

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**

**Université de Bouira**



**Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées**

**Département de Génie Electrique**

# **Mémoire de fin d'Etude pour l'obtention du diplôme de Master**

**Filière : Electrotechnique**

**Option : Electromécanique et Systèmes de Commandes(ESC)**

## **THÈME**

**ÉTUDE DE LA SYNCHRONISATION DE DEUX  
CIRCUITS IDENTIQUES GENERATEURS DE  
SIGNAUX CHAOTIQUES**

**Présenté par :**

**KOUIDRI Mohamed**

**DAIFI Abdelhak**

**Dirigé par :**

**Dr.NOURINE Mourad**

**Membres de jury :**

- ✓ **Président de jury : Mr. REZKI**
- ✓ **Examineur 1 : Mr. KASMI**
- ✓ **Examineur 2 : Mr. SAIDI**
- ✓ **Encadreur : Mr. NOURINE Mourad**

**2015/2016**

**Soutenu le :27 /06/2016**

## REMERCIEMENT :

En premier lieu, nous remercions ALLAH le tout puissant de nous avoir donné le courage et la volonté d'élaborer ce travail.

Nous exprimons nos remerciements les plus sincères à notre encadreur Dr. NOURINE Mourad maitre de conférence a l'université de Bouira, sous la direction duquel nous avons eu le plaisir de travailler, nous lui remercions pour ces lectures enrichissantes de notre mémoire et pour les précieux conseils qu'il n'a cessé de me prodiguer.

Nous tenons également à remercier tous les membres du jury, pour nous avoir honorés par leurs présences et pour avoir accepter d'évaluer ce travail de mémoire.

Merci à tous les enseignants de la faculté des sciences et sciences appliquées et tous les étudiants de la faculté.

Merci aux amis.

Et enfin merci et pardon a tous ce que nous ne pouvons pas citer qui nous ont aidés de prés ou de loin.



# DÉDICACE :

*Je dédie ce modeste travail à :*

➤ *Mes très chers parents qu'Allah les protèges*

➤ *Mes très chers frères et sœurs.*

➤ *Toute ma famille.*

➤ *Tous mes amis et mes collègues.*

**MOHAMED**



# DÉDICACE :

*Je dédie ce modeste travail à :*

➤ *Mes très chers parents.*

➤ *Mes très chers frères et sœurs.*

➤ *Ma chère Souhila qui m'a encouragé  
tout.*

*le temps.*

➤ *Tous mes amis et mes collègues.*

**ABDELHAK**



## Sommaire :

Liste des figures .....	III
Résumé .....	V
<b>INTRODUCTION GENERAL</b> .....	<b>1</b>

**CHAPITRE I: GENERALITES SUR LE CHAOS.**

1. Introduction.....	2
2. Découverte de chaos.....	2
3. Bref historique sur le chaos.....	3
4. L'utilisation de chaos.....	3
5. Quelques définitions.....	4
5.1. Système dynamique non-linéaire .....	4
5.1.1. Système dynamique continu .....	4
5.1.2. Système dynamique discret .....	4
5.1.3. Système autonome.....	4
5.1.4. Comportement chaotique .....	5
5.2. Le chaos .....	6
5.3. Les attracteurs .....	6
5.3.1. Attracteur régulier.....	8
5.3.2. Attracteur étrange.....	8
5.4. L'espace des phases.....	11
6. Conclusion.....	13

**CHAPITRE II: ETUDE THEORIQUE D'UN GENERATEUR DE CHAOS.**

1. Introduction.....	14
2. Le circuit de Chua.....	14
2.1. Présentation du circuit de Chua.....	14
2.2. Etude de la diode de Chua.....	16
2.2.1. Simplification des équations.....	17
3. Résolution des équations.....	19

---

3.1. Résolution par la méthode D'Euler.....	19
3.2. Résolution par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.....	21
4. Simulation sous Multisim.....	25
5. Conclusion.....	28

### **CHAPITRE III: ETUDE DE LA SYNCHRONISATION.**

1. Introduction.....	29
2. Synchronisation de deux circuits chaotiques.....	29
2.1. Couplage d'un système de synchronisation.....	29
2.1.1.Couplage unidirectionnel.....	30
2.1.2.Couplage bidirectionnel.....	33
3. Soustraction de deux circuits de Chua.....	36
3.1. Schéma d'un soustracteur.....	36
3.2. Soustraction de deux signaux chaotiques.....	37
4. Conclusion.....	38

### **CHAPITRE IV: REALISATION ET ETUDE EXPERIMENTALE.**

1. Introduction.....	39
2. Réalisation pratique de la carte électronique.....	39
3. Les résultats expérimentaux.....	42
3.1. Les signaux générés.....	42
3.2. Etude de la synchronisation.....	44
3.3. Résultat de la soustraction.....	45
4. Conclusion.....	47

<b>CONCLUSION GENERALE.....</b>	<b>48</b>
---------------------------------	-----------

<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>49</b>
----------------------------	-----------

