



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE BOUIRA



FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUEES  
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PREPARE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME  
DE MASTER EN PHYSIQUE

OPTION

Physique théorique des Hautes Energies

THEME

---

**Processus Stochastiques et Equation  
Maitresse de Fokker- Planck**

---

**Présenté par:** BENGHERABI Khadra

Soutenu publiquement, le...../...../.....,

Devant le jury:

<b>Président :</b>	MADI Djamel	M.C.A	Université de Bouira
<b>Rapporteur :</b>	SADOUN Mohamed Ameziane	M.C.B	Université de Bouira
<b>Co-rapporteur:</b>	BEDDEK Said	M.A.A	Université de Bouira
<b>Examineurs :</b>	BENAICHE Salim	M.A.A	Université de Bouira
	BOUDREF Mohamed Ahmed	Docteur	Université de Bouira
<b>Invitée :</b>	BOUCHEMLA Nedjma	M.A.A	Université de Bouira

ANNEE UNIVERSITAIRE 2015/2016

# Table des matières

Dédicace

Remerciements

<b>Introduction Générale</b>	<b>1</b>
<b>1 Processus Aléatoire</b>	<b>2</b>
1.1 Introduction .....	2
1.2 Processus Aléatoire .....	2
1.2.1 Définition .....	2
1.2.2 Processus discrets et processus continus.....	5
1.2.3 Processus aléatoire stationnaire.....	6
1.2.4 Caractéristiques des processus aléatoire.....	7
1.3 Variable aléatoire.....	7
1.3.1 Définition.....	7
1.3.2 Exemples de variable aléatoire .....	8
1.4 Probabilités conjointes et conditionnelles .....	9
1.4.1 Probabilités conjointe.....	9
1.4.2 Probabilité conditionnelle .....	9
1.5 Conclusion.....	10
<b>2 Processus de Markov</b>	<b>11</b>
2.1 Introduction .....	11
2.2 Définition.....	11
2.3 Types de processus de Markov .....	13
2.3.1 Espace d'états discret .....	13
2.3.2 Espace d'états continu .....	13
2.4 Processus stochastiques markoviens en temps continu .....	14
2.4.1 Processus de Poisson .....	14
2.4.2 Processus markoviens avec sauts.....	15
2.5 Equation de Chapman-Kolmogorov.....	16
<b>3 Mouvement Brownien et Modèle de Langevin</b>	<b>19</b>
3.1 Introduction historique sur le mouvement brownien .....	19
3.2 Modèle de Langevin.....	23
3.2.1 Equation Langevin.....	23
3.3 Mouvement brownien et processus de Markov.....	24
3.3.1 Diffusion d'une particule libre .....	24
3.3.2 Vitesse.....	25
3.3.3 Déplacement.....	25
<b>4 Equations maitresses</b>	<b>27</b>
4.1 Introduction .....	27
4.2 Equation maitresse.....	28
4.3 Equation de Fokker-Planck.....	29
4.4 Comparaison entre l'équation maitresse et l'équation de Fokker-Planck .....	32
4.5 Conclusion.....	33
<b>5 Applications</b>	<b>34</b>
5.1 Marche aléatoire.....	34

5.1.1 Probabilités de transition conditionnelle .....	35
5.1.2 Convergence vers le mouvement brownien et équation de Fokker-Planck.....	36
5.1.3 Solution de l'équation de Fokker-Planck.....	37
5.1.4 La valeur moyenne.....	37
5.2 Processus de naissances et de morts.....	38
5.2.1 Processus de naissances.....	39
5.2.2 Processus de morts.....	43
5.2.3 Processus de naissances et de morts .....	46
5.3 Particules dans un champ électrostatique/magnétique.....	50
5.3.1 Particules dans un champ électrostatique.....	50
5.3.2 Particules dans un champ magnétique.....	55
<b>Conclusion Générale</b>	57
<b>Bibliographie</b>	58
<b>Résumé</b>	
<b>Abstract</b>	
<b>ملخص</b>	

## *Dédicace*

*Je dédie ce modeste travail à :*

- *La mémoire de mon père, qui nous a quittés à jamais que dieu l'accueille dans son vaste paradis.*
- *A ma très chère maman qui m'a donnée le courage et la volonté pour réussir dans ma vie et sur tout mes études.*
- *A mon très cher frère Kadiro et ma chère sœur.*
- *A mes cousins et cousines*
- *A toute la famille « Bengherabi » sans exception.*
- *A mes amies Kahina, Saliha, Sihem, Amina Kettaf, Amina Chachoua, Khouloud, Faiza et Meriem.*

## Remerciements

*Je remercie toutes personnes ayant contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire. De plus, je tiens à exprimer toute ma gratitude envers mes promoteurs*

*Mr Sadoun Mouhamed et Mr Bedek Said, pour leur encadrement précieux et l'ensemble du temps dont ils ont eu l'amabilité de me consacrer. En plus d'avoir accepté de m'encadrer, ils ont su m'encourager et me soutenir tout au long de ce travail.*

*Je remercie Mr MADI Djamel d'avoir accepté de présider le jury de ma soutenance.*

*Je remercie aussi Mr BENAICHE Salim, Mr Boudref Med Ahmed, et Mme Bouchemla Nedjma d'avoir accepter de faire partie.*

*J'exprime toute ma reconnaissance et gratitude à l'administration et à l'ensemble du corps enseignant de la filière physique à la Faculté des sciences et sciences Appliquées de l'Université AKLI MOHAND OULAHDJ (BOUIRA).*

# Introduction générale

Les processus stochastiques sont des phénomènes qui sont rencontrés quotidiennement dans notre vie courante et pour cela leur étude quantitative n'a cessé de focaliser l'intérêt des scientifiques de différentes disciplines.

De nos jours, l'étude théorique des processus fait partie intégrante de la statistique mathématique qui est à son tour la frontière de plusieurs disciplines comme la physique, la chimie, la biologie etc... Le but principal des études théoriques des processus est la modélisation du phénomène à partir des observations expérimentales ou des résultats numériques. On cherche donc à décrire la loi d'évolution du processus à travers la fonction de distribution exprimant la densité de probabilité de l'évènement à un instant  $t$ .

Le caractère aléatoire de l'évolution se montre par le fait que la répétition de l'expérience conduit à une autre séquence temporelle. Les exemples sont innombrables, en physique ou ailleurs.

-Le processus "pile ou face" consiste à enregistrer la suite des "pile" ou "face" lorsqu'on lance une pièce de monnaie.

-Le processus brownien consiste à suivre la position d'une particule en suspension dans un fluide.

-Le processus de Poisson consiste à compter le nombre de personnes dans une file d'attente lorsque ces personnes y arrivent au hasard.

-Un processus épidémiologique consiste à dénombrer les individus infectés par une maladie au cours du temps [1]. . . . .

Les premières études théoriques des lois d'évolution des distributions avaient été menées à partir de l'équation de Fokker-Planck qui est une équation aux dérivées partielles linéaire que doit satisfaire la densité de probabilité de transition d'un processus de Markov. A l'origine, une forme simplifiée de cette équation a permis d'étudier le mouvement brownien. Cette équation est obtenue de l'équation maîtresse dans le cas où l'évolution dans le temps de la fonction de distribution peut être modélée par une équation de Langevin telle que les équations maîtresses, qui sont une autre spécialisation des relations de

Chapman-Kolmogorov qui s'appliquent au cas d'un processus de Markov.

Dans la première partie de notre travail nous avons rappelé les notions mathématique de base permettant de modaliser ces phénomènes entre autres notions probabilités, processus et chaînes de Markov. Cela nous conduit à établir des équations aux dérivées partielles appelées équations maîtresses, parmi ces équations connus citons l'équation de Chapman-Kolmogorov et l'équation de Fokker-Planck.

Dans la deuxième partie de notre travail, nous allons traité trois phénomènes physiques aléatoire, il s'agit de la marche aléatoire à une dimension ainsi que le processus de naissance et de morts, et le cas d'une particule dans un champ électrostatique et dans un champ magnétique.

La première application est l'étude du mouvement unidimensionnel, suivant une ligne droite horizontale, qui s'effectue en faisant des sauts en avant et arrière. La résolution de l'équation relative à ce phénomène permet de déterminer la valeur moyenne  $\langle x \rangle$  de la distance parcourue lors de ce mouvement aléatoire.

La deuxième application, concerne un processus de naissance et de morts au sein d'une population de bactérie. Ce phénomène est régi par une équation de Fokker-Planck dont la résolution se fait en introduisant la fonction de Green. Cela permet de déterminer la valeur moyenne  $\langle n \rangle$  du nombre de bactérie qui la fonction qui exprime l'évolution cette population.

la troisième application est l'étude de mouvement d'une particule soumise à un champ de force électrostatique aléatoire, et aussi à un champ magnétique. Nous terminons par une conclusion générale.

# Chapitre 1

## Processus Aléatoire

### 1.1 introduction

Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps ou de l'espace. Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires notamment en physique statistique (par exemple le ferromagnétisme, les transitions de Phases, etc...), en biologie (évolution, génétique et génétique des populations), médecine (Croissance de tumeurs, épidémie ), . L'étude des processus aléatoires s'insère dans la théorie des probabilité dont elle Constitue l'un des objectifs les plus profonds. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles.

### 1.2 Processus aléatoire

#### 1.2.1 Définition

Considérons une expérience aléatoire dans laquelle les résultats ne sont plus, comme nous l'avons considéré pour les variables aléatoires, des nombres, mais des fonctions d'un ou plusieurs paramètres. (quand il n'y a qu'un paramètre, c'est généralement le temps). Un processus aléatoire (ou processus stochastique) est une famille paramétrée de variables



aléatoires. Dans le cas de plusieurs paramètres, on parle de champ aléatoire.

Lorsqu'un ensemble de variable aléatoire  $x_1, x_2, \dots$  n'est pas dénombrable, il n'est pas possible de répéter les différentes variables par un indice discret, on introduit donc à cet effet un paramètre continu  $t$ . La quantité  $x(t)$  est alors une fonction aléatoire de  $t$ , lorsque  $t$  est le temps ce que nous supposons ici  $x(t)$  est un processus aléatoire. On permet à chaque instant pour la variable aléatoire  $X$  l'une de ses réalisations possibles  $x$ . On obtient une réalisation  $x(t)$  du processus  $X(t)$ . Considérons, par exemple, l'ordonnée du profil de la mer, si on le regarde en un point, le paramètre est le temps, si par contre, en un instant donné on s'intéresse à l'ordonnée du profil en tant que fonction de la position du point, les paramètres sont les coordonnées  $x$  et  $y$  du point considéré.

Si  $X(t, w)$  désigne un processus aléatoire du paramètre  $t$  et si  $w$  désigne le résultat de l'expérience aléatoire considérée,  $X(t, w)$  peut représenter quatre quantités différentes [2] :

- \*une famille de fonction de temps ( $t$  et  $w$  variables)
- \*une fonction de temps ( $t$  variable,  $w$  fixé)
- \*une variable aléatoire ( $t$  fixé,  $w$  variable)
- \*un nombre ( $t$  fixé,  $w$  fixé)

Si le paramètre est discontinu, on parle de séquence aléatoire. Un processus aléatoire est dit discret ou continu suivant que les valeurs possibles de la variable aléatoire soient discrètes ou continues, le qualificatif continu ne réfère donc pas ici à la continuité de la fonction aléatoire par rapport à son paramètre, ou parlera donc de :

- \*processus continu ( $t$  continu,  $x$  continu)
- \*processus discret ( $t$  continu,  $x$  discret)
- \*séquence continue ( $t$  discret,  $x$  continu)
- \*séquence discrète ( $t$  discret,  $x$  discret) [3].

### 1.3 Processus discrètes et processus continus

Tout processus dont l'évolution temporelle peut être analysé en termes de probabilité est dit processus stochastique la notion de processus stochastique est donc très générale.

Le processus peut être à valeurs discrètes ou continus[4] .il se manifeste pour l'observation d'une grandeur  $x(t)$  variable au cours du temps.

On considère un processus stochastique à valeurs continus notées  $x(t)$  à un instant  $t$  et égales à  $x_0$  à l'instant  $t$  Ont procédé à  $N \geq 1$  réalisations de ce processus avec la même condition initial .

Soit  $(t_n)_{n \in N}$  Une suite d'instants, strictement croissante et  $(I_n)_{n \in N}$ , une suite d'intervalles de réalisation telle que  $I_n = [x_n, x_n + dx_n]$  .La densité de probabilité notée  $W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)$

De trouver  $\{x(t_1) \in I_1 \dots x(t_n) \in I_n\}$  est telle que :

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = \frac{\text{Nombre de réalisation passant par } I_1 \dots I_n}{\text{Nombre total de réalisation}} \quad (1.1)$$

$$W(x_1, t_1; \dots x_n, t_n) \geq 0 \quad (1.2)$$

$$\forall (t_1 \dots t_n) \in \mathbb{R}^n \int_{\mathbb{R}^n} W(x_1, t_1; \dots x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = 1 \quad (1.3)$$

$$W \text{ est une fonction symétrique par permutation des couples } (x_i, t_i)_{i \in [1, n]} \quad (1.4)$$

$$\int_{\mathbb{R}} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) dx_1 \dots dx_n = W(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (1.5)$$

Le processus stochastique est donc défini par l'ensemble  $\{W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n)\}_{n \in N}$  Des densités de probabilités.

