'ordre supérieur 42
   6.1. Définition 42
   6.2. Pôles dominants 42
   6.3. Approximation d'un système d'ordre supérieur 43
7. Influence des pôles et des zéros 45
   7.1. Impact des pôles 45
   7.2. Impact des zéros 46
   7.3. Interprétation générale 47
8. Conclusion 48

CHAPITRE 4
Réponses fréquentielle des systèmes linéaires

1. Introduction 49
2. Réponse d'un système à une sinusoïde 49
3. Représentation dans le plan de Bode 50
   3.1. Système du premier ordre 50
   3.2. Système du deuxième ordre 52
   3.3. Méthodologie générale de tracé asymptotique dans le plan de Bode 54
4. Représentation dans le plan de Black-Nichols 56
   4.1. Système d'ordre 1 56
   4.2. Système d'ordre 2 57
5. Représentation dans le plan de Nyquist 58
   5.1. Système d'ordre 1 58
   5.2. Système d'ordre 2 59
6. Marges de stabilité : Marges de phase et de gain 59
   6.1. Justification physique 59
   6.2. La Marge de Gain (*MG*) 60
   6.3. La Marge de Phase (*Mϕ*) 60
   6.4. Méthodologie de lecture graphique sur le diagramme de Bode 60
7. Conclusion 62

CHAPITRE 5
Stabilité et précision des systèmes asservis

1. Introduction 63
2. Notion de stabilité d'un système linéaire 63
   2.1. Définition physique de la stabilité 63
   2.2. Aspect mathématique de la stabilité 63
   2.3. Condition nécessaire et suffisante de stabilité 64
   2.4. Critère algébrique de Routh-Hurwitz 64
      2.4.1. Condition nécessaire (Critère d'Hurwitz) 64
      2.4.2. Condition nécessaire et suffisante (Tableau de Routh) 64
      2.4.3. Énoncé du critère de Routh 65
   2.5. Critères graphiques de stabilité (Critère du Revers) 65
      2.5.1. Dans le plan de Nyquist 66
      2.5.2. Dans le plan de Bode 66
3. Précision des systèmes 66

3.1. Calcul de l'erreur en régime permanent 66
3.2. Classe d’un système et signaux canoniques 67
3.3. Coefficient d’erreur et précision 67
3.4. Tableau récapitulatif des erreurs statiques 70
3.5. Le dilemme Stabilité-Précision 71
4. Conclusion 71

CHAPITRE 1

Introduction aux systèmes asservis

1. Introduction

Ce premier chapitre présente les notions générales indispensables à la compréhension des systèmes asservis. Il aborde les caractéristiques des systèmes dynamiques, leur classification, les architectures en boucle ouverte et en boucle fermée, ainsi que la distinction entre asservissement et régulation. Il introduit également les trois critères fondamentaux d'évaluation des performances : la stabilité, la rapidité et la précision.

Ces notions constituent les bases nécessaires à la suite du cours, qui sera consacrée à la modélisation mathématique des systèmes, à l'étude de leurs réponses temporelles et fréquentielles, puis à l'analyse de leur stabilité et de leur précision.

2. Généralités sur les systèmes asservis

2.1. Introduction à l'automatique

L'automatique est le domaine qui s'intéresse à la modélisation, à l'analyse et à la commande des systèmes dynamiques. Le but de cette discipline est d'imposer un comportement souhaité à un système par une action humaine minimale.

C'est un domaine applicable dans plusieurs industries telles que le pilotage de moteurs, la régulation de température, le positionnement, la robotique, l'aéronautique et bien d'autres procédés industriels.

On distingue généralement deux grandes branches :

L'automatisme séquentiel dont les principes reposent sur le séquencement logique des opérations ; et l'asservissement (systèmes asservis) qui consiste à comparer la consigne et la mesure de la sortie pour minimiser l'erreur.

Ainsi, un système asservi permet donc de maintenir ou de faire évoluer une grandeur physique selon un comportement désiré, malgré les perturbations.

Ce cours a donc pour objectif l'étude des systèmes asservis linéaires continus, leur modélisation et l'analyse de leurs performances en termes de stabilité, de rapidité et de précision.

2.2. Bref historique des systèmes de régulation automatique

Les premiers systèmes de régulation automatique apparaissent au XVIIIe siècle avec le régulateur centrifuge de James Watt pour la commande de la vitesse des machines à vapeur. Au XXe siècle, les travaux de Minorsky (1922), Nyquist (1932) et Hazen (1934) posent les bases théoriques de l'automatique moderne. Les années 1940 et 1950 voient le développement des méthodes classiques,

notamment la réponse fréquentielle, les correcteurs PID et le lieu des racines. À partir de 1960, la commande moderne fondée sur la représentation d'état se développe avec l'essor de l'informatique, puis les années 1980-1990 sont marquées par l'essor de la commande robuste.

2.3. Généralités sur les systèmes

Un système est un ensemble d'éléments interconnectés recevant un ou plusieurs signaux d'entrée provenant d'une action extérieure et délivrant un ou plusieurs signaux de sortie caractérisant son état.

De manière générale, on peut représenter un système par :

$$Sorties = f\left(Entrées\right)$$

Ou encore :

$$y(t) = f\left(u(t), p(t)\right)$$

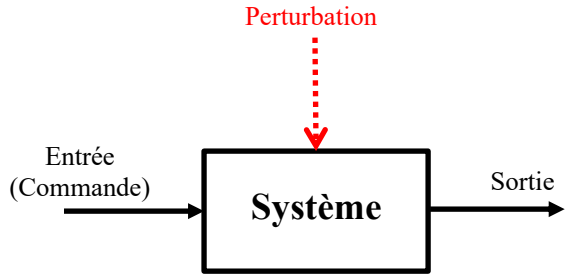
Où :

- $u(t)$ représente la commande
- $p(t)$ représente la perturbation
- $y(t)$ représente la sortie

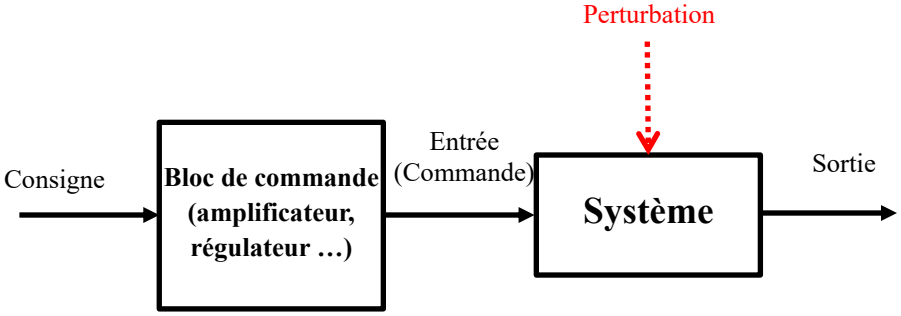
La commande est la grandeur d'entrée qui est capable de changer l'état de la sortie et, par conséquent, imposer un comportement désiré au système.

La perturbation est une grandeur extérieure ou intérieure non-maîtrisable capable d'influer sur l'état de la sortie et qui peut provenir d'une manière accidentelle.

La sortie est la grandeur observée ou mesurée, appelée aussi réponse du système.



La commande est souvent élaborée à partir de la consigne. Le schéma ci-dessous illustre l'organisation de la commande :



Consigne :

C'est une grandeur d'origine théorique qui peut se présenter sous deux formes :

- ✓ Signal analogique : par exemple la tension de sortie d'un potentiomètre.
- ✓ Information numérique : contenu d'une variable informatique, par exemple la variable position dans le cas d'une commande de position angulaire d'une antenne.

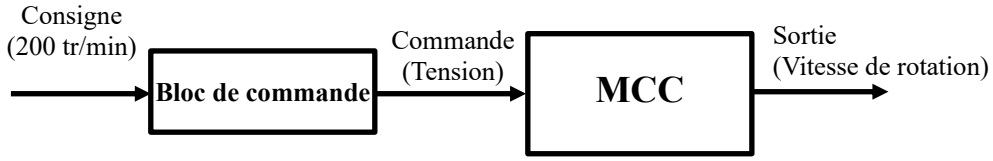
Bloc de commande :

C'est l'organe permettant de traduire la consigne en une grandeur de commande compatible avec le système.

Commande :

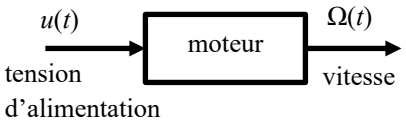
C'est la grandeur susceptible de changer l'état du système et en particulier l'état de la sortie.

Exemple : dans la commande de vitesse de rotation du moteur à courant continu, la consigne est la vitesse de rotation souhaitée, la commande est la tension d'alimentation permettant d'avoir la vitesse souhaitée en sortie. Le rôle du bloc de commande dans ce cas est de traduire la consigne en une tension d'alimentation qui est capable de changer l'état de la sortie.



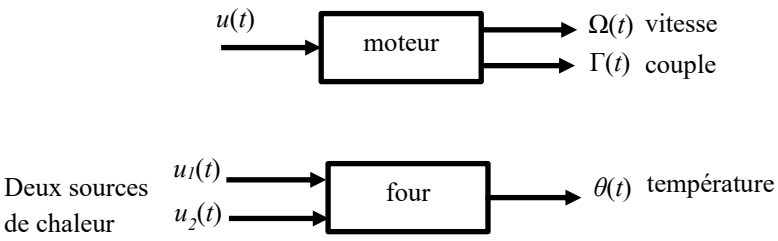
Un système est dit monovariable si son entrée ainsi que la sortie considérée sont uniques.

Exemple :



Dans l'autre cas le système est multivariable.

Exemple :



2.4. Comportement des systèmes

Lorsqu'un système est soumis à une entrée, sa réponse comporte, le plus souvent, deux phases appelées aussi régimes :

Régime transitoire (dynamique) : qui est la phase dans laquelle la sortie évolue avant de se stabiliser.

Régime permanent (statique) : qui est la phase dans laquelle la sortie devient stable

Ainsi :

Le comportement d'un système peut être étudié sous deux aspects : statique et dynamique.

Comportement statique : évoque la relation entre l'entrée et la sortie lorsque le régime transitoire est achevé, autrement dit, le système est en état d'équilibre.

Si l'entrée est constante, la sortie le devient également après un certain temps.

L'étude statique permet alors de retrouver la valeur finale de la sortie et éventuellement l'écart entre la grandeur désirée et la grandeur obtenue.

Comportement dynamique : évoque la façon dont la sortie évolue au cours des phases de variation avec, par exemple, un changement de consigne ou l'apparition d'une perturbation.

Il montre donc le comportement du système dans le temps :

- ✓ Une montée plus ou moins rapide ;
- ✓ Un éventuel dépassement ;
- ✓ D'éventuelles oscillations ;
- ✓ Une stabilisation finale.

Importance en automatique

Dans le contexte de l'automatique, un système ne doit pas seulement atteindre la bonne valeur désirée. Il doit aussi, et cela est essentiel, atteindre cette valeur sans trop de dégradations dans son comportement. Un bon système doit donc être : précis en régime permanent, et rapide et stable en régime transitoire. Ces notions seront développées plus loin dans le cours lors de l'étude des performances des systèmes asservis.

2.5.Classification des systèmes

Les systèmes peuvent être classés selon plusieurs critères. Dans ce cours, on s'intéresse principalement aux **systèmes linéaires continus causaux et invariants dans le temps**.

2.5.1. Système linéaire

Un système est linéaire s'il est décrit par une ou plusieurs équations différentielles linéaires.

Un système linéaire vérifie le principe de superposition : la réponse du système à une combinaison linéaire d'entrées est égale à la même combinaison linéaire des réponses associées à chacune de ces entrées.

D'une manière générale, si à une entrée $e_i(t)$ correspondant la sortie $s_i(t)$ alors à :

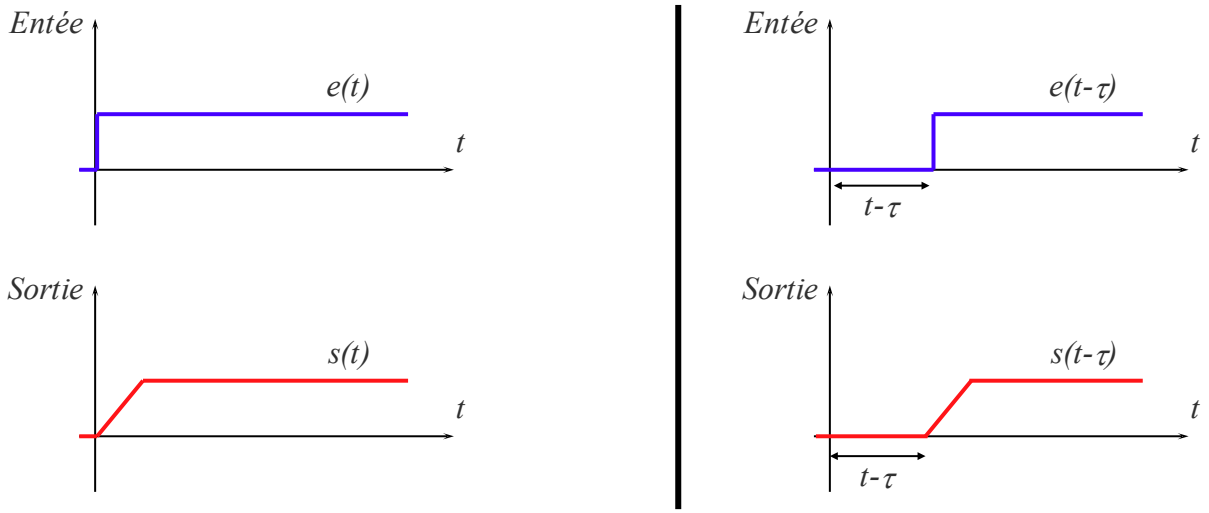
$$e(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i e_i(t)$$

Correspondant la sortie :

$$s(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i s_i(t)$$

2.5.2. Systèmes invariants

Un système est dit invariant (stationnaire) si la réponse du système à un signal $e(t)$ différé d'un temps τ est la même que la réponse $s(t)$ du système mais différée de τ. Un système invariant est aussi appelé système à paramètres constants localisés ou à constantes localisées. Cette propriété des systèmes invariants est aussi appelée principe de permanence.



2.5.3. Systèmes causaux

Un système est dit causal si les sorties ne peuvent dépendre d'entrées ultérieures. Les systèmes physiquement réalisables sont des systèmes causaux.

2.5.4. Systèmes continus et systèmes discrets

Un système est dit analogique (ou continu) si les entrées et les sorties sont analogiques. Un système continu traite donc des signaux définis à tout instant t.

Un système est dit discret (ou échantillonné) s'il traite des signaux discrets c'est-à-dire, des signaux définis seulement à des instants bien déterminés $n.T_e$.

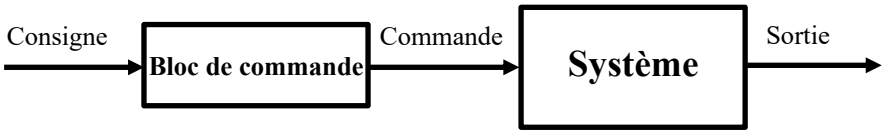
Un système peut contenir des parties analogiques et des parties discrètes.

3. Architecture et fonctionnement des systèmes asservis

3.1.Systèmes en boucle ouverte

On qualifie de système en boucle ouverte un système pour lequel la commande est élaborée sans référence à la sortie, c'est-à-dire la sortie n'est mesurée ni comparée à la valeur consigne.

Le schéma général d'un tel système est :



Dans cette structure, l'action de commande est fixée. Le système fonctionne donc sans correction automatique de l'erreur.

Avantages

Les systèmes en boucle ouverte présentent plusieurs avantages :

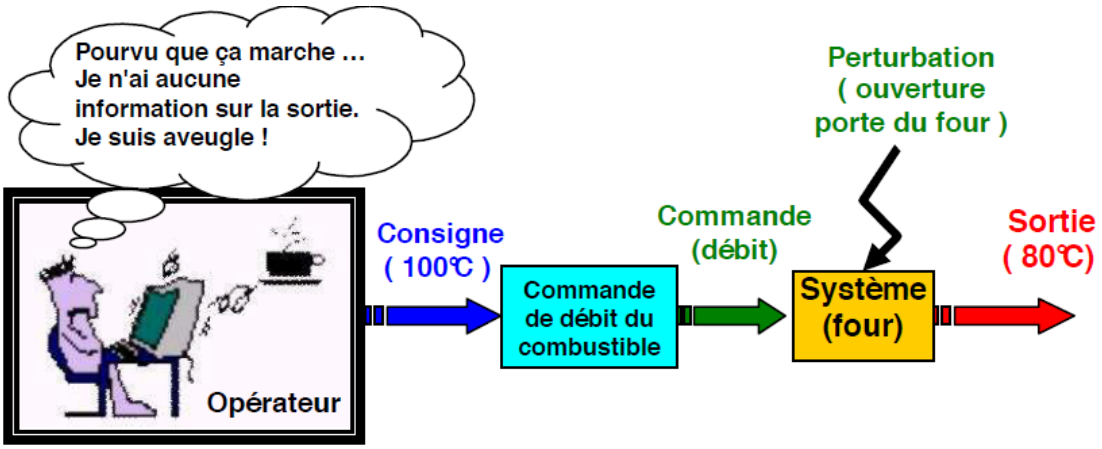
- Structure simple ;
- Coût réduit ;
- Mise en œuvre facile ;
- Absence de problème de stabilité lié à la boucle de retour.

Inconvénients

L'inconvénient majeur de cette structure est l'absence de correction. En cas d'apparition d'une perturbation ou d'une variation du système, la sortie peut s'écarter de la valeur désirée sans que le système puisse réagir. La précision est alors très dépendante de l'étalonnage initial.

Exemple :

On peut citer le réglage d'un four sans mesure de la température réelle : la commande est appliquée, mais aucune information de sortie n'est utilisée pour corriger le chauffage.



La consigne dans ce cas est la température désirée, la commande est le débit du combustible.

La commande en boucle ouverte est tout de même très utilisée dans des cas simples de systèmes stables avec une moindre exigence sur la sortie

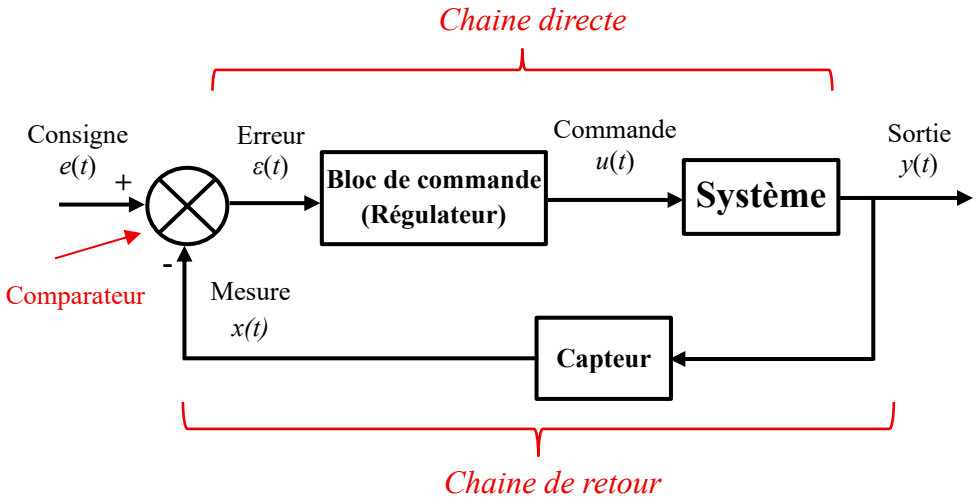
La commande en boucle ouverte et malgré son inconvénient reste tout de même très utilisée lorsque :

- ✓ La relation entrée/sortie est bien connue ;
- ✓ Les perturbations sont faibles ;
- ✓ L'exigence de précision est limitée.

3.2.Systèmes en boucle fermée

On définit un système en boucle fermée comme étant un système pour lequel la sortie est mesurée et comparée à la consigne, la différence entre la sortie et la consigne est prise comme signal d'erreur et utilisée pour corriger la commande.

Le schéma général est :



Le **comparateur** est l'élément permettant de calculer l'écart entre la consigne et la sortie, appelé signal d'erreur. Dans les schémas-blocs, il est représenté par un sommateur.

Le correcteur élabore la commande à partir de l'erreur dans ce cas. Son rôle est d'améliorer les performances du système : précision, rapidité et stabilité. Dans une présentation plus générale, il correspond au bloc de commande qui transforme la consigne ou l'erreur en une grandeur exploitable par le système.

Avec une **chaîne de retour** qui ramène la sortie vers le comparateur à travers le capteur qui assure la mesure de la sortie. Sans cette chaîne, le système fonctionne en boucle ouverte.

On écrit alors :

$$\varepsilon(t) = e(t) - x(t)$$

Où :

- ✓ $e(t)$ est la consigne.
- ✓ $y(t)$ est la sortie.
- ✓ $\varepsilon(t)$ est le signal d'erreur.
- ✓ $x(t)$ est la mesure.

Dans une telle structure, la commande dépend donc de l'erreur. Si la sortie s'écarte de la consigne, le système agit de sorte à réduire cet écart. Ce principe est appelé **rétroaction** ou **feedback**.

Avantages :

Les systèmes en boucles fermées permettent :

- ✓ De renforcer la précision ;
- ✓ La compensation des perturbations ;
- ✓ La réduction de l'influence des variations du procédé ;

Inconvénients :

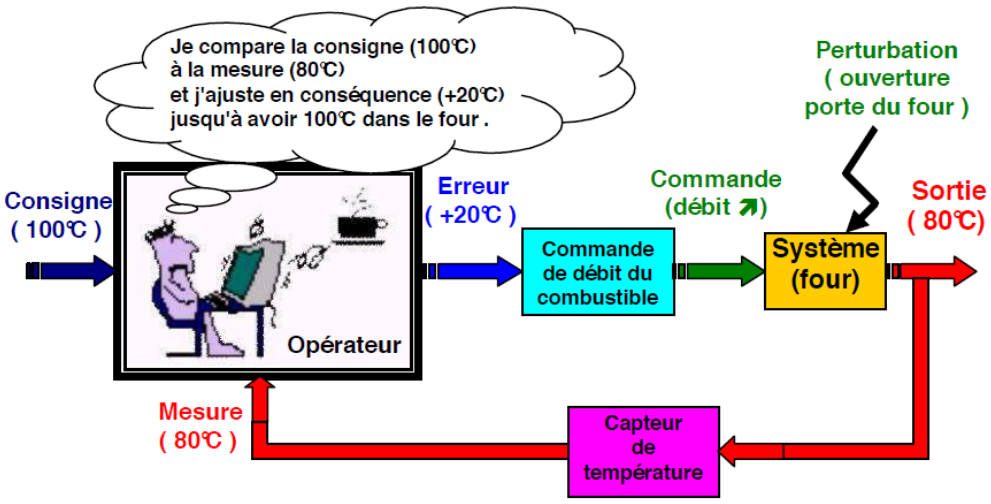
L'inconvénient majeur est que la structure est plus complexe qu'en boucle ouverte. De plus, une mauvaise conception peut conduire à des oscillations ou même à une instabilité.

Exemple :

Reprenons l'exemple de la commande en température d'un four. Nous allons donner une information supplémentaire à l'opérateur. Il s'agit de lui indiquer la température du four.

L'opérateur compare la température désirée (consigne) avec la température réelle (mesure) pour évaluer l'écart (erreur) et ajuster en conséquence (commande).

Le schéma suivant représente le système asservi :



C'est donc le principe d'un asservissement qui consiste à **mesurer**, **comparer** puis **corriger**

3.3.Asservissement et régulation

Les deux termes asservissement et régulation sont proches, mais ils ne désignent pas la même situation. On dit surtout "asservissement" dans le cas où la sortie doit suivre une consigne qui peut être variable dans le temps. Dans ce cas, le système doit alors reproduire aussi fidèlement que possible l'évolution imposée par l'entrée de référence.

