الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
جامعة أكلي محند أولحاج
-البويرة-
كلية العلوم الإجتماعية والإنسانية

Ministère de l'Enseignement Supérieur
et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -
Faculté des Sciences Sociales et Humaines

جامعة البويرة

قسم العلوم الإنسانية

تخصص: فلسفة العلوم

العنوان:

الأكسيوماتيك في الرياضيات المعاصرة

مذكرة مقدمة لنيل شهادة الماستر في الفلسفة

من إعداد الطالبين:

- ملهاق نسرين
- رنان نريمان

تحت إشراف الأستاذة:

- بعنون حدة

السنة الجامعية 2014 /2015

بسم الله الرحمن الرحيم

شـــكـــــــر وعـــــــرفـــــــــــان

نشكر الله عز وجل شكرا جزيلا طيبا ومباركا فيه الذي أنار لنا عقولنا بالعلم وزيننا بالحلم وأكرمنا بالتقوى وأنعم علينا بالعافية و أنار طريقنا .

إلى من علمونا حروفا من ذهب وكلمات من درر ، عبارات من أسمى وأجلى عبارات في العلم أساتذتنا الكرام

أما الشكر الذي هو من النوع الخاص فهو للذين لم يقفوا إلى جانبنا ، إلى الذين وقفوا عثرة في طريقنا فلولا وجودهم لما أحسسنا بمتعة المنافسة ولولاهم لما وصلنا إلى ما نحن عليه اليوم فلهم منا كل الشكر .

الإهـــــــــــــــــــــداء

لمن ليس لي سواهم في هذه الدنيا

لمن كانوا لي السند في كل خطوة أخطوها

إلى عائلتي الصغيرة الغالية ، بدءا بالقلب الحنون **أمي** و الحبيب الغالي **أبي**

إلى أختي المثالية" **منال**" التي لولاها لما وصلت لما أنا عليه اليوم ، أقولها لكي

بصريح العبارة "شكرا يا أحلى وأغلى و أجمل أخت في الكون كله"

إلى سندي في هذه الحياة إخوتي **محمد** و **هشام**

دون أنسى أحلى شمعة منحتنا إياها الحياة **آدم**

إلى أحب النسمات على قلبي **خديجة،نعيمة،شفيقة،ليليا**

إلى من قاسمتني هذا العمل صديقتي **نسرين**

إلى استاذتنا التي أشرفت علينا في هذا العمل وصبرت معنا

الأستاذة **بعنون حدة**

إلى كل الزملاء والزميلات

نريمان

الإهـــــــــداء

إلى قدوتي الأولى في هذه الحياة ، إلى روح **أبي** الطيبة رحمه الله

إلى كل من في الوجود بعد الله و رسوله رمز الحنان وروح العطاء **أمي** الغالية

إلى روح أخي الطاهرة **طارق** رحمه الله

إلى من شاركوني السعادة والحزن **إخوتي وأخواتي**

إلى من شاركتني هذا العمل صديقتي **نريمان**

إلى من ساروا معي على الدرب حتى النهاية صديقاتي العزيزات خاصة **إيمان وسهيلة** وكل الزملاء.

نسرين

المقدمة

مقدمة:

ظهرت الرياضيات منذ القدم، عند البابليين والمصريين القدامى، وذلك لتلبية حاجيات الإنسان الضرورية، فهي مرتبطة ارتباطا وثيقا بالواقع العملي وبالممارسة اليومية للإنسان، كالحسابات في الأعمال التجارية وتقدير المساحات والأطوال، وتوقع الأحداث الفلكية.

لقد بلغت الرياضيات القديمة قمة النضج مع الرياضي اليوناني إقليدس، الذي بقيت إسهاماته الهندسية معتمدة لدى الرياضيين مدة طويلة والتي عرفت بالهندسة الإقليدية، لكن بانتهاء العصور القديمة، تراكمت معارف جديدة وهذا بفضل الكشوفات والابداعات العلمية.

هذا بالاضافة الى الانقلابات الفكرية التي قام بها الرياضيون المعاصرون على الرياضيات الكلاسيكية، والتي ساهمت في تطوير الهندسة الإقليدية وكذا ظهور مناهج جديدة من بينها المنهج الاكسيوماتيكي وذلك في الميدان الرياضي، كل هذه التغيرات أدت إلى نشأت هندسات جديدة تعرف بالهندسات اللاإقليدية.

إن المنهج الأكسيوماتيكي هو ثمرة لجهود الرياضيين المعاصرين، بحيث مكنهم من بناء صروح رياضية متماسكة ومتينة، فهو يعرف ببنيته النظامية، بالإضافة إلى كونه يقوم على مجموعة الأنساق.

ويعتبر المنهج الاكسيومي من أساسيات العصر الراهن والذي قام الرياضيون بتطبيقه في مجال الجبر والهندسة معا، فهو يمتاز بالوضوح و الصرامة.

ولقد مكن هذا المنهج الرياضيين من إبداع أنساق جديدة و التخلي عن الأنساق الإقليدية التي بقيت معتمدة لمدة طويلة منها: المسلمة الخامسة لإقليدس، غربلة المفاهيم الرياضية الكلاسيكية و إعطاء لها صبغة معاصرة، مثل ريمان، لوبتشفسكي، وغيرهم من العلماء الرياضيين، وظهرت أيضا حركة نقد داخلي هذه الحركة الفكرية جعلت العلماء الرياضيين يكثرون و يبدعون في الميدان الرياضي، وأيضا فحص ونقد النظريات والتأكد من سلامة براهينها.

فالتفكير الرياضي الحديث يرى بأن نقطة البدء تكون مشروعة إن كانت تتيح لنا تشييد علما مسبقا و منتجا، هذه النقطة بالتحديد هي المنهج الإكسيوماتيكي الذي يحاول تأصيل الرياضيات، أي بيان أصولها التي أقيمت عليها.

و من خلال هذا قمنا بطرح الإشكالية التالية. ما مفهوم المنهج الأكسيوماتيكي، و ما مدى تأثيره في الرياضيات المعاصرة؟

و تندرج تحت الإشكالية الرئيسية مجموعة من الأسئلة الفرعية منها:

- ما هي أسس هذا المنهج و ما قيمته؟
- ما هي أسباب ظهور الهندسات اللاقليدية؟

من هنا تبرز أهمية الموضوع الذي تطرقنا إليه بحيث أن فلسفة الرياضيات تطورت وعرفت ازدهارا كبيرا في القرن التاسع عشر، ولهذا فإن ظهور المنهج الأكسيوماتيكي كان من أهم الأسباب الرئيسية التي ساهمت في تطويرها.

وقد كان من دواعي خوضنا في هذا البحث و اختيارنا لهذا الموضوع عدة أسباب منها موضوعية و أخرى ذاتية.

أما الأسباب الذاتية فتتمثل في الرغبة في الخوض و التعمق في هذا الموضوع لأنه ذو قيمة كبيرة في فلسفة العلوم عامة و فلسفة الرياضيات على وجه الخصوص، أما الأسباب الموضوعية فهي تكمن في جدية الموضوع أي قيمة الصياغة الأكسيومية للرياضيات.

و من خلال إعدادنا لهذا البحث توخينا الموضوعية قدر الإمكان خاصة في تحليل واستنباط الأفكار واستخلاص النتائج،و هذا باعتمادنا المنهج التحليلي النقدي فالرياضيات تعتمد على التحليل و الاستنباط.

ولقد قسمنا بحثنا هذا إلى ثلاثة فصول، وكل فصل يحتوي على عدة مباحث ، فالفصل الأول جاء بعنوان مفهوم المنهج الأكسوماتيكي و تناولنا فيه نشأة هذا المنهج و شروطه وخصائصه و ضرورته و أهميته، و الفصل الثاني فكان عنوانه مشكلة التوازي والهندسات الإقليدية، و تطرقنا فيه إلى لمحة عن الهندسة الإقليدية، ثم إلى مشكلة التوازي و الهندسات اللاإقليدية و تناولنا أيضا أزمة أسس الرياضيات، أما الفصل الثالث عنون بأثر

الصورنة في الرياضيات كنتيجة لظهور المذهب الأكسيومي، و في الأخير تضمن بحثنا هذا خاتمة و هي عصارة البحث تحتوي على مجمل النتائج التي توصلنا إليها .

و في إعدادنا لهذا البحث واجهتنا مجموعة من الصعوبات و العوائق تتمثل في قلة المراجع و المصادر، بالإضافة إلى أن الدراسات التي تناولت هذا الموضوع قليلة جدا نظرا لصعوبته و تعقيده، و بالرغم من كل هذا تخطينا هذه العقبات و حاولنا قدر الإمكان جمع ما يكفي من المعلومات.

الفصل الأول: المنهج الأكسيوماتيكي

المبحث الأول: نشأة المنهج الأكسيوماتيكي

المبحث الثاني: المنهج الأكسيوماتيكي بين الخصائص والشروط

المبحث الثالث: أهمية المنهج الأكسيوماتيكي

الفصل الأول:المنهج الاكسيوماتيكي

المبحث الأول:نشأة المنهج الاكسيوماتيكي

لقد عرف العالم منذ القدم تطورا تدريجيا في مجال العلم ، ففي البدايات كانت تتميز جل الحقائق بسيمتي الثبات والمطلقية والتي كان من الصعب مخالفتها أو حتى تجاوزها ، ولكن بعد ظهور مذاهب جديدة أصبح من الممكن على المفكرين تجاوز تلك الحقائق وحتى إبطالها ، ونجد من بين تلك المذاهب "المذهب الاكسيوماتيكي" .

ظلت الرياضيات منذ أن قامت كعلم نظري على يد اليونان الى غاية القرن التاسع عشر، تعتبرالنموذج الأعلى للمعقولية ، فالمعرفة الرياضية عند **أفلاطون** قامت في الأساس على الحدس بمعنى آخر على" الرؤية العقلية المباشرة"، كانت تعتبر معرفة يقينية لايرقى إليها الشك، بالإضافة إلى البرهان الرياضي المنطقي عند كل من **ارسطو** و**اقليدس** بحيث كان أكثر أنواع البرهان قوة وصلابة وتماسكا ، ومع انتشار الجبر في العصر الحديث أصبحت الرياضيات إنشائية تماما ، فقطعت الصلة مع الطابع التأملي الذي كان يسيطر في العهد اليوناني ، وخاصة في المرحلة الفيثاغورية الأفلاطونية. [1]

ارسطو طاليس(384-322ق م)* فيلسوف يوناني ،وهو من عظماء المفكرين واحد أهم مؤسسي الفلسفة الغربية ،غطت كتاباته عديد المجالات منها:الفيزياء ،النطق،الميتافيزيقا ... وغيرها.

إقليدس(323-283 ق م)* عالم رياضيات يوناني،لقب بأبي الهندسة،من أشهر مؤلفاته نجد كتاب العناصر و الذي كان له تأثير في تاريخ الرياضيات.

[1]- محمد عابد الجابري، مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ، (ط1، مركز الدراسات الوحدة العربية ، بيروت ، 1976)، ص72

ولقد كان من نتائج انتشار الجبر و التحليل أن أصبحت الرياضيات منهجا تركيبيا ، قوامه الانطلاق من عناصر بسيطة –مقدمات- والصعود تدريجيا نحو الصروح المعقدة بطريقة برهانية متماسكة.[1]

غير أن هذه العناصر البسيطة أو المبادئ التي كان يقوم عليها البرهان الرياضي ، والتي كانت تشيد على أسسها الصروح الرياضية ، لم تكن واضحة تماما في أذهان الرياضين فلقد اعتبروها بمثابة صورة فكرية لوقائع تجريبية ، فبقيت ذات صلة بالحوادث التجريبية .[2]

والحق أنه لم يكن أحد يشك في صلة الرياضيات بالتجربة ، على الرغم من غموض هذه الصلة وصعوبة الكشف عن حقيقتها ، الشئ الذي كانت تقوم به التجربة دوما ، وهو إنطباق الرياضيات على الحوادث التجريبية ، إنطباقا ساعد كثيرا على تقدم العلوم الطبيعية من الفيزياء والكيمياء وميكانيك وغيرها من العلوم ، ولقد كان ذلك مشجعا لهم للمضي في أبحاثهم وعدم الإلتفات أو على الأقل الإنشغال التام بالأسس التي ينطلقون منها في استدلالاتهم.[3]

---

[1]- محمد عابد الجابري ، مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ، مرجع سبق ذكره ، ص72.

[2]- المرجع نفسه ، ص72.

[3]- المرجع نفسه ، ص73.

لكن الموقف تغير تماما ابتداءا من النصف الثاني من القرن التاسع عشر ، وخاصة عندما أخذت تظهر في عالم الرياضيات مفاهيم وكائنات لاتتفق مع الواقع التجريبي ، كالأعداد التخيلية* و الأعداد المركبة *و الدوال المنفصلة ، والمنحنيات التي تملأ مربعا ، بالإضافة إلى ذلك نجد مسلمة التوازي عند **إقليدس** ، تلك المسلمة التي أثارت الشك منذ قرون طويلة ، كل هذا حمل الرياضيين إلى الإلتفات بجد الى المبادئ و الأسس التي يبنون عليها استدلالاتهم وإنشاءاتهم

من هنا ظهرت في أوساط الرياضيين حركة واسعة تركزت حول مراجعة مبادئ البرهان الرياضي ونقدها وفحص مدى صدقها ، والتي عرفت باسم "الحركة الاكسيوماتيكية " او"المنهج الاكسيوماتيكي".[1]

الأعداد التخيلية N.imaginaires *: هي أعداد غير حقيقية ، وإنما يتم تذيلها فقط ، مثل $\sqrt{-1}$، إذ ليس هناك أي عدد إذا ضرب في نفسه كان الناتج -1 لأن حاصل الضرب يكون دائما موجبا ، ولذلك فلا معنى لجذر عدد سالب ، ولكن هناك معادلات تقتضي هذه الأعداد التخيلية مثل $س^2+1=0$ التي تحل هكذا $س^2=-1$ إذن $س=\sqrt{-1}$.