Ces notions se généralisent au cas où le processus stochastique à valeur discrète :

$$W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) > 0 \quad (1.6)$$

$$\sum_{x_1 \in X} \sum_{x_2 \in X} \dots \sum_{x_n \in X} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = 1 \quad (1.7)$$

La sommation sur toutes les possibilités de résultat à l'instant  $t_n$  donne la probabilité de la suite  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  aux instants antérieures d'où la relation :

$$\sum_{x_n \in X} W(x_1, t_1; \dots; x_n, t_n) = W_{n-1}(x_1, t_1; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (1.8)$$

### 1.3.1 Processus aléatoire stationnaire

Un processus aléatoire est dit stationnaire [2] si toutes les probabilités conjointes  $p_n$  sont invariantes dans toute translation en temps. Pour un tel processus

$$p_n(x_1, t_1 + \tau, x_2, t_2 + \tau, \dots, x_n, t_n + \tau) = p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) \quad (1.9)$$

où  $\tau$  est un intervalle de temps quelconque. En posant  $\tau = -t$ , il vient :

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n). \quad (1.10)$$

En particulier, la probabilité  $p_1$  est indépendante du temps :

$$p(x_1, t_1) = p_1(x_1, 0) = p_1(x_1) \quad (1.11)$$

et  $p_2$  ne dépend que de la différence de temps

$$p_2(x_1, t_1, x_2, t_2) = p_2(x_1, 0, x_2, t_2 - t_1) = p_2(x_1, x_2, t_2 - t_1). \quad (1.12)$$

### 1.3.2 Caractéristiques des processus aléatoire

En général pour caractériser complètement un processus stochastique  $X(t)$ , il est nécessaire de connaître l'ensemble de probabilités conjointes  $p_n$ . C'est à dire, on tient compte de la relation :

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2, \dots, x_n, t_n) = p_1(x_1, t_1) \dots p_{1/n-1}(x_n, t_n \mid x_1, t_1, \dots, x_{n-1}, t_{n-1}). \quad (1.13)$$

où la distribution  $p_1$  est l'ensemble des probabilités conditionnelles [2]  $p_{1/n}$ .

## 1.4 Variable aléatoire

### 1.4.1 Définition

Une variable aléatoire est un nombre  $X(\zeta)$  associé à chaque résultat  $\zeta$  d'une expérience. En ce sens, c'est une fonction dont le domaine de définition est l'ensemble des résultats de l'expérience. Pour définir une variable aléatoire, il faut spécifier, d'une part, l'ensemble des valeurs possibles, appelé ensemble des états, et, d'autre part, la distribution de probabilité sur cet ensemble. L'ensemble des valeurs possibles peut être, soit discret, soit continu sur un intervalle donné. Par ailleurs, l'ensemble des états peut être multidimensionnel. La variable aléatoire est alors écrite vectoriellement  $X$ . Dans le cas réel unidimensionnel, la distribution de probabilité d'une variable aléatoire  $X$  est donnée par une fonction  $p(x)$  non négative [1] :

$$p(x) \geq 0 \quad (1.14)$$

et normalisée, c'est-à-dire telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x) dx = 1. \quad (1.15)$$

La probabilité pour que la variable aléatoire  $X$  prenne une valeur comprise entre  $x$  et  $x + dx$  est égale à  $p(x)dx$  (appelée variable aléatoire continue). La fonction  $p(x)$  caractérisant la distribution de probabilité de la variable  $X$  est également appelée densité de probabilité de  $X$ . En physique, une densité de probabilité est en général une quantité dimensionnée : ses dimensions sont inverses de celles de la variable aléatoire concernée [2].

Le cas d'une variable susceptible de prendre des valeurs discrètes peut se traiter de manière analogue en introduisant des fonctions delta ( $\delta$ ) dans la densité de probabilité. Par exemple, si une variable aléatoire prend les valeurs discrètes  $x_1, x_2, \dots$  avec les probabilités  $p_1, p_2, \dots$ , on peut formellement la décrire comme une variable aléatoire continue de densité de probabilité :

$$p(x) = \sum_i p_i \delta(x - x_i) \quad , p_i \geq 0 \quad (1.16)$$

$$\sum_i p_i = 1 \quad (1.17)$$

## 1.4.2 Exemples de variable aléatoire

### Exemple1 :

On jette deux dés distincts et on s'intéresse à la somme des points. On note  $X$  cette variables aléatoire, elle est définie par [3] :

$$X : \Omega \rightarrow R \quad \text{avec} \quad \Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$(\omega_1, \omega_2) \rightarrow \omega_1 + \omega_2$$

L'ensemble des valeurs possibles de  $X$  est  $\{2, 3, \dots, 12\}$

### Exemple2 :

On lance toujours deux dés mais cette fois on s'intéresse au plus grand chiffre  $Y$  obtenu [5], on a alors

$$Y : \Omega \rightarrow R \quad \text{avec} \quad \Omega = \{(1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6)\}$$

$$(\omega_1 + \omega_2) \rightarrow \max(\omega_1, \omega_2)$$

la variable  $Y$  est à valeurs dans  $\{1, 2, \dots, 6\}$

### Exemple 3 :

On observe deux bactéries et on s'intéresse à la durée de vie  $T$  de la bactérie qui disparaît le premier. L'ensemble fondamental est  $\Omega = [0, +\infty[ \times [0, +\infty[$  la variable  $T$  s'écrit alors :

$$T : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \quad , \quad (\omega_1, \omega_2) \rightarrow \min \{ \omega_1, \omega_2 \} \quad [3].$$

## 1.5 Probabilités conjointes et conditionnelles

Lorsque plusieurs variables aléatoires entrent en jeu, ce qui est par exemple, le cas lorsque l'on considère une variable aléatoire multidimensionnelle [4], il est nécessaire d'introduire différents types de distributions de probabilité.

### 1.5.1 Probabilités conjointe

Soit  $X$  une variable aléatoire à  $n$  dimensions, possédant donc  $n$  composantes  $X_1, X_2, \dots, X_n$ . Sa densité de probabilité  $p_n(x_1, x_2, \dots, x_n)$  est appelée densité de probabilité conjointe des  $n$  variables  $X_1, X_2, \dots, X_n$  [1].

### 1.5.2 Probabilité conditionnelle

On peut attribuer des valeurs fixées  $x_{s+1}, \dots, x_n$ , aux  $(n - s)$  variables  $X_{s+1}, \dots, X_n$  et considérer alors la distribution de probabilité conjointe [4] des  $s$  variables  $X_1, \dots, X_s$ . Cette distribution est appelée densité de probabilité conditionnelle de  $X_1, \dots, X_s$ . On la désigne par  $p_{s/n-s}(x_1, \dots, x_s \mid x_{s+1}, \dots, x_n)$ . et soit  $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k$ , on définit alors la probabilité conditionnelle :  $P(x_1, t_1; \dots, x_k, t_k \mid x_{k+1}, t_{k+1}; \dots, x_n, t_n) dx_{k+1} \dots dx_n$  par [4] :

$$p(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k \mid x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n) dx_{k+1} \dots dx_n =$$

$$\begin{cases} \text{pr de trouver } \{x(t_{k+1}) \in I_{k+1} \dots x(t_n) \in I_n\} \\ \text{sachant que } \{x(t_1) \in I_1 \dots x(t_k) \in I_k\} \end{cases} \quad (1.18)$$

tel que :

$$p(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k \mid x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n) \geq 0 \quad (1.19)$$

$$\int_{R^{n-k}} dx_{k+1} \dots dx_n p(x_1, t_1; \dots; x_k, t_k \mid x_{k+1}, t_{k+1}; \dots; x_n, t_n) = 1 \quad (1.20)$$

## 1.6 conclusion

Dans ce chapitre nous avons donné la définition physique et mathématique d'un processus stochastique et d'un variable stochastique (aléatoire),

tel que les processus stochastique est une structure mathématique utilisée pour modéliser les différents phénomènes où la prédiction de la futur est impossible pour des raisons différentes : soit le système est soumis à une ou plusieurs forces inconnues, ou bien tout simplement, les forces agissent d'une façon aléatoire. Enfin nous avons rassemblé les notions basiques du probabilités.

# Chapitre 2

## Processus de Markov :

### 2.1 introduction

On s'intéresse aux phénomènes physiques susceptibles d'être modélisés par des processus aléatoires. Les processus les plus fréquemment utilisés pour ce type de modélisation sont les processus de Markov, souvent appelés, de manière imagée, (processus sans mémoire). Un processus de Markov [8] est régi par ses probabilités de transition, qui permettent, de proche en proche, de déterminer son évolution à partir de sa distribution initiale. Les probabilités de transition vérifient une équation fonctionnelle non linéaire, l'équation de Chapman-Kolmogorov. C'est ce que nous allons aborder dans ce chapitre.

### 2.2 Définition

Il est clair que la détermination complète d'un processus aléatoire quelconque nécessite une information énorme, puisqu'il faut connaître toutes les probabilités conjointes  $p_n$ . En pratique, on ne sait quasiment rien faire sans hypothèse supplémentaire [11], d'où la nécessité d'introduire des classes de processus caractérisés par des propriétés simplificatrices permettant effectivement de travailler [1]. De loin, la classe la plus importante est celle des processus de Markov. Dans un processus de Markov, la valeur prise par la



variable à un certain instant n'est influencé que par celle de ses valeurs passés les plus récentes. Plus précisément, un processus aléatoire  $X(t)$  est un processus de Markov si pour des instants quelconques  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ , et pour tout  $n$  on a :

$$p_{1/n-1}(x_n, t_n \mid x_1, t_1, x_2, t_2; \dots; x_{n-1}, t_{n-1}) = p_{1/1}(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.1)$$

Une fois arrivé en  $x_{n-1}$  à l'instant  $t_{n-1}$ , après être passé par  $x_1$  à l'instant  $t_1$ ,  $x_2$  à l'instant  $t_2$ . . . . . le processus évolue ensuite d'une manière qui ne dépend que de la valeur qu'il a prise à cet instant, et non de son histoire antérieure. La quantité centrale pour la description d'un processus de Markov et la probabilité conditionnelle élémentaire  $p_{1/1}$ ; compte tenu de l'équation (2.1) la forme générale (1.6) pour les probabilités conjointes s'écrit en effet dans le cas markovien :

$$p_n(x_1, t_1, x_2, t_2; \dots; x_n, t_n) = p_1(x_1, t_1) \dots p_{1/1}(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.2)$$

Toutes les probabilités conjointes sont donc déterminées si l'on connaît la probabilité  $p_1$  et la probabilité conditionnelle élémentaire  $p_{1/1}$  dite probabilité de transition. La probabilité de transition d'un processus de Markov est indépendante de l'histoire du processus. Parmi les processus de Markov, les processus stationnaire jouent un rôle particulièrement important. Pour qu'un processus de Markov soit stationnaire il est nécessaire est suffisant que  $p_n$  ne dépende pas du temps et que  $p_{1/1}$  ne dépende que de l'intervalle de temps mis en jeu. Très souvent pour un processus stationnaire, la probabilité  $p_1$  représente la distribution que l'on atteint au bout d'un temps  $\tau$ , suffisamment long quel que soit l'état initial  $x_0$ , dans ce cas on a [6] :

$$p_1(x) = \lim p_{1/1}(x, \tau \mid x_0). \quad (2.3)$$

Le processus est alors entièrement défini par la donnée de la probabilité de transition.

## 2.3 Types de processus de Markov

### 2.3.1 Espace d'états discret

Lorsque les variables aléatoires successives sont des variables discrètes munies d'une fonction de probabilité, on parle de chaîne de Markov [7]. Bien que les chaînes de Markov s'appliquent à des phénomènes dont l'aspect temporel est généralement sans intérêt, on peut associer aux valeurs successives  $x_i$ , les instants  $t_i$ . La propriété markovienne [6] selon laquelle la probabilité d'un état du système ne dépend que de son état précédent à travers une probabilité conditionnelle appelée probabilité de transition s'écrit :

$$p(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}), t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0 \quad (2.4)$$

Une chaîne de Markov est entièrement définie par la probabilité au premier ordre  $P(x, t)$  et la probabilité de transition. On obtient par exemple la probabilité au second ordre par :

$$p(x_1, t_1; x_2, t_2) = p(x_1, t_1) p(x_2, t_2), t_2 > t_1 \quad (2.5)$$

Elle est donc également définie par la probabilité au second ordre. Enfin, elle peut être définie par l'état initial et la probabilité de transition.

### 2.3.2 Espace d'états continu

Les chaînes de Markov trouvent des applications dans les domaines les plus divers mais les processus considérés dans les problèmes dynamiques, en particulier en vibrations, portent généralement sur des variables aléatoires continues. Dans ces conditions, la probabilité d'obtenir une valeur donnée est généralement nulle et les probabilités d'apparition doivent être remplacées par des densités de probabilité dans la formule de la propriété markovienne :

$$p(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}; x_{n-2}, t_{n-2}; \dots; x_1, t_1; x_0, t_0) = p(x_n, t_n \mid x_{n-1}, t_{n-1}), t_n > t_{n-1} > \dots > t_1 > t_0 \quad (2.6)$$

## 2.4 Processus stochastiques markoviens en temps continu

Un modèle d'évolution dynamique en temps continu dans lequel on fait dépendre l'évolution future de l'état présent et du hasard est un processus de Markov. On en rencontre dans de nombreux domaines d'applications, comme par exemple l'étude des files d'attente.