Le terme "régulation" est plutôt employé lorsque l'objectif est de maintenir la sortie autour d'une valeur fixée malgré l'action des perturbations.

Alors :

- ✓ L'asservissement correspond surtout à un problème de suivi ;
- ✓ La régulation correspond surtout à un problème de maintien.

Exemples :

- **Asservissement** de température (obtention d'un profil de température en fonction du temps dans un four de traitement thermique.
- **Régulation** de température dans un local subissant les variations climatiques.

Remarque

En pratique, lorsqu'un changement de consigne est effectué, une régulation devient un asservissement. Un asservissement maintenant une grandeur constante pendant une durée donnée peut subir une perturbation inopinée et devient alors une régulation.

Dans beaucoup de cas il y a à la fois régulation et asservissement. On parle alors de système asservi soit de maintien ou de poursuite.

4. Performances des systèmes asservis

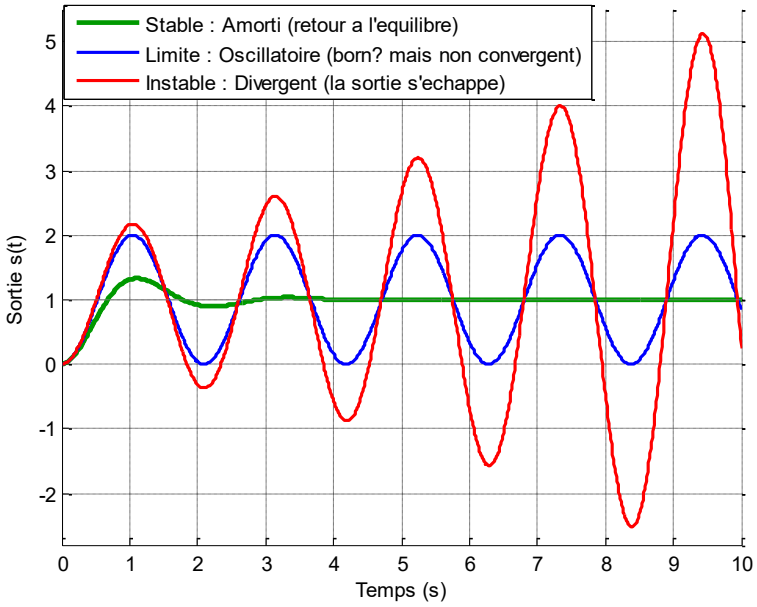
Les performances d'un système asservi sont souvent évaluées par trois qualités fondamentales, à savoir : stabilité, rapidité et précision.

4.1.Stabilité

Un système est dit stable lorsque sa sortie reste bornée et tend vers un état d'équilibre, généralement désiré, après une perturbation ou après un changement brusque de l'entrée.

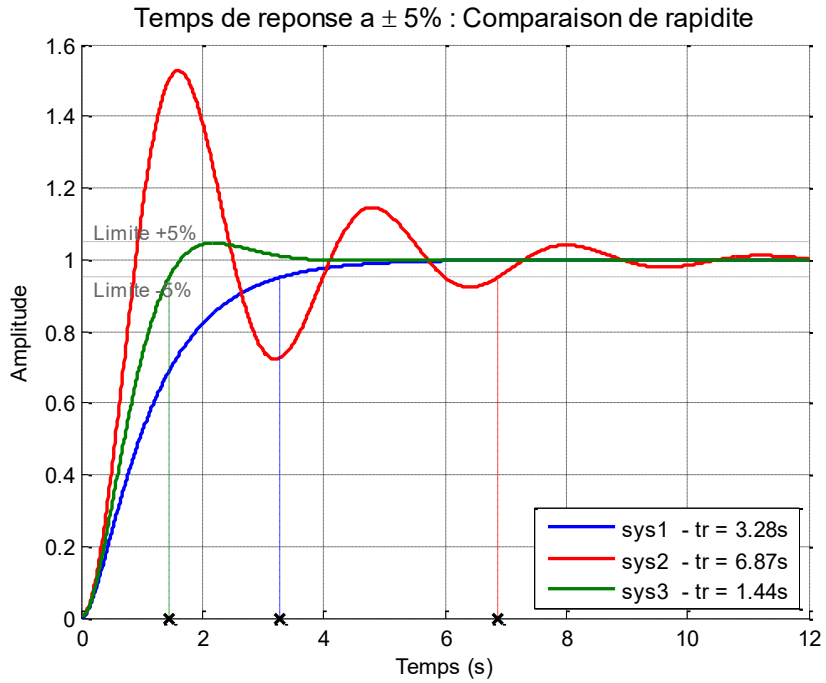
C'est la condition première de bon fonctionnement d'un système asservi, car un système instable ne peut être exploité correctement.

La figure suivante donne un exemple de réponses temporelles de trois systèmes (stable / en limite de stabilité / instable).



4.2.Rapidité

La rapidité qualifie la vitesse avec laquelle la sortie atteint la valeur désirée. C'est une notion intimement liée à la durée du régime transitoire, un système est d'autant plus rapide que son temps de réponse est court ce temps qui est calculé généralement quand la sortie atteint ±5% de sa valeur finale. La figure suivante représente un exemple de comparaison des sorties de trois systèmes différents. On remarque que sys3 est plus rapide que sys1 qui est plus rapide que sys2.

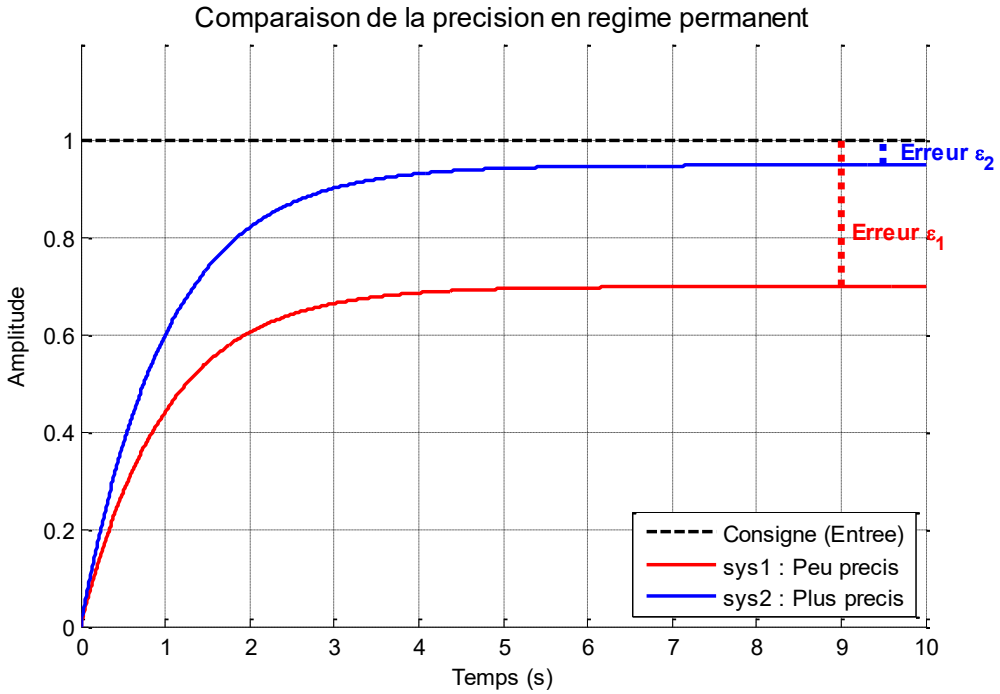


4.3.Précision

Enfin, la précision traduit la capacité du système à atteindre la valeur désirée sans erreur ou avec une faible erreur. Elle est jugée à partir de l'écart entre la consigne et la sortie en régime permanent, plus

cet écart est faible, plus le système est précis. Sachant que le signal d'entrée et le signal de sortie sont de même nature. Autrement dit, l'erreur est mesurée à la sortie du comparateur.

La figure suivante illustre une comparaison entre les sorties de deux systèmes différents. On remarque bien que sys2 est plus précis que sys1 qui possède une erreur en régime permanent.



4.4.Compromis entre performances

Dans la pratique, il n'est pas possible d'améliorer indéfiniment tous les critères simultanément. A titre d'exemple, un système très rapide peut être plus oscillant, voire moins stable. La conception d'un système asservi consiste alors à rechercher un compromis acceptable entre performances en stabilité, rapidité et précision.

5. Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire les notions de base relatives aux systèmes asservis : définition de l'automatique, définition de système, notion de comportement statique et dynamique, classification des systèmes, structure en boucle ouverte et en boucle fermée, chaîne d'asservissement, principe de fonctionnement, en précisant également les performances principales recherchées. C'est cette base qui nous permettra l'étude des systèmes asservis linéaires continus.

La suite du cours sera consacrée à la modélisation mathématique des systèmes, plus particulièrement par le recours aux équations différentielles, à la transformée de Laplace et aux fonctions de transfert, qui doivent permettre d'analyser et de représenter les systèmes dynamiques sous une forme exploitable.

CHAPITRE 2

Modélisation des systèmes

1. Introduction

L'étude des systèmes asservis est fondée principalement sur leur modélisation mathématique. Cette modélisation est une représentation simplifiée du comportement dynamique du système physique. Elle permet de relier les grandeurs d'entrée et de sortie d'une part, dans le but de prévoir le comportement et l'évolution du système, et d'autre part, d'analyser ses performances.

En automatique, un même système peut être présenté de différentes façons selon l'objectif recherché : il peut être décrit par une équation différentielle, par une fonction de transfert ou par un schéma-bloc. Le choix du modèle dépend donc de l'étude envisagée : analyse temporelle, étude fréquentielle, représentation structurelle du système… En revanche, cette modélisation doit assurer un compromis entre simplicité et précision.

Un modèle trop détaillé devient difficilement exploitable, alors qu'un modèle trop simplifié ne représente pas correctement le comportement réel du système. En pratique, il faut donc choisir un modèle suffisamment simple pour être manipulable, mais suffisamment fidèle pour décrire l'essentiel de la dynamique étudiée.

Ce chapitre est principalement consacré à l'étude des systèmes linéaires continus à une entrée et une sortie. On modélise tout d'abord à l'aide d'équations différentielles puis dans le domaine de Laplace pour introduire la fonction de transfert, outil indispensable à l'étude des systèmes asservis, on poursuit avec la représentation par schémas-blocs ainsi que les règles de simplification et d'obtention des fonctions de transfert des systèmes bouclés.

2. Mise en équations d'un système linéaire

La modélisation d'un système linéaire consiste à établir une relation mathématique entre la grandeur d'entrée $e(t)$ et la grandeur de sortie $s(t)$.

Dans le cas des systèmes linéaires continus à une entrée et une sortie, cette relation s'écrit généralement sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants.

La forme générale de l'équation différentielle d'un système linéaire est :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + ... + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + ... + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m} \qquad (2.1)$$

Où :

- $e(t)$ est l'entrée
- $s(t)$ est la sortie
- a_i et bi sont des constantes réelles.

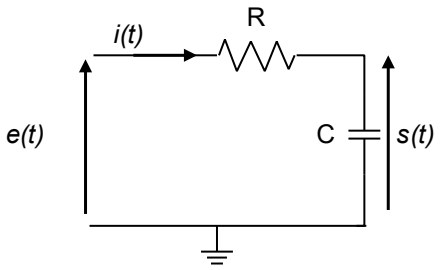
L'ordre du système est donné par l'ordre n de la dérivée la plus élevée de la sortie. En pratique, on rencontre généralement des systèmes pour lesquels $m \leq n$.

La mise en équations permet alors :

- D'identifier la dynamique du système ;
- De déterminer son ordre ;
- De passer par la suite à la représentation dans le domaine de Laplace ;
- D'obtenir la fonction de transfert du système.

Exemple 1 : Circuit RC (ordre 1)

Soit le circuit RC suivant :



Les équations électriques sont : $R.i(t) + s(t) = e(t)$ $\qquad i(t) = C.\dfrac{ds(t)}{dt}$

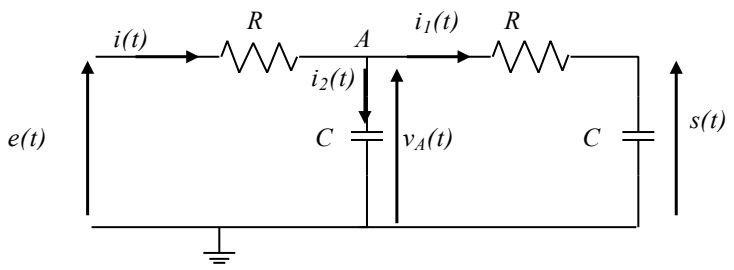
Nous pouvons obtenir une équation différentielle d'ordre 1 reliant la sortie $s(t)$ et l'entrée $e(t)$:

$$R.C.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \tag{2.2}$$

Exemple 2 : Système électrique du second ordre

On considère le montage électrique représenté sur la figure. On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$.

Déterminer l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.



Ce circuit est une mise en cascade de deux circuits RC. Appelons A le point commun aux deux résistances et $v(t)$ la tension en ce point, en utilisant le modèle régissant le circuit RC obtenu dans (1), on peut écrire le modèle du premier circuit RC comme suit :

$$R.C.\frac{dv(t)}{dt} + v(t) = e(t) \tag{2.3}$$

Et de la même manière pour le deuxième circuit RC :

$$R.C.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = v(t) \tag{2.4}$$

Donc :

$$\frac{dv(t)}{dt} = R.C.\frac{d^2s(t)}{dt^2} + \frac{ds(t)}{dt} \tag{2.5}$$

En remplaçant (3) et (4) dans (2) on obtient :

$$R^2.C^2\frac{d^2s(t)}{dt^2} + 2.R.C\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = e(t) \tag{2.6}$$

Remarque :

La mise en équations constitue la première étape de la modélisation. Une fois l'équation différentielle obtenue, on peut utiliser la transformée de Laplace pour passer à une représentation algébrique plus simple à exploiter qui est la fonction de transfert.

3. Transformée de Laplace (Rappel)

La transformée de Laplace est un outil mathématique permettant de transformer une équation différentielle dans le domaine temporel en une équation algébrique dans le domaine de Laplace. Elle simplifie ainsi l'étude des systèmes linéaires continus.

3.1.Définition

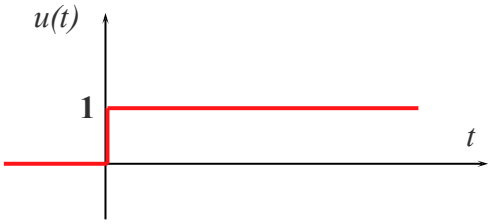
Soit $f(t)$ une fonction réelle du temps (nulle pour t < 0), sa Transformée de Laplace, notée $TL\ \{f(t)\}$, la fonction $F(p)$ telle que :

$$F(p) = TL\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt$$

Où p est une variable complexe indépendante du temps. $f(t)$ est appelée originale et $F(p)$ son image.

Exemple :

Soit la fonction échelon suivante :



$$TL\{u(t)\} = U(p) = \int_0^{\infty} e^{-pt}u(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-pt}dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^{\infty}$$

$$U(p) = \frac{1}{p}$$

3.2.Propriétés essentielles

3.2.1. Linéarité

Si λ_1 et λ_2 sont constants, on a :

$$TL\{\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t)\} = \lambda_1 TL\{f_1(t)\} + \lambda_2 TL\{f_2(t)\}$$

3.2.2. Dérivation

$$TL\{f'(t)\} = pF(p) - f(0)$$

$f(0)$ représente la valeur initiale de $f(t)$.

De même on peut écrire :

$$TL\left\{\frac{d^2}{dt^2}f(t)\right\} = p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$$

En général :

En supposant nulles toutes les dérivées de $f(t)$, on peut écrire :

$$TL\left\{\frac{d^n}{dt^n}f(t)\right\} = p^nF(p)$$

3.2.3. Intégration

$$TL\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{1}{p}F(p) + \frac{P(0)}{p}$$

Avec : $P(t)$ la primitive de $f(t)$.

En général :

$TL\left\{\int_0^t\int_0^t\ldots\int_0^t f(t)dt^n\right\} = \frac{1}{p^n}F(p)$ En supposant nulles toutes les primitives de $f(t)$ lorsque $t \to 0$ par valeur positive.

3.2.4. Retard – Translation

$$TL\{f(t-\tau)\} = e^{-\tau p}F(p)$$

3.2.5. Fonction amortie

$$TL\{e^{-\alpha t}f(t)\} = F(p+\alpha)$$

3.2.6. Multiplication par t

$$TL\{t.f(t)\} = -\frac{d}{dp}F(p)$$

3.3.Théorèmes utiles

3.3.1. Théorème de la valeur initiale

$$f(0^+) = \lim_{p\to+\infty}\{pF(p)\}$$

3.3.2. Théorème de la valeur finale

$$f(\infty) = \lim_{p\to 0}\{pF(p)\}$$

Ce résultat n'est valable que si *{ p F(p) }* n'a aucun pôle (racine du dénominateur) dans le demi plan droit du plan complexe et aucun pôle sur l'axe imaginaire, à l'exception du pôle simple à l'origine.

3.3.3. Théorème de Duhamel (ou de Borel) - Intégrale de convolution

$$F_1(p).F_2(p) = TL\left\{\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau\right\} = TL\{f_1(t) * f_2(t)\}$$

$*$: *produit de convolution*

3.4.Transformée inverse de Laplace

Généralement la transformée de Laplace inverse se calcule comme suit :

- Soit recourir aux tables de Transformées de Laplace. Dans ce cas, *F(p)* est immédiatement reconnaissable dans la table,
- Soit, lorsque la fonction *F(p)* n'apparaît pas dans la table, décomposer *F(p)* en fractions partielles et écrire *F(p)* en termes de fonctions simples de p pour lesquels la Transformée de Laplace est toujours connue.

Soit : $F(p) = L\{f(t)\}$

Si *F(p)* peut être décomposée en termes distincts : $F(p) = F_1(p) + F_2(p) + ... + F_n(p)$ et Si les transformées inverses sont disponibles, Alors :

$$TL^{-1}\{F(p)\} = TL^{-1}\{F_1(p)\} + TL^{-1}\{F_2(p)\} + ... + TL^{-1}\{F_n(p)\} = f_1(t) + f_2(t) + ... + f_n(t)$$

Remarque :

Dans le domaine de la Théorie du contrôle, *F(p)* est fréquemment mise sous la forme :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}$$

avec A(p) et B(p) des polynômes en p, et degré B(p) ≤ degré A(p)

Cette méthode ne s'applique que si les racines du polynôme du dénominateur sont connues, autrement dit, que si le dénominateur est factorisable :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=K.\frac{(p-z_1).(p-z_2).....(p-z_m)}{(p-p_1).(p-p_2).....(p-p_n)}$$

Où : $p_1, p_2, ...,p_n$ *et* $z_1, z_2, ...,z_m$ peuvent être des quantités réelles ou complexes. Mais pour chaque complexe *p* ou *z*, il apparaît un complexe conjugué de *p* ou *z*, respectivement.

3.4.1. Si F(p) ne contient que des pôles distincts

F(p) peut, alors, être décomposée en une somme de fractions partielles :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{a_1}{p-p_1}+\frac{a_2}{p-p_2}+...+\frac{a_n}{p-p_n}$$

Avec : $a_i=\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p-p_i)\right]_{p=p_i}$ a_i : constante appelée résidu du pôle $p=p_i$.

3.4.2. Si F(p) contient des pôles multiples

Soit p_1 le pôle multiple de *F(p), r* étant l'indice de multiplicité de ce pôle :

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)} \qquad A(p)=(p-p_1)^r(p-p_2)...(p-p_n)$$

$$F(p)=\frac{B(p)}{A(p)}=\frac{b_r}{(p-p_1)^r}+\frac{b_{r-1}}{(p-p_1)^{r-1}}+...+\frac{b_1}{(p-p_1)}+\frac{a_2}{p-p_2}+...+\frac{a_n}{p-p_n}$$

Avec : $a_i=\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p-p_i)\right]_{p=p_i}$

Et :

$$b_r=\frac{1}{0!}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p-p_1)^r\right]_{p=p_1}$$

$$b_{r-1}=\frac{1}{1!}\left\{\frac{d}{dp}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p-p_1)^r\right]\right\}_{p=p_1}$$

$$b_1 = \frac{1}{(r-1)!}\left\{\frac{d^{r-1}}{dp^{r-1}}\left[\frac{B(p)}{A(p)}(p-p_1)^r\right]\right\}_{p=p_1}$$

Remarque :

$$TL^{-1}\left[\frac{1}{(p-p_1)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-p_1 t}$$

3.4.3. Si F(p) contient des pôles complexes conjugués

Soient p_1 et p_2 les 2 pôles complexes conjugués, alors :

$$F(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \frac{\alpha_1 p + \alpha_2}{(p-p_1)(p-p_2)} + \frac{a_3}{p-p_3} + ... + \frac{a_n}{p-p_n}$$

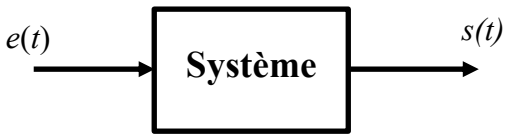
Avec $\alpha_1 \, et \, \alpha_2$ les résidus aux pôles p_1 et p_2 : $(\alpha_1 p + \alpha_2)_{p=p_1} = \left[\frac{B(p)}{A(p)}(p-p_1)(p-p_2)\right]_{p=p_1 \, ou \, p=p_2}$

4. Notion de fonction de transfert

La fonction de transfert est l'un des outils fondamentaux de l'automatique. Elle permet de représenter le comportement dynamique d'un système linéaire continu par une relation algébrique simple dans le domaine de Laplace

4.1.Définition

Considérons un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$.



La fonction de transfert du système est définie comme le rapport entre la transformée de Laplace de la sortie et celle de l'entrée, sous l'hypothèse de conditions initiales nulles :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Elle ne dépend que des caractéristiques du système et ne dépend pas du signal d'entrée appliqué.

À partir de l'équation générale :

$$a_0 s(t) + a_1 \frac{ds(t)}{dt} + ... + a_n \frac{d^n s(t)}{dt^n} = b_0 e(t) + b_1 \frac{de(t)}{dt} + ... + b_m \frac{d^m e(t)}{dt^m}$$

Et en appliquant la transformée de Laplace avec conditions initiales nulles, on obtient :

$$a_0 S(p) + a_1 pS(p) + ... + a_n p^n S(p) = b_0 E(p) + b_1 pE(p) + ... + b_m p^m E(p)$$

D'où :

$$S(p) = \frac{b_m p^m + ... + b_1 p + b_0}{a_n p^n + ... + a_1 p + a_0} E(p)$$

Cette écriture montre que la fonction de transfert est le quotient de deux polynômes en *p*.

Exemple :

Reprenons le circuit RC précédent, son équation différentielle est donnée dans (2.2), en appliquant la transformée ce Laplace sur cette équation on obtient :

$$RCp.S(p) + S(p) = E(p)$$

Soit :

$$S(p)\left(1 + RCp\right) = E(p)$$

La fonction de transfert est alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{RCp + 1}$$

4.2.Pôles et zéros d'une fonction de transfert

Lorsqu'une fonction de transfert est écrite sous la forme :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Les racines du polynôme numérateur $B(p)$ sont appelées « zéros » de la fonction de transfert, tandis que les racine du polynôme dénominateur $A(p)$ sont appelées « pôles » de la fonction de transfert.

Les pôles jouent un rôle essentiel dans l'étude du comportement dynamique, de la stabilité et de la rapidité des systèmes.