الأعداد المركبة N.complexes *: هي أعداد تشتمل على عددين حقيقيين وعدد تخيلي هو في الغالب $\sqrt{-1}$، ويرمز للعدد التخيلي بحرف "أ" ، ويمكن أن نرمز إليه بالحرف "خ" إذن فالأعداد المركبة هي كل عدد صيغته أ، ب، خ، بحيث تدل "أ" و "ب" على عددين حقيقيين و"خ" على عدد تخيلي ، وهذا واضح أن الأعداد الحقيقية هي الأعداد المعروفة الجذرية منها و الصماء .

[1]- محمد عابد الجابري ، مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ،مرجع سبق ذكره ، ص73 .

إذن المنهج الاكسيوماتيكي لم يوجد فجأة ، ولكنه جاء نتيجة لحركة النقد الباطني التي تناولت المسلمات التي وضعها إقليدس ، بحيث أمكن وبفضل هذا المذهب من وضع مسلمات جديدة فنشأت بذلك هندسات أخرى لا اقليدية.[1]

وإذا تحدثنا عن هذه الحركة الاكسيوماتيكية ، مباشرة نتطرق إلى **هلبرت** * ، إذ نجد بأن المنهج الاكسيومي عرف من خلاله بحيث أصبح الطريق الأسهل لمعالجة ودراسة المسائل الرياضية ، ففي سنة 1899م شارك هلبرت في مؤتمر سنوي حول الرياضيات بموضوع "حول نظرية العدد" وهي المداخلة التي نشرت سنة 1990م ،والتي عرض من خلالها أراءه حول أسس علم الحساب . [2]

إن المنهج الاكسيوماتيكي لم يخص مشكلة محددة ، بل إنما هو منهج التفكير الرياضي ، فقد حاول منذ البداية تجنب البداهة و الوضوح والحدس و التعريفات الساذجة ، رافضا اللجوء إليها وذلك من خلال وضعه لتصورات أولية وأكسيومات ينطلق منها الرياضي .

لكن السؤال الذي يبقى مطروح مامعنى الاكسيوماتيك وما المقصود بالاكسمة ؟

---

[1]-جلال شمس الدين ، فلسفة العلوم، (مؤسسة الثقافة الجامعية ، الإسكندرية ، 2004) ، ص34.

ديفيد هلبرت (1882-1943)*، عالم رياضيات ألماني فهو يعتبر أكبر رياضيي القرن العشرين ، من أعماله أنه قام بتحديد معالم نظرية الأعداد الجبرية الذي كتبه عام 1987م والذي كان يحمل عنوان "التقرير حول الأعداد" ، وكذا تنسب إليه العديد من النظريات الأساسية.

[2]-زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس دراسة تحليلية إبستمولوجية ، (رسالة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه العلوم في الفلسفة ، جامعة قسنطينة ، 2007-2008) ، ص266.

المقصود بالاكسيوماتيك ككلمة : فهي مشتقة من Axioms أي البديهيات وبصفة عامة الأصول.[1]

ويقصد بها كذلك الدراسة النقدية للبديهيات ،[2] وفي تعريف آخر نجد أن الاكسيوماتيك هو دراسة نقدية لمبادئ المبرهنة في علم ما وفي البرهنة الهندسية توجد خاصة.[3]

أما فيما يخص الأكسمة فهي عبارة عن "منهج يقوم بتنظيم النظرية بتأسيسها على أكسيومات وهي قضايا واضحة بذاتها ، ثم استنتاج مجموعة من القوانين ، وأول أكسمة في الهندسية كانت لإقليدس في كتابه "الأصول" ، ثم تم تعميمها في الرياضيات في نهاية القرن التاسع عشر كما سبق وأن ذكرنا وذلك بتأسيس هندسات لا اقليدية ، بالإضافة إلى تطور الجبر وإكتشاف الأعداد الحقيقية وتطور نظرية المجموعات .[4]

---

[1]- جلال شمس الدين ، فلسفة العلوم ، مرجع سبق ذكره ،ص34.

[2]-أندريه لالاند ، موسوعة لالاند الفلسفية ، (ط1 ، بيروت ، 2001) ، مجلد 1 ، ص

[3]-إبراهيم مذكور ، المعجم الفلسفي ، (الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية ، مصر ، 1989) ، ص 20.

[4]- WWW.FR.WIKIPIDIA/or9/wiki.

المبحث الثاني : المنهج الاكسيوماتيكي بين الشروط و الخصائص

قبل الخوض في تفاصيل هذا المبحث ، يجدر بنا أولا أن نشير إلى المعنى العام للمنهج فلقد أعطي لهذا الأخير عدة تعاريف ، نجد منها تعريف **جميل صليبا*** في قوله << يقصد به بصفة عامة الطريق الواضح >> [1] ، وعن **إبراهيم مذكور*** بقول هو << خطة منظمة لعدة عمليات بغية الوصول إلى كشف الحقيقة والبرهنة عليها >>[2] ، وقد عرفه كل من **عامر مصباح*** بقوله << أنه مجموعة الخطوات العلمية الواضحة و الدقيقة التي يسلكها الباحث في مناقشة أو معالجة ظاهرة إجتماعية أو سياسية أو غيرها من الظواهر[3] ، **وعبد الرحمان بدوي*** بأنه << الطريق المؤدي إلى الكشف عن الحقيقة في العلوم ، وذلك بواسطة طائفة من القواعد العامة التي تهيمن على سير العقل وتحدد عملياته حتى تصل إلى نتيجة معلومة >>[4].

جميل صليبا (1902-1976) *كاتب وفيلسوف عربي ، من أشهر مؤلفاته " المعجم الفلسفي لجميل صليبا".

[1]-جميل صليبا ، المعجم الفلسفي ، (دار الكتاب اللبناني ، بيروت ، 1982) ، ج1 ، ص435.

إبراهيم مذكور * :هو دكتور ورئيس مجمع الغة العربية ، حاصل على " شهادة دبلوم في الدراسات العليا " ، من أشهر مؤلفاته " المعجم الفلسفي ".

[2]-إبراهيم مذكور ، المعجم الفلسفي ، (الهيئة العامة لشؤون المطابع الأميرية ، مصر ، 1989) ، ص195.

عامر مصباح *: دكتور وأستاذ محاضر في العلوم السياسية و العلاقات الدولية .

[3]- . www.STARTIMES.com

عبد الرحمان بدوي*: (1917-2002) بالقاهرة ، أحد أبرز أساتذة الفلسفة العرب في القرن العشرين وأغزرهم إنتاجا.

[4]- عبد الرحمان بدوي ، مناهج البحث العلمي ، (ط3 ، وكالة المطبوعات ، الكويت ، 1977) ، ص4.

وفي تعريف آخر للمنهج: نجد أنه هو الطريقة التي يتبعها الباحث في أي موضوع للكشف عن حقيقة مجهولة ، أو لدعم حقيقة معلومة[1].

إذن بصفة عامة فالمنهج هو تلك الوسيلة المعلومة التي يعتمدها الباحث أو العالم للكشف عن حقيقة موجودة ، وهو طريقة محددة لبحث الموضوع المقصود ، يكون مرتبط إرتباط لاينقصم عن إتجاه الباحث وثقافته وفلسفته.

وتختلف المناهج من علم إلى آخر ، لكنها عادة ماتنقسم إلى الأنواع الآتية :

المنهج الاسترادادي أو التاريخي : وهو يقوم على إسترداد الماضي تبعا لما تركه من آثار، وكذا **المنهج الاستقرائي inductive méthode** و يقوم هو الآخر على الإنتقال من الحكم على البعض إلى الحكم على الكل وذلك بهدف التعميم ، نجد أيضا **المنهج العلمي المعاصر scientifique méthode** ويجمع هذا المنهج بين مفهومي المنهج الاستنباطي و التجريبي الاستقرائي كونه يقوم على الفرض العلمي ، وفي الأخير نجد **المنهج الاستنباطي Déducative méthode** وهو الذي نسير فيه من مبدأ إلى قضية تنتج عنه بالضرورة دون إلتجاء إلى التجربة ويقوم هذا المنهج على مجموعة من المبادئ والمتمثلة في البديهيات axioms *

[1]-محمد جواد فعنية ، مذاهب فلسفية وقاموس المصطلحات ،(دار الجواد ، بيروت دون تاريخ) ، ص55.

بديهيات *: وهي قضايا بينة بذاتها ، لاتقبل برهانا و يسلم بصحتها كل من يفهم معناها ، لأنها قضايا فطرية لا تستنبط من أخرى سابقة عليها.

المصادرات postulates * ، التعريفات Définition* النظريات المبرهنة théorèmes* ، غالبا مانجد أن هذا المنهج هو الأكثر تطبيقا في العلوم الرياضية على وجه الخصوص.[1]

ثم بعد ذلك كنا قد تطرقنا فيما سبق إلى الحديث عن المذهب الاكسيوماتيكي وكيف أنه جاء كحركة نقدية وكمنهج جديد في البداية "علم الهندسة" بالأخص، ثم أصبح يعمم على كل المجالات الرياضية ليشمل بعد ذلك المنطق على سبيل المثال ، ونجد أن **جون كفاييس*** كان من مؤيدي هذه الفكرة بقوله أنه " إمتداد لمجال تطبيق المنهج ".[2]

وبحديثنا عن المنهج الاكسيوماتيكي من الواجب علينا أن نتعرف أولا على : ماهو هذا المنهج ؟ ماهي خصائصه ؟ وماهي الشروط التي يقوم عليها ؟ .

المنهج الاكسيوماتيكي : هو المنهج الذي يعرف الأعداد من خلال العلاقات التي تعتمدها ، وهو يقوم أساسا على إيجاد مجموعة من الأشياء ، أو المواضيع ، تطبق عليها مجموعة من

المصادرات *: هي عبارة عن قضايا يفترض صحتها منذ البداية لفائدتها أو لأنها لا تؤدي إلى تناقض مثل ذلك مصادرة الخامسة لإقليدس.

تعريفات *: وهي تحديد الشئ المراد تعريفه بالإستعانة بألفاظ لا يمكن تعريفها ، مثال تعريف إقليدس في الهندسة المستوية

النظريات أو المبرهنات *: وهي جملة النتائج التي يتم استنتاجها أو اشتقاقها أو الاستدلالعليها عن طريق الاستنباط من جملة المقدمات المتمثلة في (التعريفات أو المسلمات) .

[1]-محمد عابد الجابري ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ، مرجع سبق ذكره ، ص72.

[2]-زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس دراسة تحليلية إبستمولوجية ، مرجع سبق ذكره ، ص 266.

العلاقات التي يعرفها في أكسومات معينة ، فهو إذا عبارة عن نسق من المواضيع بينها علاقات حددت بالاكسيومات .[1]

أما فيما يخص الشروط التي يقوم عليها هذا المنهج فسوف نتطرق أولا إلى :

أ-شروط البناء الاكسيوماتيكي :

إن مجموع الأوليات "الاكسيومات" التي يختارها الرياضي لتشيد صرح بناء رياضي معين يشكل هو وهذا البناء نفسه باعتباره بناءا منطقيا متماسكا ، ما يطلق عليه اسم اكسيوماتيك ، ويقوم هذا الأخير على مجموعة من الشروط الأساسية التي يجب أن تتوفر في كل بناء علمي استنتاجي أكسيومي يطمح إلى أن يتصف بالصرامة الحقيقية والتي هي من وضع **باش** .[2]

إذا فإن الشروط الأساسية التي يجب أن تتوفر في العرض الاستنتاجي الاكسيوماتيكي لكي يكون دقيقا تتمثل فيما يلي :

1-يجب التصريح بالحدود الأولية التي نريد أن نعرف بواسطتها سائر الحدود الأخرى.

2-يجب التصريح بالقضايا الأولية التي نريد أن نبرهن بواسطتها على سائر القضايا الأخرى .

---

[1]-زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس دراسة تحليلية إبستمولوجية ، مرجع سبق ذكره ، ص276.

[2]-محمد عابد الجابري ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ،مرجع سبق ذكره ،ص 81-82.

3-يجب أن تكون العلاقات المذكورة بين الحدود الأولية ، علاقات منطقية خالصة ، وأن تبقى مستقلة عن المعنى العيني الذي يمكن أن نعطيه للحدود .[1]

4-يجب أن لا تتدخل في البراهين إلا هذه العلاقات ، وذلك بغض النظر عن معنى الحدود (مما يمنع على الأخص أن نأخذ أي شئ من إعتبار الأشكال الهندسية).

ومنه نجد أن كل نظرية رياضية اكسيوماتيكية تنطلق من نقطتين :

اولا : الحدود الأولية التي نأخذها بدون تعريف لأنها تكون وسيلة وأداة لتعريف باقي الحدود : وذلك مثل النقطة ، المستقيم ، المستوي في الهندسة ، ومثل المجموعة نجد العنصر ، الانتماء وهذا بالنسبة لنظرية المجموعات .

ثانيا : أن المسلمات أو القضايا الأولية التي نعتبرها هي الأخرى صحيحة بالتعريف.[2]

وبالنسبة للخصائص ، فهنالك خاصيتان أساسيتان لابد منهما في كل بناء اكسيومي بالاضافة إلى الخاصية الثالثة التي وضعها هلبرت ، حتى يكون الاكسيوماتيك متوفيا للشروط المطلوبة وتتمثل تلك الخصائص فيما يلي :

اولا : خاصية الاستقلال : أي استقلال الأوليات بعضها عن بعض بمعنى أنه يمكن القول بصفة عامة أن أوليات الاكسيوماتيك ماتكون مستقلة عن بعضها البعض عندما لايكون في

---

[1]-روبير بلانشه ، الاكسيوماتيك ، تر: محمود يعقوبي ، (ط3، ديوان المطبوعات الجامعية ، الجزائر ، 1965) ، ص29.