### 2.4.1 Processus de Poisson

#### la loi exponentielle

La loi exponentielle est l'ingrédient de base pour modéliser des temps d'attente d'événements "imprévisibles". Cette partie contient quelques-unes de ses propriétés élémentaires. Soit  $X$  une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , notée  $\varepsilon(\lambda)$ . Sa densité est :

$$f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0}, IP(X = x) = 0, \quad (2.7)$$

et sa fonction de répartition vaut :

$$F_X(x) = IP(X \leq x) = (1 - e^{-\lambda x}) \quad (2.8)$$

dont l'espérance et la variance valent respectivement  $1/\lambda$  et  $1/\lambda^2$ .

De l'expression de  $F_X(x)$ , on déduit qu'à partir d'une variable aléatoire  $X$  de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ , on obtient une variable aléatoire  $Y$  de loi exponentielle de paramètre 1 en posant simplement  $Y = X$ . En pratique, une variable aléatoire de

loi exponentielle représente une durée, typiquement le temps d'attente d'un événement ou une durée de vie. La propriété importante des lois exponentielles est d'être "sans mémoire".

Dans le cas particulier d'un composant électronique dont la durée de vie serait modélisée par une loi exponentielle, la probabilité pour que le composant vive un temps  $t$  est la même, qu'il soit neuf ou qu'il ait déjà vécu un temps  $s$ . Cette absence de mémoire est caractéristique des lois exponentielles.

### Présentation du processus de Poisson

Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\lambda$ . Posons  $S_0 = 0$  et pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Pour tout réel  $t \geq 0$ , définissons la variable aléatoire  $N_t$  à valeurs entières, par :

$$N_t = n \Leftrightarrow S_n \leq t < S_{n+1}$$

Le processus stochastique  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  est appelé processus de Poisson d'intensité  $\lambda$ . Le processus de Poisson est un modèle de comptage d'événements aléatoires isolés dans le temps

### 2.4.2 Processus markoviens avec sauts

Les Processus markoviens avec sauts sont la généralisation des chaînes de Markov au temps continu. Le passage du temps discret au temps continu se fait en remplaçant le pas de temps fixe d'une chaîne de Markov par des intervalles de temps aléatoires indépendants de loi exponentielle. Le processus de Poisson sera notre premier exemple de processus markoviens de sauts. Un second sera lié aux files d'attente.

Considérons un ensemble  $E$  fini ou dénombrable et une suite croissante de variable aléatoire  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  à valeurs dans  $R_+$ . Un processus de sauts  $\{X_t\}_{t \geq 0}$  à espace d'états  $E$  et d'instant de sauts  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est un processus stochastique dont la valeur ne peut changer qu'en ses instants de sauts :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x \in E \text{ tel que } \forall t \in [S_n; S_{n+1}], X_t = x$$

Nous nous intéressons exclusivement à une classe particulière de processus de sauts, appelés processus markoviens de sauts. Ces processus évoluent de la manière suivante. Supposons que le processus se trouve à l'état  $x$  à l'issue du saut intervenant à l'instant  $S_n$ .

1. Le temps de séjour dans l'état  $x$ , à savoir la variable aléatoire  $S_{n+1} - S_n$ , suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda(x)$ . Le paramètre de cette loi peut donc dépendre de l'état  $x$  ou le processus se trouve. Mais à part cette dépendance en l'état  $x$ , la variable aléatoire  $S_{n+1} - S_n$  est indépendante du passé du processus.

2. A l'instant  $S_{n+1}$ , le processus saute de l'état  $x$  vers l'état  $y$  (avec  $x \neq y$ ) avec une probabilité  $q_{x,y}$  quantité indépendante de  $S_{n+1} - S_n$  et du passé.

## 2.5 Equation de Chapman-Kolmogorov

Nous allons considérer un processus de Markov [1] et essayer de trouver une équation pour la probabilité de transition  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  pour cela, exprimons la densité de probabilité d'ordre 3 en fonction de la densité de probabilité d'ordre 2. on a :

$$p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) = W(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1) \quad (2.9)$$

Cette définition exprime le fait que la densité de probabilité de trouver le système en  $(x_2, t_2)$  après qu'il ait été en  $(x_1, t_1)$  est égale à la densité probabilité pour qu'il soit en  $(x_1, t_1)$  multipliée par la probabilité de transition  $W(x_2, t_2 | x_1, t_1)$  de  $(x_2, t_2) \rightarrow (x_1, t_1)$ , et la probabilité de transition d'ordre  $n$  s'écrit

$$W_n(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1} | \dots | x_1, t_1) = W(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (2.10)$$

Ceci signifie que la probabilité de transition de l'état  $(x_{n-1}, t_{n-1})$  vers l'état  $(x_n, t_n)$

ne dépend pas de l'histoire du système (état  $(x_{n-2}, t_{n-2}), \dots, (x_1, t_1)$ ), donc :

$$\begin{aligned} p_3(x_3, t_3 | x_2, t_2 | x_1, t_1) &= W_3(x_3, t_3 | x_2, t_2 | x_1, t_1) p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) \quad (2.11) \\ &= W(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1) \end{aligned}$$

$$p_3(x_3, t_3 | x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2) p_2(x_2, t_2 | x_1, t_1)}{p_1(x_2, t_2)}. \quad (2.12)$$

La relation qui relie  $p_2(x_3, t_3 | x_2, t_2)$  et  $p_3(x_3, t_3 | x_2, t_2 | x_1, t_1)$  est obtenue à partir de :

$$p_k(x_k, t_k | \dots | x_1, t_1) = \int p_n(x_n, t_n | \dots | x_1, t_1) dx_{k+1} \dots dx_k \quad (2.13)$$

et

$$p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int p_3(x_3, t_3 | x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2. \quad (2.14)$$

On obtient en utilisant (2.6) et (2.4) :

$$p_2(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int W(x_3, t_3 | x_2, t_2) W(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_1(x_1, t_1) dx_2 \quad (2.15)$$

Ce qui donne compte tenu de (2.4) :

$$W(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int W(x_3, t_3 | x_2, t_2) W(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2 \quad (2.16)$$

Ceci n'exprime rien d'autre que le fait que la probabilité de transition de  $(x_1, t_1)$  vers  $(x_3, t_3)$  est égale au produit de la probabilité de transition de  $(x_1, t_1)$  vers  $(x_2, t_2)$  par la probabilité de transition [2] de  $(x_2, t_2)$  vers  $(x_3, t_3)$ . Comme  $(x_2, t_2)$  peut être quelconque, il faut sommer sur toutes les possibilités d'où l'intégration sur la variable  $x_2$ . Cette équation est fondamentale pour les processus markoviens. Elle est connue sous le nom d'équation de Chapman-Kolmogorov. Il existe une classe particulière de processus

markoviens qui jouent un rôle important en physique. Il s'agit des processus markoviens stationnaires qui sont définis comme ceux pour lesquels la probabilité de transition ne dépend que de la différence  $t_1 - t_2$  et non du temps  $t_1$  auquel se produit la transition [6] :

$$W(x_2, t_2 | x_1, t_1) \equiv W(x_2 | x_1, t_2 - t_1) \quad (2.17)$$

# Chapitre 3

## Mouvement Brownien et Modèle de Langevin

### 3.1 Introduction historique sur le mouvement brownien

Le phénomène a été observé pour la première fois par le botaniste anglais Robert Brown en 1828 qui a publié dans l'Edinburgh Journal un article intitulé ' A brief account of microscopical observations made in the months of June, July and August; 1827 on the particles contained in the pollen of plants; and on the general existence of active molecules in organic and inorganic bodies '. Brown a cru que ce mouvement revienne à l'existence d'un sort de vis ce qui a été prouvé qu'il est faux et le phénomène a pris l'attention des physiciens à partir des années 1860 avec les expériences faites dans le cadre de la théorie cinétique des gaz, ces derniers ont montré que :

- Le mouvement brownien augmente lorsque la taille des particules en suspension décroît (pour des rayons inférieurs à 1 micron).
- De même si la viscosité du fluide décroît.
- Aussi si la température augmente.



Basé sur les résultats si dessus plusieurs interprétations ont été données sur l'origine de ce mouvement une dite qu'elle revienne à des différences de températures, une à l'évaporation et une autre à des courants de convection. Christian Wiener titulaire de la chaire de géométrie descriptive à Karlsruhe réaffirma en 1863 que le mouvement revienne à des interactions entre particules, le mouvement brownien aurait alors été relié aux vibrations de l'éther, à une longueur d'onde correspondant à celle de la lumière rouge.

Une telle explication fut critiquée par R. Mead Bache, qui montra que le mouvement était insensible à la couleur de la lumière, alors une autre interprétation a été donnée dans des notes publiées entre 1877-1880 « Les mouvements browniens. . . seraient, dans ma manière de considérer le phénomène, le résultat des mouvements moléculaires calorifiques du liquide ambiant », écrivait ainsi Joseph Delsaulx dans son article [5] 'l'origine thermodynamique des mouvements browniens'. Cette théorie rencontra de fortes oppositions par le suisse Karl Von Nägeli et le chimiste britannique William Ramsey, remarquèrent que les particules en suspension possédaient une masse plusieurs centaines de millions de fois plus grande que celle des molécules du fluide, chaque collision avec une molécule de fluide produisait donc un effet bien insuffisant pour déplacer la particule en suspension, Nägeli écrivait à propos du mouvement similaire des micro-organismes dans l'air [5] : « The motion which a sun-mote, and on the whole any particle found in the air, can acquire by the collision of an individual gas molecule or a multitude of such molecules is therefore so extraordinarily small, and the number of simultaneous collisions against the particle from all sides so extraordinarily large, that particle behaves as if it were completely at rest ». Il croyait plutôt que la cause du mouvement résidait, non pas dans les mouvements moléculaire thermiques, mais dans des forces attractives ou répulsives.

En 1888 le physicien français Louis-Georges Gouy, fit des meilleures observations sur le mouvement brownien, d'où il ressortissait les conclusions suivantes :

- Le mouvement est extrêmement irrégulier, et la trajectoire semble ne pas avoir de tangente.
- Deux particules browniennes, même proches, ont des mouvements indépendants l'un

de l'autre.

- Plus les particules sont petites, plus leur mouvement est vif.
- La nature et la densité des particules n'ont aucune influence.
- Le mouvement est plus actif dans les fluides les moins visqueux.
- Le mouvement est plus actif à plus haute température.
- Le mouvement ne s'arrête jamais.

- La particule fluctue autour d'un point de départ, cela veut dire que le barycentre de sa trajectoire est le point de départ (la particule virevolte autour d'un même point). Gouy expliquerait le mouvement brownien par les mouvements partiellement coordonnés à l'intérieur du liquide sur une échelle de l'ordre du micron. Et fut noter l'apparente contradiction avec le principe de Carnot. Celui-ci énonce que l'on ne peut extraire de travail d'une simple source de chaleur. Mais il semble bien que du travail soit produit de manière fluctuante par les mouvements thermiques des molécules du fluide.

Henri Poincaré a écrit à propos de ce problème [5] : « Mais voici que la scène change. Le biologiste, armé de son microscope, a remarqué il ya longtemps dans ses préparations des mouvements désordonnés de petites particules en suspension ; c'est le mouvement brownien. Il a cru d'abord que c'est un phénomène vital, mais il a vu bientôt que les corps inanimés ne dansaient pas avec moins d'ardeur que les autres ; il a alors passé la main aux physiciens. Malheureusement, les physiciens se sont longtemps désintéressés de cette question ; on concentre de la lumière pour éclairer la préparation microscopique, pensaient-ils ; ne va pas sans chaleur, de là des inégalités de température, et dans le liquide des courants intérieurs qui produisent les mouvements dont on nous parle. L. Gouy eut l'idée d'y regarder de plus près et il vit, ou crut voir que cette explication est insoutenable, que les mouvements deviennent d'autant plus vifs que les particules sont plus petites, mais qu'ils ne sont pas influencés par le mode d'éclairage. Si alors ces mouvements ne cessent pas, ou plutôt renaissent sans cesse, sans rien emprunter à une source extérieure d'énergie, que devons-nous croire ? Nous ne devons pas, sans doute, renoncer pour cela à la conservation de l'énergie, mais nous voyons sous nos yeux tantôt le mouvement se

transformer en chaleur par le frottement, tantôt la chaleur se changer inversement en mouvement, et cela sans que rien ne se perde, puisque le mouvement dure toujours. C'est le contraire du principe de Carnot. S'il en est ainsi, pour voir le monde revenir en arrière, nous n'avons plus besoin de l'œil infiniment subtil du démon de Maxwell, notre microscope nous suffit. Les corps plus gros, ceux qui ont, par exemple, un dixième de millimètre, sont heurtés de tous les côtés par les atomes en mouvement, mais ils ne bougent pas parce que ces chocs sont très nombreux et que la loi du hasard veut qu'ils se compensent ; mais les particules plus petites reçoivent trop peu de chocs pour que cette compensation se fasse à coup sûr et son encensement ballottées. Et voilà déjà l'un de nos principes en péril." Dans les années 1905 et 1906 le mouvement brownien a été expliqué rigoureusement simultanément par Albert Einstein et Marian Von Smoluchowski qu'ils ont pu construire un modèle mathématique pour le mouvement brownien et calculé les quantités probabilistes nécessaire pour décrire ce processus, de plus ils ont établi l'équation et la constante de diffusion.