4.3.Intérêt de la fonction de transfert

La fonction de transfert présente plusieurs avantages :

- ✓ Elle remplace une équation différentielle par une relation algébrique ;
- ✓ Elle caractérise la dynamique du système ;
- ✓ Elle facilite le calcul des réponses du système ;
- ✓ Elle permet l'étude des systèmes assemblés en série, en parallèle ou en boucle fermée.

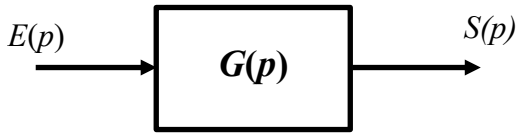
5. Représentation des systèmes par schémas-blocs

Dans le domaine de l'étude des systèmes asservis, il est habituel de décomposer des systèmes complexes en sous-systèmes plus simples. Cette décomposition permet de mieux saisir leur structure et de simplifier les calculs du comportement global. Le schéma-bloc est le formalisme le plus utilisé car il permet d'identifier le parcours du signal entre les divers constituants du système étudié.

5.1.Définition d'un schéma-bloc

C'est une représentation graphique d'un système où chaque bloc représente une fonction ou une opération mathématique reliant une entrée à une sortie. Les liaisons orientées indiquent le sens de circulation des signaux.

De manière générale, un bloc de fonction de transfert $G(p)$ est représenté par :



Avec :

$$S(p) = G(p).E(p)$$

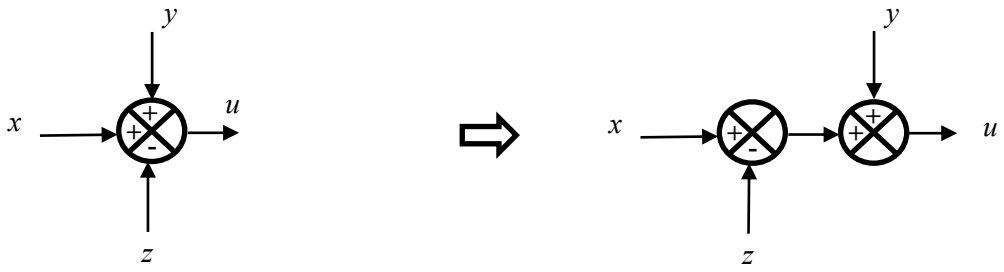
5.2.Bloc fonctionnel

Le bloc fonctionnel est considéré comme un sous-système ou un module constitutif du système global. Il peut s'agir d'un moteur, d'un capteur, d'un amplificateur, d'un correcteur ou même d'un opérateur mathématique.

5.3.Sommateur

Le sommateur est un point d'addition ou de soustraction de plusieurs signaux, essentiellement pour former le signal d'erreur ou la combinaison de plusieurs actions.

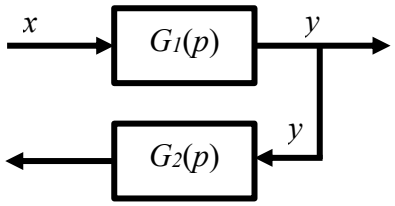
Exemple :



$$u = x + y - z$$

5.4.Point de prélèvement

Le point de prélèvement ou point de jonction permet de diriger un même signal vers plusieurs blocs sans modifier sa valeur. Il est très utilisé dans les boucles de retour dans les schémas comportant plusieurs branches.



5.5.Intérêt des schémas-blocs

La représentation par schémas-blocs présente plusieurs avantages :

- ✓ Elle simplifie la lecture d'un système complexe ;
- ✓ Elle met en évidence les relations entre sous-systèmes ;
- ✓ Elle facilite le calcul de la fonction de transfert globale ;
- ✓ Elle permet d'identifier facilement les chaînes directes et les chaînes de retour.

Remarque :

Un même système peut être représenté par plusieurs schémas-blocs selon le niveau de détail souhaité. En automatique, on retient généralement la représentation la plus simple permettant de décrire clairement la structure du système et le cheminement des signaux.

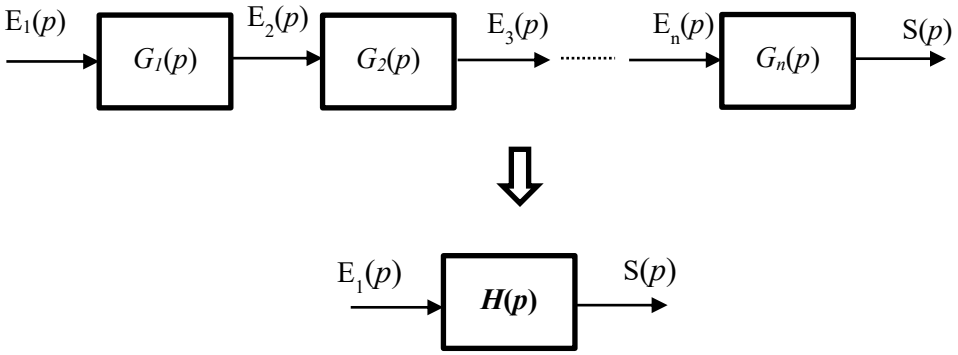
6. Simplifications des schémas-blocs

Les schémas-blocs permettent d'exprimer la structure d'un système asservi au moyen de blocs fonctionnels, de sommateurs et de points de prélèvement. Lorsque le système à considérer est constitué de plusieurs sous-systèmes interconnectés, il est délicat d'exprimer leur comportement, ce qui incite parfois à simplifier le schéma en vue de déterminer une fonction de transfert équivalente plus facile à exploiter. Cependant, cette simplification doit maintenir la relation d'entrée-sortie du système.

6.1.Fonction de transfert équivalente d'un ensemble de sous-systèmes

6.1.1. Mise en série (ou cascade)

Si plusieurs sous-systèmes sont assemblés en série, la sortie du premier devient l'entrée du second, la fonction de transfert équivalente est donc le produit des fonctions de transfert de chaque sous-système.



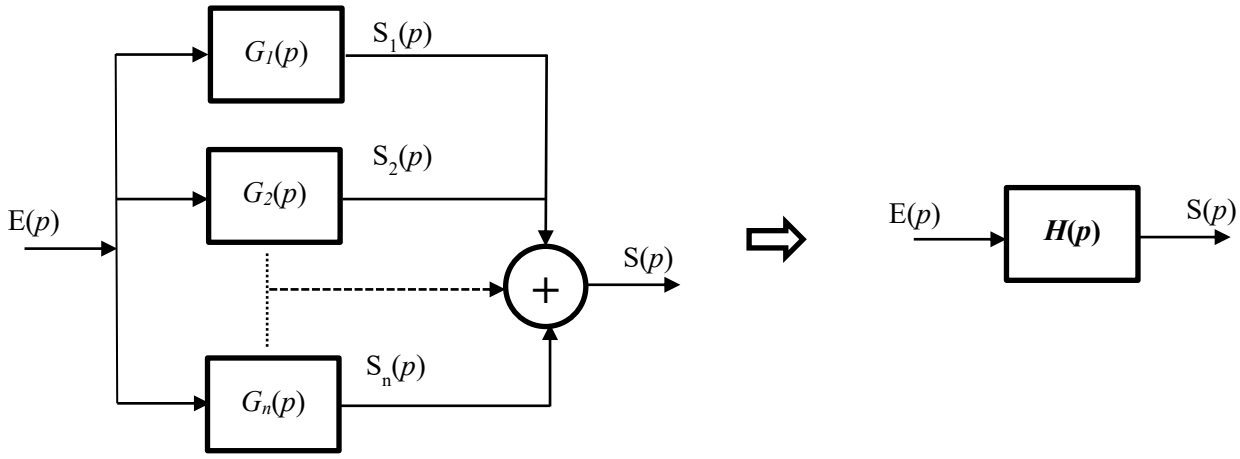
$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E_1(p)}=G_1(p).G_2(p).\ldots.G_n(p)}$$

Ceci est évident puisque, par définition, on a :

$$G_1(p)=\frac{E_2(p)}{E_1(p)},\ \ldots,G_n(p)=\frac{S(p)}{E_n(p)}$$

6.1.2. Mise en parallèle

Lorsque plusieurs blocs reçoivent la même entrée et que leurs sorties sont sommées, la fonction de transfert équivalente est la somme des fonctions de transfert élémentaires.



La fonction de transfert équivalente $H(p)$ a donc pour expression :

$$\boxed{H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=G_1(p)+G_2(p)+\ldots+G_n(p)}$$

Ceci est évident car $S(p)$ est la somme des n sorties des n éléments, c'est à dire que :

$$S(p) = S_1(p) + S_2(p) + \ldots\ldots + S_n(p)$$

$$S(p)=G_1(p).E(p)+G_2(p).E(p)+\ldots\ldots+G_n(p).E(p)$$

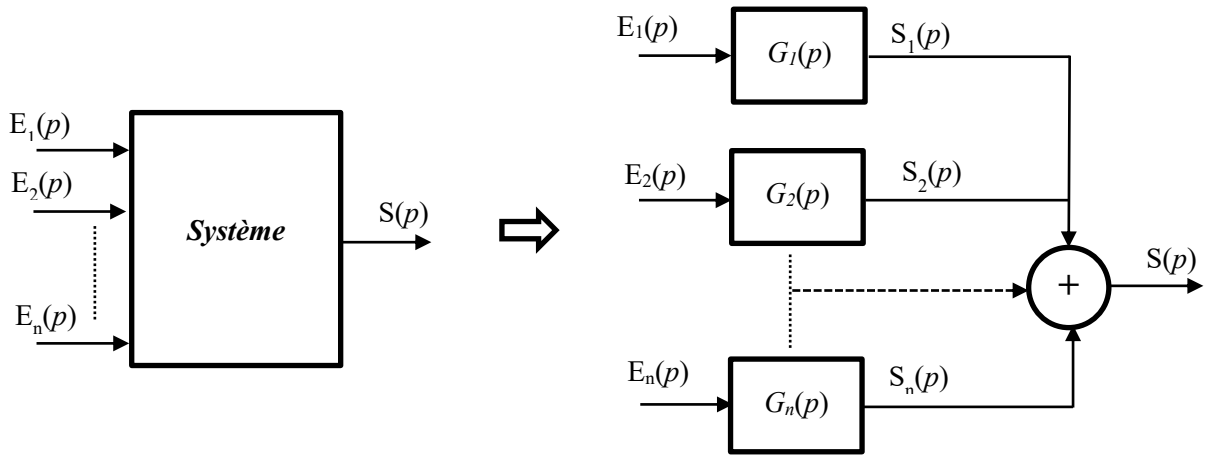
$$S(p)=\left[G_1(p)+G_2(p)+\ldots\ldots+G_n(p)\right].E(p) \quad d'où : \quad H(p)=G_1(p)+G_2(p)+\ldots\ldots+G_n(p)$$

Cette configuration apparaît souvent lorsque plusieurs actions agissent simultanément sur la même sortie.

6.1.3. Cas d'un système à n entrées indépendantes

Lorsqu'un système possède plusieurs entrées indépendantes, il n'existe pas une unique fonction de transfert globale reliant toutes les entrées à la sortie. On détermine alors une fonction de transfert $G_i(p)$ entre la sortie et la i^{ème} entrée, en supposant les autres entrées nulles sauf l'entrée $E_i(p)$, Ceci n'est possible que si les différentes équations du système ne sont pas couplées entre elles.

La sortie globale s'obtient ensuite par superposition des contributions de chaque entrée.

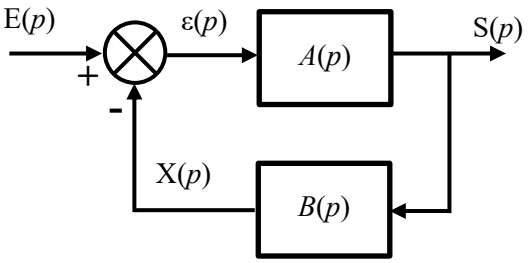


Dans ce cas, on peut écrire :

$$\boxed{S(p) = \sum_i G_i(p).E_i(p)}$$

6.1.4. Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)

Considérons un système comportant une chaîne directe de fonction de transfert $A(p)$ et une chaîne de retour de fonction de transfert $B(p)$:



Nous avons les relations suivantes :

$$S(p) = A(p).\varepsilon(p), \qquad X(p) = B(p).S(p), \qquad \varepsilon(p) = E(p) - X(p)$$

$$S(p) = A(p).\left[E(p) - X(p)\right] = A(p).\left[E(p) - B(p).S(p)\right]$$

D'où :

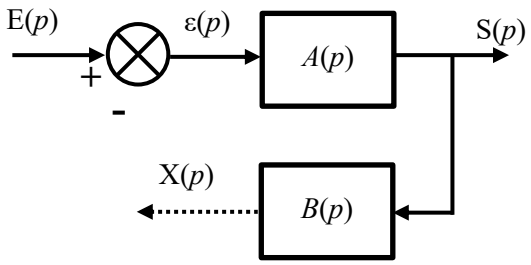
$$S(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)} E(p)$$

La fonction de transfert en boucle fermée s'écrit alors :

$$\boxed{H(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}}$$

6.1.5. Fonction de transfert en boucle ouverte (FTBO)

La Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (F.T.B.O.) est la fonction de transfert qui correspond à l'ouverture de la boucle c'est-à-dire qu'elle lie les transformées de Laplace de la sortie de la chaîne de retour *X(p)* à l'erreur *ε (p)*.



FTBO est donc le produit de la chaîne directe par la chaîne de retour. Elle relie le signal de retour au signal d'erreur lorsque la boucle est ouverte.

Elle s'écrit :

$$\frac{X(p)}{\varepsilon(p)} = FTBO(p) = A(p).B(p)$$

La FTBO d'un asservissement est donc le produit des fonctions de transfert de la chaîne directe par la chaîne de retour. Cette fonction de transfert a une grande importance dans l'étude de la stabilité des systèmes.

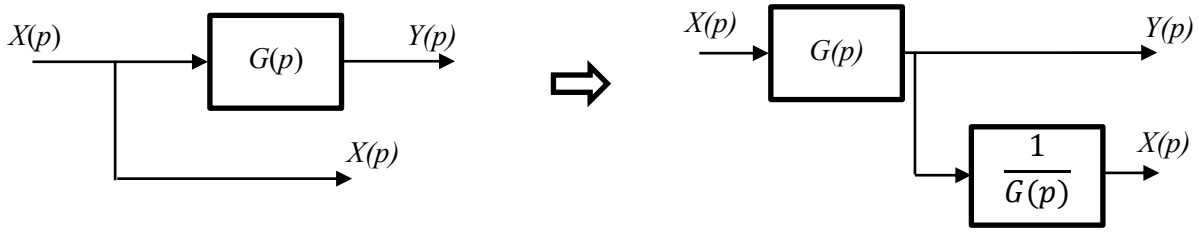
6.2.Règles de simplifications

6.2.1. Déplacement des points de prélèvement

Dans un schéma-bloc, il est parfois utile de déplacer un point de prélèvement avant ou après un bloc afin de simplifier la structure. Ce déplacement est possible à condition de conserver la même valeur du signal prélevé.

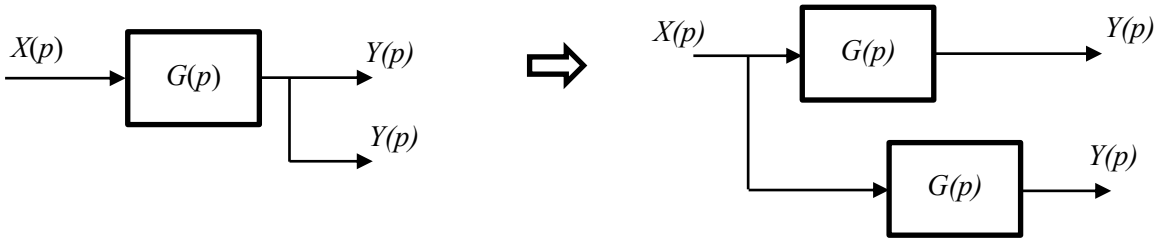
Déplacement de l'amont vers l'aval d'un bloc :

Si le point de prélèvement est déplacé après un bloc de fonction de transfert $G(p)$, il faut introduire un bloc correcteur approprié sur la branche déplacée.



Déplacement de l'aval vers l'amont

Si le point de prélèvement est déplacé avant le bloc, il faut également compenser ce déplacement par le facteur inverse convenable.

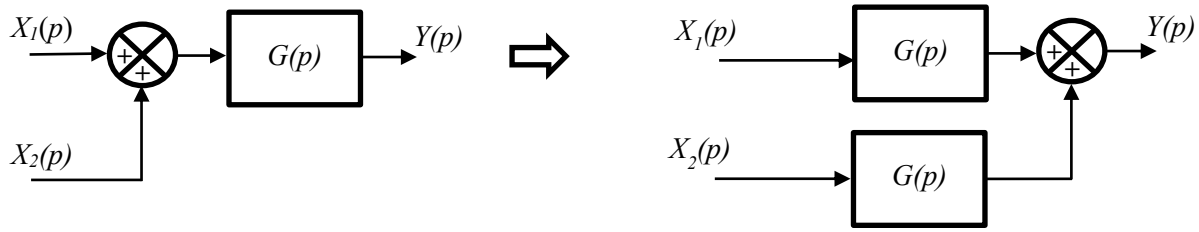


Autrement dit, le déplacement d'un point de prélèvement n'est pas gratuit : il faut corriger le signal pour que la nouvelle structure reste équivalente à l'ancienne.

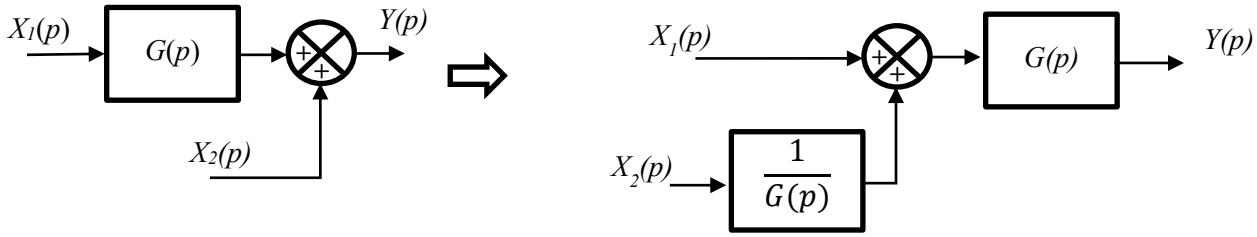
6.2.2. Déplacement de sommateurs

Le sommateur peut lui aussi être déplacé en amont ou en aval d'un bloc, à condition de tenir compte du bloc traversé par les signaux.

Déplacement de l'amont vers l'aval : les signaux qui n'ont pas encore traversé le bloc doivent être multipliés par le facteur convenable pour que la somme en sortie reste inchangée.



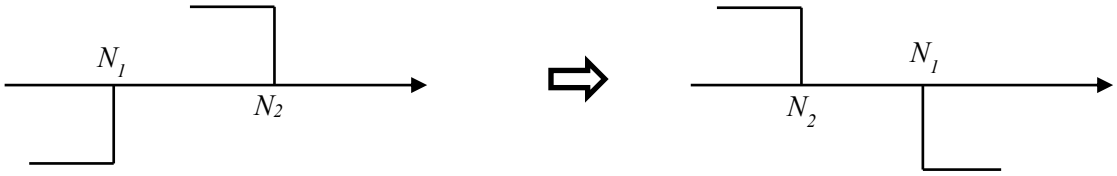
Déplacement de l'aval vers l'amont : le même principe s'applique, avec correction inverse selon le sens du déplacement.



Cette transformation est utile lorsque plusieurs sommateurs compliquent la lecture du schéma et empêchent une simplification directe.

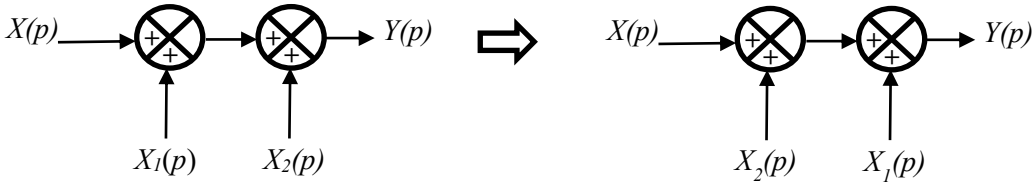
6.2.3. Permutation de deux points de prélèvement successifs

Deux points de prélèvement successifs peuvent être permutés sans modifier le comportement global, à condition que les signaux transportés restent identiques. Cette opération permet parfois de regrouper les branches de retour de manière plus simple.



6.2.4. Permutation de deux sommateurs successifs

Deux sommateurs placés successivement peuvent être permutés si les opérations réalisées sont conservées et si les signes des signaux restent inchangés. Cette règle peut aider à réorganiser un schéma avant simplification finale.



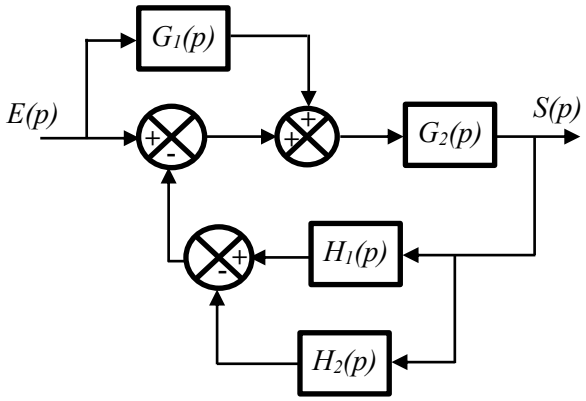
Remarque :

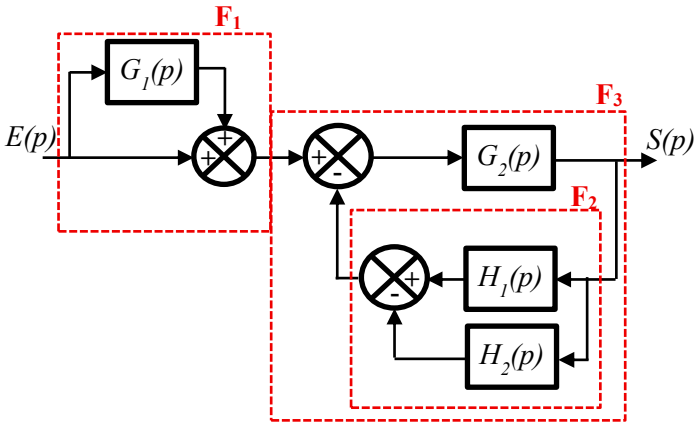
En pratique, la simplification d'un schéma-bloc se fait progressivement :

- ✓ Repérer les blocs en série ;
- ✓ Regrouper les blocs en parallèle ;
- ✓ Identifier les boucles fermées simples ;
- ✓ Déplacer, si nécessaire, les sommateurs ou les points de prélèvement ;
- ✓ Recommencer jusqu'à obtenir un seul bloc équivalent.

Cette simplification doit toujours être accompagnée d'une vérification de cohérence, car une mauvaise manipulation des sommateurs ou des points de prélèvement peut conduire à une relation entrée-sortie erronée.

Exemple : Simplifier le schéma bloc suivants et donner sa fonction de transfert globale :



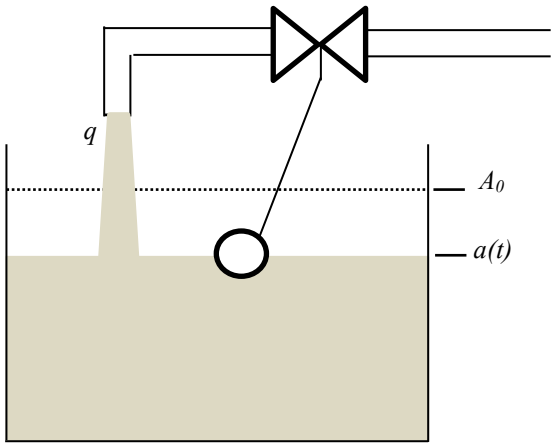


Nous avons : $F_1 = 1 + G_1$; et $F_2 = \dfrac{G_2}{1 + G_2\left(H_1 - H_2\right)}$ donc : $H(p) = \dfrac{G_2\left(1 + G_1\right)}{1 + G_2\left(H_1 - H_2\right)}$

7. Exercice d'application

Mise en équation et étude d'un asservissement de niveau dans une cuve.