<b>ANNEXE .....</b>	<b>51</b>
---------------------	-----------

**Liste des figures :**

<b>Figure 1:</b> Etat chaotique de X1 du système de Rossler.....	5
<b>Figure 2:</b> L'attracteur de Rossler.....	7
<b>Figure 3:</b> Représentation visuelle d'un attracteur étrange.....	8
<b>Figure 4:</b> Attracteur de Lorenz.....	9
<b>Figure 5:</b> Attracteur de Hénon.....	10
<b>Figure 6:</b> Comportement dynamique :a) point fixe ;b) orbite périodique ;c) Attracteur chaotique....	12
<b>Figure 7:</b> Le circuit électrique de l'oscillateur de Chua.....	15
<b>Figure 8:</b> Structure de la résistance non linéaire en fonction ampli-op proposé par Kennedy.....	16
<b>Figure 9:</b> Caractéristique de la résistance non-linéaire de Chua.....	17
<b>Figure 10:</b> Résultats de simulation obtenue par la méthode d'Euler: .....	21
<b>Figure 11:</b> Résultats de simulation par la méthode de Runge-Kutta 04 : .....	24
<b>Figure 12:</b> Circuit de Chua avec un circuit équivalent d'une inductance.....	25
<b>Figure 13:</b> Schéma du circuit de Chua sous Multisim.....	26
<b>Figure 14:</b> Série temporelle des tensions V1 et V2.....	27
<b>Figure 15:</b> Double attracteur du circuit de Chua.....	27
<b>Figure 16:</b> Couplage unidirectionnel.....	30
<b>Figure 17:</b> Couplage unidirectionnel de deux circuits de Chua.....	30
<b>Figure 18:</b> Schéma de couplage unidirectionnel sous Multisim .....	31
<b>Figure 19:</b> Interrupteur ouvert : pas de couplage entre les deux circuits.....	31
<b>Figure 20:</b> Synchronisation des deux circuits.....	32
<b>Figure 21:</b> Désynchronisation des deux circuits.....	33
<b>Figure 22:</b> Couplage bidirectionnel.....	33
<b>Figure 23:</b> Couplage bidirectionnel de deux circuits de Chua.....	34
<b>Figure 24:</b> Schéma de couplage bidirectionnel sous Multisim.....	34
<b>Figure 25:</b> Synchronisation des deux circuits.....	35
<b>Figure 26:</b> Désynchronisation des deux circuit.....	35
<b>Figure 27:</b> Schéma fonctionnel d'un soustracteur.....	36

---

<b>Figure 28:</b> Schéma d'une soustraction de deux signaux chaotiques.....	36
<b>Figure 29:</b> Résultat de soustraction des signaux des deux circuits identiques.....	37
<b>Figure 30:</b> Exemple de soustraction des signaux des deux circuits non identiques.....	38
<b>Figure 31:</b> Schéma PCB du circuit de Chua.....	39
<b>Figure 32:</b> Vue en 3D du circuit de Chua.....	40
<b>Figure 33:</b> Schéma PCB du circuit soustracteur+ circuit de couplage.....	40
<b>Figure 34:</b> Vue en 3D du circuit soustracteur+circuit de couplage.....	41
<b>Figure 35:</b> La carte électronique réalisée.....	41
<b>Figure 36:</b> Résultat expérimentaux de l'oscillateur de Chua.....	43
<b>Figure 37:</b> Résultats de synchronisations des états $V_1-V'_1$ et $V_2-V'_2$ .....	44
<b>Figure 38:</b> Signaux chaotiques des deux circuits synchronisés.....	44
<b>Figure 39:</b> Absence de la synchronisation entre les deux circuits.....	45
<b>Figure 40:</b> Résultat de soustraction entre deux circuits synchronisés.....	45
<b>Figure 41:</b> exemple de Résultat de soustraction des signaux des deux circuits non synchronisés.....	46
<b>Figure 42:</b> La maquette réalisée.....	46



**Résumé :**

Les systèmes chaotiques sont des systèmes qui se caractérisent par la non-linéarité, le déterminisme et leur grande sensibilité aux conditions initiales. Les signaux générés par ces systèmes sont considérés comme du bruit pseudoaléatoire ce qui nous amène à penser qu'il est impossible de les synchroniser. La découverte de Pecora et Carroll que deux systèmes chaotiques identiques peuvent se synchroniser, a donné un nouvel intérêt à la sécurisation de l'information, cet intérêt est basé sur l'imprévisibilité et la simplicité d'implémentation.

**Mots clefs : Systèmes chaotiques, Synchronisation du chaos, Sécurisation de l'information.**

**Abstract :**

Chaotic Systems are characterized by non-linearity, determinism and severe allergies from the initial conditions. Signals generated by these systems are considered than a noise, that's what leads us to think that the synchronization between these signals is impossible. Pecora and Carroll discovered that it can synchronize two identical chaotic systems, that's give a new interest of information security, this interest based on the unpredictability and ease of implementation.

**Key words: chaotic systems, synchronization of chaos, information security.**

# **INTRODUCTION GÉNÉRALE**

### **INTRODUCTION GENERALE :**

Depuis le début des civilisations, le besoin de dissimuler préoccupe l'humanité. Aujourd'hui, de plus en plus d'applications dites civiles nécessitent la sécurité des données transitant entre deux interlocuteurs. [1]

Dans le siècle passé, plusieurs recherches se sont présentées sur les comportements inhabituels des systèmes non linéaires qui présentaient des instabilités de nature très étranges. Ce fût la découverte des signaux chaotiques qui ont un comportement complètement déterministe mais qui font penser à des allures pseudo-aléatoires. [2]

Depuis sa découverte, le chaos a été considéré comme un comportement incontrôlable et imprédictible. [3]

Le Chaos, phénomène typique des systèmes dynamiques non linéaire, est aujourd'hui très largement étudié, en raison de ses propriétés et de ses nombreuses applications potentielles. [4]

Beaucoup de recherche ont été développées sur le contrôle, la synchronisation, la chaotification ou anti-contrôle des systèmes dynamiques non linéaires. Un certain nombre de ces recherches concerne l'application de la synchronisation du chaos, dans les communications sécurisées où le signal chaotique est utilisé pour masquer les messages à transmettre. [6]

L'objectif de notre travail consiste à la conception, la réalisation et à l'étude de la synchronisation de deux générateurs de signaux chaotiques.

Notre travail sera structuré comme suit :

Le premier chapitre est un rappel sur les généralités de chaos, dans lequel on va présenter quelques définitions sur les systèmes dynamiques non-linéaire en général, et les systèmes chaotiques en particulier.

Le deuxième chapitre est une présentation théorique d'un générateur du signal chaotique (circuit de Chua).

Le troisième chapitre sera consacré à l'étude de la synchronisation des circuits chaotiques.

Le quatrième chapitre consiste à la réalisation pratique de deux générateurs de chaos, des résultats expérimentaux seront aussi présentés.

Enfin, une conclusion sera donnée.