[2]-محمد عابد الجابري ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مرجع سبق ذكره ، ص ص 82-83.

الإمكان البرهنة عليها بواسطة الباقي ، أما عندما يغدو الإمكان ذلك فإن الأولية المبرهن عليها تصبح نظرية[1] ، وعن هذه الخاصية يمكننا القول أيضا أن أكسيومات النسق تكون مستقلة عندما يعجز الرياضي عن إستنتاج أي أكسيوم من الأكسيومات الأخرى بواسطة البراهين المنطقية ، ويرى هلبرت أن أكسيومات المجموعات **I** ، **II** ، **IV** المختلفة من السهل البرهنة على أنها مستقلة ، فالبرهنة على إستقلالية الأكسيوم A عن مجموعة الاكسيومات X ، هذا يعني البرهنة على تناقض النسق الذي يحتوي الاكسيوم A ، ولن يكون هناك أي خطأ منطقي ، ونجد أن هنالك علاقة وطيدة بين البرهنة على تناقض وتماسك النسق ، وبراهين إستقلالية الاكسيومات .[2]

ويقول جون كافييس كذلك "أنه يجب من جهة أخرى التمييز بين إستقلالية المعنى (indépendance de sens) وإستقلالية الإثبات (indépendance d 'affirmatrie) فمن رأيه الأكسيوم أن يوضع دائما على شكل فرضية ، حيث إستقلالية المعنى يختص بالفرضية بينما إستقلالية الإثبات بالنتيجة ، ولكي يعزز جون كفاييس موقفه نجده قد إستشهد بأعمال كل من فابلن Veblen(1960-1980) الذي إهتم بأكسيومات الهندسة و الترتيب و هيومتنغ humting (1874-1952) الذي إهتم بأكسمة الجبر والمنطق ، فنجد أن كلاهما أكدا على

[1]-محمد ثابت الفندي ، فلسفة الرياضة ، (ط1 ، دار النهضة العربية ، بيروت ، 1969) ، ص78.

[2]-زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس دراسة تحليلية إبستمولوجية ، مرجع سبق ذكره ، ص271.

إستقلالية المحددة والدقيقة ، وهي وسيلة للتوصل في الرياضيات إلى معطيات تحتوي على أقل قدر ممكن من الأجزاء المشتركة .[1]

ففي الهندسة الإقليدية مثلا : تعتبر القضية القائلة بأن زوايا المثلث تساوي 180° عبارة عن نظرية ، لأنه يبرهن عليها بواسطة مسلمة التوازي ، وهي أولية مستقلة عن باقي الأوليات الإقليدية الأخرى ، وكما لاحظنا ذلك في هندسة **لوباشفسكي* و ريمان*** ، لو لم تكن هاتان القضيتان مستقلتان لما أمكن قيام هاتان الهندستان.[2]

ومن جهة نظر أخرى حول هذه الخاصية نجد رأي **ديفيد هلبيرت** ، الذي يرى أن خاصية الإستقلال هي فكرة عرفها أصحاب الهندسات غير الإقليدية ، فهم عند محاولتهم البرهان على المسلمة الخامسة توصلوا إلى إكتشاف إستقلاليتها ، عن غيرها من المسلمات الخاصة بالمستقيم و السطح و التطابق و غير ذلك مما سمح ببرهان الثماني و العشرين نظرية الأولى في إقليدس دون مايليها مما يحتاج إلى المسلمة الخامسة[3].

---

[1]-زبيدة بن مسي ،فلسفة الرياضة عند جون كفاييس دراسة تحليلية ابستيمولوجية،مرجع سبق ذكره،ص272.

نيكولاي لوبا تشفسكي (1792-1856)* كان رياضيا روسيا، ولد وسط عائلة فقيرة إنظم إلى جامعة قازاند لدراسة الطب ، لكن سرعان ماغير رأيه وكرس نفسه لدراسة العلوم .

ريمان (1826-1866)* عالم رياضيلت ألماني ، يعتبر مؤسس نظرية الدوال والهندسة الريمانية التي مهدت الطريق لأنشتاين ليضع النظرية النسبية العامة.

[2]-محمد عابد الجابري ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة و تطور الفكر العلمي ، مرجع سبق ذكره ، ص85.

[3]-محمد ثابت الفندي ، فلسفة الرياضة ، مرجع سبق ذكره ، ص ص78-79.

فأدركوا عندئذ أن برهان إستقلال المسلمة "س" عن المجموعة "ص" إنما معناه تناقض "ص" مع لا "س" ، وهذا ما أدى إلى هندسة ريمان مثلا .

ثانيا : خاصية عدم التناقض : أي عدم تناقض الأوليات ، فإن هذه المسألة أكثر صعوبة ، فقد يقال مثلا يجب تطبيق الاكسيوماتيك على التجربة فهي التي تمكنن من التعرف على تناقض أو عدم تناقض أولياته وهذا صحيح.

ولكن ليس من الضروري أن يكون الأكسيوماتيك قابلا للتحقق منه بالتجربة على الأقل في مرحلة من مراحل تقدم العلم ، فالهندسة التي شيدها ريمان مثلا كانت غير قابلة للتطبيق على العالم الواقعي حتى جاء اينشتاين وبرهن بنظريته النسبية على أنها أكثر ملائمة من الهندسة الإقليدية ونجد أنه هنالك طريقة يمكننا إتخاذها كمعيار لعدم التناقض و التي تتمثل في البرهنة على نظرية ما وعلى عكسها داخل بناء اكسيومي معين ، فكلما كان ذلك ممكن فهو دليل على وجود على الأقل أوليتين متناقضتين.[1]

وقد عرف هلبرت عدم التناقض بقوله "هو إستحالة إستنباط قضية ما تناقض تلك المسلمات أي تكون نفيا كليا أو جزئيا لأحدى المسلمات" ، فإذن لا يمكن البرهان مباشرة على عدم تناقض

[1]- محمد عابد الجابري ، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة و تطور الفكر العلمي ، مرجع سبق ذكره ، ص85.

المسلمات فيما بينها وإنما يكون ذلك فقط بطريقة غير مباشرة ، وهي عدم العثور على قضية مستنبطة منها وتكون نفيا لأحداها.[1]

ويرى هلبرت أن اللاتناقض أو عدم التناقض هو مسألة منطقية مهمة في إقامة النسق الإقليدي فالقضيتان المتناقضتان لايمكن أن تقبلا في نسق واحد بعينة لأن تناقض النسق يحطم ذاته ولهذا تماسك النسق يعني لا تناقضه و اللاتناقض هو "إستحالة إستنتاج منطقيا من الاكسيومات نتيجة تناقضها" ، فالنسق هو متين ويعني عندما لايمكننا إستنتاج من الأكسيومات قضية تكون نفي لأحدها و الأكسيومات هي متماسكة ويقينية بمعنى أن أي متتالية متناهية من الإستنتاجات تنطلق من هذه الأكسيومات ، لايمكن أبدا أن تؤدي إلى تناقض.[2]

ولقد جعل هلبرت في إحدى مقالته "أسس الهندسة" على البرهنة على تماسك ويقينية الأنساق بعرض نماذج أثبت من خلالها أن التناقض في الأكسيومات يستلتزم تناقضا في النظرية التي ينتمي إليها النمط رياضيا أو فيزيائيا أو فلكيا ، ولهذا فقوة النسق تتحقق بقوة النظرية ، وقد قدم هلبرت مثالين على ذلك فمثلا "تناسق ويقينية الأاكسيومات الخاصة بالهندسة دون أكسيوم التكامل هو مؤسس على نمط الأعداد الجبرية الذي يحقق من طرف علم الحساب ، بينما تناسق وقوة نسق بما فيه أكسيوم التكامل هو مؤسس على نمط الأعداد الحقيقية والذي يتحقق

[1]-محمد ثابت الفندي ، فلسفة الرياضة ، مرجع سبق ذكره ، ص79.

[2]-زبيدة بن مسي،فلسفة الرياضةعند جون كافييس،مرجع سبق ذكره،ص 270.

بالتحليل وهذا مايمده بأمن جزئي " [1]، وقد قام **هلبرت** بتوضيح شرطه هذا في مقاله "مسائل رياضية" من خلال تقديم أمثلة أيضا سواء في الهندسة في نظرية المجموعات في الفيزياء لكي يبرهن على ضرورة لاتناقض الاكسيومات ومن ثمة التأكيد على إتساقها ، وليحقق هذا الشرط يجب البرهنة على النظرية وعلى نقيضها في بناء نسق أكسيومي ، فكلما كان ذلك ممكنا كان هذا النسق متناقضا ولهذا فإن مسألة عدم التناقض هي إحدى الصعوبات التي لم يستطع مؤيدو الأكسيوماتيكية التغلب عليها ، فقد يؤدي ذلك إلى العودة إلى التجربة و الحدس الحسي من خلال التأويلات المقدمة للنسق. [2]

ثالثا : خاصية الإشباع : ويعرفها هلبرت "أنها طائفة معينة من المسلمات تكفي بمفردها للقيام بمهمة إستنباط قضايا أو نظريات فرع معين من فروع الرياضة ، ثم نجده توسع بعد ذلك في معناه بحيث تضمن فكرة أن أية مسألة أو نظرية تثار في داخل فرع ما يجب أن يفصل فيها بالسلب أو بالإيجاب على أساس تلك المسلمات نفسها ، وتحديد هذه الفكرة صعبة بعض الشئ ولكن يمكن القول بأنه يريد أن يقول أن فرعا رياضيا ما إنما تصل مسلماته إلى درجة الإشباع إذن من الصعب لقضية ولنقيضها معا أن ينتجا في آن واحد عن المسلمات.[3]

---

[1]-زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس دراسة تحليلية إبستمولوجية ، مرجع سبق ذكره ، ص270.

[2]- المرجع نفسه ، ص271.

[3]-محمد ثابت الفندي ، فلسفة الرياضة ، مرجع سبق ذكره ، ص80.

ولقد عرف جون كفاييس خاصية التشبع (saturation)أيضا كمايلي:

إن النظرية هي متشبعة إذا كانت كل قضية مصاغة في مفاهيم أساسية هي إما قابلة للبرهنة أو مرفوضة (مما يعني أن نفيها قابل للبرهنة) في النظرية وأثناء حديثه عنه تطرق إلى المطلقية، فالنظرية تكون يقينية عندما تكون نماذجها متماثلة متكافئة (isomorphes) ، وتكون كذلك إذا كانت تحقق تقابل واحد بواحد (bijection)، التي تجعل الخصائص موجودة في أكسيومات ثابتة بالنسبة لهذه الخاصية نجد فيها رأيان لكل من هلبرت وجون كافييس .[1]

[1]- زبيدة بن مسي ،فلسفة الرياضة عند جون كافييس دراسة تحليلية ابيستيمولوجية،مرجع سبق ذكره،ص271.

المبحث الثالث: أهمية المنهج الأكسيوماتيكي

يعتبر المنهج الاكسيوماتيكي هو الأنسب لدراسة المسائل الرياضية الحسابية منها والهندسية[1].

فهو منهج مثمر منتج وخصب، فضلا عن كونه يؤسس لعلم الحساب ، لأنه النظرية الممثلة بنسق من العلاقات يمكن أن تظهر في مجالات أخرى كالفيزياء.....[2]

فالتفكير الرياضي الحديث يرى أن نقطة البدء تكون مشروعة إذا كانت تسمح لنا ببناء علم متسق ومنتج، لا إذا كانت تنطوي في ذاتها على بداهة مطلقة[3]، الشيء الذي عمل المنهج الأكسيومي على تجنبه في البداية ، إضافة إلى الحدس والتعريفات والسذاجة، كما نجده رفض الدعوة إليها ذلك عن طريق تصورات أولية وأكسيومات ينطلق منها الرياضي[4].

فالأكسيوماتيك هنا سمح لنا بالبرهنة على القضايا بكل وضوح مع إزالة الغموض والشكوك عنها، وهذا ما جعله يتصف بالدقة والوضوح، فمن خلاله يمكن للباحث الرياضي أن يتوصل إلى نتائج يقينية بكل سهولة[5].

1_ بول موي، المنطق وفلسفة العلوم، تر: فؤاد حسن زكرياء، (دار النهضة، القاهرة)، ص114.

2_ زبيدة مونية بن ميسي، فلسفة الرياضة عند جان كفايسي دراسة تحليلية إبستمولوجية، مرجع سبق ذكره ، ص267.

3_ بول موي، المصدر نفسه ، ص 114.

4_ زبيدة مونية ميسي، المرجع نفسه ، ص268.

5_ بول موي، المصدر نفسه ، ص114.

وحسب **دفيد هلبرت** أن الصرح العلمي أو النقل الخاص بالعلوم، والذي رسم وبني بالاعتماد على المنهج الأكسيوماتيكي تظهر الرياضيات فيه كوجه رئيسي، فلها إذن دورا فعالا في بناء هذا الصرح، ويعزز **جون كفاييس** رأي دافيد هلبرت حيث يرى أن الرياضيات الأكسيوماتيكية توصلنا إلى " تكوين ماهية الفكر العلمي"، ولهذا فهو بطريقة غير مباشرة جعل من المنهج الأكسيوماتيكي وسيلة للتوحيد بين العلوم ، وهذا إن دل على شيء فإنما يدل على نجاح المنهج الأكسيوماتيكي في السنوات الأخيرة[1].