On considère une cuve parallélépipédique de section S = 800 cm^2 munie d'un flotteur raccordé à une vanne. La vanne assure le remplissage de la cuve avec un débit *q* proportionnel à la différence de hauteur d'eau par rapport à une hauteur de consigne A_0 = 24 cm. La vanne est donc fermée si a(t) = A_0 et ouverte au maximum lorsque la cuve est vide. On notera *k* ce coefficient de proportionnalité et on donne : *k* = 0,002 m^2/s.



1. Etablir l'équation différentielle régissant le fonctionnement de ce système, en déduire la fonction de transfert.
2. Etablir le schéma fonctionnel du système en faisant apparaître une boucle de régulation.
3. Quel est le temps t_r nécessaire pour le remplissage de 95% de la cuve si elle est initialement vide.

Solution :

1. Dans ce système le débit d'eau au niveau de la vanne est proportionnel à la différence de hauteur d'eau par rapport à une hauteur de consigne a_0, donc :

$$q = k\left(A_0 - a(t)\right)$$

D'autre part le débit d'eau est défini comme étant le volume d'eau écoulé par unité de temps, donc :

$$q = \frac{dv(t)}{dt} = S.\frac{da(t)}{dt}$$

On obtient par conséquent :

$$S.\frac{da(t)}{dt} = k\left(A_0 - a(t)\right)$$

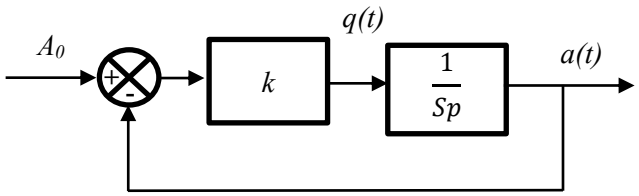
$$\boxed{S.\frac{da(t)}{dt} + k.a(t) = k.A_0}$$

En appliquant la transformée de Laplace on obtient ainsi :

$$S.p.A(p)+k.A(p)=k.A_0(p)$$

$$\boxed{H(p)=\frac{A(p)}{A_0(p)}=\frac{k}{sp+k}}$$

2. Le schéma fonctionnel :



3. Calcul du temps de remplissage :

L'entrée du système est un échelon d'amplitude A_0 donc :

$$A_0(p)=\frac{A_0}{p} \text{ et } A(p)=\frac{A_0 k}{p(sp+k)}$$

$$a(t)=A_0\left(1-e^{-\frac{k}{S}t}\right)$$

Pour t=tr, la cuve est remplie à 95% c'est-à-dire :

$$a(t_r)=0.95A_0=A_0\left(1-e^{-\frac{k}{S}t_r}\right)$$

Donc :

$$\boxed{t_r=120s}$$

8. Conclusion

Ce chapitre a mis en lumière l'étape fondatrice et indispensable à toute démarche en automatique qui est la modélisation mathématique des systèmes physiques.

À travers ce chapitre, nous avons explorer les outils utilisés en automatique pour représenter et simplifier la dynamique complexe de ces systèmes :

- ✓ L'approche analytique, point de départ naturel basé sur la mise en équations différentielles, qui décrit fidèlement les lois physiques régissant l'évolution temporelle entre la grandeur de commande et la grandeur de sortie.
- ✓ L'approche opérationnelle, rendue possible grâce à l'outil puissant qu'est la Transformée de Laplace. Elle a permis de basculer d'un domaine intégro-différentiel complexe vers un domaine algébrique simple, donnant naissance au concept central de fonction de transfert et à l'identification de ses "pôles" et "zéros".

L'approche structurelle, via les schémas-blocs, qui offre une représentation visuelle et modulaire des systèmes interconnectés. Nous avons établi les règles d'algèbre de blocs (associations en série, parallèle, boucle fermée, et déplacements de points) permettant de réduire n'importe quelle architecture complexe en une fonction de transfert globale équivalente.

La maîtrise de ces outils de modélisation clôture l'étape de représentation structurelle et mathématique. Elle ouvre directement la voie à l'étape d'analyse comportementale : l'étude des réponses temporelles (Chapitre 3). L'objectif de cette future étape sera d'exploiter les fonctions de transfert fraîchement calculées pour observer concrètement comment les systèmes de base (1^{er} et $2^{ème}$ ordre) réagissent au cours du temps face à des signaux d'entrée canoniques (impulsion, échelon, rampe).

CHAPITRE 3

Réponses temporelles des systèmes linéaires

1. Introduction

Une étude temporelle d'un système consiste en une analyse de l'évolution dans le temps de sa sortie lorsque l'on applique un signal d'entrée donné. Ceci permet caractériser le comportement dynamique du système et ses performances.

La réponse d'un système est la sortie $s(t)$ qui apparaît lors de l'application d'une entrée $e(t)$; son analyse permet de juger ses performances (stabilité, rapidité, précision).

En général, la réponse d'un système comporte deux phases qui sont : le régime transitoire, qui correspond à l'évolution de la sortie après application de l'entrée et le régime permanent, qui correspond à l'état final atteint et dont tous les effets transitoires ont disparu.

Le régime transitoire conduit à l'analyse de la rapidité et la stabilité du système alors que le régime permanent caractérise la précision.

Pour étudier expérimentalement ou théoriquement un système, on applique généralement un certain nombre d'entrées canoniques, facilement réalisables dans toutes les techniques (électrique, mécanique, hydraulique) et facilement analysables, à savoir : l'impulsion, l'échelon et la rampe, permettant de mettre en œuvre des caractéristiques fondamentales du système.

L'étude temporelle d'un système permet donc :

- de comparer différents systèmes ;
- de voir les effets des paramètres du système sur la réponse ;
- d'identifier un modèle expérimentalement à partir de la réponse ;
- de prévoir son comportement avant sa mise en œuvre réelle.

Le chapitre sera centré sur les réponses temporelles des systèmes du premier ordre et des systèmes du second ordre, modèles types en automatique linéaire.

2. Systèmes du premier ordre

2.1. Définition

Les systèmes du premier ordre sont parmi les modèles les plus simples et les plus utilisés en automatique. Ils permettent de décrire de nombreux systèmes physiques, en particulier en électricité, en thermique et en mécanique.

On appelle système du 1er ordre, un système régi par une équation linéaire différentielle du premier ordre telle que :

$$T.\frac{ds(t)}{dt}+s(t)=K.e(t)$$

Ou encore, un système dont la fonction de transfert est du type :

$$H(p)=\frac{S(p)}{E(p)}=\frac{K}{1+Tp}$$

Avec :

K : gain statique.

T : constante de temps.

Un système du premier ordre est donc entièrement caractérisé par deux paramètres : K et T.

Ces systèmes sont encore appelés ***systèmes à une seule constante de temps***, ou ***système à retard***.

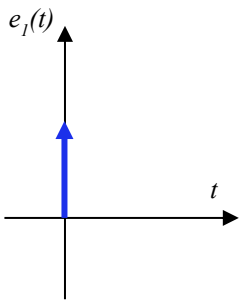
Ils sont très nombreux en physique. Tels que les circuits RC ou RL en électricité. En mécanique, tous les assemblages comportant un ressort et un amortisseur sont du 1er ordre.

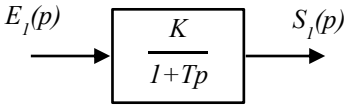
2.2.Réponse à une impulsion unité

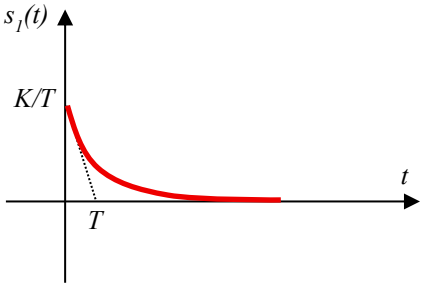
Dans ce cas, nous avons : $e_1(t) = \delta(t)$ où $\delta(t)$: impulsion unitaire

$E_1(p) = 1$

Donc : $S_1(p)=\frac{K}{1+Tp}=\frac{K}{T}\frac{1}{p+\frac{1}{T}}$ d'où : $s_1(t)=\frac{K}{T}e^{-t/T}$







Cette réponse est une exponentielle décroissante. Elle montre que le système réagit instantanément puis revient vers zéro.

L'équation de la tangente à l'origine est donnée par :

$$y=-\frac{K}{T^2}t+\frac{K}{T}$$

Car :

$$\left.\frac{ds_1(t)}{dt}\right|_{t=0}=\frac{K}{T^2}$$

Pour $t=0$ $y=T$: constante de temps.

2.3.Réponse indicielle (à un échelon)

La réponse indicielle nous renseignera sur le comportement du système en régime transitoire.

$$S_2(p)=\frac{K}{1+Tp}E(p) \qquad \text{ici : } E(p)=1/p \qquad \text{donc : } S_2(p)=\frac{K}{p(1+Tp)}$$

$$S_2(p)=\frac{A}{p}+\frac{B}{1+Tp}$$

$$A=\left.\frac{K}{1+Tp}\right|_{p=0}=K$$

$$B=\left.\frac{K}{p}\right|_{p=\frac{-1}{T}}=-KT$$

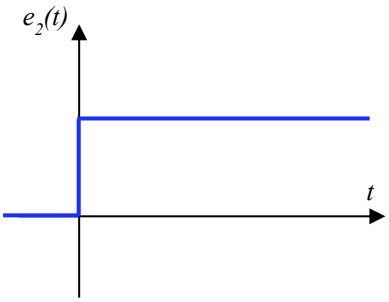
$$S_2(p)=\frac{K}{p}-\frac{K}{\frac{1}{T}+p}$$

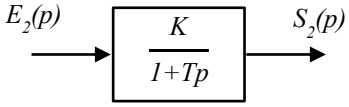
L'originale $s_1(t)$ de $S_1(p)$ est donc :

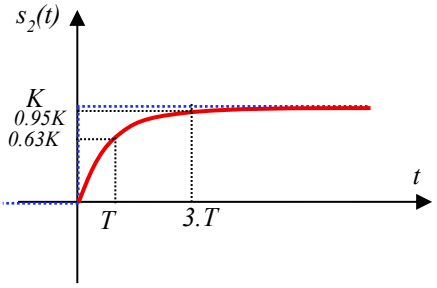
$$S_2(p)=K\left(1-e^{-t/T}\right)$$

$$\lim_{t\to\infty} s_2(t)=K$$

On constate donc que la sortie $s_2(t)$ atteint pratiquement le régime permanent au bout d'un temps qui dépend de la constante de temps T caractérise donc la ***rapidité du système*** à atteindre son régime permanent.







La pente de la tangente à l'origine est K/T, plus le système a une constante de temps faible, plus il "répond" vite.

Au bout d'un temps $t = T$, la sortie est $s_2(T) = K(1 – 1/e)$, ce qui représente environ 63% de K.

2.4.Réponse à une rampe (échelon de vitesse)

Dans ce cas, nous avons : $e_3(t) = t.u(t)$ où $u(t)$: échelon unitaire $E_3(p) = 1/p^2$

Donc :

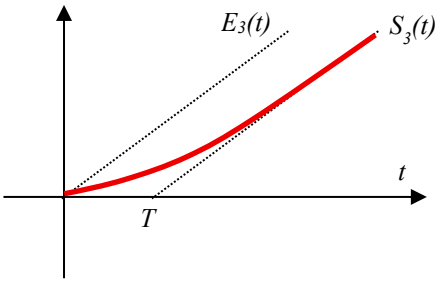
$$S_3(p)=\frac{K}{p^2(1+Tp)}=\frac{S_1(p)}{p}$$

Avec $S_1(p)$: transformée de la réponse indicielle d'un 1er Ordre.

D'où :

$$s_3(t) = \int_0^t s_1(t)dt = \int_0^t K(1-e^{-t/T})dt$$

$$s_3(t) = K\left[t - T\left(1-e^{-t/T}\right)\right]$$



En régime permanent : $t \to \infty$, alors $s_3(t) = K\,(t - T)$

Cette expression met en évidence un retard égal à T. Un système du premier ordre suit donc une rampe avec un certain décalage temporel.

Dans le cas où $K=1$, l'erreur T entre l'entrée et la sortie est constante en fonction du temps. C'est l'erreur de "traînage".

Donc, un système du 1er ordre suit les variations linéaires de l'entrée avec un certain retard, d'où leur nom de système à retard.

2.5.Influence du gain statique et de la constante de temps

- ✓ Le gain statique K agit sur la valeur finale de la sortie. Plus K est grand, plus la sortie finale est élevée pour une même entrée.
- ✓ La constante de temps T agit sur la rapidité de la réponse. Plus Test faible, plus le système répond rapidement. Inversement, une constante de temps élevée traduit une réponse plus lente.

Exemple :

On donne les trois systèmes de premier ordre suivants :

$$H_1(p) = \frac{1}{1+0.1p} \qquad H_2(p) = \frac{2}{1+0.5p} \qquad H_3(p) = \frac{4}{2+3p}$$

Tracer les réponses à échelon d'amplitude A=2 des trois systèmes en constatant l'effet du gain statique K et de la constante de temps T sur ces réponses.

La fonction de transfert du troisième système doit d'abord s'écrire sous la forme canonique de premier ordre :

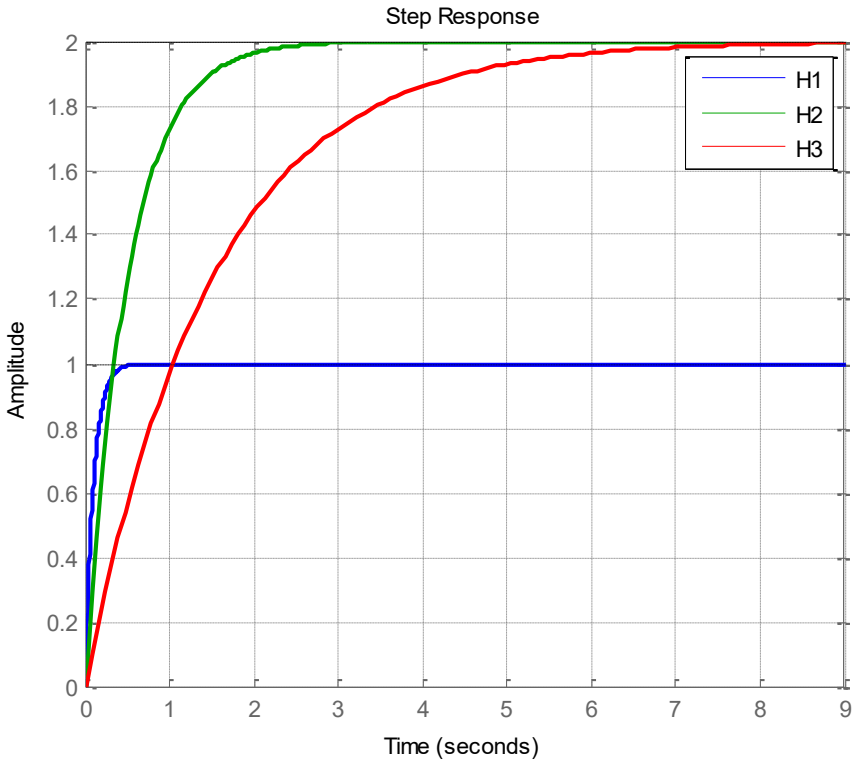
$$H_3(p) = \frac{2}{1+1.5p}$$

Nous avons donc :

- Pour H_1 : K_1=1 et T_1=0.1
- Pour H_2: K_2=2 et T_2=0.5
- Pour H_3: K_3=2 et T_3=1.5

Simulation Matlab :

```
>> H1=tf(1,[0.1 1]);
>> H2=tf(2,[0.5 1]);
>> H3=tf(4,[3 2]);
>> step(H1,H2,H3)
```



Les systèmes H_2 et H_3 possèdent le même gain statique, donc la même valeur finale pour une même entrée, tandis que H_1a une valeur finale plus faible. En revanche, H_1 est le plus rapide car sa constante de temps est la plus faible.

3. Systèmes du second ordre

3.1.Définition

Les systèmes du second ordre occupent une place essentielle en automatique, car ils permettent de modéliser de nombreux systèmes physiques réels. Contrairement aux systèmes du premier ordre, leur réponse temporelle peut présenter un dépassement, des oscillations ou un amortissement plus ou moins marqué selon les valeurs de leurs paramètres.

Les systèmes du second ordre sont régis par des équations linéaires différentielles à coefficients constants du 2ème ordre, de type :

$$\frac{1}{\omega_n^2} s''(t) + \frac{2\xi}{\omega_n} s'(t) + s(t) = Ke(t)$$

Avec :

- K : Gain statique : C'est le rapport y(t)/e(t) en régime statique $(\frac{ds(t)}{dt} = 0; \frac{d^2s(t)}{dt^2} = 0)$
- ξ : Facteur d'amortissement.
- ω_n : Pulsation propre non amortie.
- $T = \frac{1}{\xi\omega_n}$: Constante de temps.

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1 + \frac{2\xi}{\omega_n} p + \frac{1}{\omega_n^2} p^2}$$

Ou encore :

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Le comportement dynamique d'un tel système dépend de la valeur des deux constantes ω_n et surtout de ξ.

3.2.Etude des pôles

Les pôles du système sont les racines de l'équation :

$$p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2 = 0$$

Le discriminant est donné par :

$$\Delta = 4\omega_n^2 \left(\xi^2 - 1\right)$$

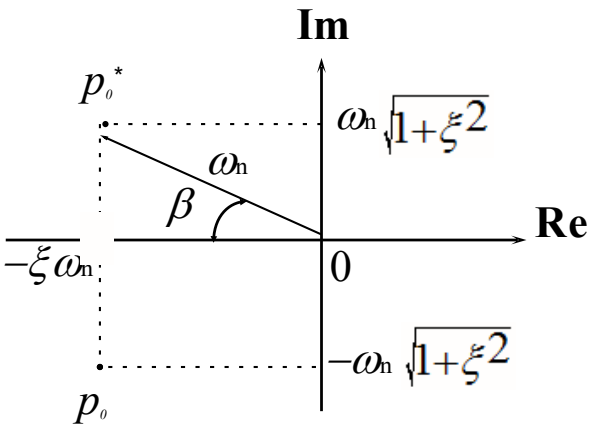
Son signe dépend de la valeur de ξ, ce qui conduit à trois cas principaux.

a) Cas 0<ξ<1 (Δ<0): système sous-amorti

Les pôles sont complexes conjugués :

$$p_0 = -\omega_n(\xi + j\sqrt{1-\xi^2}) \;;\; p_0^* = -\omega_n(\xi - j\sqrt{1-\xi^2})$$

La réponse du système est oscillatoire amortie.



Remarque : $\xi = \cos\beta = \dfrac{\xi\omega_n}{\omega_n}$: coefficient d'amortissement :

- $\beta = 45°$ Correspond à un amortissement idéal ($\xi = 0.707$).
- $\xi = 1$ Correspond à un amortissement critique.

b) **Cas ξ=1 (**Δ=0**): amortissement critique**

Les deux pôles sont confondus :

$$p_{1,2} = -\omega_n = -1/\tau$$

Le système revient vers l'équilibre sans oscillation et avec la réponse la plus rapide possible sans dépassement.

c) Cas ξ>1(Δ>0): système sur-amorti

Les deux pôles sont réels négatifs distincts :

$$p_1 = -\omega_n(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}) \ ;$$

$$p_2 = -\omega_n(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})$$

La réponse est apériodique et plus lente.

3.3.Réponse à un échelon unité

Considérons une entrée échelon unité :

$$e(t) = u(t) \ \text{ Donc : } \ E(p) = 1/p$$

Par conséquent :

$$S(p) = \frac{K}{p}\frac{1}{1 + \dfrac{2\xi}{\omega_n}p + \dfrac{1}{\omega_n^2}p^2}$$

La réponse dépend de la valeur du coefficient d'amortissement.

a) Cas *0<ξ<1*

Les 2 racines complexes conjuguées conduisent à une solution oscillatoire amortie :

$$s(t) = K\left[1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}.\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \varphi\right)\right] \qquad t \geq 0$$

Avec :

$$\varphi = arctg\,\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}$$

Le régime permanent est ici $s(t) = K$, ($\lim_{t\to\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p.S(p) = K$)

Dans ce cas, nous avons sur la réponse indicielle :

- ✓ Un dépassement ;
- ✓ Des oscillations amorties ;
- ✓ Une convergence vers la valeur finale K.

b) Cas ξ=1

Les 2 pôles confondus conduisent à la réponse :

$$S(p) = \frac{K}{p}\frac{\omega_n^2}{p^2 + 2\omega_n p + \omega_n^2} = \frac{K}{p}\frac{\omega_n^2}{\left(p+\omega_n\right)^2}$$

On aura:

$$s(t) = K\left[1 - e^{-\omega_n t}\left(1 - \omega_n t\right)\right] \qquad t \geq 0$$

Le système ne présente pas d'oscillation.

c) Cas ξ>1

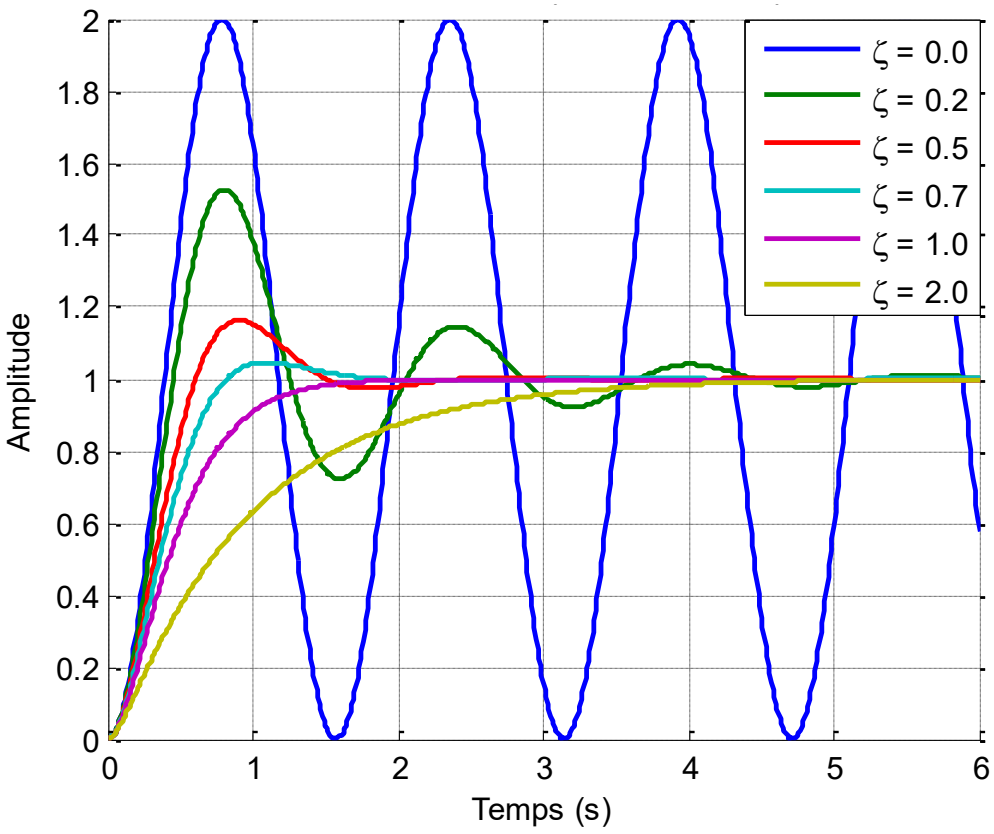
Les deux pôles négatifs et distinctes conduisent à une réponse sous forme d'une combinaison de deux exponentielles décroissantes :

$$s(t) = K\left(1 + \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left[\frac{e^{-a_1 t}}{a_1} - \frac{e^{-a_2 t}}{a_2}\right]\right) \qquad t \geq 0 \qquad avec \begin{cases} a_1 = \omega_n\left(\xi + \sqrt{\xi^2-1}\right) \\ a_2 = \omega_n\left(\xi - \sqrt{\xi^2-1}\right) \end{cases}$$

Le système revient vers son état d'équilibre sans oscillation, mais plus lentement que dans le cas critique.