# CHAPITRE I

---

## Généralités sur le chaos

## 1. Introduction

Le but de ce chapitre est de mieux faire connaître les conditions nécessaires pour qu'un système ait un comportement chaotique. Nous partirons de quelques définitions préliminaires permettant de cerner les caractéristiques essentielles des systèmes dynamiques. [7]

## 2. Découverte de chaos [8]

La découverte de la dynamique chaotique des systèmes non-linéaires remonte aux travaux d'Henri Poincaré sur la mécanique céleste et la mécanique statistique, vers 1900. Ils ont alors suscité peu d'intérêt et sont tombés dans l'oubli. Il fallut attendre 1963 qu'Edward Lorenz, un météorologue du Massachusetts Institute of Technology, mette en évidence le caractère chaotique des conditions météorologiques et par conséquent des mouvements turbulents d'un fluide comme l'atmosphère. Alors qu'il cherchait à déterminer des conditions météorologiques futures à partir de données initiales sur son ordinateur, il constata qu'une modification minime des données initiales (de l'ordre de un pour mille) entraînait des résultats radicalement différents. Après avoir modélisé le mouvement des masses d'air par des relations (très simplifiées) de thermodynamique et de mécanique des fluides, il a programmé son ordinateur de façon à obtenir une simulation numérique. A l'époque, cela prenait beaucoup de temps. Un jour, pour ne pas recommencer les calculs depuis le début, il décida de reprendre son listing et de rentrer en tant que conditions initiales des valeurs prises au cours de la simulation de la veille. L'ordinateur lui donnait une précision à cinq chiffres, cependant trois chiffres significatifs lui semblaient largement suffisants pour ce genre de mesures physiques. Il tronqua donc ces nombres et reprit le calcul. Les résultats qui suivirent furent le "d'éclat". D'abord la simulation semblait redonner les mêmes valeurs, mais au bout d'un moment rien ne concordait, tout se passait comme si le mouvement représenté par ces valeurs changeait complètement de trajectoire et ce, à cause d'une approximation de l'ordre de  $10^{-4}$ . Cette anecdote est à la base de ce que l'on appelle maintenant le chaos.

### 3. Bref historique sur le chaos [10]

**1890** : Le **Roi oscar II** de suède octroie un prix au premier chercheur qui pourrait déterminer et résoudre le problème des n-corps des orbites célestes et ainsi prouver la stabilité du système solaire. Jusqu'à ce jour, le problème n'a pas été résolu.

**1890** : **Henri Poincaré** gagne le premier prix du **Roi Oscar II**. Etant plus proche à résoudre le problème de n-corps, il a découvert que l'orbite de trois corps célestes agissantes l'une sur l'autre peut engendrer un comportement instable et imprévisible. Ainsi, le chaos est né (mais pas encore mentionné !).

**1963** : **Edward Lorenz** découvre le premier système chaotique dans la météo ou encore appelé attracteur étrange.

**1975** : **Tien-Yien Li** et **James A. Yorke** ont présenté pour la première fois le terme « chaos » dans un article intitulé « Period three implies chaos ».

**1978** : **Mitchel Feigenbaum** introduit un nombre universel associé au chaos.

**1990** : **Edward Ott**, **Celso Grebogi** et **James A. Yorke**. Introduisant la notion de contrôle du chaos.

**1990** : **Lou Pecora**. Synchronisation des systèmes chaotiques.

### 4. L'utilisation de chaos

Les principes de la théorie de chaos ont été utilisés avec succès pour décrire et expliquer des phénomènes normaux et artificiels divers, comme :

- Prévisions des crises épileptiques.
- Prévision du comportement des marchés financiers.
- Modélisation des systèmes de fabrication.
- Prévision météorologiques.
- Création de fractales.

Les domaines d'application du chaos sont divers et variés : [11] Ingénierat, Ordinateurs, Communications, Médecine et biologie, Management finance.

## 5. Quelques définitions [12]

### 5.1. Système dynamique non-linéaire

Un système dynamique en temps continu est décrit par un système d'équations différentielles, alors qu'en temps discret, on parle d'un système d'équations aux différences finies.

#### 5.1.1. Système dynamique continu

$$\dot{x}=f(t, x, u) \quad \dot{y}=h(t, x, u) \quad (1)$$

Avec :  $x \in U \subseteq R^n$  vecteur de dimension n.

$f: R^n \rightarrow R^n$  Fonction non linéaire désignant le champ de vecteurs.

$h: R^n \rightarrow R^n$  Fonction éventuellement non linéaire qui désigne le vecteur de sortie et :  $U \in V \subseteq R^p$  représente l'entrée du système.

Si le système (1) ne dépend pas de l'entrée, on aura dans ce cas :

$$\dot{x} = f(t, x) \quad (2)$$

Le système (2) est considéré dynamique pour la simple raison qu'à partir de n'importe quelle condition initiale  $x_0$ , on peut déduire l'état futur  $x(t)$  pour  $t > 0$ .

#### 5.1.2. Système dynamique discret

Comme mentionné ci-dessus, un système dynamique en temps discret est représenté par des équations aux différences finies ayant comme modèle général.

$$x(k+1) = G(k, x(k), u(k)) \quad y(k) = h(k, x(k), u(k)) \quad (3)$$

Avec :  $G: R^n \rightarrow R^n \times Z^+ \rightarrow R^n$  signifie la dynamique du système en temps discret, on définit aussi le système autonome comme une dynamique qui ne dépend pas de l'instant k :

$$x(k+1) = G(x(k), u(k)) \quad y(k) = h(x(k), u(k)) \quad (4)$$

#### 5.1.3. Système autonome

Un système autonome est tout système dynamique non linéaire qui ne dépend pas explicitement du temps. Il est donné comme suit:

$$\dot{x} = f(x, y) \quad (5)$$

$$\dot{y} = g(x, y)$$

Un système autonome est indépendant du temps initial, alors qu'un système non autonome ne l'est pas. Dans un système autonome, tout instant peut être considéré comme instant initial, et tout état  $x(t)$  du système peut être considéré comme un état initial.