ومنه فالمنهج الأكسيوماتيكي لا يسمح فقط بتأسيس الرياضيات ، ولكن بتبرير تطبيقها الشامل في العلوم الأخرى، وكل ما يكون موضوعا للفكر العلمي هو مرتبط مباشرة بالمنهج الأكسيوماتيكي ومنه فهو ينتمي إلى الرياضيات [2].

إذن إن الرياضيات في العصر الراهن قائمة جملة وتفصيلا على المنهج الأكسيوماتيكي كما أنها تستمتع بثراء كبير لدرجة مذهلة ، واستكشافها الكامل يتطلب عمرا مديدا، ولهذا يستحيل أن تبقى المبادئ الرياضية كما كانت عليه من قبل " الرياضيات الكلاسيكية " فالنظرة المعاصرة تغيرت تماما عن ما كانت عليه من قبل " الرياضيات الكلاسيكية " ، وذلك بسبب الزيادة في المعرفة والتنوع في الموضوعات [3].

---

[1] _ زبيدة مونية بن ميسي،فلسفة الرياضة عند جون كافيسس ،مرجع سبق ذكره ، ص 267.

[2] _ المرجع نفسه، ص268.

[3] _ رولان أومنيس، فلسفة الكوانتم ، تر: أحمد فؤاد باشا، (المجلس الوطني للثقافة والفنون والأدب، الكويت،ط1، 1978م)،ص150.

بالاضافة إلى كل هذا نجد أن المنهج الأكسيوماتيكي سمح بتطوير البديهيات السابقة إلى مصادرات جديدة، أي إضفاء الطابع الأكسيومي عليها ، وقد قام أيضا بتبسيط النظريات الرياضية[1].

كما أن المنهج لا يعترف ببديهية فكرة جديدة مقترحة إلا إذا كانت نتائجها مثمرة ، وتقديم حلول لقضايا قيد البحث.

إن الأفكار الرياضية أشبه بالكائنات الحية التي تتنافس بعضها بعض ولكي تظفر بالبقاء يجب أن تكون مفيدة ومهيأة جيدا، وفوق كل هذا يجب أن تكون خصبة ، فالمنهج الأكسيومي لا حدود لنهاية إمكانياته الرياضية وقدرته الفائقة [2].

وليس هناك شك في المنهج الأكسيومي ، هو عبارة عن أداة للتجريد والتحليل بالغة الأهمية فهو أداة تفتح أمام الفكر باب واسع، وتطرح باستمرار آفاق جديدة وإمكانيات في المضي قدما في العالم المجرد، وبالتالي فإن هذا الانتقال من نظرية مرتبطة بالمشخص إلى نفس النظرية وقد صيغت صياغة أكسيومية، ثم صيانة محض رمزية، خطوة هامة جدا في إغناء الفكر البشري وإكسابه قدرة لا تحد على معالجة أكثر القضايا تجديدا وتعميما [3].

[1] _ رولان أومنيس، فلسفة الكوانتم ، مصدر سبق ذكره،ص150.

[2] _المصدر نفسه، ص150.

[3] _ محمد عابد الجابري، فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي،مرجع سبق ذكره،ص89.

إن السير في ميدان التجديد يرافقه دوما تقدم مماثل في مجال التعميم، وكما قال **راسل*** فإن أهمية التعميم تكمن بحق في تحويل الثوابت والمتغيرات ،الشيء الذي يمكن الفكر من معالجة أكثر القضايا تعقيدا وغموضا بمرونة ووضوح.

إذا إن هذا فعلا- تحويل الثوابت إلى متغيرات - هو ما يفعله العالم الرياضي الذي يستعمل المنهج الأكسيوماتيكي، عندما يضع مكان كلمة " مستقيم" الرمز"س" ومكان كلمة " المطابقة" الرمز "ص" فإننا نحولهما إلى متغيرين يخضعان فقط للعلاقات التي تقيمها بينهما الأوليات التي انطلقنا منها أول الأمر، وبالتالي يصبح بالإمكان إعطاؤهما قيما معينة أخرى عندما نريد النزول من ميدان الأكسيوماتيك إلى ميدان تطبيقاته، وهكذا فإن صياغة نظرية ما صياغة أكسيومية تغض النظر نهائيا عن الدلالات المشخصة والحدوس الحسية، وتجعلنا قادرين ليس فقط على التفكير في نفس النظرية بشكل أكثر دقة ، بل تجعلنا قادرين أيضا أن نصنع لأنفسنا أداة ذهنية متعددة الصور القابلة للتطبيق على النظريات ، وبالتالي فإن النظرية المصاغة صياغة أكسيومية تصبح عندئذ بمثابة دالة نظرية ، وعبارة عن قالب للنظريات المشخصة ، فالأكسيوماتيك من هذه الناحية أصبح أداة ثمينة تمكننا من الاقتصاد في المجهود الفكري، وذلك بجمع عدة نظريات في نظرية واحدة، وبالتالي التفكير في المتعدد من خلال الواحد[1].

راسل(1872-1970) فيلسوف وعالم منطق رياضي ومؤرخ وناقد اجتماعي

[1] _ محمد عبد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مرجع سبق ذكره، ص ص89_90.

أضف إلى ذلك فإن المنهج الأكسيومي يقدم لنا مساعدة كبيرة على تنظيم معارفنا ووضع مختلف العلوم في قوالب جديدة أكثر وضوحا ودقة ، كما أنه يساعد على التناظر بين النظريات المتفرقة التي يضمها علم واحد، أو تتوزعها مجموعة من العلوم، مما يمكننا من السيطرة فكريا على النظريات التي تبدو ظاهرة متنافرة[1].

وليس هذا فحسب، بل إن الطابع الآلي للخطوات الأكسيومية، الصورية الرمزية، يسمح لنا بالاحتفاظ بالمجهود الفكري البشري لعمليات أخرى أرقى ، وهكذا فبفضل هذه الصياغة الصورية الرمزية للنظريات وبفضل الطريقة الأكسيومية ، أصبح بإمكان الباحث العمل على العمليات المعقدة التي كانت تستغرق وقتا طويلا .

أما فيما يخص القيمة الابستمولوجية لهذا المنهج، يكفينا أن نشير إليها في بعض الميادين العلمية ، ففي الرياضيات تظهر تلك القيمة في التغيير الجذري الذي طرأ عليها ، بعد أن صيغت مختلف فروعها صياغة أكسيومية، وهكذا فبدلا من التصنيف التقليدي للرياضيات حسب موضوعها ، نجد أنفسنا اليوم أمام تصنيف جديد أكثر وضوحا ودقة، وهذا التصنيف يقوم على أساس العلاقات والبنيات[2].

[1] _ محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ،مرجع سبق ذكره ص90.

[2] _المرجع نفسه، ص91.

وفي ميدان العلوم الطبيعية، فإن أقل ما يمكننا قوله أن المنهج الأكسيومي يسعى لغزو العلوم الفيزيائية، خاصة منها فيزياء الأشياء الصغيرة جدا " الميكروفيزياء" ، وفيزياء الأشياء الكبيرة جدا » ميدان الفضاء » وغيرها.

وإذا كان هذا المنهج لم يجد سبيله بعد في العلوم الطبيعية الأخرى كالبيولوجيا مثلا، لأن هذه العلوم ما زالت تزحف على الدرجات الدنيا من سلم التجريد ، ومن جهة أخرى **يقول روبير بلانشي** * " إن تاريخ العلوم يكشف لنا المراحل أربعة تقطعها العلوم في تقدمها : من المرحلة الوصفية، إلى المرحلة الاستقرائية ، إلى المرحلة الاستنتاجية، وأخيرا المرحلة الأكسيوماتيكية[1]

_ روبير بلانشي*: رياضي وإبستيمولوجي فرنسي تدور معضم مؤلفاته حول المنطق وفلسفة الرياضيات من بينها أكسيوماتيك (1898-1975)

[1] _ محمد عابد الجابري،مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة و تطور الفكر العلمي،مرجع سبق ذكره،ص91.

الفصل الثاني: مشكلة التوازي والهندسات اللاإقليدية

المبحث الأول: الهندسة الإقليدية

المبحث الثاني:المصادرةالخامسةلإقليدس والهندسات اللاإقليدية

المبحث الثالث: أزمة الأسس في الرياضيات

الفصل الثاني : مشكلة التوازي و الهندسات اللاقليدية.

المبحث الأول: الهندسة الإقليدية.

لقد جمع **إقليدس** (334- 408 ق م)الأبحاث الرياضية التي قام بها اليونان خلال الفترة الممتدة ما بين القرن السادس و القرن الثالث قبل الميلاد في كتابه المشهور "الأصول" هذا الكتاب يبقى مدة طويلة أساسا للدراسات الهندسية حتى القرن التاسع عشر حيث أن **اقليدس** قام بتشييد هندسته على مجموعة من الفروض، و هذه الفروض يتم من خلالها البرهنة على صدقة النظريات و النتائج.

ميز **إقليدس** في هندسته بين ثلاثة أنواع من المبادئ في: البديهيات، المسلمات، التعاريف.

أ- البديهية Axiome:

هي قضية واضحة بذاتها إلى درجة أنه لا يمكن أنه تتأدى منها إلى ما هو أبسط مثل القضية التالية: الكل أكبر من الجزء[1].

[1]- محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي، مرجع سبق ذكره، ص 73.

ب- المسلمة Postulat:

هي قضية غير واضحة بذاتها، و لكن الرياضي يطلب التسليم بها دون برهان، بالرغم أنه سيشيد عليها بنيانا رياضيا متماسكا، فهي إذا مجرد مطلب فالتسليم بها يساعد على تشييد صرح رياضي

معين.[1]

ج- التعريفات:

يؤدي التعريف بصفة عامة وظيفة مهمة خاصة في مجال الرياضيات فهي قضايا تشرح معنى الحدود الأولية و لا يقال لها صادقة و كاذبة كتعريف هو أن كل تعريف جديد من التعريفات المتتابعة داخل النسق إنما هو أمر يحدد بدقة من خلال المرحلة التي وصل إليها النسق.[2]

و كانت المسلمة التي أثارت الشك هي المسلمة الخامسة للإقليدس و تصاغ كما يلي: " من نقطة خارج المستقيم يمكن رسم مستقيم واحد فقط مواز للأول"، و أيضا القضية القائلة "بأن مجموع زوايا المثلث يساوي دوما 180 درجة"[3].

[1]-محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ،مرجع سبق ذكره، ص 74.

[2]- جلال شمس الدين ، فلسفة العلوم ،مرجع سبق ذكره، ص 18.

[3]- فاضل سلامة شنطاوي، أسس الرياضيات و المفاهيم الهندسة الأساسية ،(ط1، دار المسيرة للنشر، الأردن 2008)، ص 25.

لقد حاول الرياضيون عبر مختلف العصور، البرهان على مسلمة التوازي، و محاولة تبسيط القضايا إلى قضايا ابسط و أوضح لكن محولاتهم باءت بالفشل.[1]

حيث نجد العالم الرياضي المسلم نصر الدين الطوسي في القرن الثاني عشر أول من استخدم البرهنة على صحة هذه المسلمة لكنه لم يستطع إبطال هذه المصادرة، لأن هناك ما يؤكد على صحتها نظرا لتمسكه بالفكر الإقليدي،و مع مطلع القرن الثامن عشر قدم بعض العلماء الرياضيين طرقا جديدة للبرهان هي الاستدلال بالخلف مع اعتقادهم بأن نفس المصادرة ستؤدي إلى الحصول على نتائج غير متناقضة لكن هذا لم يحصل مما عزز الاعتقاد بأن نظريات **اقليدس** مستقلة عن هذه المصادرة.[2]

غير أن الرياضيين في العصر الحديث، أثاروا جدلا واسعا حول الهندسات الإقليدية، حيث تمكن **لوباتشفسكي** (1792- 1856) من نقضها، و قال بأنه لو أمكن استنباط مصادرة اقليدس من البديهيات الأخرى، لأصبح الأمر بديها أي أنه إذا نفيناها و سلمنا ببقية البديهيات تلد بنا ذلك إلى نتائج متناقضة و من خلال هذا، لا يمكن تأسيس هندسة متناسقة على مثل تلك المسلمات.[3]

---

[1]- فاضل سلامة شنطاوي، أسس الرياضيات و المفاهيم الهندسة الأساسية، مرجع سبق ذكره، ص 25.

[2]- قدري حافظ طوقان: **العلوم عند العرب**، (ط2، دار القراءة، بيروت لبنان 1983)، ص 222.

[3]- هنري بوانكاري: **العلم و الفرضية**،تر: حمادي بن جاء الله،(مركز الدراسات الوحدة العربية،لبنان،1968 ص 116.

و بالإضافة إلى هذا لاحظ الرياضيين المعاصرين أن الهندسة الإقليدية غلب عليها الطابع المنطقي، أي أنها منطقية خالصة حيث قال **ليون برونشفيك** (1869- 1944)*: "لقد كان اقليدس للعديد من الأجيال الذين اتخذوا من مادته ربما أستاذ منطق أكثر مما كان أستاذ هندسة"، أي أن اقليدس كان يهتم بتدريس المنطق و إقحامه في المجالات الرياضية خاصة في الهندسة أي أنه كان يميل إلى المنطق أكثر منه إلى الهندسة ، و مع ذلك فإن الجهاز المنطقي الذي كان يدعم الهندسة الإقليدية لم يكن خاليا من العيوب.[1]

إن العناصر البسيطة و المبادئ التي يقوم عليها البرهان الرياضي عند اقليدس لم تكن واضحة في أذهان الرياضيين، و هذا ما دفع بهم إلى المضي في أبحاثهم، و غايتهم الوحيدة هي تطوير المبادئ و الأسس الرياضية، و السعي إلى تطوير الهندسة الإقليدية و محاولة تشييد هندسة جديدة تختلف تماما عن الهندسة الإقليدية.[2]

برانشفيك ليون (1869-1944) فيلسوف فرنسي من قادة الفكر الفلسفي في القرن العشرين، اشترك مع برجسون و بلوندال في مقاومة النزعة الآلية و الاتجاه صوبة النزعة الروحية. من مكتبه "مراحلة الفلسفة الرياضية 1913" تقدم الوعي في الفلسفة الغربية 1927، و العقل و الدين 1939.