Exemple :

La Figue donne les réponses indicielles en fonction du coefficient d'amortissement ξ pour $\omega_n=4$ et $K=1$.



3.4.Réponse à une impulsion unité

Pour une entrée impulsionnelle unité :

$e(t)=\delta(t)$ Donc : $E(p)=1$

Et par conséquent :

$$S(p)=\frac{K\omega_n^2}{p^2+2\xi\omega_n p+\omega_n^2}$$

Là encore, l'expression temporelle dépend de ξ.

a) Cas *0<ξ<1*

$$s(t)=K\left(\frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_n t}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)\right) \qquad t\geq 0$$

La réponse présente des oscillations amorties.

b) Cas *ξ=1*

$$s(t)=K\left(\omega_n^2 te^{-\omega_n t}\right) \qquad t\geq 0$$

c) Cas *ξ>1*

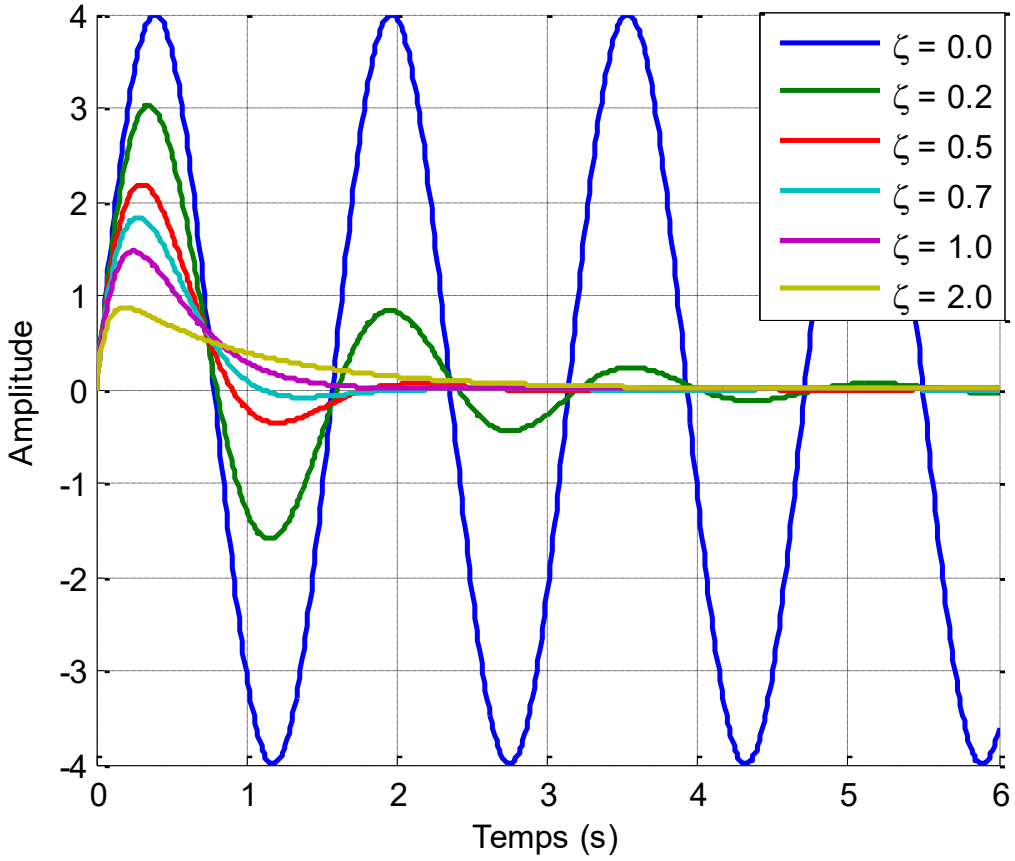
La réponse est la différence de deux exponentielles réelles décroissantes :

$$s(t)=K\frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}}\left(e^{-\left(\xi-\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}-e^{-\left(\xi+\sqrt{\xi^2-1}\right)\omega_n t}\right) \qquad t\geq 0$$

Elle ne présente pas d'oscillation.

Exemple :

La Figure donne les réponses impulsionnelles d'un système du second ordre en fonction du coefficient d'amortissement ξ pour $\omega_n=4$ et $K=1$.



3.5.Influence du coefficient d'amortissement

Comme nous on peut bien le remarquer, le coefficient d'amortissement ζ joue un rôle essentiel dans la forme de la réponse temporelle :

- ✓ Si ζ est faible, le système est peu amorti et la réponse présente un fort dépassement ;
- ✓ Si ζ augmente, le dépassement diminue ;
- ✓ Pour ζ, on obtient la réponse critique ;
- ✓ Si ζ >1, la réponse devient apériodique et plus lente.

La réponse indicielle montre donc l'effet de ζ sur le dépassement et les oscillations, tandis que la réponse impulsionnelle met en évidence la disparition progressive du caractère oscillatoire lorsque ζ augmente.

4. Caractéristiques temporelles

L'étude de la réponse temporelle d'un système ne se limite pas à l'observation qualitative de sa sortie. Il est souvent nécessaire de caractériser cette réponse à l'aide de grandeurs numériques, souvent déterminées sur la réponse indicielle, permettant d'évaluer objectivement les performances du système. Les principales caractéristiques temporelles sont le temps de montée, le temps de réponse, le dépassement maximal, le temps du premier maximum et l'erreur statique.

4.1.Temps de montée

Le temps de montée est le temps nécessaire pour que la sortie passe d'un faible pourcentage à un fort pourcentage de sa valeur finale, généralement de 10 % à 90 % pour une réponse indicielle (pour une réponse oscillatoire amortie ce temps est évalué souvent de 0 % à 100 %).

Il donne une première indication sur la rapidité du système : plus le temps de montée est faible, plus la réponse est rapide.

4.2.Temps de réponse à 5 %

Le temps de réponse à 5%, noté souvent t_r ou $t_{5\%}$, est le temps nécessaire pour que la sortie entre définitivement dans une bande de ±5% autour de la valeur finale.

Pour un système du premier ordre, on admet en général : $t_{5\%} \approx 3T$

Où Test la constante de temps.

Ce critère est très utilisé car il traduit directement la durée du régime transitoire.

4.3.Dépassement maximal

Le dépassement maximal est l'écart maximal de la sortie au-dessus de sa valeur finale, généralement exprimé en pourcentage. Il apparaît principalement dans les systèmes du second ordre sous-amortis.

Il se définit par :

$$D_{\%} = \frac{s_{\max} - s(\infty)}{s(\infty)}$$

Un dépassement important traduit en général un amortissement insuffisant.

4.4.Temps du premier maximum

Le temps du premier maximum, noté t_p, est l'instant auquel la réponse atteint pour la première fois son maximum. Ce critère concerne surtout les systèmes oscillatoires du second ordre. Il permet d'apprécier la vitesse avec laquelle le système atteint son premier pic.

4.5.Erreur statique

L'erreur statique est l'écart entre la valeur désirée et la valeur réellement atteinte par la sortie en régime permanent. Elle s'écrit :

$$\varepsilon_s = e(\infty) - s(\infty)$$

Plus généralement, comme la différence entre la consigne et la sortie finale.

Ce critère traduit la précision du système :

- ✓ Si l'erreur statique est nulle, le système est parfaitement précis en régime permanent ;
- ✓ Si elle est non nulle, le système présente un écart de poursuite ou de maintien.

Remarque

Ces caractéristiques permettent de comparer objectivement plusieurs systèmes et d'évaluer l'influence de leurs paramètres sur la qualité de la réponse. Elles seront utilisées tout au long de l'étude des systèmes asservis, aussi bien pour l'analyse que pour la synthèse des correcteurs.

5. Identification à partir de la réponse temporelle

Dans de nombreux cas pratiques, le modèle mathématique exact d'un système n'est pas connu. Il est alors possible d'estimer ses paramètres à partir de l'observation expérimentale de sa réponse temporelle, en particulier de sa réponse à un échelon. Cette démarche est appelée identification temporelle et permet d'obtenir rapidement un modèle approché du système, d'estimer les paramètres dynamiques sans établir d'abord les équations physiques détaillées et de préparer l'étude de la stabilité et la synthèse des correcteurs.

5.1.Identification d'un système du premier ordre

Comme les systèmes du 1er ordre sont caractérisés par une fonction de transfert de la forme :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp}$$

L'identification consiste alors à déterminer *K* et *T*.

Pour une entrée échelon l'amplitude A, la valeur finale de la sortie vaut :

$$s(\infty) = K.A$$

On en déduit : $K = \frac{s(\infty)}{A}$

Quant à la constante de temps *T*, elle peut être déterminée graphiquement de deux manières :

- ✓ En repérant l'instant où la sortie atteint 63 % de sa valeur finale ;
- ✓ Ou en utilisant la tangente à l'origine, dont l'intersection avec la valeur finale permet également d'estimer *T*.

Ainsi, la réponse indicielle permet d'identifier complètement un système du premier ordre.

5.2.Identification d'un système du second ordre

La fonction de transfert d'un système de second ordre est donnée par :

$$H(p) = \frac{K\omega_n^2}{p^2 + 2\xi\omega_n p + \omega_n^2}$$

Son identification revient donc à déterminer : *K, ξ et* ω_n.

À titre d'exemple, pour une réponse indicielle oscillatoire amortie :

- ✓ Le gain statique *K* est obtenu à partir de la valeur finale ;
- ✓ Le coefficient d'amortissement ξ peut être estimé à partir du dépassement maximal ;
- ✓ La pulsation propre ω_n peut être estimée à partir du temps du premier maximum ou de la pseudo-période des oscillations.

Remarque

L'identification temporelle fournit généralement un modèle approché. Elle est particulièrement utile lorsque le système réel est difficile à modéliser directement, mais que sa réponse à une entrée simple peut être mesurée expérimentalement.

6. Systèmes d'ordre supérieur

Des systèmes de degré supérieur à 2 sont encore assez fréquents. Leur fonction de transfert comporte plusieurs pôles donc leur réponse temporelle peut devenir plus complexe à analyser directement. Néanmoins, dans de nombreux cas, le comportement global du système est surtout conditionné par un petit nombre de pôles qu'on appelle les pôles dominants.

6.1.Définition

On appelle système de degré supérieur un système dont la fonction de transfert présente un dénominateur de degré supérieur ou égal à 3 :

$$H(p) = \frac{B(p)}{A(p)}$$

Avec : $deg\ A(p) \geq 3$

L'étude précise de tels systèmes est souvent délicate car la réponse temporelle dépend de plusieurs constantes de temps et de plusieurs pôles.

6.2.Pôles dominants

Lorsque les pôles sont suffisamment proches de l'origine, ils deviennent dominants et imposent l'essentiel de la dynamique du système. Les autres pôles, plus éloignés influencent peu la réponse globale et peuvent être négligés dans un premier temps.

Dans ce cas, un système d'ordre élevé peut être approché par un système d'ordre un, lorsque seul un pôle domine et à un système d'ordre deux, lorsque deux pôles dominent.

6.3.Approximation d'un système d'ordre supérieur

L'approximation par pôles dominants allège l'étude temporelle du système. Au lieu de traiter une fonction de transfert complexe, on remplace le système réel par un modèle équivalent plus simple, capable de reproduire l'essentiel de la réponse temporelle. Cette approximation permet notamment de : comprendre rapidement la forme de la réponse, d'évaluer la stabilité et la rapidité et de simplifier la synthèse d'un correcteur.

Remarque

L'approximation par pôles dominants reste valable tant que les pôles non dominants sont suffisamment éloignés des pôles principaux, leur influence ne pouvant pas être négligée dans le cas contraire ; l'étude complète du système étant alors nécessaire.

Exemples :

On donne la fonction de transfert du système d'ordre 3 suivante :

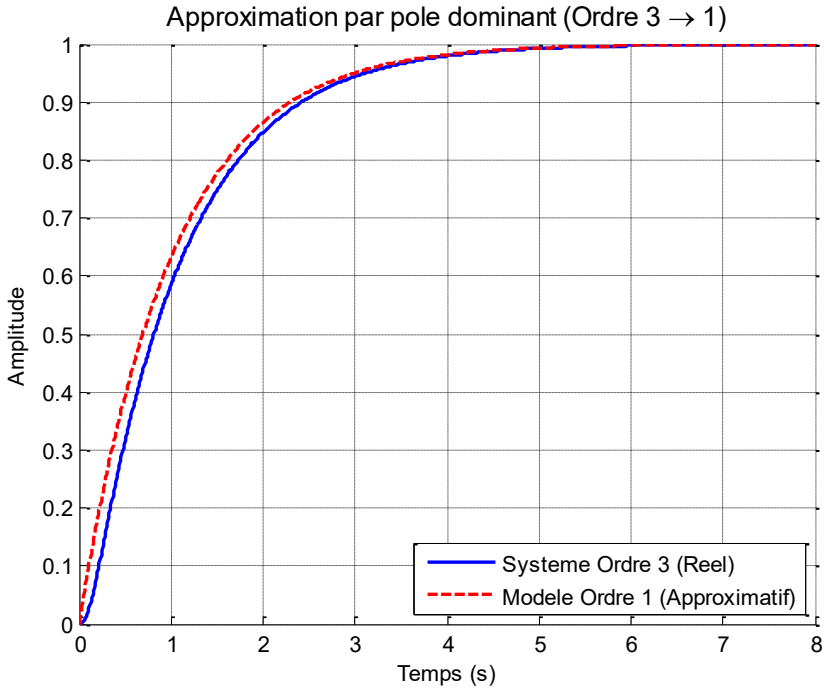
$$H_1(p)=\frac{300}{(p+1)(p+15)(p+20)}=\frac{300}{p^3+300p^2+335p+300}$$

Ce système possède 3 pôles : p_1=*-1*, p_2=*-15 et* p_3=*-20*.

On remarque que p_2 *et* p_3 sont très éloignés de p_1. Ce système peut être approximé à un système d'ordre 1 avec un pôle p=*-1* comme suit :

$$H_{1a}(p)=\frac{1}{(p+1)}$$

Les réponses indicielles des deux systèmes sont données par la figure suivante :



On donne la fonction de transfert du système d'ordre 4 suivante :

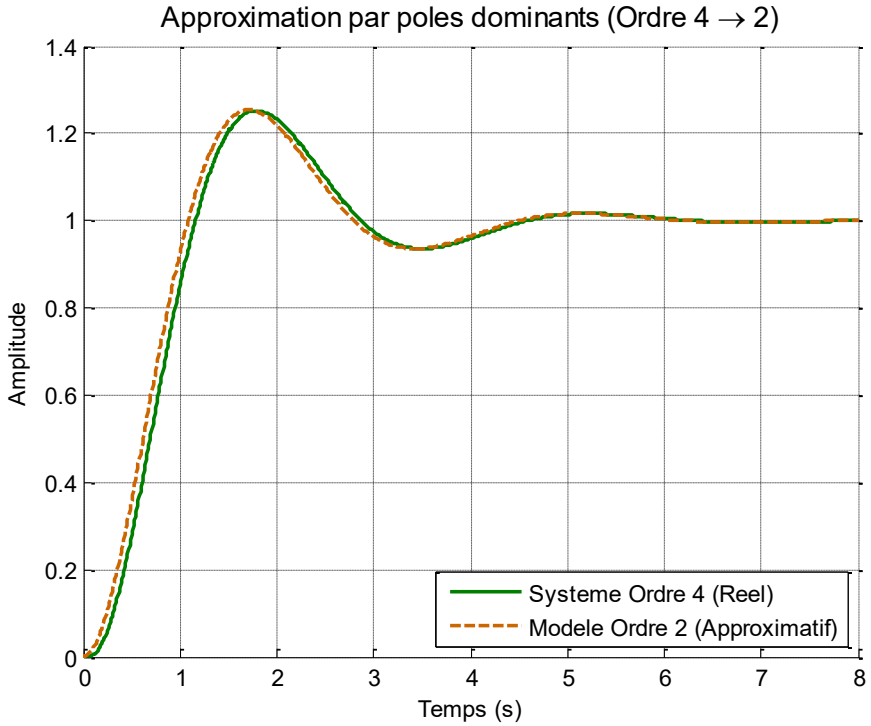
$$H_2(p) = \frac{4}{\left(p^2 + 2\times 0.4\times 2p + 4\right)}\left(\frac{25\times 30}{(p+25)(p+30)}\right)$$

Ce système possède 3 pôles : p_1=*-0.8+1.83j*, p_2=*-0.8-1.83j* , p_3=*-25 et* p_4=*-30*.

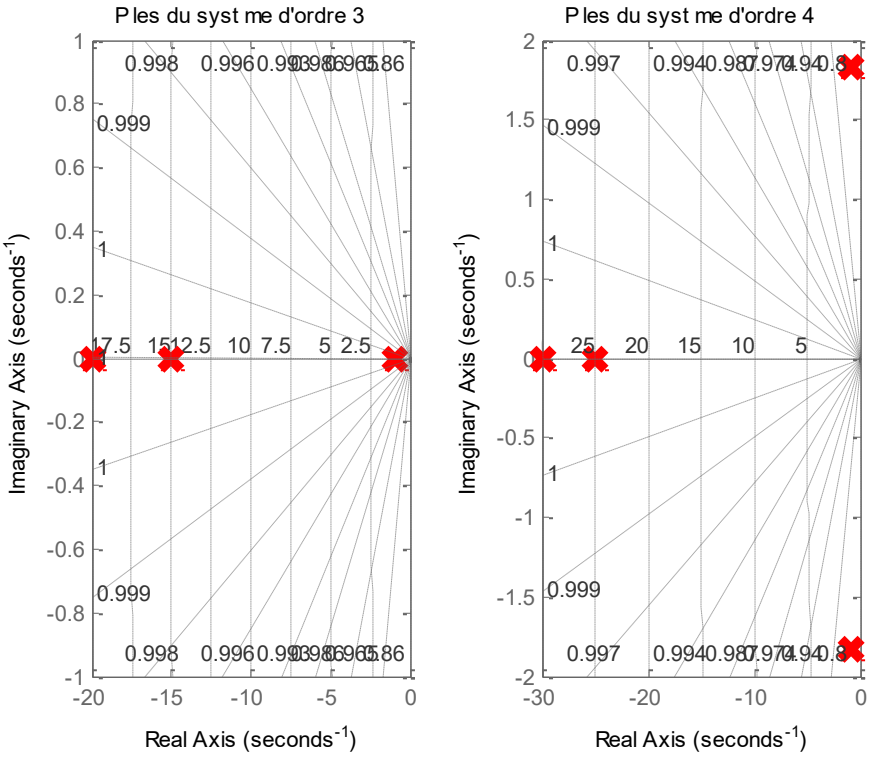
On remarque que p_3 *et p4* sont très éloignés de p_1 *et* p_2. Ce système peut être approximé à un système d'ordre 2 possédant deux pôles p_1=*-0.8+1.83j*, p_2=*-0.8-1.83j* comme suit :

$$H_{2a}(p) = \frac{4}{\left(p^2 + 2\times 0.4\times 2p + 4\right)}$$

Les réponses indicielles des deux systèmes sont données par la figure suivante :



La figure suivante illustre la représentation des pôles dans le plan complexe des deux systèmes réels :



Remarque :

- ✓ Pour qu'une approximation soit correcte, les pôles qui sont négligés doivent être au minimum 5 à 10 fois plus loin de l'axe imaginaire que ceux qui sont retenus.
- ✓ Le gain statique doit être conservé après l'approximation.
- ✓ Le système réel (courbe pleine) possède toujours un léger retard à la mise en mouvement par rapport à l'approximation (courbe pointillée). C'est l'héritage des pôles négligés : même « rapides », ils consomment un peu d'énergie pour mettre en mouvement le système.

7. Influence des pôles et des zéros

La forme d'une réponse temporelle d'un système dépend directement de l'emplacement des pôles et des zéros dans le plan complexe, car les pôles jouent généralement un rôle principal, tandis que des zéros modifient la forme de réponse et peuvent accélérer ou déformer l'évolution de la sortie.

7.1.Impact des pôles

Les pôles déterminent l'essentiel du comportement dynamique du système. Ils influencent notamment : la stabilité, la rapidité, l'amortissement, le caractère oscillatoire ou non de la réponse.

En règle générale :

- ✓ Des pôles réels négatifs donnent des réponses apériodiques ;
- ✓ Des pôles complexes conjugués donnent des réponses oscillatoires amorties ;
- ✓ Des pôles proches de l'origine entraînent une réponse lente ;

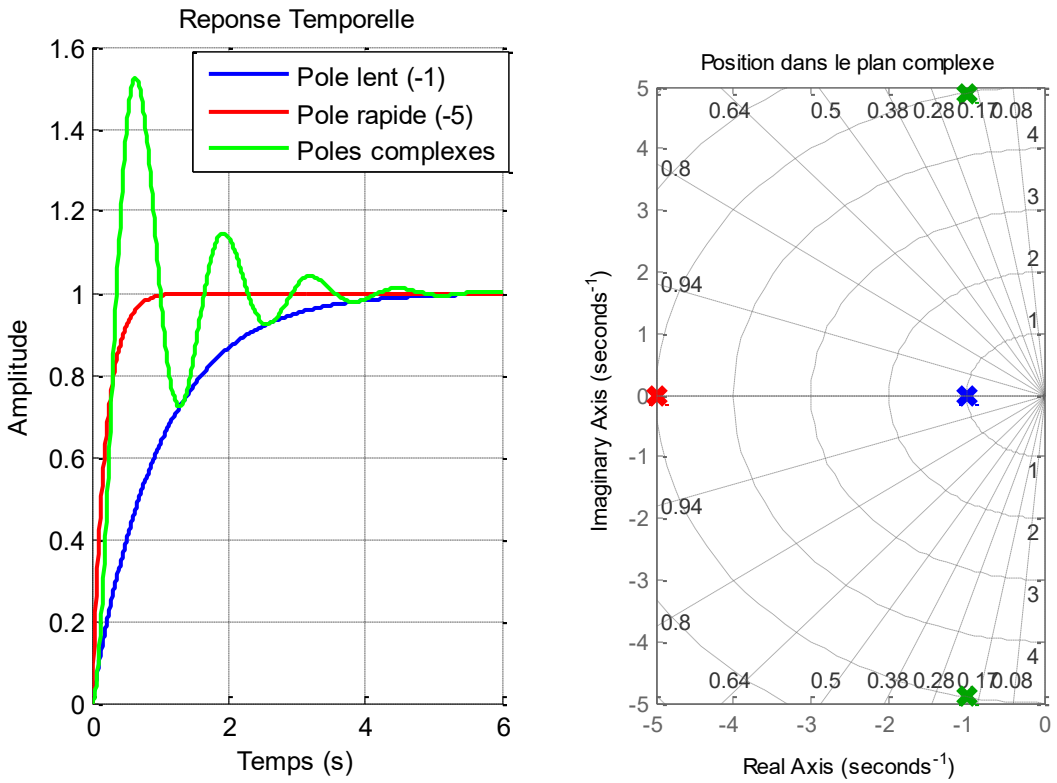
✓ Des pôles éloignés de l'origine correspondent à une réponse dynamique plus rapide.