#### 5.1.4. Comportement chaotique

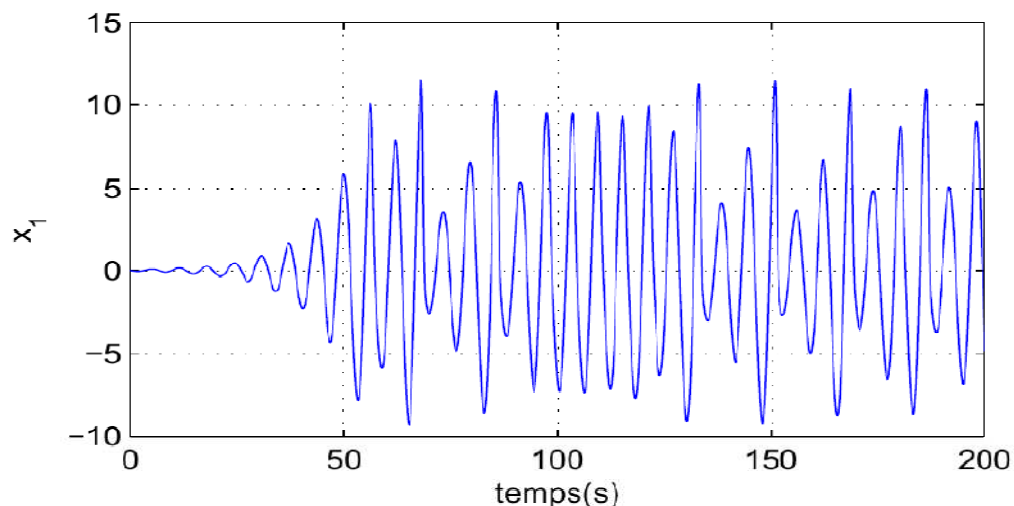
Un système non linéaire peut avoir un comportement en régime permanent plus complexe que les comportements habituels: oscillations périodiques, quasi-périodiques, etc. Dans ce cas, la sortie du système est très sensible aux conditions initiales, d'où la "non prévisibilité" de la sortie à long terme. On dit alors que le système a un comportement chaotique.

Le modèle chaotique, ci-dessous, donné par Otto de Rossler illustre le caractère chaotique de tels systèmes :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_1 + a x_2 + 0.01 x_1 \ln(x_3) \\ \dot{x}_3 = c + x_3(x_1 - b) \end{cases} \quad (6)$$

Avec :  $(x_1, x_2, x_3)$  le vecteur d'état et  $a, b$  et  $c$  les paramètres du système.

Le système de Rossler montre un comportement chaotique pour  $a = 0.2, b = 5.7, c = 0.2$  avec les conditions initiales  $x_1(0) = 0.01, x_2(0) = 0.01$  et  $x_3(0) = 0.01$ .



**Figure 1:** Etat chaotique de X1 du système de Rossler.



### 5.2. Le chaos [13][14]

Le terme chaos a été introduit avec sa signification actuelle en 1976 par Jim Yorke, un mathématicien de l'université du Maryland, mais le début des études du chaos peut être imputé à Henri Poincaré au début du XXe siècle, puis elles ont été ressuscitées en 1961 par le météorologue américain Edward Lorenz, professeur de mathématiques au MIT (Massachusetts Institute of Technology) qui est considéré après ses recherches sur le chaos, en tant que père officiel.

On appelle donc un système dynamique chaotique, un système qui dépend de plusieurs paramètres, et il est caractérisé par une extrême sensibilité aux conditions initiales. Pour une meilleure compréhension des systèmes chaotiques, on se sert de ces quelques définitions et propriétés.

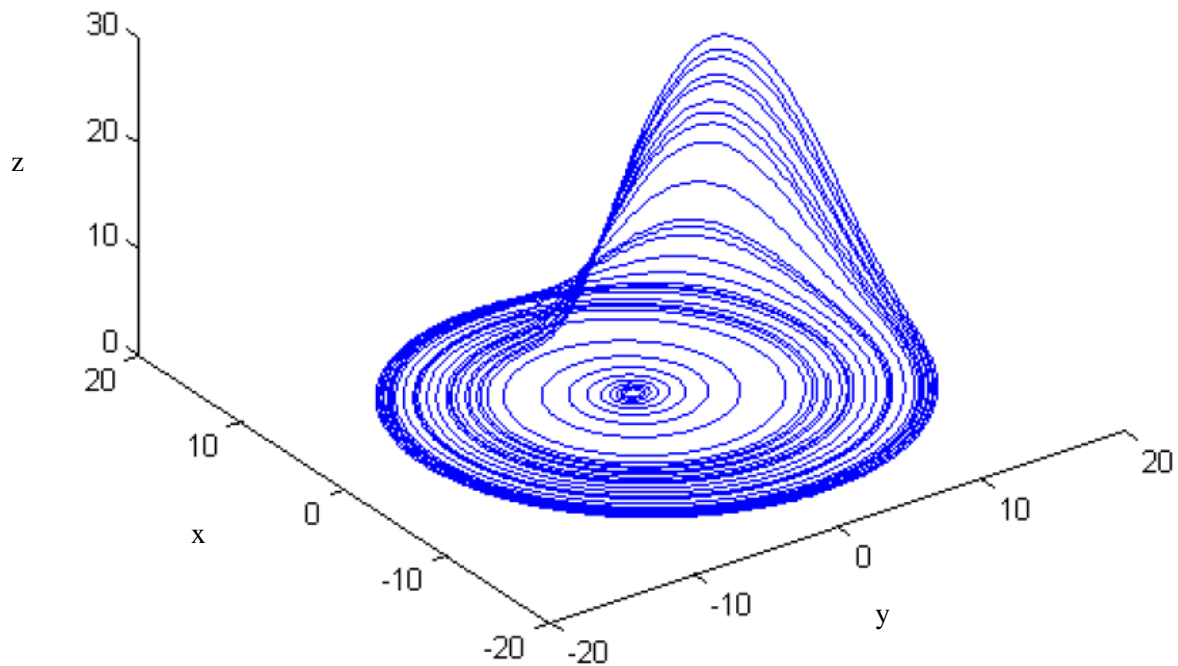
- **La non-linéarité** : si le système est linéaire, il ne peut pas être chaotique.
- **Le déterminisme** : un système chaotique a des règles fondamentales déterministes.
- **La sensibilité aux conditions initiales** : de très petits changements sur l'état initial peuvent mener à un comportement radicalement différent dans son état final.
- **L'imprévisible** : en raison de la sensibilité aux conditions initiales, qui peuvent être connues seulement à un degré fini de précision, l'imprévisibilité à long terme est impossible.
- **L'irrégularité** : ordre caché comprenant un nombre infini de modèles périodiques instables (ou mouvements). Cet ordre caché forme l'infrastructure des systèmes chaotiques « ordre dans le désordre » plus simplement.