[1] -روبيربلانشي: الأكسوماتيك، تر: د. محمد اليعقوبي (ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2004) ص 9.

[2] - المصدر نفسه، ص 10.

إن هذا التصور الجديد لمبادئ البرهان الرياضي أدى إلى تصور جديد للحقيقة الرياضية عموما و الحقيقة الهندسية خصوصا و هذا بفضل إدخال المنهج الأكسيوماتيكي في الهندسة أي صياغة الهندسة الإقليدية صياغة أكسيومية حديثة.[1]

[1]- محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ، مرجع سبق ذكره، ص 76.

المبحث الثاني: المصادرة الخامسة لإقليدس و الهندسات اللإقليدية

لقد نشأت الرياضيات من الخبرة الإنسانية، و تجردت عنها و هذا ما يفسر تطورها، و أنها إذا كانت تجريدا من الحس فليست تجريدا عاديا، بل تجريدا إبتكاريا لا يشبه ما يوجد في التجربة، كما أن بديهياتها ليست أحكاما قبلية و ليست وقائع تجريبية توشك أن تكون مواضحات بحسب تعبير **بوانكاريه***، و هكذا يمكن أن تصدق مصادرتها صدقا صارما. إن مسلمة التوازي التي جاء بها اقليدس كانت من أولويات الرياضيين المعاصرين في نقدها و يخصها، و هذا ما أسفر على قيام الهندسة اللاإقليدية التي أصبحت منطلقا جديدا بالاعتماد على المنهج الأكسيوماتيكي[1].

و ظلت مشكلة التوازي تشغل الرياضيين طوال ما يزيد على ألفي عام قبل أن يتم التوصل إلى حلها، فبعد حوالي عشرين عاما من وفاة **كانط***، اكتشف شاب مجري هو **جون بولييه** Bolyai (1792- 1856) أن بديهية التوازي ليست عنصرا ضروريا في الهندسة فشيد هندسة تخلى فيها عن بديهية التوازي، بمسلمته الجديدة و القائلة:

"إن هناك أكثر من موازي واحد لمستقيم معين من نقطة معينة" بالإضافة إلى هذه الهندسة ظهرت هندسات لاإقليدية أخرى مماثلة لها، ترفض الهندسة الإقليدية بشدة"[2].

هنري بوانكاريه :(1854-1912)* أحد أمهر العلماء الفرنسيين في مجال الرياضيات و الفيزياء النظرية.

[1] -صلاح قنصوة، فلسفة العلم، (مهرجان القراءة للجميع، مكتبة الأسرة– لبنان، 2002)، ص 210.

كانط : (1724-1804)* فيلسوف ألماني ويعتبر آخر فلاسفة عصر التنوير كتب أشهر شرح لتنوير لما أجاب عن سؤال ماهو التنوير.

[2] - المصدر نفسه، ص 211.

ثم ظهر بعده **لوباتشفسكي** (1792-1856) و بعده الرياضي الألماني ريمان.

إن الهندسة اللاقليدية تتميز بالدقة و الوضوح، كما أنه لا تنطوي على تناقض داخلي بل تبنى على نظام متسق و منسجم تسمح باستنباط نظريات جديدة و بصورة منطقية لا يشوبها الغموض و الشك.

إن من بين أهم النتائج التي أسفرت عليها قيام الهندسات اللاقليدية هو تغير نظرة الرياضيين المعاصرين إلى المبادئ التي يشيدون عليها صروحهم الرياضية، حيث اصبح التمييز في مبادئ البرهان الرياضي أمرا ثانويا خاصة البديهيات و المسلمات، بل أخذت جميعها كمجرد فروض أو منطلقات افتراضية دون سابق تأكيد لصحتها أو الاهتمام بالبرهنة عليها، إنها بتعبير **بوانكاري** مجرد مواضعات.[1]

إن المنهج الإكسيوماتيكي أعطى للهندسة اللاقليدية قيمة كبيرة و هذه الأخيرة اثبتت وجودها بفضله ، بحيث مكن العلماء و الرياضيين من المضي قدما إلى الأمام و ابتكار قواعد و مبادئ جديدة في المجال الهندسي و التخلي عن الهندسة الإقليدية.[2]

أ- هندسة لوباتشوفسكي (1792- 1856): لقد ظل **لوباتشفسكي** يقوم بتطوير هندسته طوال خمسة وعشرون سنة و كانت غايته هو البحث في أسسها و العمل على توسيعها فهو يرى أنه

[1]- هايز ريشمباخ: نشأة الفلسفة العلمية ، تر: فؤاد زكريا، (دار الكاتي العربي للنشر، القاهرة، 1978) ،ص 118.

[2]- المصدر نفسه، ص 119.

لو أمكن استنباط مصادرة أقليدس من البديهيات الأخرى للزم على ذلك بداهة، و أنه إذا ما نفيناها و سلمنا ببقية البديهيات لأدى إلى نتائج متناقضة، و انطلاقا من ذلك كان من الصعب تأسيس هندسة متناسقة على مثل تلك المسلمات، و هذا هو بالضبط ما فعله لوباتشوفسكي حيث افترض في البداية ما يلي: "يمكننا أن نرسم من نقطة ما، متوازيات عدة لمستقيم معطى".[1]

ثم أنه أبقى بالرغم من ذلك على جميع بديهيات اقليدس الأخرى و هو يستنبط من تلك الفرضيات سلسلة من المبرهنات يستحيل العثور على أي تناقض بينها، و هكذا يكون مجموع زوايا المثلث أصغر دائما من زاويتين قائمتين و يتناسب الفرق بين ذلك المجموع و زاويتين قائميتين مع مساحة مثلث، كما أنه يستحيل بناء شكله مشابه لشكل آخر معطى مع اختلاف الأبعاد إذا قسمنا محيط الدائرة إلى أجزاء متساوية عددها n و رسمنا مماسات من نقاط التقسيم شكلت تلك المماسات و عددها n مضلعا إذا ما كان شعاع الدائرة على درجة كافية من الصغر، أما إذا كان ذلك الشعاع كبيرا نوعا ما فإن المماسات لا تلتقي.[2]

إن جميع قضايا لوباتشفسكي لا علاقة لها مع قضايا اقليدس، غير أنها لا تقل تماسكا عنها، و هذا من وجهة نظر منطقية.

نشر لوباتشوفسكي سنة 1838 كتابا بعنوان الأسس الجديدة للهندسة ثم كتابا آخر بعنوان أبحاث هندسية حول نظرية التوازي و في سنة 1855 نشر أيضا كتابا آخر عرض فيه النسق الكامل

[1]- غاستون باشلار: الفكر العلمي الجديد، ترجمة عادل العوا و عبد الله عبد الدائم ،(ط2 المؤسسة الجامعية للدراسات و النشر و التوزيع، بيروت ، 1983)،ص 28.

[2]-هنري بوانكاريه ، العلم والفرضية ، ، مصدر سبق ذكره، ص 117.

لهندسته ، فمن خلال مؤلفاته أكد على نفي المسلمة الإقليدية الخاصة بالتوازي، كما أنه صاغ الهندسة صياغة أكسيومية مبنية على أساس عدم التناقض الداخلي كما أن هندسته في غاية الأهمية.

و الفرق بين الهندسة الإقليدية و هندسة لوباتشفسكية تتمثل في الأسس و المبادئ التي تمثل كل هندسة فكلتا الهندستين انطلقتا من فروض معينة.[1]

ب- هندسة ريمان (1826- 1866):

إن هندسته هي هندسة كروية تمتد على أقطار ثلاثة،و لقد اضطر هذا الرياضي الألماني لبناء هندسته هذه على اساس مصادرة اقليدس القائلة:" إنه لا يمكن أن يمر من نقطتين إلا مستقيم واحد، ثم إنه لا يمكن على وجه العموم تمرير أكثر من دائرة كبرى واحدة من نقطتين معطاتين على كرة ما"، بيد أنه ثمة استثناء، إذ يمكن في حالة ما إذا كانت النقطتان متقابلتان قطريا، تمرير دوائر كبرى لا متناهية العدد.

كما أن هندسة ريمان تنطلق من مبدأ ألا و هو "أنه لا يمر على وجه العموم من نقطتين إلا مستقيم واحد، إلا انه ثمة حالات استثنائية تمر فيها من نقطتين مستقيمات لا متناهية العدد. [2]

يمكن كذلك فهم هندسته أنه إذا اعتبرنا المكان كروي الشكل كالكرة الأرضية المجسمة التي يستعملها الجغرافيون لتحديد الأمكنة و البلدان بواسطة خطوط الطول و العرض، فالمستقيم في

[1]- هنري بوانكاري: العلم و الفرضية ،مصدر سبق ذكره ، ص117.

[2]- المصدر نفسه، ص 118.

هذه الحالة سيكون عبارة عن دائرة كبرى على سطح الكرة و معلوم أنه لا يمكن رسم موازن لهذا المستقيم من نقطة خارجة، أي دائرة أخرى لا تقاطع الدائرة الأولى.

و بناءا على هذا يمكن تمييز الهندسة اللوباتشفسكية و نموذجها هو السطح المحدب، أي أن المكان لدى لوباتفسكي لابد أن تكون فيه قيمة سالبة معينة تمثل مقياس المنحنى عند أي نقطة على أي سطح في ذلك المكان، و بالمثل يمكن تمييز الهندسة الريمانية و نموذجها السطح الكروي، أي المكان لدى ريمان لابد أن تكون قيمة موجبة معينة تمثل مقياس المنحنى عند أية نقطة على أي سطح في ذلك المكان، و منحنى الأمكنة لكليهما لابد أن يكون ثابتا.[1]

و من المهم أن ندرك أن" المنحنى" في معناه الأصلي ينطبق فقط على سطح نموذج إقليدي لسطح مستوي لا إقليدي إذ أن هناك أسطحا منحنية بهذا المعنى في الجسم الكروي و الجسم الكروي الزائف.

إن المصطلح "مقياس المنحنى" الذي ينطبق على الأسطح المستوية اللاقليدية، و بالإضافة إلى هاتين الهندستين هناك هندسات لاقليدية أخرى مثل: هندسة الرياضي الإيطالي **روبرتو بونولا،** تحتوي على مادتين كتبهما **بولياي و لوباتشفسكي**[2].

[1]- هنري بوانكاري: العلم و الفرضية ،مصدر سبق ذكره ، ص 119.

[2]- غاستون باشلار، الفكر العلمي الجديد، مصدر سبق ذكره، ص 30.

المبحث الثالث: أزمة الأسس في الرياضيات

لقد بدأت مشكلة أسس الرياضيات عندما بدأ البحث في مسلمة التوازي التي أسسها اقليدس، و إذا كان هذا البحث قد أدى إلى نتائج إيجابية تتلخص في ظهور هندسات جديدة ،فإن مشكلة الأسس بقيت مع ذلك مطروحة بحدة، و لقد ظل الاتصال أساس للتحليل حتى بعد أن تحولت الهندسة إلى جبر و لكن مع تقدم التحليل نفسه أدى إلى اكتشافات تفرض ذلك الأساس أي أن الاتصال الهندسي هو من نتائج هذه الاكتشافات (الدوال المنفصلة الخاصة).

و عندما لجأ الرياضيون إلى العدد لجعله أساسا جديدا للرياضيات بمختلف فروعها، و كانوا قد حققوا نجاحا مهما في رد مختلف الأعداد إلى العدد الصحيح، اصطدموا بمشكلة العدد نفسه. [1]

و أخيرا عندما ظهرت نظرية المجموعات التي من الممكن تأسيس الرياضيات عليها، و نجحت الرياضيات فعلا في استيعاب مختلف فروع العلم الرياضي و جمع شتاته و تحقيق الوحدة و الانسجام بين كافة أجزائه. و لكن بشكل عام تصنف وجهات النظر حول مشكلة الأسس هذه إلى ثلاث نزعات رئيسية و المتمثلة في النزعة المنطقية النزعة الحسية، النزعة الأكسيوماتيكية[2].

[1] - محمد عابد الجابري، مدخل الى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة وتطور الفكر العلمي ، مرجع سبق ذكره، ص 103.

[2] - المرجع نفسه، ص 104.

أ- النزعة المنطقية:

إن الرياضيات البحتة هي اختراع حديث، فإذا كان القرن التاسع عشر، قد تباهى باختراع البخار و الطاقة ، فقد كان يحق له أن يتباهى أكثر باختراع الرياضيات البحتة، إن هذا العلم كغيره من العلوم قد عمد قبل أن يولد على حد تعبير **راسل،** و لعل ما يقصده راسل بطبيعة الرياضيات البحتة هي تلك الصيغة المنطقية للرياضيات، أي إدماج المنطق بالرياضيات على وجه أصبح معه في الإمكان اشتقاق الرياضيات البحتة بأكملها من مقدمات منطقية و تصبح بذلك جزءا من المنطق لا يمكن فصلهما عن بعض.

لقد كانت الرياضيات و المنطق من الناحية التاريخية دراستين متمايزتين تماما، اذ ارتبطت الاولى بالعلم و الثانية باليونان، إلا أنهما قد تطورا عبر الأزمنة الحديثة حيث أصبح المنطق أكثر رياضة و أصبحت الرياضيات أكثر منطقية.