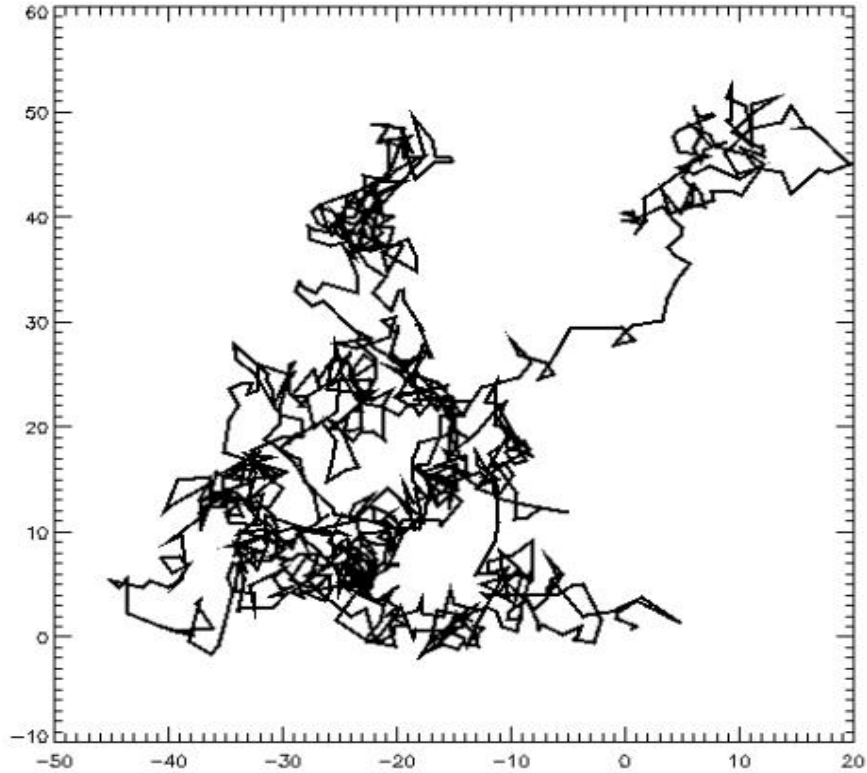


Fig.1.Mouvement brownien d'une particule.

## 3.2 Modèle de Langevin

### 3.2.1 Equation Langevin

Le modèle de Langevin [1] est un modèle phénoménologique classique. Raisonnant pour simplifier à une dimension, on repère la position de la particule brownienne par une abscisse  $x$ . Deux forces, caractérisant toutes les deux l'effet du fluide, agissent sur la particule de masse  $m$  : une force de frottement visqueux  $-m\gamma(dx/dt)$ , caractérisée par le coefficient de frottement  $\gamma > 0$ , et une force fluctuante  $F(t)$ , représentant les impacts incessants des molécules du fluide sur la particule. La force fluctuante, supposée indépendante de la vitesse de la particule, est considérée comme une force extérieure,

appelée force de Langevin. En l'absence de potentiel, la particule brownienne est dite " libre ". Son équation du mouvement, l'équation de Langevin, s'écrit :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -m\gamma \frac{dx}{dt} + F(t), \quad (3.1)$$

ou encore :

$$m \frac{dv}{dt} = -m\gamma v + F(t), \quad v = \frac{dx}{dt}. \quad (3.2)$$

L'équation de Langevin est historiquement le premier exemple d'une équation différentielle stochastique, c'est-à-dire contenant un terme aléatoire  $F(t)$  avec des propriétés statistiques spécifiées. La solution  $v(t)$  de l'équation (3.2) pour une condition initiale donnée est elle-même un processus stochastique.

Dans le modèle de Langevin, la force de frottement  $-m\gamma v$  et la force fluctuante  $F(t)$  représentent deux conséquences d'un même phénomène physique (les collisions de la particule brownienne avec les molécules du fluide). Il reste, pour définir complètement le modèle, à caractériser les propriétés statistiques de la force aléatoire.

## 3.3 Mouvement brownien et processus de Markov

### 3.3.1 Diffusion d'une particule libre

La description du mouvement brownien d'une particule libre fait intervenir de façon centrale la notion de processus de Markov. En effet, aussi bien la vitesse que le déplacement de la particule brownienne peuvent être considérés comme des processus markoviens (mais sur des intervalles de temps d'évolution très différents dans les deux cas) [1].

### 3.3.2 Vitesse

Lorsque la force aléatoire est gaussienne et corrélée en fonction delta (bruit blanc gaussien), la vitesse de la particule brownienne est un processus de Markov. Le caractère markovien de  $v(t)$  permet d'écrire une équation de Fokker-Planck pour  $f(v, t)$ . La description du mouvement brownien par l'équation de Fokker-Planck est équivalente à la description par l'équation de Langevin. On s'intéresse dans les deux cas à l'évolution (de la vitesse ou de sa fonction de distribution) sur un intervalle de temps  $\Delta t$  beaucoup plus petit que le temps de relaxation  $\tau_r$  de la vitesse moyenne.

### 3.3.3 Déplacement

Sur un intervalle de temps  $\Delta t \ll \tau_r$ , le déplacement de la particule brownienne n'est pas un processus de Markov. En revanche, sur un intervalle de temps  $\Delta t \gg \tau_r$ , la vitesse de la particule subit un très grand nombre de modifications entre deux observations successives de la position. Le déplacement  $x(t + \Delta t) - x(t)$  peut alors être considéré comme indépendant de la position aux instants antérieurs à  $t$ . Étudié sur de tels intervalles de temps, le déplacement de la particule brownienne est donc un processus de Markov. Effectivement, dans la description de Langevin, le déplacement de la particule brownienne obéit à une équation différentielle du second ordre et ne peut donc pas être considéré comme un processus de Markov, même si la force aléatoire correspond à un bruit blanc gaussien. Cependant, dans la limite visqueuse ou suramortie, le terme d'inertie de l'équation de Langevin est négligé et l'équation du mouvement s'écrit sous la forme d'une équation différentielle du premier ordre pour le déplacement,

$$\eta \frac{dx}{dt} = F(t) \quad (3.3)$$

où  $x(t)$  est une abscisse repérant la position de la particule. L'équation (3.3) suppose un intervalle de temps d'évolution  $\Delta t \gg \tau_r$  lorsque la force aléatoire correspond à un bruit blanc, on a la propriété de décorrélation  $\langle x(t)F(t') \rangle = 0, t' > t$  qui, dans le cas gaussien,

traduit une indépendance statistique.

Le déplacement  $x(t) - x_0 = (1/\eta) \int_0^t F(t') dt'$  [11] est un processus de Markov non stationnaire, désigné sous le nom de processus de Wiener et la fonction d'autocorrélation de la force aléatoire étant écrite sous la forme :

$$\langle F(t)F(t') \rangle = 2D\eta^2\delta(t - t') \quad (3.4)$$

La densité de probabilité  $p(x, t)$  obéit à l'équation d'Einstein-Smoluchowski :

$$\frac{\partial p(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x, t)}{\partial x^2}. \quad (3.5)$$

Cette equation pour  $p(x, t)$ , analogue à l'équation de Fokker-Planck pour  $f(\nu, t)$  n'est autre que l'équation de diffusion usuelle. La solution fondamentale de l'équation (3.4) correspondant à la condition initiale  $p(x, 0) = \delta(x - x_0)$  est une gaussienne de moyenne  $x_0$  et de variance  $\sigma_x^2(t) = 2Dt$

$$p(x, t) = (4Dt\pi)^{-1/2} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right], t > 0 \quad (3.6)$$

En d'autres termes, le front de diffusion est gaussien.

# Chapitre 4

## Equations maitresses

### 4.1 Introduction

On considère un processus markovien  $X(t)$ . L'équation de Chapman-Kolmogorov [1]

$$p_{1/1}(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int dx_2 p_{1/1}(x_2, t_2 | x_1, t_1) p_{1/1}(x_3, t_3 | x_2, t_2) \quad (4.1)$$

étant non linéaire, sa solution n'est pas unique. Cette équation ne permet donc pas, à elle seule, de spécifier la probabilité de transition. En revanche, si l'on possède des informations sur le comportement de  $p_{1/1}$  sur des intervalles de temps courts, il est possible de déduire de l'équation de Chapman-Kolmogorov une équation d'évolution linéaire par rapport à  $p_{1/1}$ , valable sur des intervalles de temps beaucoup plus longs, appelée équation maîtresse. Donc une équation maîtresse est une équation différentielle décrivant l'évolution temporelle d'un système. C'est une équation de taux pour les états du système.



## 4.2 Equation maitresse

On considère un processus de Markov dont la probabilité de transition ne dépend que de la différence des temps mis en jeu :

$$p_{1/1}(x_2, t_2/x_1, t_1) = p_{1/1}(x_2, \Delta t/x_1), \Delta t = t_2 - t_1 \quad (4.2)$$

On suppose que, pour  $\Delta t \ll \tau$  (l'échelle de temps  $\tau$  restant éventuellement à définir d'un point de vue physique), le comportement de  $p_{1/1}(x_2, \Delta t/x_1)$  est de la forme :

$$p_{1/1}(x_2, \Delta t/x_1) = (1 - \lambda\Delta t)\delta(x_2 - x_1) + \Delta t W(x_2/x_1) + o(\Delta t) \quad (4.3)$$

dans la formule (4.3) la quantité  $W(x_2/x_1) \geq 0$  est la probabilité de transition par unité de temps de  $x_1$  à  $x_2 \neq x_1$ . Le paramètre  $\lambda$  est fixé par la condition de normalisation  $\int p_{1/1}(x_2, \Delta t/x_1) dx_2 = 1$ .

$$\lambda = \int W(x_2/x_1) dx_2 \quad (4.4)$$

Le point important est ici l'existence d'un taux de transition  $W(x_2/x_1)$ . Comme le montre l'équation (4.3)  $W(x_2/x_1)$  est lié à  $p_{1/1}(x_2, \Delta t/x_1)$ . Etant donnée la propriété de stationnarité de  $p_{1/1}$ , on peut réécrire l'équation (4.1) sous la forme :

$$p_{1/1}(x_3, t + \Delta t/x_1) = \int p_{1/1}(x_2, t/x_1) p_{1/1}(x_3, \Delta t/x_2) dx_2, \quad (4.5)$$

où l'on a posé  $t = t_2 - t_1$  et  $\Delta t = t_3 - t_2$ . Dans le second membre de l'équation (5.5) on utilise la formule (4.3), pour réécrire  $p_{1/1}(x_3, t/x_2)$ . On obtient ainsi :

$$p_{1/1}(x_3, t + \Delta t/x_1) = (1 - \lambda\Delta t)p_{1/1}(x_3, t/x_1) + \Delta t \int p_{1/1}(x_2, t/x_1) W(x_3/x_2) dx_2. \quad (4.6)$$

On suppose  $\Delta t \ll t$  et l'on passe formellement à la limite  $\Delta t \rightarrow 0$  dans l'équation

(4.6) on obtient ainsi l'équation :

$$\frac{\partial p_{1/1}(x_3, t/x_1)}{\partial t} = -\lambda p_{1/1}(x_3, t/x_1) + \int p_{1/1}(x_2, t/x_1) W(x_3 | x_2) dx_2 \quad (4.7)$$

qui s'écrit aussi, en utilisant l'expression (4.4) de  $\lambda$  (et on modifiant les notations) :

$$\frac{\partial p_{1/1}(x, t/x_1)}{\partial t} = \int [W(x/x') p_{1/1}(x', t/x_1) - W(x'/x) p_{1/1}(x, t/x_1)] dx'. \quad (4.8)$$

Dans les probabilités de transition figurant dans l'équation (4.8) la valeur initiale  $x_1$  est fixée. On peut écrire, en simplifiant les notations,

$$\frac{\partial p_{1/1}(x, t)}{\partial t} = \int [W(x/x') p_{1/1}(x', t) - W(x'/x) p_{1/1}(x, t)] dx' \quad (4.9)$$

avec la condition initiale :

$$p_{1/1}(x, 0) = \delta(x - x_1). \quad (4.10)$$

L'équation (4.9) est appelée équation maîtresse. Sa solution déterminée pour  $t \geq 0$  par la condition initiale (4.10) est la probabilité de transition  $p_{1/1}(x, t/x_1)$ .

L'équation maîtresse [6] a la structure d'une équation de bilan pour  $p_{1/1}$ . Le terme entrant en  $p_{1/1}(x', t)$  contient le taux de transition  $W(x/x')$ , tandis que le terme sortant en  $p_{1/1}(x, t)$  contient le taux  $W(x'/x)$ . L'équation maîtresse est une équation intégral-différentielle linéaire du premier ordre par rapport au temps. Elle permet de déterminer la probabilité de transition à tout instant  $t \geq 0$  arbitrairement grand, et donc, en principe, d'étudier l'approche de l'équilibre [1].

### 4.3 Equation de Fokker-Planck

Cette équation concerne un processus de Markov, processus stochastique qui possède la propriété markovienne : la probabilité d'apparition d'un état du système à un instant donné ne dépend que de son histoire la plus récente. Ainsi le processus est caractérisé

par une probabilité de transition entre deux états assortis d'une condition initiale.

Pour éviter les incohérences, la probabilité de transition doit satisfaire une condition de compatibilité qui s'exprime par une équation intégrale appelée équation de Chapman-Kolmogorov-Smoluchowski. Celle-ci signifie qu'étant donnés trois états successifs, la transition de l'état 1 à l'état 3 est obtenue en effectuant la transition de 1 à 2, puis la transition de 2 à 3. Si le processus est stationnaire, la densité de probabilité du processus est obtenue en faisant tendre la durée de la transition vers l'infini. L'équation intégrale se transforme en une équation aux dérivées partielles.