### 5.3. Les attracteurs [12]

Dans l'étude des systèmes dynamiques, un attracteur (ou ensemble-limite) est un ensemble ou un espace vers lequel un système évolue de façon irréversible en l'absence de perturbations. Constituants de base de la théorie du chaos, cinq types d'attracteurs sont définis : ponctuel, ponctuel périodique, périodique, étrange, spatial. Dans un espace des phases à deux dimensions, les attracteurs sont soit des points, soit des cycles limites. Pour tous les attracteurs réguliers, c-à-d pour tous

les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent de "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes, à partir d'une situation connue. Les systèmes à deux variables ne peuvent pas conduire à des mouvements chaotiques : il suffit de rajouter une troisième variable pour que de tels systèmes, dans certaines conditions, deviennent instables.

La figure (2) illustre l'attracteur étrange de Rossler.



**Figure 2:** L'attracteur de Rossler.

L'attracteur chaotique dit aussi étrange n'est pas une surface lisse, mais une surface repliée plusieurs fois sur elle-même. En effet, les trajectoires des points divergent (puisque, par définition deux points ne peuvent avoir la même évolution), mais comme l'attracteur a des dimensions finies, il doit se replier sur lui-même. Le bassin d'attraction d'un attracteur est l'ensemble des points de l'espace des phases qui donnent une trajectoire évoluant vers l'attracteur considéré. On peut donc avoir plusieurs attracteurs dans un même espace des phases. Il existe deux types d'attracteurs: les attracteurs réguliers et les attracteurs étranges ou chaotiques.

### 5.3.1. Attracteur régulier

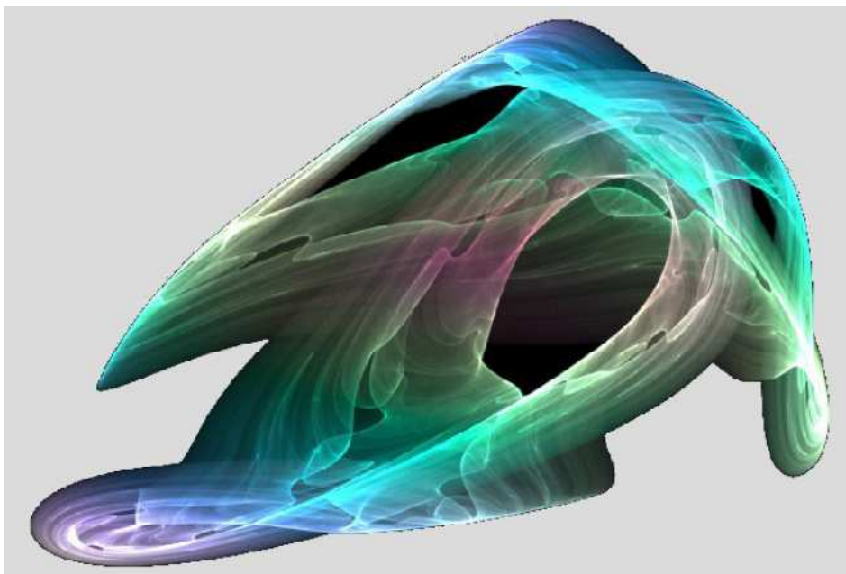
Les attracteurs réguliers caractérisent l'évolution de systèmes non chaotiques, et peuvent être de deux sortes :

- **Un point fixe** : la trajectoire du pendule dissipatif simple (dans l'espace des phases représentant son altitude et sa vitesse), par exemple, tend vers l'origine du repère, quelles que soient la position et la vitesse initiales.
- **Un cycle limite** : la trajectoire du pendule idéal dans ce même espace des phases, par exemple. Pour tous les attracteurs réguliers, c'est à dire pour tous les systèmes non chaotiques, des trajectoires qui partent de "points" proches l'un de l'autre dans l'espace de phase 1 restent indéfiniment voisines. On sait donc prévoir l'évolution de ces systèmes, à partir d'une situation connue. [1]

### 5.3.2. Attracteur étrange [12]

Un attracteur est dit étrange s'il a une structure fractale. C'est souvent le cas lorsque la dynamique sur ce dernier est chaotique, mais aussi des attracteurs non chaotiques étranges existent. Le terme a été inventé par David Ruelle et Floris Takens pour décrire l'attracteur qui résulte d'une série de bifurcations d'un système décrivant l'écoulement d'un fluide.

Nous donnons ici quelques exemples d'attracteurs étranges : l'attracteur Double-scroll, l'attracteur d'Henon, l'attracteur de Rossler, l'attracteur de Chua, et l'attracteur de Lorenz.



**Figure 3:** Représentation visuelle d'un attracteur étrange.[12]

### 5.3.1.1. Attracteur de Lorenz

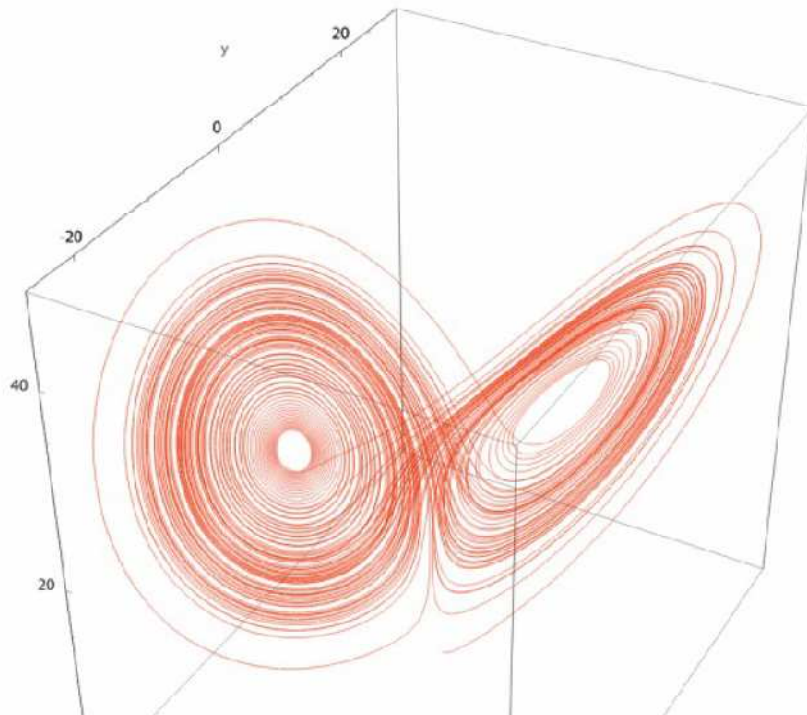
En 1963, le météorologue Edward Lorenz est le premier à mettre en évidence le caractère vraisemblablement chaotique de la météorologie.