Ainsi, pour un système stable les pôles éloignés à gauche dans le plan complexe entraînent une réponse rapide.

Exemple : Soit les trois systèmes suivants :

$$H_1 = \frac{1}{p+1} \qquad H_2 = \frac{5}{p+5} \qquad H_3 = \frac{1}{p^2+2p+25}$$

La figure suivante illustre les réponses indicielles respectives de ces trois systèmes et montre l'effet de la distance et du type de pôle sur la réponse temporelle.



7.2.Impact des zéros

Les zéros ne sont pas en eux-mêmes garants de la stabilité du système (mais bien de sa réponse temporelle). En effet, leur présence peut :

✓ Accélérer (ou retarder) la montée de réponse ;

✓ Accroître (ou diminuer) le dépassement ;

✓ Modifier la pente initiale ;

✓ Déformer la courbe de réponse.

Un zéro situé près de l'origine peut donc avoir une forte influence sur le régime transitoire (ce qui ne sera pas forcément le cas d'un zéro très éloigné, qui aura souvent un effet plus faible/insignifiant sur la réponse globale).

Exemple :

Soit le système suivant :

$$H(p)=\frac{16}{p^2+4p+16}$$

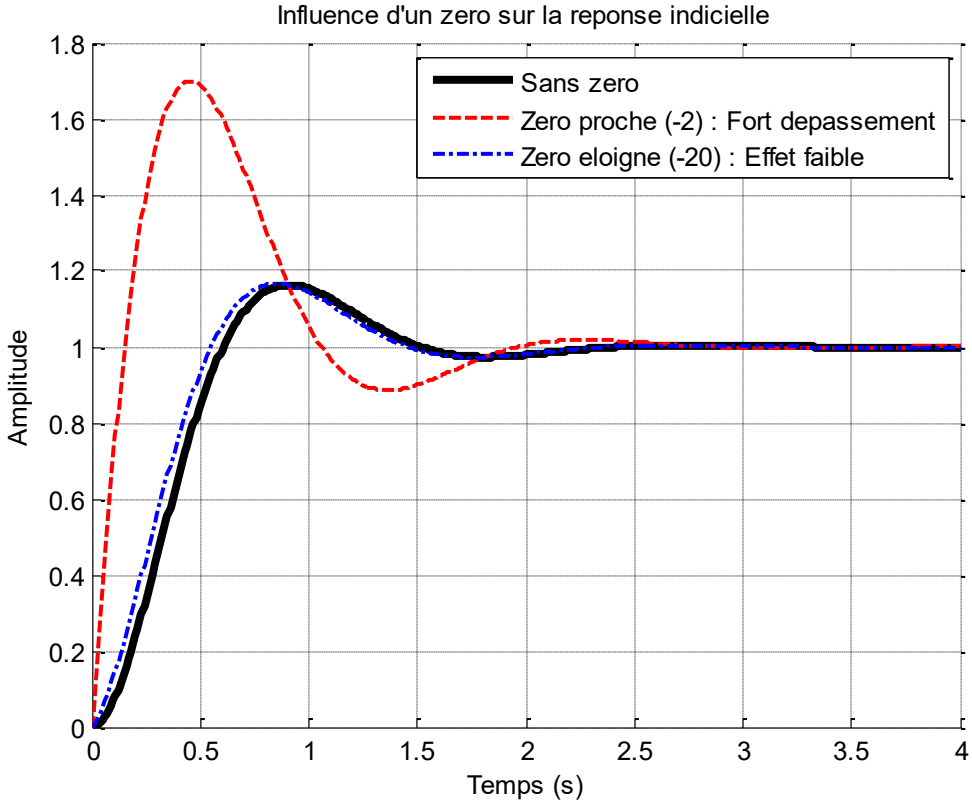
On ajoute un zéro proche (z=-2) à cette fonction de transfert pour donner :

$$H_p(p)=(0.5p+1).\frac{16}{p^2+4p+16}$$

Ensuite un zéro loin (z=-20) pour donner :

$$H_p(p)=(0.05p+1).\frac{16}{p^2+4p+16}$$

Tout en gardant le gain statique de notre système. La figure suivante montre l'effet du zéro ajouté dans les deux cas :



7.3.Interprétation générale

Dans l'analyse temporelle des systèmes linéaires :

- ✓ les pôles définissent le comportement du système,
- ✓ les zéros viennent corriger ou modifier ce comportement.

C'est pourquoi dans l'analyse pratique, on commencera souvent par les pôles pour aller ensuite aux zéros.

Remarque

La présence de pôles et de zéros aura encore plus d'effet dans l'analyse de la stabilité et dans la synthèse des correcteurs. Leur position dans le plan complexe permet de caractériser la forme de la réponse et la qualité des performances dans le domaine temporel.

8. Conclusion

Ce chapitre a permis d'introduire l'étude des réponses temporelles des systèmes linéaires. Après avoir présenté les notions générales de réponse, de régime transitoire et de régime permanent, on a étudié le comportement des systèmes du premier ordre et du second ordre soumis aux entrées canoniques les plus courantes. L'analyse a ensuite été complétée par la définition des principales caractéristiques temporelles, par une approche d'identification à partir de la réponse temporelle, ainsi que par l'introduction des systèmes d'ordre supérieur et de l'influence des pôles et des zéros sur la forme de la réponse.

L'ensemble de ces résultats constitue une base essentielle pour l'évaluation des performances dynamiques des systèmes asservis. La suite du cours sera consacrée à l'étude des réponses fréquentielles des systèmes linéaires, qui offrent une autre manière d'analyser le comportement des systèmes et de caractériser leur stabilité et leurs performances.

CHAPITRE 4

Réponses fréquentielle des systèmes linéaires

1. Introduction

L'étude du comportement dynamique des systèmes asservis peut être menée dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Après l'analyse des réponses temporelles, qui permet d'observer l'évolution de la sortie en fonction du temps, l'approche fréquentielle constitue un outil complémentaire pour caractériser le comportement des systèmes soumis à des signaux sinusoïdaux de différentes fréquences. Cette approche repose sur l'étude du gain et du déphasage entre l'entrée et la sortie d'un système. Ces deux grandeurs dépendent de la pulsation du signal appliqué et permettent de mieux comprendre la manière dont le système transmet ou atténue les différentes composantes fréquentielles d'un signal, ce qui est particulièrement utile pour analyser la dynamique des systèmes et préparer l'étude de leur stabilité en boucle fermée.

Ce chapitre est consacré à la réponse fréquentielle des systèmes linéaires continus. Il présente le principe de la réponse à une entrée sinusoïdale, puis les principales représentations graphiques utilisées en automatique : les diagrammes de Bode, le lieu de Black-Nichols et le diagramme de Nyquist. L'étude de ces représentations permet d'interpréter le gain et la phase en fonction de la fréquence et de caractériser le comportement fréquentiel des systèmes de différents ordres.

La maîtrise de ces outils est indispensable pour aborder l'analyse de la stabilité des systèmes asservis, notamment à l'aide des critères fréquentiels, ainsi que pour comprendre les compromis à rechercher lors de la conception d'une commande.

2. Réponse d'un système à une sinusoïde

Considérons un système linéaire d'ordre quelconque avec une entrée et une sortie. Si l'entrée est sinusoïdale $e(t) = E_0.\sin(\omega t)$, la propriété linéaire du système fait que la sortie sera également une sinusoïde, de même pulsation que l'entrée. On aura : $s(t) = S_0.\sin(\omega t + \varphi)$.

Dans une analyse harmonique d'un système, on va faire le lien entre la fonction de transfert et la réponse de ce système à une sinusoïde. Cette réponse sera caractérisée par deux paramètres :

$$Gain = \frac{S_0}{E_0} \qquad\qquad déphasage : \varphi$$

Ces deux paramètres dépendent de la pulsation ω de l'entrée. On peut montrer que :

$$\frac{S_0}{E_0} = \left|H\left(j\omega\right)\right| \qquad \varphi = \arg\left(H\left(j\omega\right)\right)$$

où *H(jω)* est l'expression de la fonction de transfert du système dans laquelle on remplace la variable de Laplace *p* par *jω*.

L'intérêt de connaitre les réponses fréquentielles vient du fait que, d'après Fourier, tout signal peut être décomposé en une somme de fonctions sinus ou cosinus. La réponse à un signal quelconque sera la somme des réponses aux sinusoïdes qui composent ce signal.

L'expression analytique du gain et du déphasage en fonction de ω ne fournissent pas assez d'informations. On préférera donc avoir une représentation graphique de ces deux paramètres en fonction de la pulsation. Il existe trois types de représentations graphiques :

- BODE se présente sous la forme de deux courbes :
  - $\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB}$ en fonction de ω (abscisses logarithmiques).
  - $\varphi = \arg\left(H\left(j\omega\right)\right)$ en fonction de ω (abscisses logarithmiques).
- BLACK appelé également NICHOLS représente $\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB}$ en fonction de φ. La courbe est graduée en fonction de ω.
- NYQUIST représente $H\left(j\omega\right)$ dans le plan complexe. La courbe est graduée en fonction de ω.

3. Représentation dans le plan de Bode

Cette représentation s'appelle également Lieu de Bode. Le gain est représenté en décibels (dB) :

$$\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB} = 20\log\left|\left(H\left(j\omega\right)\right)\right|$$

La construction pratique consiste en la recherche des asymptotes, leur point de concours et le calcul de quelques points particuliers. Le déphasage est souvent représenté en degrés. A part quelques rares exceptions, ce déphasage est négatif (la sortie est en retard par rapport à l'entrée).

3.1.Système du premier ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donné par :

$$H(p) = \frac{K}{1+Tp} \qquad \Rightarrow \qquad H(j\omega) = \frac{K}{1+jT\omega}$$

$$|H(j\omega)|_{dB} = 20\log\left|\left(H(j\omega)\right)\right| = 20\log\frac{K}{\sqrt{1+(T\omega)^2}}$$

$$= 20\log(K) - 10\log\left[1+(T\omega)^2\right]$$

$$\varphi = \arg\left(H(j\omega)\right) = \arg(K) - \arg(1+jT\omega)$$

$$= -\arctan(T\omega)$$

Etude des asymptotes :

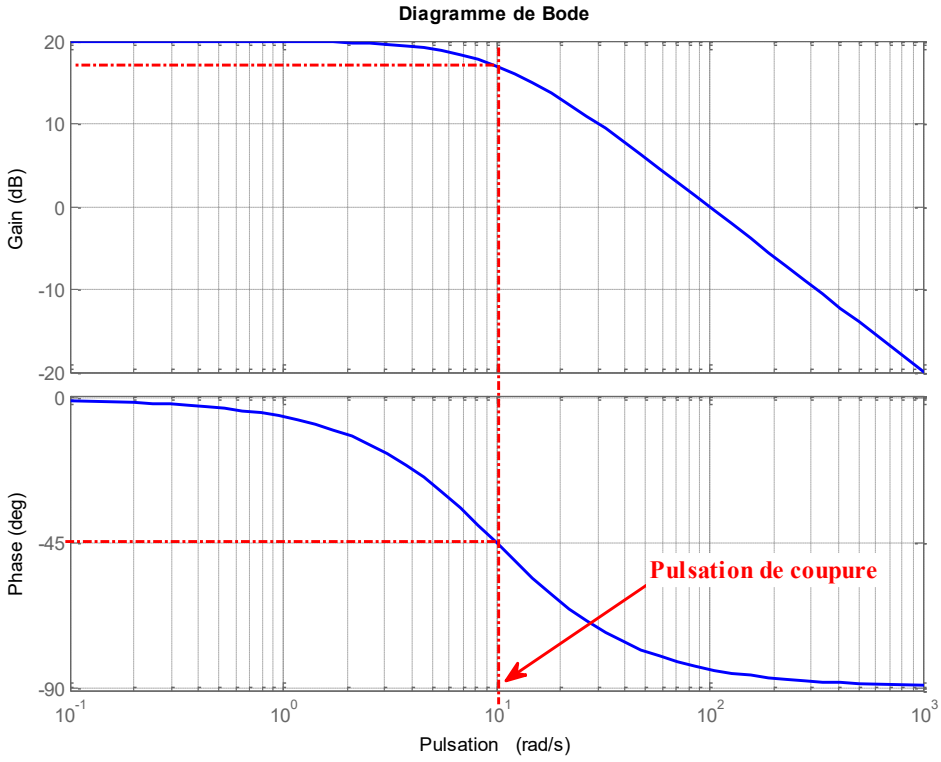
- Pour $\omega \to 0$, $|H(j\omega)|_{dB} \to 20\log(K)$, $\arg\left(H(j\omega)\right) \to 0$
- Pour $\omega \to \infty$, $|H(j\omega)|_{dB} \to 20\log(K) - 20\log(T\omega)$, Comme l'axe des abscisses est logarithmiques, l'asymptote est une droite de pente -20dB/décade de ω.

  $\varphi = \arg\left(H(j\omega)\right) \to -90°$
- Pour $\omega = \frac{1}{T} = \omega_c$, $|H(j\omega)|_{dB} = 20\log(K) - 3$, $\varphi = -45°$ cette pulsation ω_c est appelée **pulsation de coupure**.

Exemple :

$K = 10,$ $T = 0.1,$

$\omega_c = 10\,rd/s$



3.2.Système du deuxième ordre

La fonction de transfert d'un système du premier ordre est donné par :

$$H(p)=\frac{K}{1+\frac{2\xi}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n^2}p^2} \qquad \Rightarrow \qquad H(j\omega)=\frac{K}{1+j\frac{2\xi\omega}{\omega_n}-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$

$$\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB}=20\log\left|\left(H\left(j\omega\right)\right)\right|=20\log\frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(\frac{2\xi\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$=20\log\left(K\right)-10\log\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

$$\varphi=\arg\left(H\left(j\omega\right)\right)=\arg(K)-\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2+j2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)$$

$$=-\arctan\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)$$

Etude des asymptotes :

- Pour $\omega\to 0$, $\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB}\to 20\log\left(K\right)$, $\arg\left(H\left(j\omega\right)\right)\to 0$
- Pour $\omega\to\infty$, $\omega\gg\omega_n\Rightarrow\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\gg 1\Rightarrow\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^4\gg\left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2$

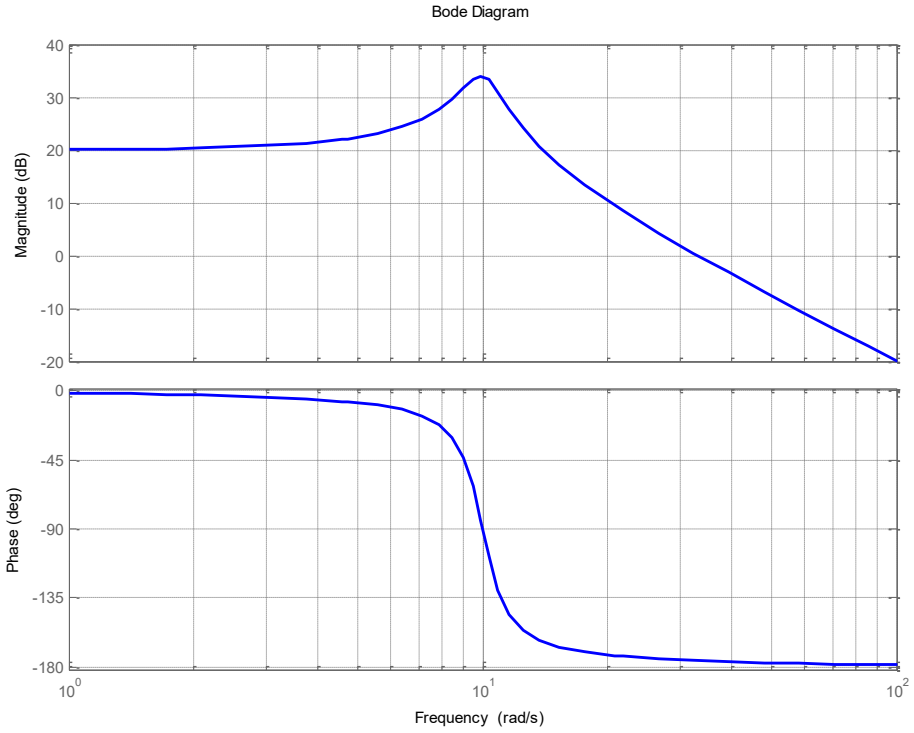
  $\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB}\to 20\log(K)-20\log\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)$. Comme l'axe des abscisses est logarithmiques, l'asymptote est une droite de pente -40dB/décade de ω.

  $$\varphi=\arg\left(H\left(j\omega\right)\right)=-\arctan\left(\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right)=-\arctan\left(-\frac{2\xi}{\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}\right)\to -180°$$

- Pour $\omega=\omega_n$, $\left|H\left(j\omega\right)\right|_{dB}=20\log\left(K\right)-20\log(2\xi)$, $\varphi=-90°$ cette pulsation ω_n est la **pulsation de coupure.**

Exemple 1 :

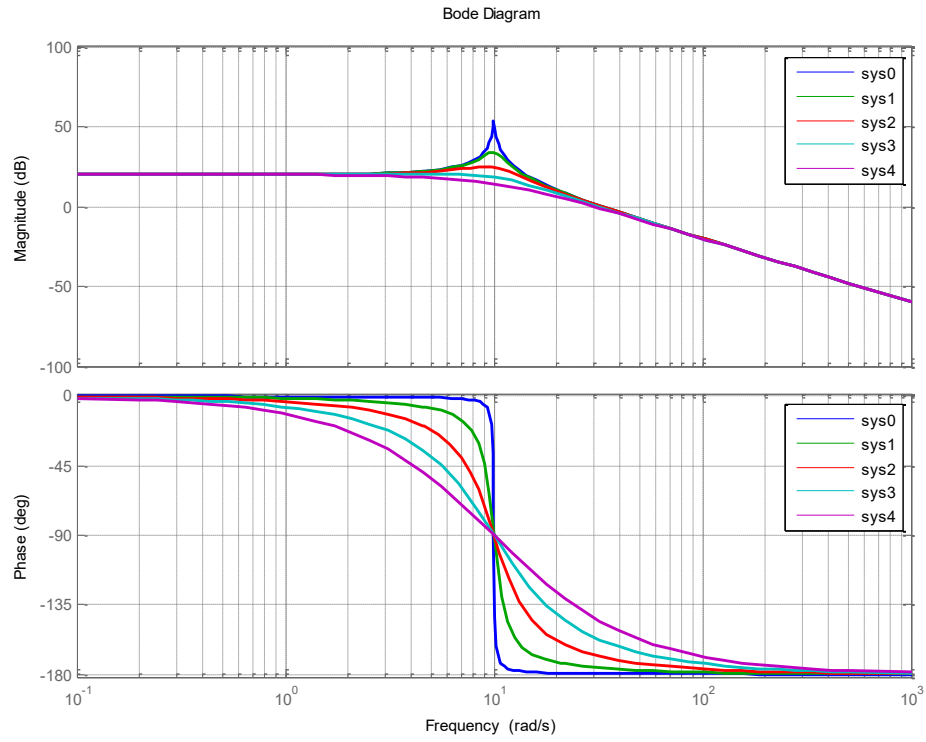
$K = 10, \qquad \xi = 0.1, \qquad \omega_n = 10\,rd/s \;\; H(p) = \dfrac{10}{1 + 0.02p + 0.01p^2}$



Exemple 2 :

$K = 10, \qquad \omega_n = 10\,rd/s$

$sys_0 \to \xi = 0.01, sys_1 \to \xi = 0.1, sys_2 \to \xi = 0.3, sys_3 \to \xi = 0.6, sys_4 \to \xi = 1,$



3.3.Méthodologie générale de tracé asymptotique dans le plan de Bode

Pour tracer rapidement les diagrammes de Bode d'un système complexe, on s'appuie sur le tracé de ses asymptotes, que l'on corrige ensuite pour obtenir la courbe réelle.

On peut suivre cette méthode systématique étape par étape :

Étape 1 : Mise sous forme canonique

Avant de tracer le diagramme, il est impératif d'écrire la fonction de transfert sous forme d'un produit de facteurs canoniques (gains, intégrateurs, 1er ordre, 2nd ordre).

$$H(p) = K.\frac{\left(1+T_1 p\right)...}{p^{\alpha}\left(1+T_1 p\right)\left(1+\frac{2\xi}{\omega_n}p+\frac{1}{\omega_n}p^2\right)...}$$

Étape 2 : Identification des paramètres clés

- Le gain statique K : Il détermine la position de départ de la courbe de gain.
- La classe du système (α) : C'est le nombre d'intégrateurs (pôles à l'origine). Elle définit la pente initiale de la courbe de gain (-20 x α dB/décade).
- Les pulsations de coupure (ω_c) : Ce sont les pulsations où la courbe va changer de direction.
  - Pour un 1er ordre : $\omega_c=1/T$
  - Pour un 2nd ordre : ω_n

Étape 3 : Placement des points sur l'axe des abscisses

On place les pulsations de coupure sur l'axe logarithmique des abscisses, de la plus petite à la plus grande. C'est à ces pulsations précises que la pente des asymptotes change.

Étape 4 : Tracé du diagramme de Gain asymptotique (Le gabarit)

On commence par les basses fréquences ($\omega \rightarrow 0$) et on avance vers la droite :

- Le départ :
  - Si $\alpha=0$ (pas d'intégrateur), l'asymptote de départ est une droite horizontale (pente nulle) située à $20log(K)\ dB$.
  - Si $\alpha=1$ (un intégrateur), l'asymptote de départ a une pente de -20 dB/décade et passe par le point de coordonnées ($\omega=1, 20log(K)$).
- Les changements de pente : À chaque fois que l'on croise une pulsation de coupure en balayant l'axe vers les hautes fréquences, on cumule les pentes :
  - Croisement d'un pôle du 1er ordre : la pente s'incline de -20 dB/décade.
  - Croisement d'un zéro du 1er ordre : la pente se redresse de +20 dB/décade.
  - Croisement d'un pôle du 2nd ordre : la pente s'incline de -40 dB/décade.

Étape 5 : Tracé de la courbe réelle (La correction)

L'asymptote n'est qu'une approximation. Pour tracer la courbe réelle, on arrondit les angles au niveau des pulsations de coupure :

- Pour un pôle du 1er ordre : L'erreur maximale se situe exactement à la pulsation de coupure ω_c. La courbe réelle passe 3 dB en dessous de l'intersection des asymptotes.
- Pour un pôle du 2nd ordre : Tout dépend du coefficient d'amortissement ζ :
  - Si $\xi \geq 0.707$: Pas de résonance, la courbe réelle s'arrondit doucement sous l'asymptote.
  - Si $\xi < 0.707$: Apparition d'un phénomène de résonance. La courbe réelle forme un pic qui dépasse l'asymptote horizontale avant de redescendre. Plus ξ est petit, plus le pic est pointu et haut.

Étape 6 : Tracé du diagramme de Phase

La phase est la somme algébrique des phases de chaque composant.

- Le départ : Dépend de la classe du système. (Ex : 0° pour $\alpha=0$, -90° pour un intégrateur).
- Aux coupures :
  - Un pôle du 1er ordre fait chuter la phase de 0° vers -90°. Exactement à la pulsation de coupure ω_c, la phase vaut -45°.
  - Un zéro du 1er ordre fait lever la phase de 0° vers 90°. Exactement à la pulsation de coupure ω_c, la phase vaut +45°.
  - Un pôle du 2nd ordre fait chuter la phase de 0° vers -180°. Au niveau de ω_n, la phase vaut exactement -90°. (La transition est d'autant plus brutale que ξ est petit).

Exemple :

$$H(p) = \frac{10(1+0.1p)}{p(1+p)(1+0.004p+0.0001p^2)}$$

La fonction de transfert du système est déjà en forme canonique et qui possède : un intégrateur, une forme de 1er ordre et une forme de 2ème ordre au dénominateur, avec une forme de 1er ordre au numérateur.