و من خلال هذا يستحيل تماما وضع خط فاصل بينهما، إنهما شيء واحد فالمنطق شباب الرياضيات و الرياضيات رجولة المنطق.[1]

فجميع قضايا الرياضيات البحتة تنفرد بالبحث و تشمله على تصورات منطقية أساسية و أن جميع قضاياها يمكن استخلاصها من مبادئ منطقية أساسية.[2]

[1]- محمد مهران، فلسفة بيرتراند راسل ،(دار المعارف، مصر، 2003)، ص 195.

[2]- بتراند راسل: أصول الرياضيات، تر: محمد مرسي أحمد ، و أحمد فؤاد الأهواني، (جامعة الدول العربية دار المعارف، مصر)، 1958، ص22.

إن الرياضيات عند راسل هي ذلك الموضوع الذي لا نعرف فيه ما نتحدث عنه، و لا ما إذا كان ما نقوله له صادقا أو كاذبا، فالرياضي لا يشغل نفسه بما إذا كانت نظرية معينة متحققة عن طريق التجربة أو غير متحققة بها، فنحن في الرياضيات البحتة لا نتحدث عن أشياء جزئية نقول أننا نعرفها كجزئيات، و لا ندعي أن ما نقوله يصدق بالفعل على العالم الواقعي، فتلك مهمة الرياضيات التطبيقية، و هذه العمومية تمكننا من معرفة خاصية من خصائص القضايا المنطقية و بذلك تكون طبيعة القضايا في العلمين واحدة، و هذا ما يؤكد إمكانية أن تكون الرياضيات مشتقة من المنطق[1].

و حينما يقدم راسل تعريفه للرياضيات البحتة، ندرك من الوهلة الأولى ذلك الطابع المنطقي للرياضيات "الرياضيات البحتة هي فئة جميع القضايا التي صورتها "ق" يلزم عنها "ك" حيث "ق"و"ك" قضيتان تشملان على متغير واحد أو عدد متغيرات هي بذاتها في القضيتين: علما بأن كل منهما "ق"، "ك" لا تشمل على ثوابت غير الثوابت المنطقية.

و تبعا لهذا الفهم في الرياضيات يمكن لكثير من المسائل التي كانت موضع جدل فلسفي أن تجد جوابا يمكن التحقق منه بيقين رياضي مثل طبيعة العدد و اللانهاية و المكان و الزمان و طبيعة الاستدلال الرياضي نفسه[2].

[1]- بتراند راسل،أصول الرياضيات،مصدر سبق ذكره ص 23.

[2]- محمد مهران، فلسفة بتراند راسل ، مرجع سبق ذكره، ص 201، 202.

و لما كانت الرياضيات البحتة التقليدية جميعها، بما في ذلك الهندسة التحليلية يمكن النظر إليها على أنها تتألف برمتها من قضايا الأعداد الطبيعية بمعنى أن الحدود التي نصادفها يمكن تعريفها عن طريق الأعداد الطبيعية و يمكن أن تكون نظرياتها مستنبطة من خواص تلك الأعداد مع إضافة قضايا المنطق لها و أفكاره في كل حالة. إن تحليل راسل للأعداد الطبيعية يمثل لنا محاولة رده الرياضيات إلى المنطق، و هو الهدف الذي من أجله وضع كتابة "أصول الرياضيات" و"برانكبيا" بمعنى اخر" ماتيماتيك" اللذان يعدان أكثر أعمال راسل أهمية. [1]

تتميز القضايا الرياضية عند راسل بخاصيتين أساسيتين الأولى، هي أنها جميع قضاياها تنحل إلى علاقات اللزوم المنطقي (إذ كان كذا.... نتج كذا)، و الثانية هي اشتمالها على متغيرات و على ثوابت منطقية.[2]

فالصلة بين الرياضيات و المنطق وثيقة جدا، كون ان جميع الثوابت الرياضية ثوابت منطقية بها تتعلق جميع المقدمات الرياضية، و التمييز بين هذين الأخيرين أمر اختياري، و إذ شئنا التمييز بينها فذلك يكون على النحو التالي: يتألف المنطق من المقدمات الرياضية بالإضافة إلى جميع القضايا الأخرى التي تعني فقط بالثوابت المنطقية، و بالمتغيرات التي لا تحقق التعريف الذي وضعناه للرياضيات.

[1] - محمد مهران، فلسفة بتراند راسل ،مرجع سبق ذكره، ص 205.
[2] _ محمد عابد الجابري ، مدخل الى فلسفة العلوم،مرجع سبق ذكره ،ص 106.

و الرياضيات تتكون من جميع المقدمات السابقة التي تقرر لزوما صوريا يشتمل على متغيرات بالإضافة إلى بعض تلك المقدمات ذاتها التي تحمل هذا الطابع و بناءا على ذلك تكون بعض المقدمات الرياضية مثل مبدأ القياس المنطقي كقولك "إذا كانت"ق" تلزم عنها "ك" و كانت "ك" تلزم عنها "ر" فإن "ق" تلزم عنها "ر" هي من الرياضيات، بينما البعض الآخر مثل "اللزوم" هو المنطق، وليس من الرياضيات،كما أن راسل يعرف الثابت المنطقي بأنه: شيء يبقى ثابتا في قضية حتى عندما نغير جميع مكوناتها.[1]

ب- النزعة الحدسية:

إن أهم نقطة جوهرية للاتجاه الحدسي أي المنطق لا يكفي وحده لعرض المسائل و القضايا الرياضية، هذا الاتجاه يتزعمه بروير إنه رفض اعتبار القضية صادقة إلا إذا كانت هناك طريقة لتقدير ذلك و العكس صحيح، أو بعبارة أخرى لا يمكننا أن نعتبر أن القضية صادقة أم كاذبة إلا إذا كانت هناك طريقة أو منهج معين ليبين أنها كذلك و بناءا على هذارفض الحدسيون قانون الثالث المرفوع، و هذا أساس نظريتهم. و يرتبط بهذا المذهب المسمى بالنهائية الذي شك في القضايا المشتملة على مجموعات لا نهائية على أساس أنها لا تقبل التحقق.[2]

كما أن هناك حدسيون كثيرون من بينهم بوانكاريه يرون أن الرياضيات لا تشتق من المنطق كما ذهب راسل بل تحتاج إلى مادة في مقابل الصورة،اي إلى تجربة من نوع خاص هي

[1]- محمد عابد الجابري: مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سبق ذكره، ص 106.

[2]- محمد مهران، فلسفة راسل، مرجع سبق ذكره، ص 203.

الحدس التجريبي، أما المنطق و الأكسيوماتيك فهما وسيلة لشرح واستعراض الكشوف الهندسية التي تقوم على الحدس دوما، بالإضافة أن ديكارت أيضا كان يقوم منهجه على أساس الحدوس و الاستنتاج، فالحدس عنده رؤية عقلية مباشرة لحقائق بسيطة، و من هذه الحقائق البسيطة نستنتج حقائق أخرى فأساس المعرفة عنده هو الحدس.[1]

إن المدرسة الحدسية تحاول أن تجعل مجال الرياضيات على ما يتصوره الخيال، و هي تقف ضد ما تعتبره نجاحا للصورية الحديثة، و قد أدى هذا عمليا إلى حذف بديهيات معينة، و الاقتصار على تلك البديهيات التي تظل في نظر الحدسيين شرعية، و على نحو واضح يجب اعتبار الحدسية بمثابة صورة للواقعية الرياضية، لكنها واقعية من نوع خاص جدا، يستطيع المرء أن يصفها بالقول : أنه يوجد هناك واقع رياضي مقبول من خلال الحدس و لكنه غير متأصل (أي يعطى مرة واحدة نهائيا على نحو حاسم و يوجد وحده مسقلا بذاته). [2]

و في مقابل ذلك، فإن الواقع هو ما ينسبه الرياضيون، تصاعديا و لنفترض سبيلا آخر فنقول: إن الواقع الابتدائي هو الكون الذي وجد بسببه البشر و من بينهم الرياضيون، و مهمتهم أن يزيدوا المحتوى الذكائي للكون. [3]

---

[1]- محمد مهران، فلسفة راسل ،مرجع سبق ذكره، ص 111- 112.

[2]_ رولان امنيس ،فلسفة الكوانتم،تر:احمد فؤاد باشا و يمنى طريف الخولي،(المجلس الوطني للثقافة و الفنون ، الكويت ،1990)،ص 171 .

[3]- المصدر نفسه ، ص 171.

إن الحديسة الجديدة تنطلق من مبدأ ألا و هو: أن جميع أنواع اللامتناهي تفلت من قبضة مبدأ الثالث المرفوع، فهو لا يصلح فيها و هذا ما ذكرناه سابقا، و لكنه يحتفظ بصلاحياته بالنسبة إلى المقادير النهائية، و قد تكون هناك أنواع من اللامتناهي لا يؤدي فيها المبدأ الثالث المرفوع إلى تناقض، و لكن مع ذلك فهذا لا يعني أن المبدأ صالح للتطبيق فيها حيث يرى بروير أنه إذا كان تطبيق مبدأ الثالث المرفوع لا يؤدي إلى تناقض فإنه لا يمكن اعتباره مشروعا، فالجريمة تبقى جريمة على الرغم من عدم تمكن التحقيق فيها و الكشف عنها و إثباتها. [1]

2- النزعة الأكسيومية:

من خلال هذه النزعة سوف نشير إلى كيفية معالجة هذه الخيرة لنقائض نظرية المجموعات، فبالنسبة إلى أنصار الصياغة الأكسوماتيكية فإن المجموعات لا يتم تعريفها إلا كما تعرف المجاهيل (س)، التي تستعمل في أوليات أية نظرية، تماما كما هو الشأن في المعادلات الرياضية المتعددة المجاهيل، و من ثمة تكون أمام مجموعات يمكن أن توضع مكان تلك المجاهيل و أمام أخرى لا تقبل ذلك. و بناءا على ذلك يرى **زرمولو** أنه من الممكن التغلب على النقائض دون التضحية بأي شيء من الرياضيات الكلاسيكية و دون اللجوء إلى تعقيدات منطقية، و الوسيلة إلى ذلك هي الانطلاق من عدد من المسلمات تسمح بتحديد مفهوم المجموعة بشكل لا يسمح ببناء المجموعات المتناقضة، في الوقت الذي يتيح لنا فيه إنشاء جميع المجموعات الضرورية[2].

---

[1]- محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سبق ذكره، ص 117.

[2]- المرجع نفسه، ص 116.

و المبدأ الأساسي الذي يجب أن نأخذه بعين الاعتبار و هو أن لا نقول بوجود مجموعة لمجرد أننا نعرف إحدى خصائص عناصرها، بل لابد من أن تكون جميع هذه العناصر منتمية أيضا إلى مجموعة سبق أن تقرر وجودها،و هكذا فالخاصية الواحدة لا تكفي وحدها في إنشاء مجموعة بل هي تمكننا فقط من التمييز بين هذه المجموعات التي تتوفر فيها الخاصية المذكورة و من عناصرها الأخرى التي لا تمتلك هذه الخاصية، أما عن أكسيوماتيك **هلبرت** فنجده أنه ألح على ضرورة الاستغناء تماما عن معاني الأوليات و ذلك أنه اعتبرها مجرد رموز تكتسب معاني من السياق الذي توضع فيه.[1]

و قد دشن هذا العالم الرياضي الكبير البحث في ميدان جديد هو ميدان ما بعد الرياضيات و هذا ما أدى إلى ظهور علم جديد يتضمن نفس الاسم، و موضوعه لا الكائنات الرياضية التي تتحدث عنها الرموز، بل الرموز و العبارات الرياضية نفسها بغض النظر عن معناها، و هذه الرموز و العبارات التي تنشأ للتعبير عن الكائنات الرياضية تصبح هي نفسها كائنات ذات طبيعة أصلية و جديرة بدراسة خاصة،إنه علم ما بعد الرياضيات إذا هو نسبة الرياضيات نفسها إلى موضوعاتها. [2]

[1]- محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سبق ذكره ، ص 117.

[2]- المرجع نفسه، ص 118.

إن مشكلة نقائض نظرية المجموعات، تم تجاوزه بفضل تقدم الأبحاث الأكسيومية التي أدت إلى قيام علمين جديدين هما: ما بعد الرياضيات، و ما بعد المنطق أصبحت الصياغة الأكسيومية الآن معتمدة لدى معظم الرياضيين النزعة المنطقية. [1]

[1]- محمد عابد الجابري، مدخل إلى فلسفة العلوم، مرجع سبق ذكره ، ص 118.

الفصل الأول: المنهج الأكسيوماتيكي

المبحث الأول: نشأة المنهج الأكسيوماتيكي

المبحث الثاني: المنهج الأكسيوماتيكي بين الخصائص والشروط

المبحث الثالث: أهمية المنهج الأكسيوماتيكي

الفصل الثاني: مشكلة التوازي والهندسات اللاإقليدية

المبحث الأول: الهندسة الإقليدية

المبحث الثاني:المصادرةالخامسةلإقليدس والهندسات اللاإقليدية

المبحث الثالث: أزمة الأسس في الرياضيات

الفصل الثالث: أثر الصورنة في الرياضيات

المبحث الأول: الصورنة في الهندسة

المبحث الثاني: الصورنة في الجبر

الفصل الثالث: أثر الصورنة في الرياضيات

المبحث الأول: الصورنة في الهندسة

على الرغم من أن الرياضيات تعد النموذج الأعلى لليقين، إلا أننا نجد أن الفلاسفة قد اختلفوا كثيرا حول منبع هذا اليقين، فذهب فريق منهم للقول بأن أساس ذلك اليقين يرجع إلى الحدس المكاني لنجد فريقا آخر يقول بأن أساسه الإعداد، في حين يذهب تعريف آخر للقول بأن ذلك اليقين يرجع إلى عدد من المفاهيم المنطقية، و من الذين قالوا بالأساس المكاني الواضعي لليقين الرياضي، نجد الفيلسوف الرياضي اليوناني **إقليدس**، لذلك كانت مقدمات نسق إقليدس الهندسي مطابقة للواقع و لم تكن مجرد مقدمات افتراضية، فالهندسة عنده لم تهتم فقط بالبرهنة على النظريات، و إنما اهتمت أيضا بالمضمون المادي للمقدمات، و الذي هو مضمون مطابق للواقع الخارجي.