Dans la section précédente, on a établi l'équation d'évolution caractéristique d'un processus de Markov,

$$p(x, t + \Delta t) = \sum_{x' \in X} W(x, t + \Delta t | x', t) p(x', t) \quad (4.11)$$

qui, sous forme continue, s'écrit :

$$p(x, t + \Delta t) = \int_{x' \in X} dx' W(x, t + \Delta t | x', t) p(x', t). \quad (4.12)$$

La quantité  $W$  est la probabilité de transition, probabilité de passer de la valeur  $x'$  à l'instant  $t$  à la valeur  $x$  à l'instant voisin ultérieur  $t + \Delta t$ . la fonction  $W(x, t + \Delta t | x', t)$  ne prend de valeurs notables, pour  $\Delta t$  fixé, que si la différence  $x - x'$  reste petite.  $W$  a donc l'allure d'une courbe en cloche, sensiblement non nulle seulement dans un petit intervalle en  $x'$  entourant  $x$ . En outre, on admet que, pour un écart  $|x - x'|$  donné,  $W(x, t + \Delta t | x', t)$  est une fonction lentement variable par rapport à  $x$ . Avec ces deux hypothèses il est légitime de faire un développement de Taylor de l'intégrand. Posons  $\Delta x = x - x'$ ;

L'équation (4.12) prend maintenant la forme :

$$p(x, t + \Delta t) = \int d \Delta x W(x, t + \Delta t | x - \Delta x, t) p(x - \Delta x, t). \quad (4.13)$$

La présence de  $W$ , compte tenu de sa variation supposée à  $\Delta t$  petit et puisque  $p$  est une fonction bornée entraîne que l'intégrand ne prend de valeurs importantes que dans le voisinage  $\Delta x \sim 0$ . Pour récupérer au second membre, dans la fonction  $p$ , le même argument  $x$  qu'au premier, on centre le développement de Taylor de l'intégrand sur le point  $x + \Delta x$ ; ainsi :

$$W(x, t + \Delta t | x - \Delta x, t) = W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) p(x, t) + \sum \frac{1}{n!} (-\Delta x)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) p(x, t). \quad (4.14)$$

Reportons maintenant ce développement dans l'expression (4.13), on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \left\{ \left[ \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta x (\Delta x)^n W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) \right] p(x, t) \right\}. \quad (4.15)$$

En posant :

$$M_n(x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \int d\Delta x (\Delta x)^n W(x + \Delta x, t + \Delta t | x, t) \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{n!} \frac{1}{\Delta t} \langle (\Delta x)^n \rangle. \quad (4.16)$$

l'équation d'évolution (4.14) donne :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} [M_n(x) p(x, t)]. \quad (4.17)$$

Ceci porte le nom d'équation (de développement) de Kramers-Moyal [7]. Les  $M_n$  sont les moments de la distribution de  $x - x'$  relativement à la probabilité de transition  $W(x, \Delta t | x', 0)$ . Pour une diffusion ordinaire, l'écart moyen  $\langle \Delta x \rangle$  croît comme le temps, ainsi que l'écart quadratique  $\langle \Delta x \rangle^2$ , de sorte que ces deux quantités sont toutes deux proportionnelles à l'accroissement  $\Delta t$  : il en résulte qu'au moins les deux premiers moments  $M_1$  et  $M_2$  (obtenus après division par  $\Delta t$ ) sont sûrement différents de zéro ; les moments

d'ordre supérieur sont nuls s'ils sont proportionnels à une puissance supérieure à 1 de  $\Delta t$ . Cette dernière propriété est plausible dans l'hypothèse – faite depuis le début – que la dynamique est lente. Dans ces conditions, le développement général de Kramers-Moyal s'arrête à l'ordre 2 inclus et produit [2] :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [M_1(x) p(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [M_2(x) p(x, t)]. \quad (4.18)$$

C'est cette équation qui porte le nom d'équation de Fokker - Planck.

## 4.4 Comparaison entre l'équation maîtresse et l'équation de Fokker-Planck

Réécrivons ces deux équations, (4.9) et (4.16), toutes deux obtenues en utilisant explicitement l'équation de Smoluchowski-Chapman-Kolomogorov, elle-même vraie pour un processus de Markov :

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \int dx' [W(x, x') p(x', t) - W(x', x) p(x, t)] \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = -\frac{\partial}{\partial x} [\nu(x) p(x, t)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [D(x) p(x, t)] \quad (4.20)$$

Si  $\nu$  et  $D$  sont indépendants de la variable  $x$ , ces quantités représentent respectivement la vitesse et le coefficient de diffusion de la variable  $\Upsilon$  (qui peut être une vitesse, une coordonnée, comme on le verra par la suite). Il convient de rappeler que l'établissement de l'équation de Fokker-Planck [1] a requis une hypothèse de petits transferts, impliquant que le noyau  $W(x, t + \Delta t | x, t)$  ne prend de valeurs importantes, à  $\Delta t$  petit, que si la différence  $x - x'$  est elle-même petite. Cette restriction ne s'applique pas à l'équation maîtresse, en général, mais il est clair qu'une telle équation doit se réduire à l'équation de Fokker-Planck dans la limite où seules des petites variations sont possibles.

## 4.5 conclusion

Dans ce chapitre nous avons pu retrouver les équations de la physique stochastique à partir de l'équation mathématique bien connue de Chapman-Kolmogorov, et nous avons montré comment trouver les équations maitresses et l'équation maitresse de Fokker-Planck qui sont une généralisation de l'équation de diffusion d'Einstein-Smoluchowski-Chapman-Kolmogorov.

# Chapitre 5

## Applications

### 5.1 Application 1 : Marche aléatoire

Nous allons traiter le problème d'un système dont l'évolution au cours du temps se fait par étapes discrètes et aléatoires dans un espace à une dimension. C'est ce que l'on appelle une marche au hasard [10]. Ceci peut représenter un phénomène physique connu sous le nom de mouvement brownien. Chaque étape, le système avance d'une longueur  $l$  donnée dans l'une ou l'autre direction de l'espace avec une probabilité  $p$  ou  $q$  tel que ( $p + q = 1$ ).

On peut concrétiser ce problème en imaginant un homme ivre [6] qui se déplace dans une rue, orientée de gauche à droite, en faisant des pas de longueur constante  $l$ . Chaque pas est supposé indépendant du précédent (c'est ce que l'on appelle un processus markovien). La probabilité d'aller à gauche est  $p$ , celle d'aller à droite  $q = 1 - p$ . Si la rue est horizontale  $p = q = 1/2$ , mais si elle est en pente,  $p$  et  $q$  peuvent être différents. Si l'ivrogne a fait  $n$  pas, nous voudrions savoir à quelle distance il se trouve de l'origine. On ne peut répondre de manière certaine à cette question et l'on est amené à introduire une distribution de probabilité : la distribution binomiale [6]. Celle-ci est très importante en physique statistique car elle s'applique à des problèmes très divers qui sont plus proches de la physique que de celui d'un ivrogne déambulant dans une rue.

Considérons un système qui se déplace selon l'axe des  $x$  et qui se trouve initialement au point  $x = 0$ . La figure ci-dessous montre un exemple typique de résultats en traçant les positions successives  $x(k)$  de la particule aux instants  $k$ , partant de la condition initiale  $x(0) = 0$ .

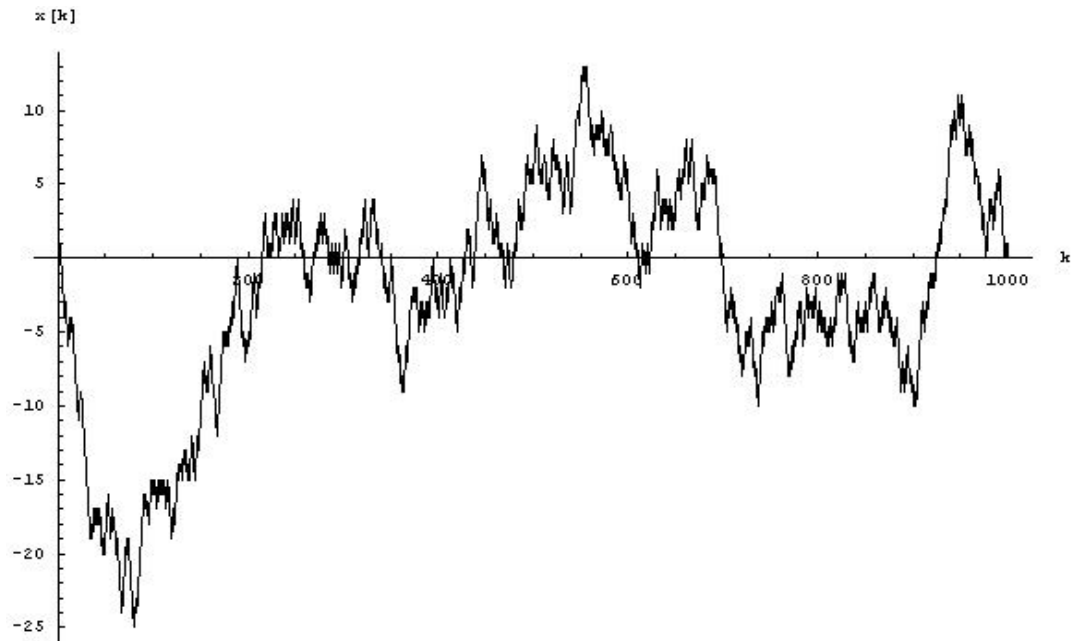


Fig.2. Marche aléatoire à une dimension d'espace.

### 5.1.1 Probabilités de transition conditionnelle

On définit la probabilité de transition conditionnelle [9] :

$$p(n | m, s) \equiv p(na | ma, s\tau) \quad (5.1)$$

comme étant la probabilité de trouver l'homme au site  $ma$  à l'instant  $s\tau$  sachant qu'il était au site  $na$  à l'instant initial 0. L'hypothèse d'isotropie conduit à écrire la loi d'évolution de cette probabilité conditionnelle et considérant que la rue est horizontale :

$$p(n | m, s + 1) = \frac{1}{2} [p(n | m + 1, s) + p(n | m - 1, s)] \quad (5.2)$$



On en déduit la relation suivante :

$$p(n | m, s + 1) - p(n | m, s) = \frac{1}{2} [p(n | m + 1, s) + p(n | m - 1, s) - 2p(n | m, s)] \quad (5.3)$$

### 5.1.2 Convergence vers le mouvement brownien et équation de Fokker-Planck

Prenons la limite continue de l'équation précédente lorsque les paramètres :

$$\begin{cases} \tau \rightarrow 0 \\ a \rightarrow 0 \end{cases} \quad (5.4)$$

On verra à la fin du calcul que la combinaison  $a^2/2\tau$  doit en fait rester constante dans cette limite continue. Il vient, en réintroduisant le paramètre adéquat pour faire un développement limité[12]

$$p(n | m, (s + 1)\tau) - p(n | m, s\tau) = \tau \frac{\partial p(n | m, s\tau)}{\partial t} + o(\tau^2) \quad (5.5)$$

D'autre part, on peut écrire :

$$p(n | (m \pm 1)a, s) = p(n | ma, s) \pm a \frac{\partial p(n | ma, s)}{\partial x} + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p(n | ma, s)}{\partial x^2} + o(a^3) \quad (5.6)$$

de telle sorte que le crochet se réduise à :

$$p(n | m + 1, s) + p(n | m - 1, s) - 2p(n | m, s) = a^2 \frac{\partial^2 p(n | ma, s)}{\partial x^2} + o(a^3) \quad (5.7)$$

On en déduit donc l'équation de Fokker-Planck :

$$\tau \frac{\partial p(x_0 | x, t)}{\partial t} = \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2 p(x_0 | x, t)}{\partial x^2} \quad (5.8)$$

qu'on peut réécrire :

$$\frac{\partial p(x_0 | x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p(x_0 | x, t)}{\partial x^2} \quad (5.9)$$

tel que ;

$$D = \frac{a^2}{2\tau} \quad (5.10)$$

### 5.1.3 Solution de l'équation de Fokker-Planck

En plus de l'équation de Fokker-Planck, la densité de probabilité de transition conditionnelle  $p(x_0 | x, t)$  doit vérifier les deux conditions supplémentaires suivantes :

La normalisation des probabilités totales

$$\forall t > 0, \int_{-\infty}^{+\infty} dx p(x_0 | x, t) = 1. \quad (5.11)$$

La condition initiale

$$\lim_{t \rightarrow 0} p(x_0 | x, t) = \delta(x - x_0). \quad (5.12)$$

où  $\delta(x)$  est la distribution de Dirac.