Le modèle de Lorenz, appelé aussi système dynamique de Lorenz ou oscillateur de Lorenz, est une modélisation simplifiée de phénomènes météorologiques basée sur la mécanique des fluides. L'oscillateur de Lorenz est un système dynamique tridimensionnel qui engendre un comportement chaotique dans certaines conditions.

Il s'agit d'un système dynamique non linéaire en temps continu de dimension 3, obtenu des équations de transfert de la chaleur dans un liquide. Le système de Lorenz est défini par :

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = x(b - z) - y \\ \dot{z} = xy - cz \end{cases} \quad (7)$$

Avec  $(x, y, z)$  le vecteur d'état et  $a, b$  et  $c$  les paramètres du système. L'attracteur montre comment les différentes variables du système dynamique évoluent dans le temps en une trajectoire non périodique.



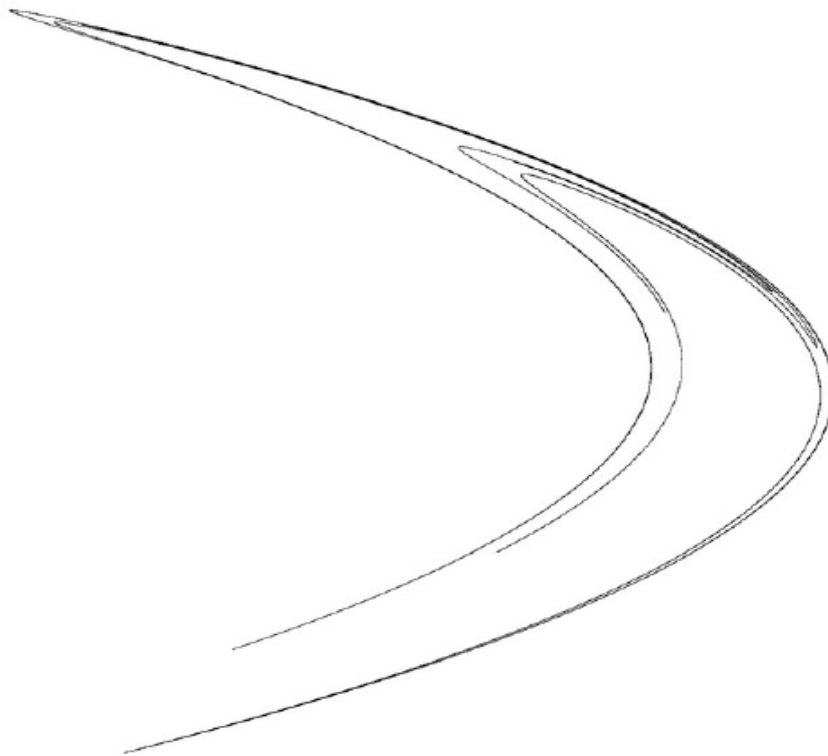
**Figure 4:** Attracteur de Lorenz. [12]

### 5.3.1.2. Attracteur de Hénon

L'attracteur de Henon est un système dynamique a temps discret. C'est l'un des systèmes dynamiques ayant un comportement chaotique les plus étudiés. L'attracteur de Henon prend tout point du plan  $(x, y)$  et lui associe le nouveau point :

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + 1 - ax_n^2 \\ y_{n+1} = bx_n \end{cases} \quad (8)$$

Avec  $(x, y)$  le vecteur d'état et  $a, b$  les paramètres du système. Le système de Henon montre un comportement chaotique et génère un attracteur étrange pour  $a = 1.4, b = 0.3$  avec  $x(0) = 0$  et  $y(0) = 0$  les conditions initiales du système.



**Figure 5:**Attracteur de Hénon. [12]

### 5.4. L'espace des phases [7]

A partir d'un état initial  $x_0$  et après un régime transitoire, la trajectoire d'un système dynamique atteint une région limitée de l'espace de phase. Ce comportement asymptotique obtenu pour  $t, k \rightarrow \infty$  est une des caractéristiques les plus importantes à étudier pour tout système dynamique. Si dans le cas d'un système linéaire la solution asymptotique est unique et indépendante de la condition initiale, en présence de non-linéarités, il existe une plus grande variété de régimes permanents, parmi lesquels:

- Les points fixes ou points d'équilibre.
- Les solutions périodiques.
- Les solutions quasi-périodiques.
- Le chaos.

- **Point fixe ou point d'équilibre :**

Un point fixe ou point d'équilibre est une solution constante du système. Il est obtenu en résolvant le système d'équations :

- *Cas discret :*

$$X = F(X) \quad (9)$$

- *Cas continu :*

$$X = F(X) \Rightarrow \dot{x}(t) = 0 \quad (10)$$

Dans l'espace de phase, le point fixe se représente par un point. Sa valeur est déterminée en fonction de la condition initiale choisie. Ainsi, pour des conditions initiales différentes on peut retrouver plusieurs points d'équilibre. De même, ces points peuvent être stables ou instables suivant que les trajectoires voisines convergent ou divergent entre-elles.

- **Solution périodique :**

Le régime asymptotique permanent périodique correspond à une trajectoire dont les répliques d'une portion élémentaire sont espacées à des intervalles  $nT, n \in \mathbb{N}^+$  et  $T$  la période de la solution. Dans l'espace de phase, l'ensemble limite correspondant à cette solution est une courbe fermée. Si l'espace de phase est de dimension 2, la solution périodique sera un cercle, une ellipse, ou toute autre forme géométrique fermée. Pour revenir à son état précédent, le système met exactement une période.