لكن مع تحرر الرياضيات و لاسيما الهندسة من الأشكال المكانية و جاء ذلك نتيجة التمييز بين الهندسة النظرية البحتة و الهندسة الفيزيائية، و قد ظهر هذا التمييز نتيجة لظهور الهندسات اللاقليدية التي بينت أن الحدس المكاني لم يعد يصلح أساسا لليقين الرياضي، على اعتبار أنه أصبح لدينا عدة هندسات لا تستند على حدس مكاني واحد.[1]

[1]- فايز فوق العادة، منعطف الرياضيات الكبير، (منشورات وزارة الثقافة ، دمشق، 1987)، ص 30.

و يعود ظهور الهندسات اللاقليدية الكثيرة إلى محاولات الرياضيين لإثبات أن المسلمة الخامسة في نسق اقليدس الهندسي، ليست مسلمة واضحة بذاتها، و إنما مبرهنة يمكن البرهنة عليها عن طريق المسلمات الأخرى، إذ إثبات أنها مستقلة عن المسلمات الأخرى للنسق، و أنه يمكن البرهنة على مبرهنات اقليدس دون الحاجة إلى الاستعانة بهذه المسلمة[1].

و قد أقيم البرهان على أن هذه المسلمة مستقلة و لا تتمتع بالوضوح الذاتي، عن طريق البرهان بالخلف الذي يقوم على وضع مسلمة أخرى تنكر المسلمة الخامسة، ضمن النسق الإقليدي و إذ لم يكن كذلك فإن المسلمة الخامسة غير إقليدية عن النسق الإقليدي، أما النتيجة غير المتوقعة الناتجة عن اعتبارات **لوباشوفسكي** و **ريمان** و **بولياي**، لمسلمة اقليدس الخامسة، أنها مستقلة عن النسق الإقليدي و يمكن استبدالها بعدد لا متناهي من المسلمات يؤدي إلى عدد لا متناهي من الهندسات.[2]

إن الأمر الذي جعلنا نتوقف مطولا عند هذه النتيجة، هو التحولات الكبيرة التي حدثت في توجهات الهندسة خلال القرن 19 بحيث أخذ الرياضيون يتخلون عن البحث التقليدي الهندسي و الذي كان يحدث عن مطابقة النسق الهندسي مع الواقع الخارجي و مدى وضوح مسلماته بذاته،اذ بالبحث عن مدى اتساق الأنساق الهندسية مع نفسها، فقد اتضح للرياضيين أنه يمكن أن يكون هناك عدد كبير من الهندسات عن طريق تقديم مجموعة مختلفة من المسلمات، و بالتالي

[1] - فايز فوق العادة،منعطف الرياضيات الكبير، مرجع سبق ذكره ، ص 30.

[2] - برتراند راسل، أصول الرياضيات، تر: محمد مرسي أحمد و أحمد فؤاد الأهواني، ج4، (دار المعارف، القاهرة، 1964)، ص 08.

لم يعد يهتم الهندسي سوى بالاتساق بين المسلمات و أن يكون النسق الهندسي قادرا على البرهنة على كل المبرهنات الممكنة ضمن النسق.[1]

هكذا أصبح علم الهندسة يقوم على الهندسات الممكنة أو المفترضة و لم يعد يعني بمدى مطابقة النسق الهندسي للواقع الخارجي، و هذا يعني أن الهندسة تحولت إلى علم يبحث بالمجردات و الافتراضات و الشروط المنطقية للاتساق، فقد أصبح لكل هندسة تصورها المتخيل للمكان و لم تعد تستمد يقينها من الأشكال الهندسية المكانية المرتبطة بالواقع.[2]

و بالتالي فقد أصبحت الهندسة مستقلة عن المكان، الشيء الذي أدى إلى فقدان يقينها، و دفع بذلك إلى البحث عن أساس جديد تبنى عليه الهندسة يقينها، و قد وجدت الهندسة في البناء المنطقي للنسق الهندسي أساس جديدا لليقين، فإذا كنا نقبل بالأنساق الهندسية قديما لأنها متطابقة مع المكان المتاح لنا، فإننا اليوم نقبلها فقط دائما منسقة منطقيا مع نفسها.

فقد أصبح واضحا لدى جميع الرياضيين أن قوة النسق ترتبط بمدى التزامه بالشروط المنطقية للأنساق، و أن هذا الالتزام هو الكفيل بمنح النسق صفة اليقين و يمكن تحديد الشروط المنطقية للأنساق بالنقاط التالية:

أ- تحويل الكائنات الهندسية إلى فئات منطقية فالهندسة النظرية لم تعد تستخدم ألفاظ النقطة و المستقيم و السطح، و إنما أصبحت تسير إلى هذه الكائنات عن طريق الرموز أو المتغيرات،

[1]- برتراند راسل، أصول الرياضيات ، مصدر سبق ذكره، ص 8.

[2]-المصدر نفسه، ص 9-8.

كما أصبحت تشير إلى العلاقات بين الكائنات الهندسية بالثوابت المنطقية، كاللزوم و العطف و النفي و الفصل و التكافؤ.[1]

ب- إن مسلمات أي نسق هندسي يمكن اختيارها بشكل حر و حسب ما تمليه إرادة الهندسي، شريطة أن تختصر المسلمات إلى أقل عدد ممكن بحيث لا يجوز استنتاج مسلمة من مسلمات النسق من أي مسلمة أخرى.

ج- لا يجوز أن تتناقض المسلمات مع بعضها البعض بحيث لا يمكن النسق أن يبرهن على قضية و نقيضها في نفس الوقت.

د- لا بد للنسق أن يكون مكتملا و يستطيع البرهنة على جميع المبرهنات الممكنة في النسق. [2]

هكذا ظهرت عشرات الأنساق الهندسية بل أصبح لكل هندسي نسقه الخاص الذي يقيمه لحل مشكلة هندسية ما، أو لإقامة مسألة هندسية ما، بحيث أصبحت الأنساق الهندسية هي الطريقة للتفكير الهندسي و الرياضي عموما، إذ يقوم الهندسي باختيار حدوده الأولية و مسلماته و تعريفاته ثم يشرع بعد ذلك في اشتقاق المبرهنات من تلك المسلمات و التعريفات، و ما يهمنا من مجمل تلك التطورات السابقة مجموعة من النقاط تتمثل فيما يلي:

[1]- محمد ثابت الفندي، فلسفة الرياضة ، مرجع سبق ذكره ، 70- 71.

[2]- زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس درلسة تحليلية ابستيمولوجية ، مرجع سبق ذكره ، ص218.

1- أصبحت الهندسة علما نظريا بحتا يدرس الكائنات و العلاقات المنطقية البحتة بعيدا عن الأشكال المكانية عن طريق تحويل المسلمات و الحدود الهندسية الحدسية إلى كائنات منطقية، و هذا يعني أن النظريات الرياضية لم تعد تختبر مثل النظريات الفيزيائية بالاشتقاق بل يتم مقارنتها مع نتائج الملاحظات الواقعية.[1]

2- لم يعد يوجد هندسة أصدق من هندسة أخرى، أو هندسة أكثر وضوحا من هندسة أخرى و إنما أصبحت كل الهندسات متساوية تقام على مسلمات مفترضة يختارها صاحبها بشكل حر، و هذا يعني أن مضمون مسلمات النسق لم يعد يحتل مكان الصدارة في الهندسة فقد تحولت الصدارة للعلاقات المنطقية التي تربط المسلمات و المبرهنات.[2]

فالهندسة لم تعد تدرس الكائنات الهندسية بل أصبحت تدرس منظومة العلاقات التي ينسجها المنهج على الأولويات ... لقد تحول الاهتمام من الأوليات إلى الدور الذي تلعبه هذه الأوليات في البناءات الأكسيومية.[3]

[1]- زبيدة مونية بن مسي ، فلسفة الرياضة عند جان كفاييس درلسة تحليلية إبستيمولوجية ،مرجع سبق ذكره ، ص219.

[2]- محمد عابد الجابري، تطورات الفقه الرياضي و العقلانية المعاصرة، ج1،(دار الطليعة، بيروت، 1982)، ص 134.

[3]- المرجع نفسه، ص 134.

3- تلاشي الاختلاف بين البديهيات و المسلمات في الأنساق الهندسية الحديثة فالهندسة الإقليدية كانت تفرق بين البديهيات و المسلمات حيث أن البديهيات قضايا واضحة بذاتها كل الوضوح و لا يمكن البرهنة عليها كما القول الكل أكبر من الجزء.

أما المسلمات فهي قضايا ليست واضحة بذاتها كل الوضوح و لكننا مطالبين بالتسليم بها لنتوصل من خلالها إلى البرهنة على المبرهنات، فالمسلمات تشبه الفروض التي إذا سلما بها كان علينا أن نسلم أيضا بالنتائج المترتبة علنها.

أما مع الأنساق الهندسية الاقليدية فقد تحولت البديهيات إلى مسلمات و لم يعد هناك فرق بين الاثنتين لأن الأنساق الهندسية اللاقليدية لم تعد تنطلق من بديهيات واضحة بذاتها و إنما من مسلمات مفترضة فقط تشكل نقطة بداية تسبق. فقد اتضح مع اكتشاف الهندسات اللاقليدية أن البديهيات هي في الحقيقة صادقة بشكل ضروري و أنها قد تكون مبرهنات في أنساق أخرى و لذلك أثرت الهندسة التخلي عن البديهيات بوصفها قضايا واضحة بذاتها و الاكتفاء بالقول بالمسلمات كنقطة بداية لأي نسق تريد أن تقيمه.

ففي الهندسة لم يعد مهما أن ننطلق من قضايا واضحة بذاتها أو غير واضحة بذاتها بل المهم أن تكون هناك نقطة بداية للنسق و مسلمات يمكن أن تبنى على أساسها نسقا منتجا، و ذلك من خلال الاهتمام بالناحية الصورية للترابطات الموضوعية ضمن النسق الرياضي. [1]

[1]- محمد عابد الجابري، تطورات الفقه الرياضي و العقلانية المعاصرة، مرجع سبق ذكره،ص134.

المبحث الثاني: الصورنة في الجبر

إن البحوث الرياضية التي قنعت بالأعداد كأساس لليقين الرياضي سرعان ما تخلت عن العدد بوصفه موجودا أوليا، و أخذت تبحث عن الحدود الأولية التي يستشكل منها العدد لكي تؤسس منطقيا و رياضيا لفكرة العدد.

فالرياضيات التي كانت تقف عند العدد بوصفه أساسا لليقين و كائنا بديهيا بذاته يحتاج إلى تحليل لما هو أبعد منه أخذت تبحث في إمكانية اشتقاق الأعداد من أفكار و ثوابت أولية، و قد بدأ الرياضيون باشتقاق الأعداد الطبيعية لأنها أبسط الأعداد، كما تطلبت مسألة الاشتقاق العدد من كائنات أولية نسقا استنباطيا خاصا بالعدد. و من أهم المحاولات التي اشتقت مفهوم العدد الطبيعي من مجموعة من الأفكار الأولية و المسلمات، هناك محاولة الرياضي الإيطالي **بيانو*** و يقوم نسق بيانو للأعداد الطبيعية على النحو التالي:[1]

أ- الأفكار الأولية و هي ثلاثة: الصفر، العدد، التالي.

ب- المسلمات: و هي خمس مسلمات:

- الصفر عدد

بيانو(1855-1932) *: فيلسوف رياضي إيطالي تخصص في الرياضيات وكان يؤمن بأنها هي مصدر العلوم.

[1]- برتراند راسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، تر محمد مرسي أحمد، (مؤسسة سجل العرب، القاهرة، 1980)، ص 7.

- التالي لأي عدد عدد

- ليس لعددين نفس التالي

- الصفر ليس تاليا لأي عدد

- إن أي خاصية عندما تعود إلى عدد ما فإنها تعود إلى تالي ذلك العدد، و تعود إلى كل الأعداد.

و بواسطة كل هذه الأفكار الأولية و المسلمات يمكن لأي رياضي أن يقيم سلسلة لا متناهية لأعداد الطبيعية، بحيث تبدأ السلسلة بالصفر ثم تعرف الواحد بأنه تالي للصفر، و العدد 2 بأنه تالي للواحد... و بذلك نحصل على أعداد جديدة كلما تقدمنا في السلسلة.[1]

و بالرغم من أن نسق بيانو كان نسقا محكما و محققا لمتطلبات الدقة الرياضية، إلا أن بيانو و معه فريجه رفضا ذلك النسق لأنه يميز بين العدد صفر و باقي الأعداد و لأنه لا يستطيع تعريف العدد اللانهائي و لا يعرف العدد صفر.

و لذلك حاولا إقامة العدد على أسس جديدة أو اختيار أفكار أولية غير أفكار الصفر و العدد التالي، و قد وجد أن هناك بعض الأفكار الأولية المنطقية جديرة بأن تكون أفكار أولية للعدد و هي أفكار ابسط من الأفكار الأولية في نسق بيانو.[2]

[1]- برتراند راسل ، مقدمة للفلسفة الرياضية ،مصدر سبق ذكره ، ص 20.

[2] -المصدر نفسه ،ص 21.