La densité de probabilité de transition conditionnelle  $P(x_0|x, t)$  est donc essentiellement une fonction de Green de l'équation de Fokker-Planck [13]. On peut démontrer qu'elle s'écrit explicitement :

$$p(x_0 | x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp \left[ -\frac{(x - x_0)^2}{4Dt} \right]. \quad (5.13)$$

### 5.1.4 La valeur moyenne

Posons  $x_0 = 0$  pour simplifier. La densité de probabilité de transition conditionnelle  $p_0(x, t) = p(0 | x, t)$  permet le calcul des divers moments :

$$\langle x^n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^n p_0(x, t) . n \geq 1 \quad (5.14)$$

La fonction  $P_0$  étant paire, tous les moments d'ordre impair sont nuls. On peut facilement calculer tous les moments d'ordre pair en posant :

$$\alpha = \frac{1}{4Dt}, \quad (5.15)$$

et en écrivant que :

$$\langle x^n(t) \rangle = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dx x^{2n} e^{-\alpha x^2} = (-1)^n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha x^2} \right]. \quad (5.16)$$

On obtient explicitement :

$$\langle x^n(t) \rangle = (-1)^n \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[ \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \right] = (-1)^n \sqrt{\alpha} \frac{d^n}{d\alpha^n} \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right]. \quad (5.17)$$

On retrouve notamment pour le moment [2] d'ordre deux :

$$\langle x^2(t) \rangle = -\sqrt{\alpha} \frac{d}{d\alpha} \left[ \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right] = (-\sqrt{\alpha}) \times \left( \frac{1}{-2\alpha^{3/2}} \right) = \frac{1}{2\alpha} = 2Dt. \quad (5.18)$$

## 5.2 Application 2 : processus de naissances et de morts

Utilisés plus particulièrement en biologie, démographie, physique, sociologie, pour rendre compte de l'évolution de la taille d'une population, les processus de naissance et de mort [8] sont des processus de Markov continus ( $T = IR_+$ ), à valeurs dans  $E = IN$  tels que les seules transitions non négligeables possibles à partir de  $k$  soient vers  $k + 1$  ou vers  $k - 1$ .

### 5.2.1 Processus de naissances

On considère l'évolution de la population d'une bactérie dans un tube, suivant les conditions :

1-Toute bactérie, indépendamment des autres et indépendamment du passé, peut se diviser en deux avec la probabilité  $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$  dans l'intervalle de temps  $[t, t + \Delta t]$ .

2-Les bactéries ne meurent jamais.

3-A l'instant 0, il y a une seule bactérie dans le tube.

Pour traiter le problème de l'évolution d'une population de la bactérie, on a quatre étapes à suivre :

a.Modélisation du nombre des bactéries à l'instant  $t$  par un processus de naissance pure dont on donnera le taux ; et le dessin de diagramme de transition.

b.Démonstration que  $P_k(t)$ , la probabilité d'avoir une population de  $k$  bactéries à l'instant  $t$ , satisfait le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dp_k(t)}{dt} = -k\lambda p_k(t) + (k-1)p_{k-1}(t), k > 1 \\ \frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) \end{cases} \quad (5.19)$$

c.Démonstration par récurrence sur  $k$ , qu'on a :

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} \quad (5.20)$$

et déduction de l'espérance mathématique du nombre de bactéries à l'instant  $t$ .

d.En considérant maintenant un modèle déterministe, dans lequel chaque bactérie se divise en deux toutes les  $1/\lambda$  minutes (i.e. le même taux de naissance que dans le modèle probabiliste) et en comparant le nombre de bactéries dans le modèle déterministe et le nombre moyen de bactérie dans le modèle probabiliste (tous les deux à l'instant  $t$ ).

Commençant d'abord par la loi de probabilité, si on considère la probabilité qu'un

événement survienne dans un intervalle d'amplitude  $\Delta t$

$$pr \{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} \quad (5.21)$$

en opérant un développement limité au premier ordre, et en remarquant que  $pr \{N(t) - N(t) = 1\} =$

0 , on obtient :

$$pr \{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = 0 + \lambda \Delta t + o(\Delta t) \quad (5.22)$$

a.La modélisation des bactéries et le diagramme de transition :

Désignons par  $Z(t)$  le nombre de bactéries dans le tube à l'instant  $t$  . Il est clair que  $Z(t)$  est une instance particulière des processus de naissance pure de taux variable.

$$\begin{cases} \lambda_k = k\lambda, k \in N \\ \mu_k = 0, k \in N \end{cases} \quad (5.23)$$

tel que :  $\lambda_k \geq 0, k = 0.1.2.....$ est le taux de naissance pour une population de taille  $k$  et

$\mu_k \geq 0, k = 0.1.2.....$ est le taux de mort pour une population de taille  $k$  (on pose  $\mu_k = 0$ ).

$Z(t)$  a le diagramme de transition suivant :

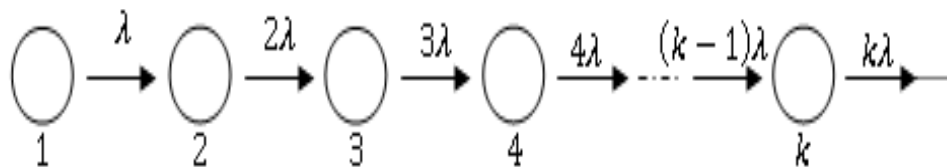


Fig.3. Processus de naissances.

2-Pour démontrer que la probabilité  $p_k(t)$  satisfait le système d'équation différentielle [7] on procède de la manière suivante :

Pour  $\Delta t$  suffisamment petit, le résultat précédent de la loi de probabilité nous permet d'écrire le système :

$$\begin{cases} \text{pr} \{N(t + \Delta t) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta t) \\ \text{pr} \{N(t + \Delta t) - N(t) = 1\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t) \\ \text{pr} \{N(t + \Delta t) - N(t) = 0\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t) \end{cases} \quad (5.24)$$

On peut donc écrire :

$$\text{pr}\{0 \text{ naissance durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\text{pr}\{1 \text{ naissance durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

La probabilité associée à ces événements permet donc d'écrire [15] :

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) \times \text{pr}\{0 \text{ naissance dans } [t, t + \Delta t]\} + p_{k-1}(t) \times \text{pr}\{1 \text{ naissance dans } [t, t + \Delta t]\} + o(\Delta t)$$

$$p_k(t + \Delta t) = p_k(t) \{1 - \lambda k \Delta t\} + p_{k-1}(t) \lambda (k-1) \Delta t + o(\Delta t) \quad (5.25)$$

On regroupant les termes et en divisant les membres par  $\Delta t$  il vient :

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -\lambda k p_k(t) + \lambda (k-1) p_{k-1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (5.26)$$

Sachant que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad (5.27)$$

on obtient l'équation maitresse suivante :

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -\lambda k p_k(t) + \lambda (k-1) p_{k-1}(t) \quad (5.28)$$

3-Pour  $k = 1$ , nous avons :

$$\frac{dp_1(t)}{dt} = -\lambda p_1(t) \quad (5.29)$$

On peut trouver  $p_k(t)$  par récurrence [7] sur  $k$  :

$(k = 0) \rightarrow p'_0(t) = 0$  donc  $p_0(t) = p_0(0) = 0$

$(k = 1) \rightarrow p'_1(t) = -\lambda p_1(t)$  donc  $p_1(t) = ce^{-\lambda t}$  avec  $c = p_1(0) = 1$

Supposons maintenant que  $p_{k-1}(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-2}$ , pour  $k \geq 2$  on a :

$$p'_k(t) + k\lambda p_k(t) = (k-1)\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-2}. \quad (5.30)$$

C'est une équation différentielle linéaire de premier ordre avec second membre. Pour résoudre cette équation on utilise la méthode de la variation constante :

$$p_k(t) = ce^{-k\lambda t} \text{ avec } c'(t) e^{-k\lambda t} = (k-1)\lambda e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-2} \quad (5.31)$$

soit :

$$\begin{aligned} c'(t) &= (k-1)\lambda e^{(k-1)\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-2} \\ &= (k-1)\lambda e^{-\lambda t} (e^{\lambda t} - 1)^{k-2} = \frac{d}{dt} [(e^{-\lambda t} - 1)]^{k-1} \end{aligned} \quad (5.32)$$

donc :

$$c(t) - c(0) = (e^{\lambda t} - 1)^{k-1} \quad (5.33)$$

et

$$c(0) = p_k(0) = 0, \text{ pour } k \geq 2 \quad (5.34)$$

Finalement :

$$p_k(t) = e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} \quad (5.35)$$

L'espérance mathématique peut être déduite du nombre de bactéries à l'instant  $t$  :

$$\begin{aligned}
E [N (t)] &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda t} k (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} & (5.36) \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{k=1}^{\infty} k (1 - e^{-\lambda t})^{k-1} \\
&= e^{-\lambda t} \frac{1}{[1 - (1 - e^{-\lambda t})]^2} \\
&= e^{\lambda t}
\end{aligned}$$

d. Dans le modèle déterministe, à l'instant  $t$ , le nombre de bactéries vaut :  $2^{\lfloor \lambda t \rfloor}$  où  $\lfloor x \rfloor$  désigne la partie entière de  $x$ .

Puisque  $e > 2$ , on en déduit que pour le même taux de naissance, le nombre moyen de bactéries dans le modèle probabiliste est beaucoup plus élevé que le même nombre dans le modèle déterministe.

Si on voulait construire un modèle déterministe la fonction  $n(t)$  = taille de la population à la date  $t$ , l'équation différentielle correspondant aux hypothèses serait :

$$n'(t) = \lambda n(t) \quad (5.37)$$

avec la condition initiale  $n(0) = n_0$  dont la solution est :

$$n(t) = n_0 e^{\lambda t} \quad (5.38)$$

Ici, on retrouve le comportement "moyen" (i.e. en espérance) du processus de naissances. Cette propriété est également vérifiée pour les autres formes d'intensités.

## 5.2.2 processus de morts

C'est le cas  $\lambda_n = 0$  et  $\mu_n = n\mu$  pour tout  $n \in N$



On suppose  $X_0 = N \geq 1$ . Ce modèle décrit l'évolution d'un système composé de  $N$  dispositifs indépendants non réparables, dont les durées de fonctionnement obéissent à une même loi exponentielle de paramètre  $\mu$  (durée de vie moyenne  $1/\mu$ ).

Dans ce cas, il est immédiat que :

$$p_n(t) = C_N^n e^{-n\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N-n} \quad (5.39)$$

En effet, la probabilité qu'un dispositif de durée de vie  $T$  fonctionne encore à l'instant  $t$  est  $P([T > t]) = e^{-\mu t}$  (donc la probabilité qu'il ne fonctionne plus est  $(1 - e^{-\mu t})$ ). Comme  $p_n(t)$  est la probabilité qu'il y ait exactement  $n$  dispositifs qui fonctionnent à l'instant  $t$  et qu'il y a exactement  $C_N^n$  façons de choisir les  $n$  qui fonctionnent, on a bien le résultat.

On peut le retrouver avec les équations de Kolmogorov :

$$\begin{cases} \frac{dp_n(t)}{dt} = -n\mu p_n(t) + (n-1)p_{n-1}(t), n \in \{0, 1, \dots, N-1\} \\ \frac{dp_N(t)}{dt} = -N\mu p_N(t) \end{cases}, \quad (5.40)$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots (\text{on pose } \lambda_k = 0) \\ \mu_k \geq 0, k = 0, 1, 2, \dots \end{cases} \quad (5.41)$$

et tel que le diagramme de transition est le suivant :

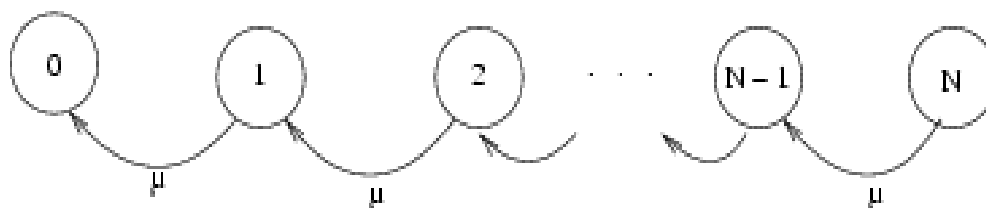


Fig.4. Processus de morts.

$$\text{pr}\{0 \text{ mort durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = 1 - \mu\Delta t + o(\Delta t)$$

$\text{pr}\{1 \text{ mort durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$

Donc la probabilité associée à ces événements permet d'écrire :

$$p_n(t + \Delta t) = p_n \times \text{pr}\{0 \text{ mort dans } [t, t + \Delta t]\} + p_{n+1}(t) \times \text{pr}\{1 \text{ mort dans } [t, t + \Delta t]\} + o(\Delta t)$$

$$p_n(t + \Delta t) = p_n(t) \{1 - \mu n \Delta t\} + p_{n+1}(t) \mu (n + 1) \Delta t + o(\Delta t) \quad (5.42)$$

On regroupant les termes et on divisant les membres par  $\Delta t$  il vient :

$$\frac{p_n(t + \Delta t) - p_n(t)}{\Delta t} = -\mu n p_n(t) + \mu (n + 1) p_{n+1}(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \quad (5.43)$$

Sachant que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0, \quad (5.44)$$

on obtient [7] :

$$\frac{dp_n(t)}{dt} = -\mu n p_n(t) + \mu (n + 1) p_{n+1}(t) \quad (5.45)$$

Nous avons

$$p_n(t) = C_N^n e^{-n\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N-n}. \quad (5.46)$$

On peut trouver  $p_n(t)$  par récurrence descendante [9] sur  $n$  :

$$\rightarrow p'_N(t) + N\mu p_N(t) = 0 \text{ donc } p_N(t) = C e^{-N\mu t}$$

$$\text{avec : } C = p_N(0) = 1$$

$\rightarrow$  Supposons maintenant que  $p_{n+1}(t) = C_N^{n+1} (e^{-\mu t})^{n+1} (1 - e^{-\mu t})^{N-n-1}$  pour  $n \in \{1, 2, \dots, N-1\}$  on a :

$$p'_n(t) + n\mu p_n(t) = (n + 1) \mu C_N^{n+1} (e^{-\mu t})^{n+1} (1 - e^{-\mu t})^{N-n-1} \quad (5.47)$$

On applique la méthode de la variation de la constante :

$$p_n(t) = c(t) e^{-n\mu t}$$

avec

$$\begin{aligned} c'(t) &= e^{n\mu t} (n+1) \mu \frac{N!}{(n+1)!(N-n-1)!} e^{-(n+1)\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N-n-1} \\ &= (N-n) \mu C_N^n e^{-\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N-n-1} \\ &= \frac{d}{dt} \left( C_N^n (1 - e^{-\mu t})^{N-n} \right) \end{aligned} \quad (5.48)$$

et  $c(t) - c(0) = C_N^n (1 - e^{-\mu t})^{N-n}$  avec  $c(0) = p_n(0) = 0$ . Pour  $n < N$  et

$$p_n(t) = C_N^n e^{-n\mu t} (1 - e^{-\mu t})^{N-n}, \quad (5.49)$$

on en déduit l'espérance :

$$E[N(t)] = Np(t) = Ne^{-\mu t}. \quad (5.50)$$

On peut remarquer que l'espérance  $n(t) = n_0 e^{-\mu t}$  est solution de l'équation différentielle déterministe

$$n'(t) = -\mu n(t) \quad (5.51)$$

### 5.2.3 Processus de naissances et de morts

Une description réaliste du développement d'une population doit évidemment tenir compte à la fois des naissances [15] et des morts des individus qui la compose. Un modèle simple s'obtient en combinant les deux modèles précédents.