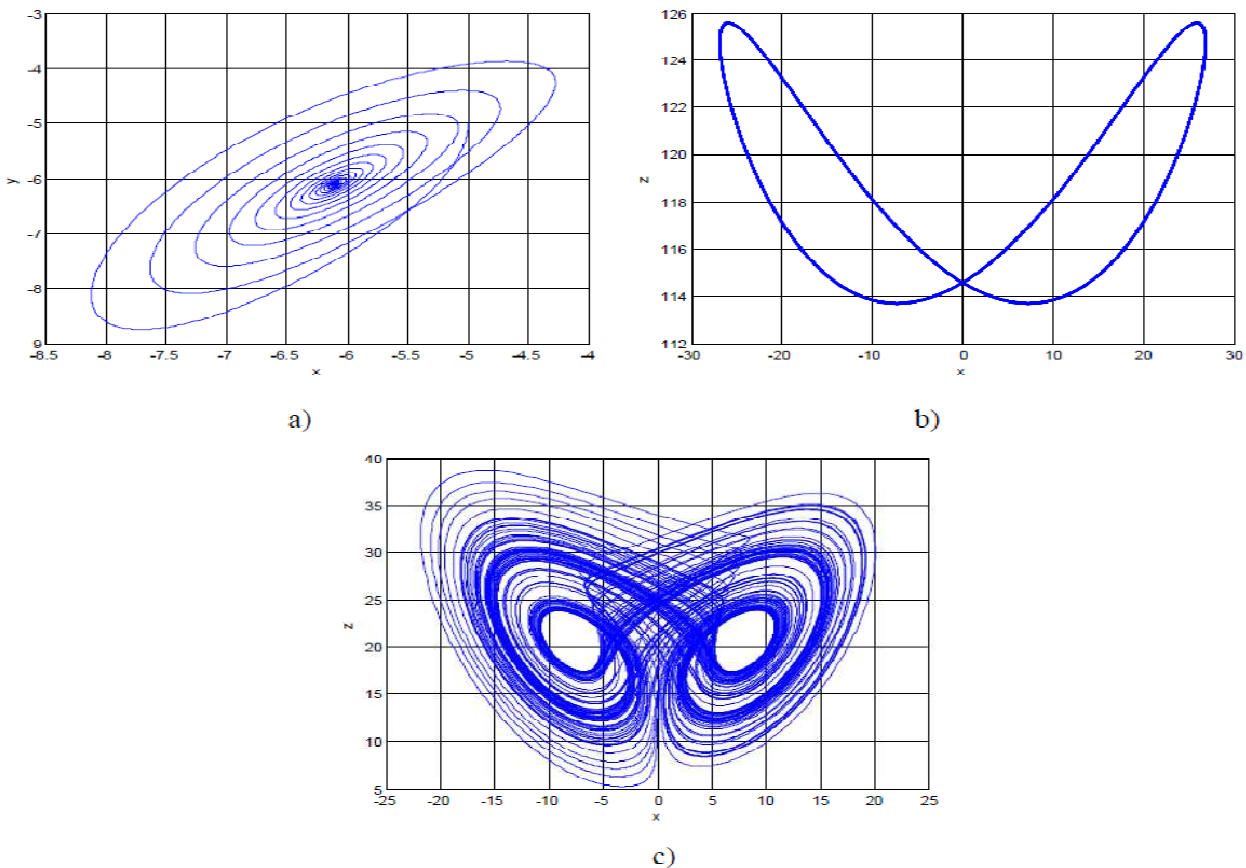
- **Solution quasi-périodique :**

Une solution quasi-périodique est représentée dans l'espace d'état par un tore.

- **Solution chaotique :**

Une telle solution a une trajectoire asymptotique bornée avec une extrême sensibilité aux conditions initiales. Ainsi, deux trajectoires de phases initialement voisines s'écartent toujours l'une de l'autre, et ceci quelle que soit leur proximité initiale.

La moindre erreur ou imprécision sur la condition initiale peut mener à un comportement très différent ce qui ne permet pas de faire une prédiction sur le comportement à long terme du système. Ainsi, bien que l'on traite de systèmes déterministes, il est impossible de prévoir à long terme leurs comportements.



**Figure 6:** Comportement dynamique : a) point fixe ; b) orbite périodique ; c) Attracteur chaotique.

## **6. Conclusion**

Dans ce chapitre nous avons vu quelques définitions, notions et quelques caractéristiques des systèmes dynamiques en introduisant les différents comportements, allant du point fixe stable jusqu'au chaos entièrement développé. Ces notions sont nécessaires pour la compréhension du chapitre suivant dédié à l'étude théorique d'un générateur de chaos.



# CHAPITRE II

---

**Étude théorique d'un générateur de  
chaos**

### 1. Introduction

Le circuit de Chua est un simple circuit électrique autonome non linéaire qui présente une variété de comportements dynamiques, notamment le chaos, qui a été confirmée expérimentalement. Cet oscillateur est constitué d'un bloc de R, L, C1, C2 passifs couplé à une résistance non linéaire actif (la diode de Chua) [16].

Dans la première partie de ce chapitre on va présenter le circuit de Chua et étudier en suite les équations des deux parties : l'oscillateur de Chua et la partie non-linéaire du circuit du Chua, pour obtenir le système d'équations qui le décrit.

Dans la deuxième partie on va proposer une solution pour le système d'équation non-linéaire de Chua par la méthode d'Euler et la méthode de Runge Kutta d'ordre 4 en utilisant le logiciel MATLAB. Puis on va présenter les résultats de simulation de ce circuit en utilisant le logiciel électronique NI Multisim.

### 2. Le circuit de Chua

#### 2.1. Présentation du circuit de Chua

Le circuit de Chua est un oscillateur chaotique électronique décrit par un système dynamique non-linéaire à trois équations différentielles couplées du 1<sup>er</sup> ordre. [17].