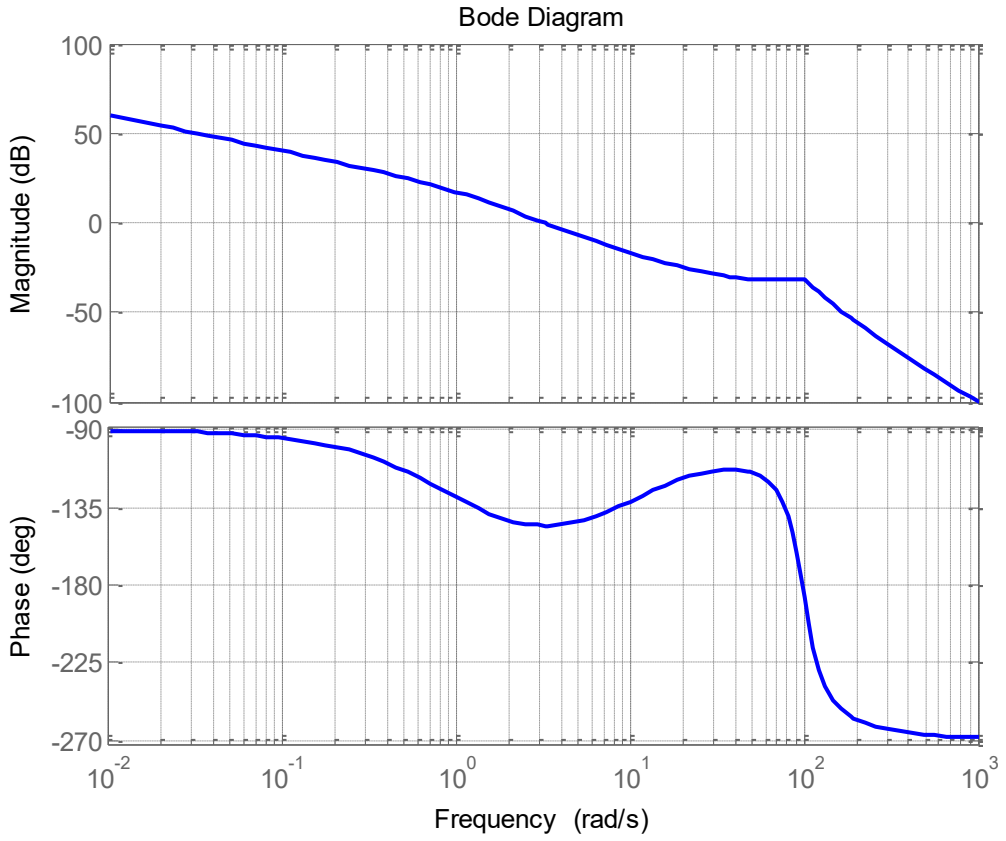
Les paramètre clés sont comme suit :

Le gain statique K=10,

- Pour le terme $(1+p)$, la pulsation de coupure est : $\omega_{c1}=1$ *rd/s.* Ce terme fait incliner la courbe de gain de -20 dB/déc et fait chuter la courbe de phase de 90°.
- Pour le terme $(1+0.1p)$, la pulsation de coupure est : $\omega_{c2}=10$ *rd/s.* Ce terme redresse la courbe de gain de +20 dB/déc et fait lever la courbe de phase de 90°.

- Pour le terme ($1+0.004p+0.0001p^2$), la pulsation de coupure est : $\omega_{c3}=100$ *rd/s et* $\zeta=0.2$. Ce terme fait incliner la courbe de gain de -40 dB/déc avec une résonnance à 10 rd/s, et fait chuter la courbe de phase de 180°.

Le digramme résultant est le suivant :



4. Représentation dans le plan de Black-Nichols

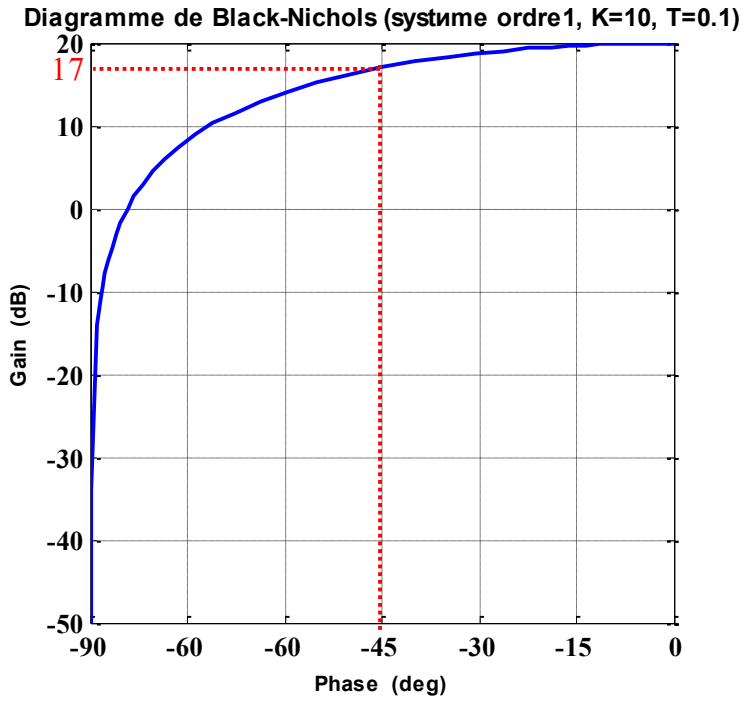
Le diagramme de Black-Nichols (*Black-Nichols chart*) est le lieu du gain (en dB) en fonction de la phase, paramétré en fonction de la pulsation.

4.1.Système d'ordre 1

En se référant au diagramme de Bode :

Pour : $\omega \to 0$:	$H_{dB} \to 20.\log(K)$	et	$\varphi \to 0$
Pour : $\omega=\omega_c=1/T$:	$H_{dB} \to 20.\log(K)-3dB$	et	$\varphi \to -\pi/4$
Pour : $\omega \to +\infty$:	$H_{dB} \to -\infty$	et	$\varphi \to -\pi/2$

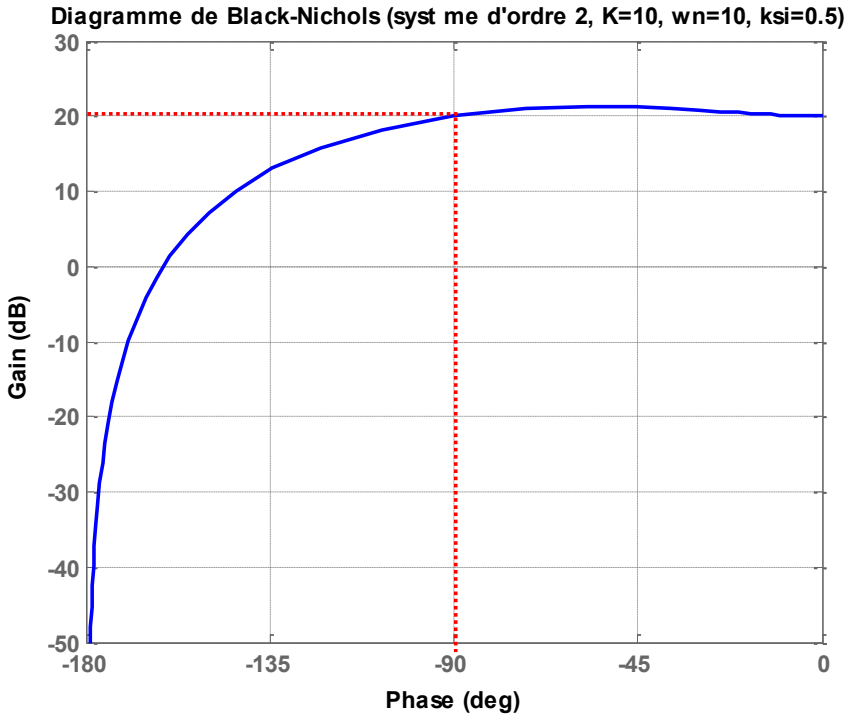
Exemple :



4.2.Système d'ordre 2

Pour $\omega \to 0$:	$H_{dB} \to 20.\log(K)$	et	$\varphi = 0$
Pour $\omega = \omega_c$:	$H_{dB} \to 20.\log(K) - 20.\log(2\zeta)$	et	$\varphi = -\pi/2$
Pour $\omega \to +\infty$:	$H_{dB} \to -\infty$	et	$\varphi \to -\pi$

Exemple :



5. Représentation dans le plan de Nyquist

Le diagramme de Nyquist est le lieu du *gain complexe* $H(j\omega)$ lorsque ω varie, c'est à dire, on trace la partie imaginaire en fonction de la partie réelle de la fonction de transfert complexe $H(j\omega)$. En fait, le lieu de Nyquist est principalement utilisé pour analyse la stabilité des systèmes asservis.

5.1.Système d'ordre 1

$$H(j\omega)=\frac{K}{1+jT\omega}=\frac{K(1-T\omega)}{1+(T\omega)^2}=\frac{K}{1+(T\omega)^2}-j\frac{KT\omega}{1+(T\omega)^2}$$

On nomme la partie réelle X et la partie imaginaire Y.

$$X=\frac{K}{1+(T\omega)^2}$$

$$Y=-\frac{KT\omega}{1+(T\omega)^2}=-T\omega X$$

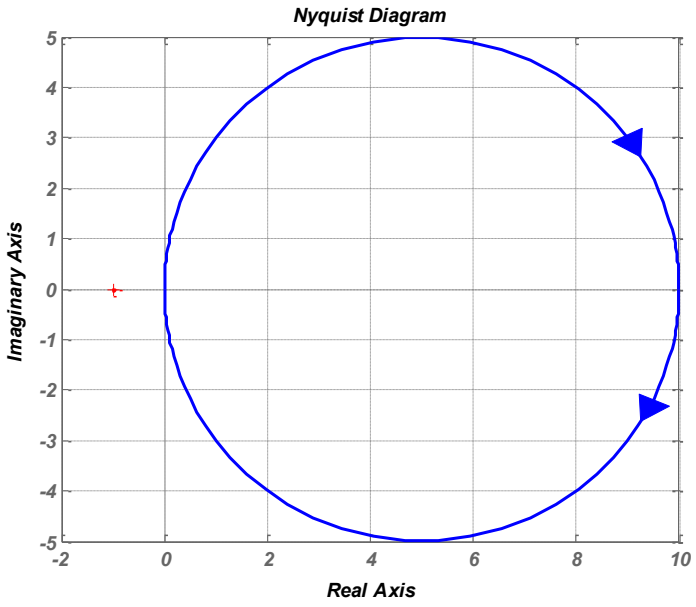
$$Y^2=(T\omega)^2X^2=\left(\frac{K}{X}-1\right)X^2=KX-X^2=-\left(X^2-KX+\left(\frac{K}{2}\right)^2-\left(\frac{K}{2}\right)^2\right)$$

$$Y^2=-\left(\left(X-\frac{K}{2}\right)^2-\left(\frac{K}{2}\right)^2\right)$$

$Y^2+\left(X-\frac{K}{2}\right)^2=\left(\frac{K}{2}\right)^2$ c'est l'équation d'un cercle de centre (K/2,0) et de rayon K/2.

Exemple :

Diagramme de Nyquist d'un système de premier ordre avec : K=10.



5.2.Système d'ordre 2

La fonction de transfert d'un système de deuxième ordre est donnée par :

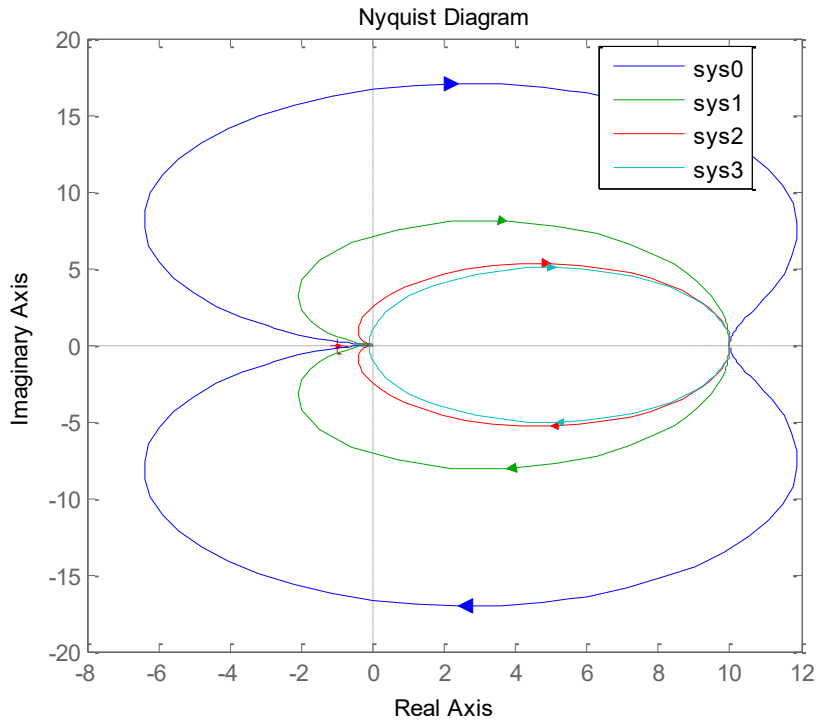
$$H(j\omega)=\frac{K\omega_n^2\left(\omega_n^2-\omega^2\right)}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}-j\frac{2K\omega_n^2\omega}{\left(\omega_n^2-\omega^2\right)^2+\left(2\zeta\omega_n\omega\right)^2}$$

On remarque qu'il est quasiment impossible d'établir analytiquement une équation reliant la parie réelle à la partie imaginaire.

Exemple :

K=10, ω_n=10,

Sys0 avec ζ=*0.2* *Sys1* avec ζ=*0.7* *Sys2* avec ζ=*2* *Sys3* avec ζ=*5*



6. Marges de stabilité : Marges de phase et de gain

6.1.Justification physique

L'analyse de la réponse fréquentielle en boucle ouverte (FTBO) ne sert pas seulement à décrire le comportement d'un système face à des signaux sinusoïdaux. Son intérêt majeur réside dans sa capacité à prévoir la stabilité du système une fois que la boucle sera fermée.

En pratique, un système réel subit des variations de paramètres (vieillissement des composants, échauffement) ou des incertitudes de modélisation. Il ne suffit donc pas qu'un système soit simplement

stable ; il faut déterminer de combien il peut dériver avant de devenir instable. C'est ce que l'on appelle mesurer les marges de stabilité.

On définit deux pulsations critiques de référence sur le diagramme de la FTBO :

- ω_{c0} (Pulsation de coupure à 0 dB) : La pulsation pour laquelle le gain linéaire vaut 1, soit un gain en décibels nul :

$$|H(j\omega_{c0})|_{dB}=0\ dB$$

- ω_{π} (Pulsation de quadrature / phase de -180°) : La pulsation pour laquelle le déphasage du système atteint la valeur critique de -180∘ :

$$arg(H(j\omega\pi))=-180\circ$$

6.2.La Marge de Gain (*MG*)

La marge de gain mesure le facteur par lequel le gain statique du système peut être multiplié avant que le système en boucle fermée ne devienne instable. Elle s'évalue à la pulsation fixe où la phase vaut exactement -180° (ω_{π}).

Si le gain linéaire à la pulsation ω_{π} est $|H(j\omega_{\pi})|$, la marge de gain en décibels est définie par la distance verticale séparant la courbe de gain de l'axe 0 dB :

$$MG=0-|H(j\omega\pi)|_{dB}=-20log|H(j\omega\pi)|$$

Si $MG>0$ dB, le système possède une réserve de gain positive. On peut augmenter le gain global du système de cette valeur avant d'atteindre la limite d'instabilité.

Si $MG\leq 0$ dB, le système sera instable ou en limite d'instabilité en boucle fermée.

6.3.La Marge de Phase (*Mϕ*)

La marge de phase représente le retard de phase supplémentaire qui peut être introduit à la pulsation de coupure ω_{c0} avant que le système en boucle fermée ne devienne instable. Elle s'évalue à la pulsation où le gain vaut exactement 0 dB.

Elle correspond à la distance angulaire verticale séparant la courbe de phase de la ligne critique des -180∘ à la pulsation ω_{c0} :

$$M\phi=arg(H(j\omega_{c0}))-(-180\circ)=180\circ+arg(H(j\omega_{c0}))$$

Si $M\phi>0°$, la phase n'a pas encore touché les -180∘ lorsque le gain passe sous l'unité. Le système est stable.

Pour assurer un comportement transitoire bien amorti (sans trop d'oscillations), on cherche généralement en robotique et en électrotechnique une marge de phase confortable comprise entre 45∘ et 60∘.

6.4.Méthodologie de lecture graphique sur le diagramme de Bode

Pour mesurer graphiquement ces valeurs sur un document papier ou un tracé de laboratoire :

Pour la marge de phase ($M\phi$) :

Repérer l'intersection de la courbe de gain avec l'axe horizontal des 0 dB. Ce point définit ω_{c0}.

Tracer une ligne verticale descendante depuis cette pulsation ω_{c0} jusqu'à couper la courbe de phase.

Mesurer l'écart vertical entre ce point de phase et la ligne horizontale de repère -180∘.

Pour la marge de gain (MG) :

Repérer l'intersection de la courbe de phase avec la ligne horizontale des -180∘. Ce point définit ω_{π}.

Tracer une ligne verticale montante depuis cette pulsation ωπ jusqu'à couper la courbe de gain.

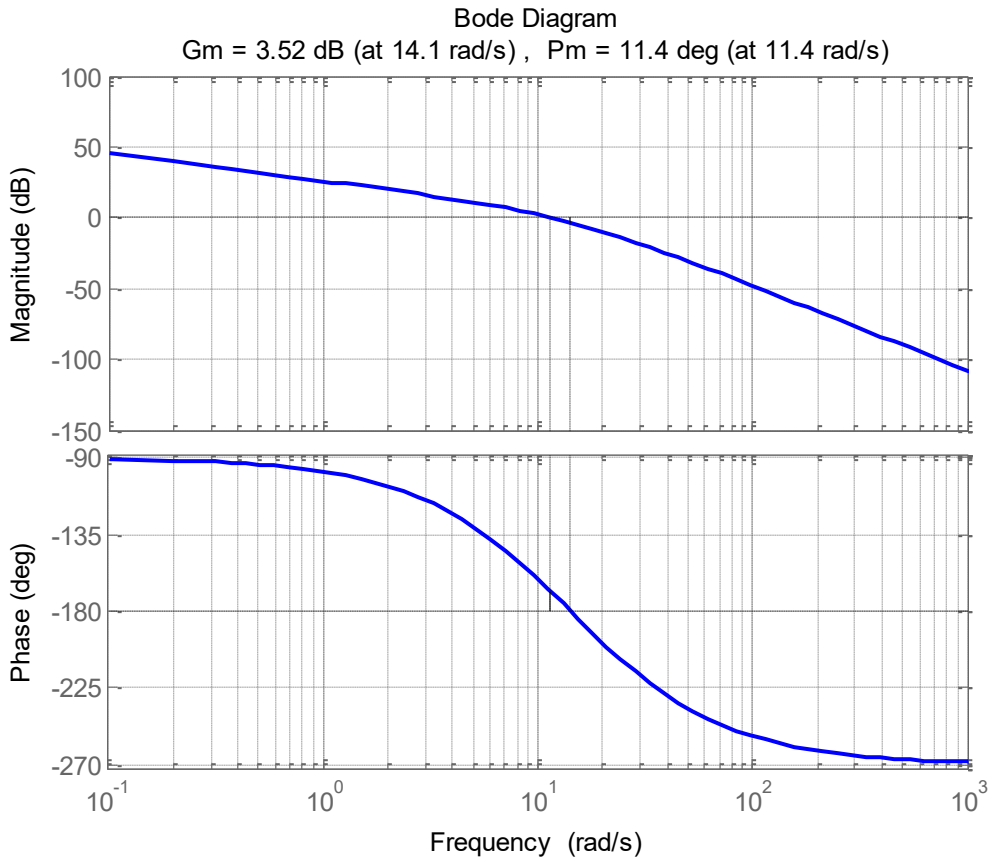
Mesurer l'écart vertical entre l'axe des 0 dB et la courbe de gain.

Exemple :

On considère le système dont la FTBO est définit par :

$$FTBO(p)=\frac{20}{p(1+0.1p)(1+0.05p)}$$

Son diagramme de Bode est donné par la figure suivante :



- La pulsation de coupure est ω_{c0} = 11.43 rad/s soit une marge de phase : $M\phi$ =11.43°.
- La pulsation ω_{π} = 14.14 rad/s soit une marge de gain : MG=3.52 dB

Résultat : Le système en boucle fermé sera stable mais très oscillant car sa marge de phase est faible.

7. Conclusion

Ce chapitre a mis en évidence l'importance fondamentale de l'analyse fréquentielle dans l'étude des systèmes linéaires continus. En soumettant un système à des signaux sinusoïdaux, nous avons pu caractériser sa dynamique à travers différentes représentations graphiques complémentaires :

- ✓ Le diagramme de Bode, outil privilégié pour son tracé asymptotique intuitif, qui sépare clairement l'atténuation du gain et le déphasage en fonction de la pulsation.
- ✓ Le lieu de Nyquist et le plan de Black-Nichols, qui combinent gain et phase sur un même graphique, offrant une visualisation globale du comportement harmonique.

Au-delà de la simple description du régime permanent sinusoïdal, l'analyse de la réponse en fréquence de la boucle ouverte (FTBO) nous a fourni des indicateurs prédictifs cruciaux concernant le comportement du système une fois bouclé. En particulier, l'introduction des marges de phase et de gain nous permet désormais d'évaluer la robustesse d'un asservissement face aux incertitudes de modélisation et aux variations paramétriques.

La maîtrise de ces outils graphiques et de ces indicateurs constitue le socle indispensable pour aborder la suite du cours. En effet, dans le chapitre suivant (Chapitre 5), nous nous appuierons directement sur ces lieux de transfert (via le critère graphique du Revers) ainsi que sur des approches algébriques (critère de Routh-Hurwitz) pour statuer de manière rigoureuse sur la stabilité absolue des systèmes asservis, avant de finaliser notre étude par l'analyse de leur précision.

CHAPITRE 5

Stabilité et précision des systèmes asservis

1. Introduction

Dans la conception et l'analyse d'un système asservi, deux exigences fondamentales et souvent contradictoires s'imposent :

- ✓ La stabilité : C'est une condition impérative et absolue. Un système instable est physiquement inutilisable et potentiellement dangereux.
- ✓ La précision : Une fois le système rendu stable, on exige de lui qu'il suive la consigne imposée avec le minimum d'erreur possible, que ce soit en régime transitoire (précision dynamique) ou en régime permanent (précision statique).

Ce chapitre est consacré aux outils mathématiques et graphiques permettant d'étudier ces deux performances majeures.

2. Notion de stabilité d'un système linéaire

2.1.Définition physique de la stabilité

On dit qu'un système linéaire est stable si, après avoir été soumis à une variation brusque (un échelon ou une impulsion) ou à une perturbation :

- ✓ Le mouvement amorcé par sa sortie reste borné en amplitude (la sortie garde une valeur finie).
- ✓ Ce mouvement s'amortit plus ou moins vite et la sortie tend vers un nouvel état d'équilibre.

Si l'amplitude des oscillations croît indéfiniment ou si la sortie diverge de façon monotone, le système est dit instable. En pratique, un système instable finit par atteindre ses limites physiques (saturation, destruction).

Remarque : Si le système oscille indéfiniment avec une amplitude constante (pompage), il est considéré comme marginalement stable (ou à la limite de la stabilité).