Lorsque le système à un instant donné  $t$  est dans l'état  $E_k$ , on dit que la population à l'instant  $t$  est de taille  $k$ . On pose alors indifféremment soit  $Z(t) = E_k$  soit  $Z(t) = k$ . Une autre façon équivalente de définir le processus est d'introduire les événements et

leurs probabilités de façon suivante :

$$\text{pr}\{1 \text{ naissance durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\text{pr}\{0 \text{ naissance durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = 1 - \lambda \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\text{pr}\{1 \text{ mort durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

$$\text{pr}\{0 \text{ mort durant l'intervalle } [t, t + \Delta t]\} = 1 - \mu \Delta t + o(\Delta t)$$

on a :

$$\begin{cases} \lambda_k \geq 0, k = 0.1.2..... \\ \mu_k \geq 0, k = 0.1.2..... \end{cases} \quad (5.52)$$

Plus intuitivement, on peut énoncer la propriété caractéristique suivante :

Supposons que l'on observe l'évolution d'un processus de naissance et de mort de taille  $k$  à l'instant  $t$ , en considérant un intervalle de temps de durée  $\Delta t$ , avec  $\Delta t$  assez petit. Alors, pendant l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ , il peut survenir une naissance avec une probabilité proportionnelle à  $\Delta t$  ou une mort avec une probabilité proportionnelle à  $\Delta t$ , les coefficients de proportionnalité étant respectivement de  $\lambda_k$  et  $\mu_k$  (dépendants donc de la taille).

Notons que ces probabilités ne sont pas affectées quelque soit l'instant  $t$  (propriété d'homogénéité) et quelques fussent les événements qui ont mené le processus dans son état actuel (propriété sans mémoire). Soit  $p_k(t)$  la probabilité pour que la population soit de taille  $k$  à l'instant  $t$ . Dans un premier temps, nous cherchons à montrer que  $p_k(t)$ , satisfait le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda_k + \mu_k)p_k(t) + \lambda(k-1)p_{k-1}(t) + \mu(k+1)p_{k+1}(t) > 1 \\ \frac{dp_k(0)}{dt} = -\lambda_0 p_0(t) + \mu_1 p_1(t) \end{cases} \quad (5.53)$$

Considérons deux instants  $t$  et  $t + \Delta t$  et calculons la probabilité pour que le processus soit de taille  $k$  (état  $E_k$ ) à l'instant  $t + \Delta t$  en fonction de son état à l'instant  $t$ .

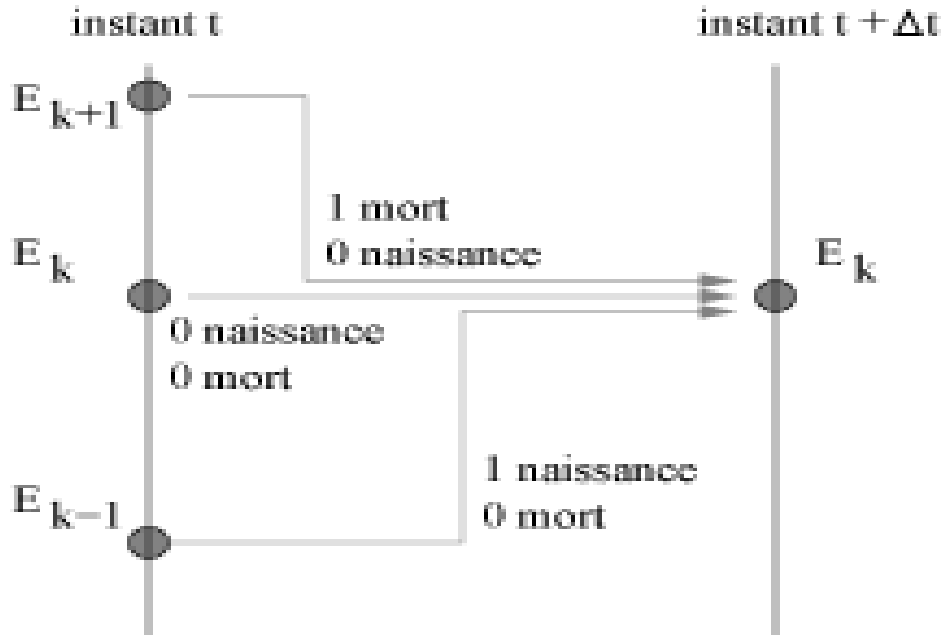


Fig.5. Passage de l'état de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$ .

Passage de l'état de l'instant  $t$  à l'instant  $t + \Delta t$  et on a donc la probabilité associées à ces événements permettre d'écrire :

$$\begin{aligned}
 p_k(t + \Delta t) = & p_k \times pr\{0 \text{ naissance}, 0 \text{ mort dans } [t, t + \Delta t]\} \\
 & + p_{k-1}(t) \times pr\{1 \text{ naissance}, 0 \text{ mort dans } [t, t + \Delta t]\} \\
 & + p_{k+1}(t) \times pr\{1 \text{ mort}, 0 \text{ naissance dans } [t, t + \Delta t]\} \\
 & + o(\Delta t).
 \end{aligned}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
 p_k(t + \Delta t) = & p_k(t) \{1 - \lambda k \Delta t\} \{1 - \mu \Delta t\} \\
 & + p_{k-1}(t) \lambda (k-1) \Delta t (1 - \mu (k-1) \Delta t) \\
 & + p_{k+1}(t) \mu (k+1) \Delta t (1 - \lambda (k+1) \Delta t) \\
 & + o(\Delta t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_k(t + \Delta t) &= p_k(t) - (\lambda k + \mu k) p_k(t) \\
&\quad + \lambda(k - 1) p_{k-1}(t) \\
&\quad + \mu(k + 1) p_{k+1}(t) \\
&\quad + o(\Delta t).
\end{aligned} \tag{5.54}$$

En regroupant les termes et en divisant les membres par  $\Delta t$ , il vient :

$$\frac{p_k(t + \Delta t) - p_k(t)}{\Delta t} = -(\lambda k + \mu k) p_k(t) + \lambda(k - 1) p_{k-1}(t) + \mu(k + 1) p_{k+1}(t) + o(\Delta t). \tag{5.55}$$

Sachant que :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} = 0 \tag{5.56}$$

On obtient l'équation :

$$\frac{dp_k(t)}{dt} = -(\lambda k + \mu k) p_k(t) + \lambda(k - 1) p_{k-1}(t) + \mu(k + 1) p_{k+1}(t) \tag{5.57}$$

dont la résolution est particulièrement complexe dans le cas général, c'est à dire pour une taille initiale  $n_0$  quelconque. On suppose donc que l'évolution d'une population de taille initiale  $n_0$  est équivalente à l'évolution de  $n_0$  populations indépendantes d'effectif Initial 1. Dans le cas ou la population initiale est de taille 1, la Solution de cette équation différentielle est :

$$\begin{cases} p_0(t) = \mu g(t) \\ p_n(t) = [1 - \mu g(t)] [1 - \lambda g(t)] [\lambda g(t)]^{n-1} \end{cases}, \quad (5.58)$$

où

$$g(t) = \frac{1 - e^{(\lambda - \mu)t}}{\mu - \lambda e^{(\lambda - \mu)t}}. \quad (5.59)$$

On en déduit l'espérance :

$$E[N(t)] = e^{[\lambda - \mu]t} \quad (5.60)$$

Si on veut construire le modèle déterministe correspondant, on écrit l'équation différentielle qui rend compte du fait que les naissances et les morts se font en proportion de la taille de la population à l'instant  $t$  :

$$n'(t) = +\lambda n(t) - \mu n(t) \quad (5.61)$$

telque :

$\lambda n(t) \rightarrow$ naissances

$\mu n(t) \rightarrow$ morts

avec la condition initiale  $n(0) = n_0$ , la solution correspond à l'espérance du processus de naissances et morts :

$$n(t) = n_0 e^{(\lambda - \mu)t} \quad (5.62)$$

## 5.3 Application 3 : Particules dans un champ électrostatique/ magnétique

### 5.3.1 Particules dans un champ électrostatique

on considère une population de particules, de masse  $m$ , dans l'espace des phases position-impulsion,  $\{\vec{x}, \vec{p}\}$ , soumises à un champ de force électrostatique aléatoire. On

suppose que ce champ de force ne provoque que de faibles déflexion de l'impulsion  $\vec{p}$  sur une échelle de temps  $t$ , En outre, ce champ de force, noté  $\vec{F}(\vec{x}(t))$ , ne dépend pas de l'impulsion, on aura

$$\frac{d}{dt}\vec{x} = \vec{v}(t) \quad (5.63)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{p} = \vec{F}(\vec{x}(t), t) \quad (5.64)$$

A un instant  $\tau \geq t - \Delta t$ , on peut écrire

$$\vec{x}(\tau) = \vec{x}(t - \Delta t) + (\tau - t + \Delta t)\vec{v}(t - \Delta t) + \delta\vec{x}(\tau), \quad (5.65)$$

avec

$$\delta\vec{x}(\tau) = \int_{t-\Delta t}^{\tau} \delta\vec{v}(t_1) dt_1, \quad (5.66)$$

$$\vec{v}(t_1) = \vec{v}(t - \Delta t) + \frac{1}{m} \int_{t-\Delta}^{t_1} \vec{F}(t_2) dt_2 \quad (5.67)$$

où  $\vec{F}(t_2) = \vec{F}(\vec{x}(t_2), t_2)$  et, par dfinition,

$$\delta\vec{v}(t_1) = \frac{1}{m} \int_{t-\Delta t}^{t_1} \vec{F}(t_2) dt_2 \quad (5.68)$$

par ailleurs, le saut en impulsion entre les instants  $t - \Delta t$  et  $t$ , faible par hypothèse sur une échelle de temps plus grande que celle du temps de corrélation du champ, notée  $\tau_c$ , s'écrit

$$\Delta\vec{p}(t, t - \Delta t) = \int_{t-\Delta t}^t \vec{F}(\vec{x}(\tau), \tau) d\tau \quad (5.69)$$



les composantes du tenseur de diffusion dans l'espace des impulsions sont donc

$$\Gamma_{ij} = \frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{2\Delta t} \simeq \int_0^{+\infty} \langle F_i(\vec{x}(t), t) F_j(\vec{x}(t) - \vec{v}\tau, t - \tau) \rangle d\tau \quad (5.70)$$

Dans ce même espace, les composants de la force de friction sont définies par

$$\frac{\langle \Delta p_i \rangle}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \langle F_i(t_1) \rangle dt_1 \quad (5.71)$$

comme  $F_i(t_1) = F_i(\vec{x}(t - \Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\vec{v}(t - \Delta t) + \delta\vec{x}(t_1), t)$ , on déduit

$$\begin{aligned} F_i(t_1) &= F_i(\vec{x}(t - \Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\vec{v}(t - \Delta t), t_1) + \\ &\quad \delta\vec{x}_j(t_1) \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(\vec{x}(t - \Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\vec{v}(t - \Delta t), t) \end{aligned} \quad (5.72)$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F_i(\vec{x}(t - \Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\vec{v}(t - \Delta t), t) \simeq \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(t_1) \quad (5.73)$$

ainsi, nous pouvons décomposer les composantes de la force de friction de la façon suivant :

$$\frac{\langle \Delta p_i \rangle}{\Delta t} = A_i + \Gamma_i \quad (5.74)$$

avec

$$A_i \equiv \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \langle F_i(\vec{x}(t - \Delta t) + (t_1 - t + \Delta t)\vec{v}(t - \Delta t), t) \rangle dt_1, \quad (5.75)$$

$$\Gamma_i = \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t \left\langle \delta x_j(t_1) \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1) \right\rangle dt_1. \quad (5.76)$$

le coefficient  $\Gamma_i$  peut s'exprime autrement : en effet, d'après les relations (5.58) et (5.60),

on a

$$\Gamma_i = \frac{1}{m\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t dt_1 \int_{t-\Delta t}^{t_1} dt_2 \int_{t-\Delta t}^{t_2} dt_3 \left\langle F_j(t_3) \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1) \right\rangle, \quad (5.77)$$

avec

$$\left\langle F_j(t_3) \frac{\partial}{\partial x_j} F_i(t_1) \right\rangle = \left\langle F_j(0) \frac{\partial}{\partial x_i} F_i(t_1 - t_3) \right\rangle, \quad (5.78)$$

le processus étant homogène et quasi-stationnaire.