و لقد قامت عملية رد الأعداد إلى المفاهيم منطقية خالصة على شكل نسق استنباطي، يضع تلك المفاهيم كأفكار أولية، بحيث لا يحتاج في هذا النسق إلا إلى المفاهيم و القواعد المنطقية فقط، فبدلا من رموز بيانو التي كانت تشير إلى كائنات رياضية بحيث:

س تشير إلى صفر

ع تشير إلى عددس1 تشير إلى تالي

أصبح بالإمكان تفسير تلك الرموز بطريقة مختلفة، بحيث يمكن أن يشير أي عدد سواء كان صفر أو 1 أو 2 أو 3 ... إلى فئة الفئات المتشابهة ليصبح العدد 1 فئة الفئات التي تحتوي على عضو واحد، و العدد2 فئة الفئات التي تحتوي على عنصرين... و يصبح العدد صفر فئة الفئات الخالية من أي عضو، أما مفهوم العدد فإنه فئة كل الأعداد و بذلك فإنه فئة من المرتبة الثالثة[1].

و يستخرج راسل مفهوم الفئة من التشابه بحيث تشكل كل مجموعة متشابهة فئة، و لذلك فإن كل عدد هو فئة كل الفئات المتشابهة الثنائية أو الثلاثية أو الرباعية أو الخماسية... أو هو فئة كل الفئات التي تمتلك خاصية التشابه.[2]

[1]- برتراند راسل، مقدمة للفلسفة الرياضية، مصدر سبق ذكره، ص ص 22-23.

[2]- كريم متى، المنطق الرياضي، (مؤسسة الرسالة، بيروت، 1979)، ص 195.

و هكذا تمكن راسل من تحويل الحدود الأولية للعدد من كائنات رياضية إلى كائنات منطقية هي الفئة و الشبه، و الفئة و الشبه و الخاصية هي مفاهيم منطقية خالصة أو تراكيب منطقية.[1]

لأنها من ابتكار العقل البشري عندما يحاول تنظيم أشياء العالم في مجموعات و لذلك فإنه ليس للفئة وجود موضوعي مستقل عن العقل الذي ابتكرها. كما هو حال الأشياء التي تنتظم في فئات. فالفئة هي مجرد وسيلة لغوية للتحدث عن مجموعة من الأشياء دون أن تؤلف شيئا بالإضافة إلى الأشياء.[2]

و إذا كان تحويل الأعداد إلى كائنات منطقية أدى إلى أ، كل الرياضيات أصبحت تستند إلى مقدمات منطقية، فإن الاهتمام بالفئات هي تجسيد لتداخل المنطق و الرياضيات، لأنها نظرية منطقية و رياضية بنفس الوقت، و لذلك فإننا نجد عشرات الصياغات المنطقية و الرياضية لحساب الفئات أما حساب راسل للفئات فيتألف من:[3]

أ- الحدود الأولية: الفئة، الفئة الفارغة، الفئة الشاملة، ثوابت الجمع المنطقي و الضرب المنطقي و المساواة و الانتماء... بالإضافة إلى متغيرات الفئات س، ع، ص...إلخ، و متغيرات العناصر أ و ب و ج.

ب- التعريفات: نجد:

[1]- كريم متى ،المنطق الرياضي، مرجع سبق ذكره،ص 195.

[2]- المرجع نفسه ، ص 195.

[3]- المرجع نفسه ،ص196.

- تعريف التضمن

- تعريف الضرب المنطقي

- تعريف الجمع المنطقي[1].

ج- المسلمات: الهدف من هذه المسلمات المساعدة على اشتقاق المبرهنات.

د- قواعد الاستنباط.

1- قاعدة الاستبدال: و هي قاعدة يمكن من خلالها أن تحول صيغة ما إلى صيغة مكافئة لها بحيث تنتج صيغة جديدة نريد البرهنة عليها، إذ يمكن عن طريق هذه القاعدة استبدال الصيغة: (س x ع) = (ع xس) بالصيغة الرياضية:

(4 x 6) = (6 x 4)

2- قاعدة الاستدلال: بموجب هذه القاعدة، إذ كان لدينا صيغة ما و لتكن "ف" و كانت "ك" تلزم عنها، كان من الممكن أن نستبدل على "ك" و نحذف "ف" أي أن نكتفي بنتيجة اللزوم دون ذكر مقدمة اللزوم.[2]

هكذا يكون نسق الفئات جاهز للبرهنة على النظريات بنفس الطريقة التي تجري بها عملية البرهنة في الأنساق الهندسية. و نحن تناولنا حساب الفئات لكي نبين أن تحويل الأعداد إلى

[1]- محمد مهران ،فلسفة برتراند راسل،مرجع سبق ذكره،ص 207.

[2]- فايز فوق العادة، منعطف الرياضيات الكبير، مرجع سبق ذكره ، ص 75.

فئات و تقديم حساب الفئات على شكل نسق استنباطي شكلا الجسر الذي عبر عليه المنطق إلى الرياضيات.[1]

و هذا يعني أن كل فروع الرياضيات حققت وحدتها في كل يجمعها أولا، و يعني ثانيا أن حدود بين المنطق و الرياضيات أصبحت حدود غير واضحة، لأن الرياضيات بأكملها أصبحت تقوم على المنطق الرمزي[2].

و لم نجد أن راسل لم يقتصر في عملية دمج المنطق و الرياضيات مع بعضهما على تقديم حساب الفئات، بل إننا نجده يقيم نظريات منطقية جديدة عن طريق أنساق استنباطية شبيهة بنسق الفئات، و هكذا نجد أن العلاقة بين الرياضيات و المنطق الصوري المعاصر نشأت من الطريق البديهية في الهندسة. [3]

أي من الطريقة الأكسيوماتيكية أو الأنساق الاستنباطية و لذلك فإن راسل يعد من أكبر المؤسسين لهذا المنطق لأنه أول من صاغ نسقا منطقيا بدون أية دلالة إلى التعيين، و لأنه أهم من أسس الاندماج بين المنطق و الرياضيات.

[1] -برتراند راسل ، أصول المنطق الرياضي ،تر:محمد مرسي و أحمد فؤادالأهواني،(جامعة الدول العربية، ط1 ،1958) ج1 ، ص 33.

[2] - المصدر نفسه ، ص 33.

[3] _ محمد مهران ،فلسفة بتراند راسل ،مرجع سبق ذكره،ص 208.

الخاتـــمة

خاتمة

لقد كان للمنهج الأكسيوماتيكي دورا كبيرا في تطوير الرياضيات ، وتغيير مبادئها وأسسها الكلاسيكية ، فبفضله ظهرت عدت نظريات جديدة .

إن الحركة الأكسيوماتيكية أثبتت فاعليتها منذ مطلع القرن العشرين ، بحيث تم اكسمة الهندسة نتيجة ظهور الهندسات اللاإقليدية والذي كان واضحا خاصة في هندسة ريمان و لوباشوفسكي،بالإضافة إلى أكسمة الجبر ذلك من خلال تأكيد دور الرمز في العمل الرياضي ،أضف الى ذلك استخدام الصيغ المركبة و الحروف الأبجدية و الرموز الإجرائية كـــ (+)و (_)،وهذا أصبح العمل الرياضي يعتمد على الأشكال و الصيغ و الرسم.

ولم يكن هذا المنهج محصورا فقط في ميدان الرياضيات ، بل نجده أيضا في ميدان الفيزياء والعلوم التجريبية و التي بلغت درجة عالية من التجريد ، فلا أحد ينازع في كون أن هذا المنهج هو أحد الأركان الرئيسية التي قامت عليها الثورة العلمية المعاصرة .

وهنا يمكن الإشارة إلى جوانب الحصيلة العلمية و الفلسفية للمنهج الأكسيومي وإمكانية تطبيقه في مجالات المعرفة البشرية .

إن تطبيق هذا المنهج في المجال الرياضي جعله يتميز بالدقة و الوضوح ، ولعل أهم مايميزه هو قيامه على التجريد ، فبفضل هذا الأخير أصبح الفكر الرياضي خصب وذلك لأنه يختصر تشعب العلاقات في مبادئ قليلة مضبوطة بدقة وقابلة للتعميم .

قائمة المصادر والمراجع

قائمة المصادر و المراجع :

المصادر :

_ بوانكاريه هنري ،العلم و الفرضية،تر:مركز الدراسات الوحدة العربية،لبنان،1968.

_ بول موي ،المنطق و فلسفة العلوم،تر: فؤاد حسن زكرياء،دار النهضة،القاهرة.

_ راسل برتراند ،اصول الرياضيات،تر:محمد مرسي أحمد و أحمد فؤادالاهواني،جامعة الدول العربية ،دار المعارف،مصر،1958 .

_ راسل برتراند ،أصول المنطق الرياضي،ج1،تر:حمادي بن جاء الله،مركز الدراسات الوحدة العربية ،لبنان،1968.

_ راسل برتراند ،مقدمة الفلسفة الرياضية،تر:محمد مرسي أحمد،مؤسسة سجل العرب، القاهرة ،1980 .

_روبير بلانشيه ،الأكسيوماتيك،تر:محمد يعقوبي،ط3،ديوان المطبوعات،الكويت،1977.

_ رولان أومنيس ،فلسفة الكوانتم،تر: أحمد فؤاد باشا،المجلس الوطني للثقافة و الفنون و الادب ،الكويت،ط1 ،1978.

_ ريشمباخ هايز ،الفكر العلمي الجديد،تر:عادل العوا و عبد الله عبد الدائم،ط2،المؤسسة الجامعية للدراسات و النشر والتوزيع،بيروت،1983.

المراجع:

_ جلال شمس الدين ،فلسفة العلوم،مؤسسة الثقافة الجامعية ،الإسكندرية،2004 .

_ صلاح قنصوة ،فلسفة العلم،مكتبة الأسرة ،لبنان، 2002.

_ فاضل سلامة شنطاوي،أسس الرياضيات و المفاهيم الهندسيةالأساسية،ط1،دارالمسيرة للنشر،الأردن،2008.

_ حافظ طوقان قدري،العلوم عند العرب ،ط2،دار القراءة،بيروت،1983.

_ كريم متى ،المنطق الرياضي،مؤسسة الرسالة،بيروت،1979.

_ محمد ثابت الفندي،فلسفة الرياضة،ط1،دار النهضة العربية،بيروت،1969.

_ محمد جواد،مذاهب فلسفية و قاموس المصطلحات،دار الجواد ،بيروت.

_ محمد عابد الجابري،تطورات الفقه الرياضي و العقلانية المعاصرة،ج1،دارالطليعة،بيروت ،1982.

_ محمد عابد الجابري،مدخل إلى فلسفة العلوم العقلانية المعاصرة و تطور الفكر العلمي،ط1 ،مركز الدراسات الوحدة العربية ،بيروت،1976.

_ محمد مهران،فلسفة بيرتراند راسل،دار المعارف،مصر،2003.

المعاجم :

_ إبراهيم مذكور،المعجم الفلسفي،الهيئة العامة للشؤون المطابعالاميرية،مصر،1989.

_ أندريه لالاند، موسوعة لالاند الفلسفية، مجلد1،ط1،بيروت،2001.

_ جميل صليبا ، المعجم الفلسفي، ج1 ،دار الكتاب اللبناني، بيروت،1982.

_ عبد الرحمان بدوي،مناهج البحث العلمي،ط3،وكالةالمطبوعات،الكويت،1977.

المنشورات:

_ فايز فوق العادة ،منعطف الرياضيات الكبير،منشورات وزارة الثقافة،دمشق،1987.

الرسائل الجامعية:

_ زبيدة بن مسي،فلسفة الرياضة عند جون كفاييس دراسة تحليلية ابيستمولوجية،رسالة مقدمة لنيل شهادة دكتوراه العلوم في الفلسفة،جامعة منتوري قسنطينة،2007-2008.

المواقع الإلكترونية:

_www .fr.wikipidia /org.

_www.startimes.com.

الفهارس

فهرس الأعلام

حرف الألف

ابراهيم مذكور 11 .

إيمانويل كانط 34 .

اينشتاين 18 .

أفلاطون 6 .

اقليدس 6،8،17،29،30،31،32،34،36،49،50.

أرسطو طاليس 6 .

حرف الباء

بوانكاريه 34،35،44.

بيانو 55،56.

برونشفيك ليون 32.

حرف الجيم

جون بولييه 34،39،50 .

حرف الدال

دفيد هلبرت 9،15،17،18،19،20،21،23،46.

حرف الزاء

زرمولو45.

حرف الميم

موريس باش 14.

حرف النون

نيكولاي لوبا شفسكي17،31،35،36،37،38،39،50.

نصر الدين الطوسي 31.

حرف العين

عامر مصباح 11.

جون كفاييس 13،16،21،23.

جميل صليبا 11.

حرف الراء

راسل بيرتراند 25،40،41،42،43

44،57،58،60.

روبير بلانشي 27.

روبرتو بونولا 39.

عبد الرحمان بدوي 11.

ريمان 17،18،37،38،50.

مقدمة .....أ_د.

الفصل الأول : المنهج الأكسيوماتيكي ..... ص 6.

المبحث الأول : نشأة المنهج الأكسيوماتيكي..... ص 6.

المبحث الثاني : المنهج الأكسيوماتيكي بين الخصائص و الشروط.....ص11.

المبحث الثالث : أهمية المنهج الأكسيوماتيكي.....ص22.

الفصل الثاني : مشكلة التوازي و الهندسات اللاإقليدية..... ص29.

المبحث الأول : الهندسة الإقليدية .....ص29.

المبحث الثاني : المصادرة الخامسة لإقليدس و الهندسات اللاإقليدية .....ص34.

المبحث الثالث : أزمة الأسس في الرياضيات .....ص39.

الفصل الثالث : الصورنة في الرياضيات ..... ص49 .

المبحث الأول : صورنة الهندسة .....ص49.

المبحث الثاني : صورنة الجبر .....ص55.

خاتمة ..... ص62.