2.2.Aspect mathématique de la stabilité

Considérons un système asservi dont la chaîne directe a pour fonction de transfert $A(p)$ et la chaîne de retour $B(p)$. La Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF) s'écrit :

$$H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)}$$

La stabilité du système est exclusivement dictée par le dénominateur de cette FTBF. L'équation qui annule ce dénominateur est appelée équation caractéristique du système bouclé :

$$1 + A(p)B(p) = 0 \text{ soit : } 1 + FTBO(p) = 0$$

Les solutions de cette équation sont les pôles de la fonction de transfert en boucle fermée. La nature temporelle de la réponse (convergente ou divergente) dépend du signe de la partie réelle de ces pôles.

2.3.Condition nécessaire et suffisante de stabilité

Un système linéaire asservi est stable si et seulement si tous les pôles de sa FTBF (les racines de l'équation caractéristique) sont situés strictement dans le demi-plan gauche du plan complexe. Autrement dit, toutes les parties réelles des pôles doivent être strictement négatives.

Si une seule racine possède une partie réelle positive, le système est instable.

2.4.Critère algébrique de Routh-Hurwitz

Calculer analytiquement les racines d'un polynôme de degré supérieur à 2 est fastidieux. Le critère de Routh-Hurwitz permet de déterminer si un système est stable sans avoir à calculer explicitement les racines, en étudiant simplement les coefficients de l'équation caractéristique.

Soit l'équation caractéristique mise sous la forme d'un polynôme ordonné en puissances décroissantes de p :

$$P(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{n-1} p + a_n$$

(Avec : $a_0 > 0$)

2.4.1. Condition nécessaire (Critère d'Hurwitz)

Pour que le système soit stable, il faut (mais il ne suffit pas) que tous les coefficients a_i existent (aucun n'est nul) et soient de même signe (strictement positifs si $a_0 > 0$). Si un coefficient manque ou s'il y a un changement de signe dans l'équation, le système est instable.

2.4.2. Condition nécessaire et suffisante (Tableau de Routh)

Si la condition d'Hurwitz est vérifiée, on construit le tableau de Routh. Il se compose de lignes où l'on place les coefficients.

Puissance	**Colonne 1**	**Colonne 2**	**Colonne 3**	**…**
p^n	a_0	a_2	a_4	…
p^{n-1}	a_1	a_3	a_5	…
p^{n-2}	$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	…
p^{n-3}	$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	…	…
.	.	.	.	…
.	.	.	.	
.	.	.	.	
p^0	a_n			…

2.4.3. Énoncé du critère de Routh

Le système est stable si et seulement si tous les termes de la première colonne du tableau de Routh sont strictement de même signe.

Le nombre de changements de signe dans cette première colonne indique exactement le nombre de pôles instables (à partie réelle positive).

Exemple :

Soit un système dont l'équation caractéristique est :

$$P(p) = p^3 + 3p^2 + 3p + 1 + K \text{ (}K\text{ gain variable)}$$

Où K est le gain de l'asservissement (réglable). Déterminons la condition sur K pour que le système soit stable.

Condition d'Hurwitz : Tous les coefficients doivent être strictement positifs.

$$1 > 0,\ 3 > 0,\ 3 > 0 \text{ et } 1+K > 0 \rightarrow K > -1.$$

Tableau de Routh :

Puissance	**Col 1**	**Col 2**
p^3	1	3
p^2	3	$(1+K)$
p^1	$\frac{3\times 3-1\times(1+K)}{3}=\frac{8-K}{3}$	0
p^0	$1+K$	0

Pour que le système soit stable, tous les termes de la première colonne doivent être strictement positifs :

1. $\frac{8-K}{3} > 0 \Rightarrow 8-K > 0 \Rightarrow K < 8$
2. $1+K > 0 \Rightarrow K > -1$

Conclusion : Le système est stable si et seulement si $-1 < K < 8$.

Si K=8, la ligne p^1 s'annule, le système possède des pôles sur l'axe imaginaire pur, il est en limite de stabilité (pompage).

2.5.Critères graphiques de stabilité (Critère du Revers)

Le critère de Routh nécessite de connaître l'équation mathématique du système. Le critère du revers (qui est une application simplifiée du critère général de Nyquist) permet d'étudier la stabilité en boucle fermée à partir de la réponse fréquentielle en boucle ouverte (*FTBO*), ce qui est très pratique expérimentalement.

Hypothèse : Ce critère simplifié s'applique uniquement si le système en boucle ouverte (*FTBO*) est lui-même stable ou marginalement stable.

2.5.1. Dans le plan de Nyquist

Dans le plan complexe, le point d'instabilité correspond à $FTBO(j\omega) = -1$ (car le dénominateur de la *FTBF* devient 1 + (-1) = 0). Le point de coordonnées (*-1, j0*) est donc appelé Point Critique.

Critère du revers (Nyquist) :

Un système asservi est stable en boucle fermée si et seulement si, en parcourant le lieu de Nyquist de la *FTBO* dans le sens des pulsations ω croissantes, on laisse le point critique (*-1, j0*) à sa gauche.

2.5.2. Dans le plan de Bode

Le point critique (*-1, j0*) dans le plan de Nyquist se traduit dans le plan de Bode par un gain unitaire ($|FTBO|=1$, *soit 0 dB*) et un déphasage de -180° ($-\pi$ *rad*).

Critère du revers (Bode) :

Un système est stable si, à la pulsation où la phase croise -180° (notée ω_π), le gain en décibels est strictement négatif. De manière équivalente, il est stable si à la pulsation où le gain croise 0 dB (notée ω_{c0}), la phase est supérieure à -180°.

Ces définitions justifient l'utilisation des marges de stabilité (Marge de Phase et Marge de Gain) étudiées au Chapitre 4, qui doivent impérativement être positives pour garantir un fonctionnement sûr.

3. Précision des systèmes

Nous supposerons dans cette section que le système asservi a préalablement été rendu stable.

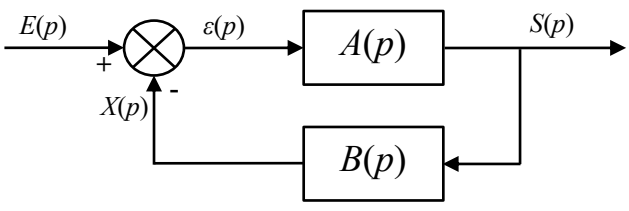
La précision qualifie l'aptitude d'un système à faire correspondre sa sortie $s(t)$ à la consigne d'entrée $e(t)$. Elle est mesurée par le signal d'erreur de consigne $\varepsilon(t) = e(t) - s(t)$ (dans le cas d'un retour unitaire).

On distingue :

- ✓ La précision dynamique : liée au comportement du système pendant le régime transitoire (vitesse de rattrapage de la consigne).
- ✓ La précision statique : liée à l'erreur qui subsiste en régime permanent, une fois tous les effets transitoires éteints. C'est l'erreur statique, notée ε_s.

3.1.Calcul de l'erreur en régime permanent

D'après le schéma-bloc d'un système asservi suivant :



L'erreur s'écrit en fonction de l'entrée : $\varepsilon(p) = E(p) - S(p)\ .\ B(p)$ et comme $S(p) = \varepsilon(p)\ .\ A(p)$, on obtient la fonction de transfert en erreur :

$$\varepsilon(p) = \frac{E(p)}{1 + A(p).B(p)} = \frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

En appliquant le théorème de la valeur finale, l'erreur en régime permanent se calcule alors par :

$$\varepsilon_s = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{E(p)}{1 + FTBO(p)}$$

L'erreur statique dépond donc de deux éléments : le type de signal d'entrée $E(p)$ et la classe du système (définie par la FTBO).

3.2.Classe d'un système et signaux canoniques

Mettons la FTBO sous forme canonique :

$$FTBO(p) = \frac{K}{p^{\alpha}}.\frac{1 + a_1 p + a_2 p^2 + ...}{1 + b_1 p + b_2 p^2 + ...}$$

K : gain statique en BO.

α : classe du système, c'est le nombre d'intégrateurs purs ($1/p$) présent dans la BO.

On étudie la précision face à trois signaux canoniques :

- ✓ Echelon (position) d'amplitude E_0 : $E(p) = \frac{E_0}{p}$
- ✓ Rampe (vitesse) de pente E_0 : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$
- ✓ Parabole (accélération) d'accélération E_0 : $E(p) = \frac{E_0}{p^3}$

3.3.Coefficient d'erreur et précision

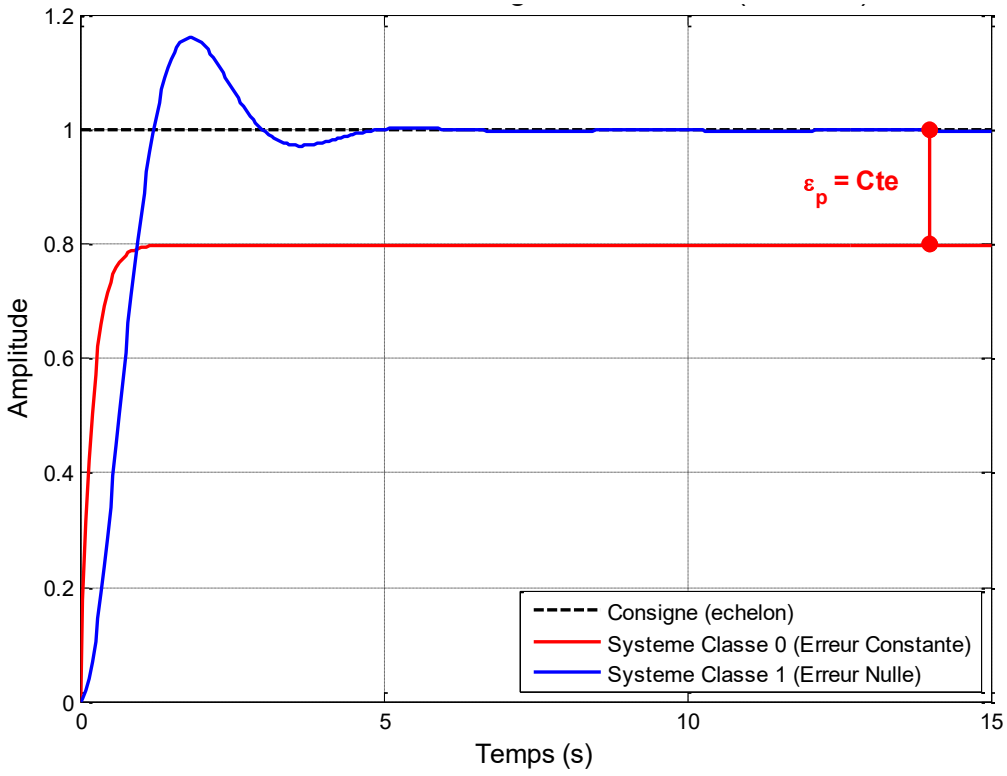
L'aptitude du système à annuler l'erreur est qualifiée par les constantes d'erreur statique :

a. Erreur de position (entrée échelon)

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p\frac{E_0}{p}}{1 + FTBO(p)}\right) = \frac{E_0}{1 + \lim_{p\to 0} FTBO(p)} = \frac{E_0}{1 + K_p}$$

Où $K_p = \lim_{p\to 0} FTBO(p)$ est la constante d'erreur de position.

- ✓ Si le système est de classe 0 ($\alpha=0$) : $K_p=K$. l'erreur est constante : $\varepsilon_p = \frac{E_0}{1+K}$
- ✓ Si le système est de classe $\alpha\geq 1$: $K_p=\infty$. L'erreur est nulle.

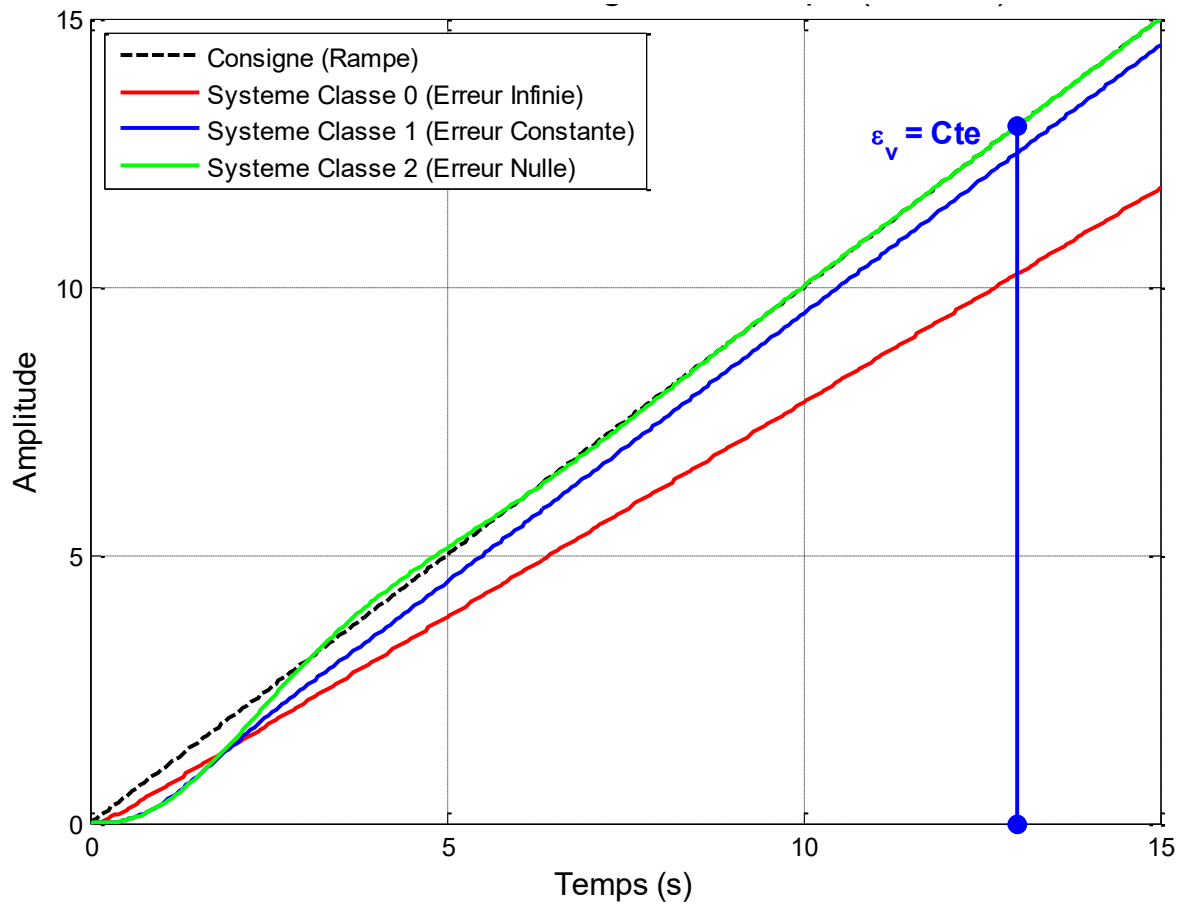


b. Erreur de traînage/vitesse (entrée rampe)

$$\varepsilon_v = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p\dfrac{E_0}{p^2}}{1+FTBO(p)}\right) = \frac{E_0}{\lim\limits_{p\to 0} p.FTBO(p)} = \frac{E_0}{K_v}$$

Où $K_v = \lim\limits_{p\to 0} p.FTBO(p)$ est la constante d'erreur de vitesse.

- ✓ Si le système est de classe 0 ($\alpha=0$) : $K_v=0$. L'erreur de traînage tend vers l'infini. Le système est incapable de suivre une rampe.
- ✓ Si le système est de classe 1 ($\alpha=1$) : $K_v=K$. L'erreur de traînage est constante : $\varepsilon_v = \dfrac{E_0}{K}$.
- ✓ Si le système est de classe $\alpha\geq 2$: $K_v=\infty$. L'erreur est nulle.

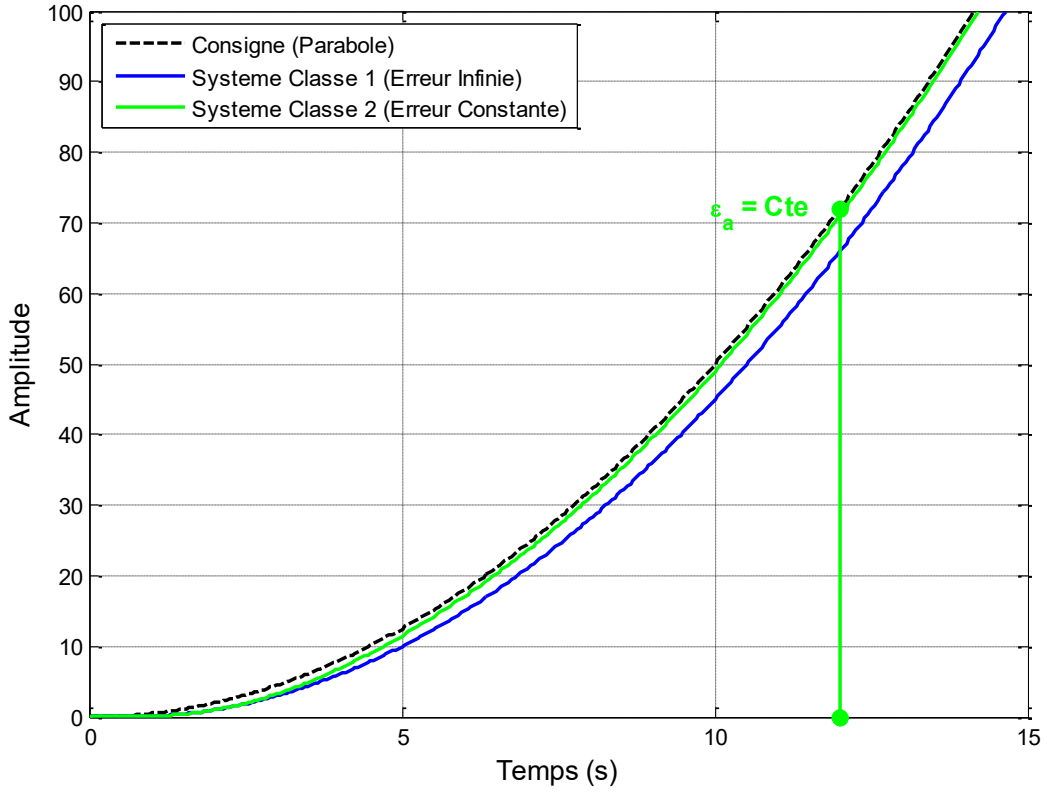


c. Erreur d'accélération (entrée parabole)

$$\varepsilon_a = \lim_{p\to 0}\left(\frac{p\dfrac{E_0}{p^3}}{1+FTBO(p)}\right) = \frac{E_0}{\lim\limits_{p\to 0} p^2.FTBO(p)} = \frac{E_0}{K_a}$$

Où $K_a = \lim\limits_{p\to 0} p^2.FTBO(p)$ est la constante d'erreur d'accélération.

- ✓ Si le système est de classe 0 ou 1($\alpha=0$ *ou* $\alpha=1$) : $K_a=0$. L'erreur d'accélération tend vers l'infini. Le système est incapable de suivre une parabole.
- ✓ Si le système est de classe 1 ($\alpha=2$) : $K_a=K$. L'erreur d'accélération est constante: $\varepsilon_a = \dfrac{E_0}{K}$
- ✓ Si le système est de classe $\alpha\geq 3$: $K_a=\infty$. L'erreur est nulle.



3.4.Tableau récapitulatif des erreurs statiques

Le tableau suivant récapitule le valeur de l'erreur finale ε_s selon la classe α du système et le type d'entée de consigne :

Classe du système (α)	**Constantes d'erreur**	**Erreur statique ε_s**		
		Entrée échelon $\left(\frac{E_0}{p}\right)$	**Entrée vitesse** $\left(\frac{E_0}{p^2}\right)$	**Entrée accélération** $\left(\frac{E_0}{p^3}\right)$
$\alpha = 0$	$K_p = K$ $K_v = 0$ $K_a = 0$	$\frac{E_0}{1+K}$	∞	∞
$\alpha = 1$	$K_p = \infty$ $K_v = K$ $K_a = 0$	0	$\frac{E_0}{K}$	∞
$\alpha = 2$	$K_p = \infty$ $K_v = \infty$ $K_a = K$	0	0	$\frac{E_0}{K}$
$\alpha \geq 3$	$K_p = \infty$ $K_v = \infty$ $K_a = \infty$	0	0	0

3.5.Le dilemme Stabilité-Précision

L'analyse du tableau montre que pour améliorer la précision en régime permanent, on dispose théoriquement de deux leviers :

1. Augmenter le gain statique K de la boucle ouverte (ce qui réduit les erreurs constantes résiduelles).
2. Augmenter la classe du système en introduisant des intégrateurs dans la commande (ce qui annule les erreurs).

Cependant, nous avons vu via le critère de Routh et l'étude harmonique que l'augmentation excessive du gain K ou l'ajout d'intégrateurs (qui ajoutent un retard de phase de -90° chacun) détériorent fortement la stabilité du système et réduisent les marges de sécurité.

C'est ce qu'on appelle en automatique le "Dilemme Stabilité - Précision". Tout l'art de la commande (synthèse de correcteurs PID, avance/retard de phase) consistera à trouver le meilleur compromis entre ces deux exigences.

4. Conclusion

Ce chapitre a mis en lumière les deux exigences fondamentales et souvent antagonistes qui régissent l'analyse et la conception de tout système asservi : la stabilité et la précision. Nous avons pu présenter des méthodes rigoureuses pour évaluer ces performances :

- ✓ L'analyse de la stabilité, condition absolue et préalable à tout fonctionnement, a été abordée par des approches complémentaires : l'approche algébrique grâce au critère de Routh-Hurwitz (idéal pour un réglage analytique des paramètres) et l'approche graphique via le critère du Revers dans les plans de Nyquist et Bode (exploitant les marges de la boucle ouverte).
- ✓ L'analyse de la précision statique a démontré le rôle crucial de la classe du système (nombre d'intégrateurs purs) et de son gain statique. Nous avons établi comment ces paramètres déterminent la capacité du système à annuler ou minimiser l'erreur résiduelle face à des consignes de poursuite types (position, vitesse, accélération).

Surtout, ce chapitre a formellement mis en évidence le célèbre dilemme stabilité-précision. Nous avons constaté mathématiquement et physiquement que toute tentative d'améliorer la précision naturelle d'un système (en augmentant son gain ou en ajoutant des intégrateurs) tend inévitablement à dégrader sa stabilité, réduisant ainsi ses marges de sécurité.

La maîtrise de ces concepts d'analyse clôture l'étude des performances intrinsèques des systèmes bouclés. Elle ouvre directement la voie à l'étape ultime de l'automatique : la synthèse des correcteurs (régulateurs PID, réseaux à avance ou retard de phase). L'objectif de cette future étape de conception sera précisément de résoudre ce dilemme, en insérant un organe intelligent capable de remodeler la

dynamique du système pour satisfaire simultanément des cahiers des charges exigeants en matière de stabilité, de rapidité et de précision.

Références

1. M. Rivoire et J-L. Ferrier, *Cours d'Automatique : Signaux et systèmes (Tome 1)*, Éditions Eyrolles, 1994.
2. H. Egon, M. Marie, and P. Porée, *Traitement du signal et automatique - Tome 1 : Traitement du signal et asservissements analogiques*. Paris, France: Hermann, 2000.
3. P. Prouvost, Automatique - Contrôle et régulation : Cours et exercices corrigés, 2e éd. Paris, France : Dunod, 2010.
4. K. Ogata, *Modern Control Engineering*, 5th ed. Upper Saddle River, NJ: Pearson, 2010.
5. Y. Granjon, *Automatique : Systèmes linéaires, non linéaires, à temps continu, à temps discret, représentation d'état*, 2e éd. Paris, France: Dunod, 2010.
6. M-K FELLAH, *Cours d'Asservissements Linéaires Continus,* Université Djillali Liabès – Sidi Bel-Abbès, 2007.