Donc, comme  $\vec{x}(t_1) - \vec{x}(t_3) \simeq (t_1 - t_3) \vec{v}(t - \Delta t) \simeq (t_1 - t_3) \vec{v}(t)$ , le coefficient  $\Gamma_i$  devient

$$\begin{aligned} \Gamma_i &= \frac{\partial}{\partial p_i} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t dt_1 \int_{t-\Delta t}^{t_1} dt_2 \int_{t-\Delta t}^{t_2} dt_3 \frac{1}{t_1 - t_3} \langle F_j(t_3) F_i(t_1) \rangle \\ &\frac{\partial}{\partial p_j} \frac{1}{\Delta t} \int_{t-\Delta t}^t G_{ij}(t_1) dt_1, \end{aligned} \quad (5.79)$$

avec

$$G_{ij}(t_1) \equiv \int_{t-\Delta t}^{t_1} dt_2 \int_{t-\Delta t}^{t_2} dt_3 \frac{C_{ij}(t_1 - t_3)}{t_1 - t_3}, \quad (5.80)$$

$$C_{ij}(t_1 - t_3) \equiv \langle F_j(t_3) F_i(t_1) \rangle. \quad (5.81)$$

posons  $f : t \rightarrow C_{ij}(t) / t$ , on a

$$\begin{aligned} G_{ij}(t_1 + h) - G_{ij}(t_1) &= \int_{t-\Delta t}^{t_1} \left[ \int_{t-\Delta t}^{t_2} (f(t_1 + h - t_3) - f(t_1 - t_3)) dt_3 \right] dt_2 \\ &+ \int_{t_1}^{t_1+h} \left[ \int_{t-\Delta t}^{t_2} f(t_1 + h - t_3) dt_3 \right] dt_2. \end{aligned} \quad (5.82)$$

donc, avec  $\tau = t_1 - t_3$ ,

$$\begin{aligned}
\frac{dG_{ij}(t_1)}{dt_1} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G_{ij}(t_1 + h) - G_{ij}(t_1)}{h} \\
&= \int_{t-\Delta t}^{t_1} \left[ \int_{t_1-t+\Delta}^{t_1-t_2} -\frac{df}{d\tau} d\tau \right] dt_2 + \int_{t-\Delta t}^{t_1} f(t_1 - t_3) dt_3 \\
&= (t_1 - t + \Delta t) f(t_1 - t + \Delta t) \\
&= C_{ij}(t_1 - t + \Delta t).
\end{aligned} \tag{5.83}$$

conclusion, on obtient

$$G_{ij}(t_1) = \int_0^{t_1-t+\Delta t} C_{ij}(\tau) d\tau, \tag{5.84}$$

et, comme  $t_1 - t + \Delta t > \tau_c$ ,  $G_{ij}(t_1) \simeq \Gamma_{ij}$  et

$$\Gamma_i = \frac{\partial}{\partial p_i} \Gamma_{ij}. \tag{5.85}$$

Si l'on s'intéresse, à présent, aux termes de friction et de diffusion contenant des sauts de position spatiale :

$$\langle \Delta x_i \rangle \simeq v_i \Delta t + \int_{t-\Delta t}^t \langle \delta v_i(t_1) \rangle dt_1, \tag{5.86}$$

avec

$$\delta v_i(t_1) = \delta v_i(t - \Delta t) + (t_1 - t + \Delta t) F_i(t - \Delta t) + \dots \tag{5.87}$$

et

$$\int_{t-\Delta t}^t \langle \delta v_i(t - \Delta t) \rangle dt_1 = \Delta t \langle \delta v_i(t - \Delta t) \rangle. \tag{5.88}$$

Or, d'après la relation 2,

$$\begin{aligned}\delta v_i(t - \Delta t) &= \frac{1}{m} \int_{t-2\Delta t}^{t-\Delta t} F_i(t_2) dt_2 \\ &= \frac{1}{m} \int_0^{\Delta t} F_i(t - \tau) d\tau,\end{aligned}\tag{5.89}$$

ce qui implique que  $\langle \delta v_i(t - \Delta t) \rangle = \frac{1}{m} A_i \Delta t$ .

ainsi, le saut de position spatiale devient

$$\langle \Delta x_i \rangle \simeq v_i \Delta t + \frac{1}{m} A_i (\Delta t)^2 + o((\Delta t)^2),\tag{5.90}$$

et, au premier ordre,

$$\frac{\langle \Delta x_i \rangle}{\Delta t} \simeq v_i\tag{5.91}$$

On montre, de façon similaire, que les composantes du tenseur de diffusion contenant des termes de la forme  $\langle \Delta x_i \Delta x_j \rangle$  et  $\langle \Delta x_i \Delta p_j \rangle$ , sont égales à  $o(\Delta t)$ . ces composantes sont donc également négligeables. L'équation de Fokker-Planck s'écrit donc

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial p_i} \left( \frac{\langle \Delta p_i \rangle}{\Delta t} f \right) - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\langle \Delta x_i \rangle}{\Delta t} f \right) + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} \left( \frac{\langle \Delta p_i \Delta p_j \rangle}{2\Delta t} f \right),\tag{5.92}$$

ou, de façon plus compacte,

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} f = -\frac{\partial}{\partial p_i} (A_i f) + \frac{\partial}{\partial p_i} \left( \Gamma_{ij} \frac{\partial}{\partial p_j} f \right).\tag{5.93}$$

### 5.3.2 Particules dans un champ magnétique

Comme dans l'exemple précédent, on considère une population de particules, de masse  $m$ , dans l'espace des phases position-impulsion,  $\{\vec{x}, \vec{p}\}$ , soumises à un champ de force magnétique irrégulier. On suppose encore que ce champ de force, noté  $\vec{F}(\vec{p}(t), t)$  et qui ne dépend que de l'impulsion, ne provoque que de faibles déflexions de l'impulsion  $\vec{p}$  sur

une échelle de temps  $\Delta t$ .

Dans le cas d'une distribution isotrope des irrégularités magnétiques, le champ de force s'écrira simplement  $\vec{F}(\vec{p}, t)$  avec  $p = |\vec{p}|$ . On montre facilement que l'évolution de la fonction de distribution  $f(p, t)$  suit alors l'équation de Fokker-Planck suivante :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} \left[ p^2 D_{pp} \frac{\partial f}{\partial p} \right] \quad (5.94)$$

avec  $D_{pp}$  le coefficient de diffusion dans l'espace des impulsions, et où  $4\pi p^2 f(p, t) dp$  représente le nombre de particules dont l'impulsion est comprise entre  $p$  et  $p + dp$  à l'instant  $t$ .

## Conclusion Générale

La résolution d'équations aux dérivées partielles est souvent délicate et coûteuse et prend beaucoup de temps de calcul. C'est pourquoi on essaie toujours de trouver une manière de simplifier ce type d'équation, en tenant compte de considérations physiques particulières quand il s'agit de l'étude d'un phénomène physique. Le travail présenté dans ce mémoire concerne l'étude d'une classe de phénomènes physiques qui mettent en jeu des équations aux dérivées partielles, il s'agit de phénomènes aléatoires ou processus stochastiques. Parmi ces phénomènes nous avons considéré le mouvement brownien, en particulier la marche aléatoire, le processus de naissance et de mort, et des particules dans un champ électrostatique et dans un champ magnétique. Il est important de noter qu'une généralisation de cette étude s'impose du côté du système aléatoire choisi ainsi que les équations maîtresses qui les régissent. Arrivé à l'ultime de notre démonstration, citer quelques exemples et applications en physique et en mathématiques est d'un grand apport explicatif pour étayer davantage notre démarche dans ce domaine dont la perspective de recherche reste toujours en cours.

# Bibliographie

- [1] Physique Statistique hors equilibre .Processus irreversibles linéaires.Noelle Potter-CNRS EDITION.
- [2] Physique Statistique des fluides classique-C.Aslangul-UNIVERSITE PIERE ET MARIE CURIE-LA SCIENCE A PARIS.
- [3] PROBABILITES Exercices corrigés. Daiush Ghorbanzabel-EDITION TECHNIP.
- [4] Mécanique statistique avancée.phillipe.A.Martin-ECOLE POLYTECHNIQUE FEDERALE DE LAUSANNE.
- [5] Vibrations aléatoires et analyse spectrale - Page 37 .André Preumont-PRESSE POLYTECHNIQUES ET UNIVERSITE DE MANDRES.
- [6] Physique satistique .Christian Ngo et Helen Ngo-3eme EDITION DUNOD.
- [7] Processus stochastique et modilisation.responsable de l'UE-agnés lognoux.
- [8] Processus de poisson-processus de naissances et de morts.E-Lebarbier.S-Robin-AGRO PARIS TECH.
- [9] Files d'attente.B-Ycart.cahier mathématiques appliqués N 14.
- [10] Marches Aléatoires et Theorie du Mouvement Brownien Pablo-Crotti Séminaire Automne 2009-UNIVERSITE DE FRIBOURG SUISSE.
- [11] Note de cours de Processus Aléatoire-Olivier-François.Ensimag 2eme année 2004-2005.
- [12] C. Soudani.mémoire de Magister. Solution de l'équation de Fokker-Planck généralisée. Université de Ouargla. 2004.

- [13] B. Neouioua- mémoire de Magister- Résolution de l'équation de Fokker-Planck pour le processus de Rayleigh.Université de Ouargla 2004.
- [14] Saidi Sief Nadia-mémoire de Magister.Résolution d'équations de Fokker Planck à coefficients dépendants de l'espace-temps.université de constantine.2006.
- [15] Processus de Poisson Nasser Saheb-IUPMiage-Bordeaux.



## Résumé

Ce mémoire s'intéresse aux concepts fondamentaux conduisant à l'élaboration d'une théorie stochastique et l'équation de Fokker-Planck.

Nous avons commencé à parler du processus stochastique et nous avons parlé sur les variables aléatoires comme la première étape dans ce domaine et aussi bien que les possibilités.

Ensuite, nous avons étudié le processus de Markov car il est important pour atteindre l'équation de Chapman-Kolmogorov qui est une équation mathématique. Si celui-ci à la base des équations stochastique. Tout ce que l'équation Chapman-Kolmogorov nous sommes venus pour écrire l'équation de Fokker-Planck, qui est une équation physique très importante.

Ensuite, nous avons abordé l'étude des mouvements browniens et le modèle de Langevin (équation de Langevin).

Pour approfondir nos connaissances dans ce domaine plus nous avons étudié la marche aléatoire à une dimension, et le processus de naissance et de morts, et enfin, nous avons étudié le mouvement d'une particule dans un champ magnétique et dans un champ électrique. Chacune de ces études nous a permis d'approfondir notre connaissance sur les processus stochastique et les équations maitresses.

**Mots clé** : Processus Stochastique, Processus de Markov, Mouvement Brownien, Equation Stochastiques.

# Abstract

This brief focuses on fundamental concepts leading to the development of a stochastic process and the Fokker-Planck equation. We started talking about the stochastic process and talked about random variables as the first step in this area, as well as opportunities. Then we studied the Markov process because it is important to achieve the Chapman-Kolmogorov equation is a mathematical equation. If the latter at the base of stochastic equations. All that the Chapman-Kolmogorov equation we came to write the Fokker-Planck equation, which is a very important physical equation. Then we approached the study of Brownian motion and the Langevin model (Langevin equation).

To further our knowledge in this area more we studied the random walk in one dimension, and the process of birth and death, and finally, we studied the motion of a particle in a magnetic field and an electric field.

Each of these studies has allowed us to deepen our knowledge on stochastic processes and equations mistresses.

**Keywords:** stochastic processes, processes of Markov, Brownian motion, stochastic equations.

## ملخص

تتمحور هذه المذكرة حول دراسات معمقة اللازمة لبناء النظرية العشوائية و معادلة فوكر بلانك.

بدأنا بالتحدث عن نظرية الستوكاستيكية و تحدثنا على المتغيرات العشوائية باعتبارها الخطوة الأولى في هذا المجال و كذا الاحتمالات.

ثم قمنا بدراسة نظرية ماركوف لأنها نظرية عشوائية مهمة بهدف الوصول إلى معادلة شابمان-كولموغوروف التي تعتبر معادلة رياضية. حيث أن هذه الأخيرة قاعدة المعادلات الستوكاستيكية. أي انه ابتداء من معادلة شابمان توصلنا إلى كتابة معادلة فوكر بلانك التي تعتر معادلة فيزيائية مهمة جدا.

وبعدنا تطرقنا إلى دراسة الحركات البراونية و ذلك باعتبارها هي الأخرى حركة عشوائية و مثلناها بمعادلة لان جوفان التي تعتبر معادلة رياضية ستوكاستيكية للحركات البراونية.

لتعميق معرفتنا أكثر بهذا المجال قمنا بدراسة الحركات العشوائية و نظرية الحياة و الموت و أخيرا قمنا بدراسة جسيم في حقل مغناطيسي و حقل كهربائي .

فكل هذه الدراسات مكنتنا من تعميق معرفتنا بالنظرية العشوائية و معادلة فوكر- بلانك.

**كلمات مفتاحيه:** معالج ستوكاستيكي, معادلات ستوكاستيكية, حركة براونية, معالج ماركوف.