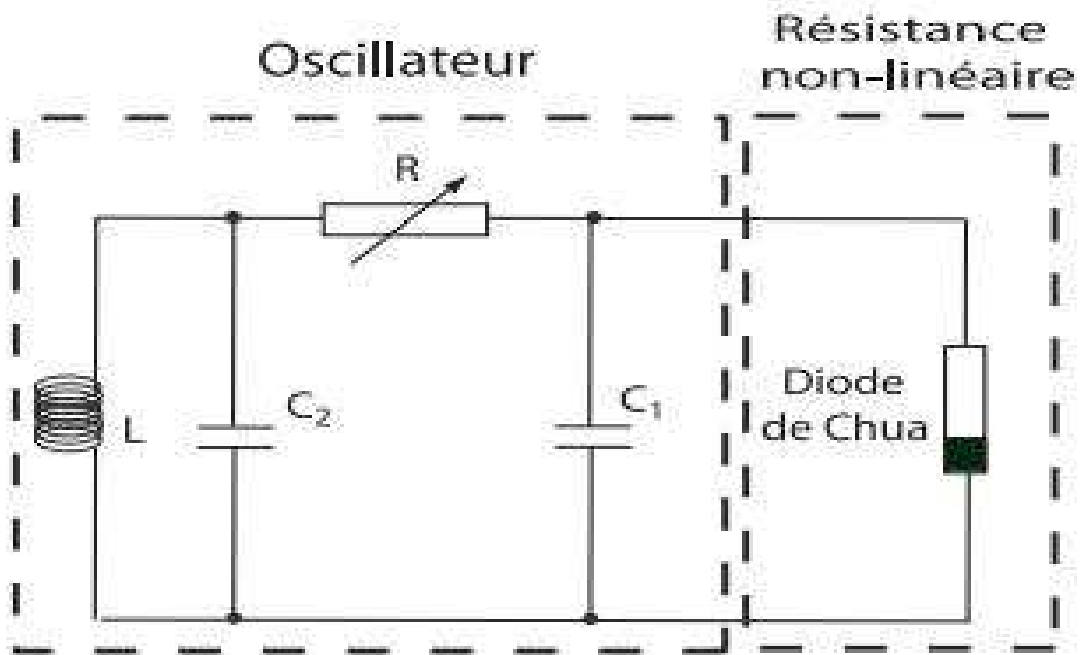
Le circuit de Chua est le circuit électronique le plus simple montrant le chaos et beaucoup de phénomènes bien connus de bifurcation, comme il a été vérifié par de nombreuses expériences de laboratoire, de simulation par ordinateur et d'analyse mathématique. [13]

Un circuit électronique doit respecter certaines conditions pour montrer un comportement chaotique, appelés critères chaotiques. Il doit contenir :

- Un élément non linéaire ou plus.
- Une résistance localement active ou plus.
- Trois éléments de stockage d'énergie ou plus.

En 1983, l'ingénieur Leon Ong Chua a mis au point le plus simple circuit électronique respectant ces critères. Il comporte deux condensateurs, une bobine, une résistance active et une diode de Chua.

La figure (7) présente le circuit de Chua :



**Figure 7:** Le circuit électrique de l'oscillateur de Chua.

Ce circuit est décrit par le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} C1. \frac{dv_1}{dt} = \frac{1}{R} (V_2 - V_1) - g(V_R) \\ C2. \frac{dv_2}{dt} = \frac{1}{R} (V_1 - V_2) + I_l \\ L. \frac{di_l}{dt} = -V_2 \end{cases} \quad (11)$$

Avec :

$V_1, V_2$  : les tensions aux bornes des capacités  $C_1$  et  $C_2$  respectivement.

$I_l$  : le courant traversant l'inductance  $L$ .

$g$  : la réponse en courant de la diode de Chua.

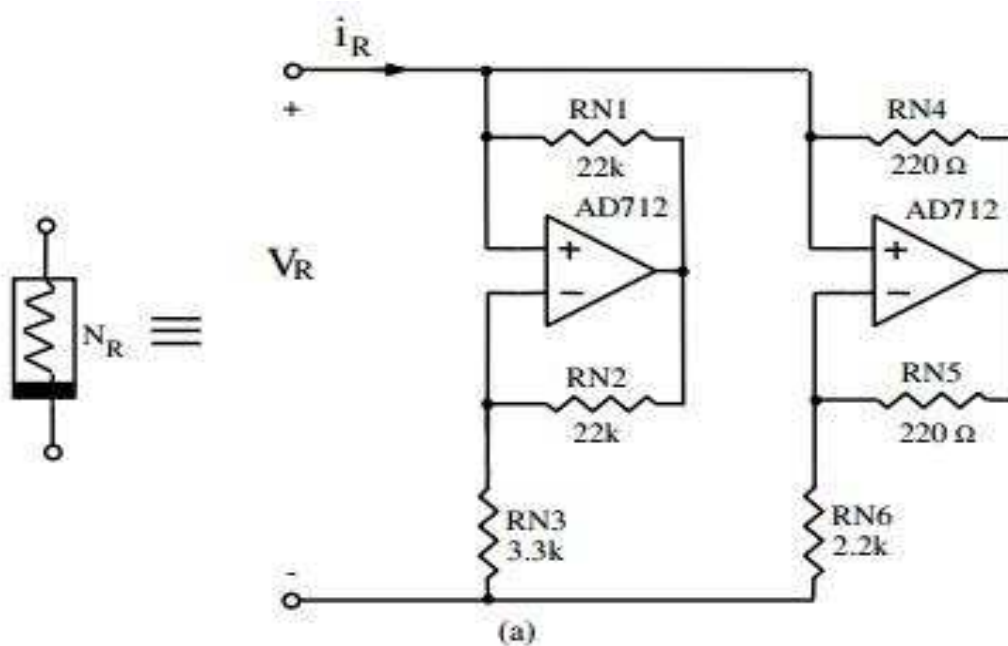
## 2.2. Etude de la diode de Chua

La diode de Chua représente l'élément non linéaire du circuit, c'est la partie la plus essentielle du circuit de Chua.

La diode de Chua n'est pas commercialisée et est généralement construite en utilisant des composants électroniques standards tels que: diodes, capacités, résistances et amplificateurs opérationnels. [18]

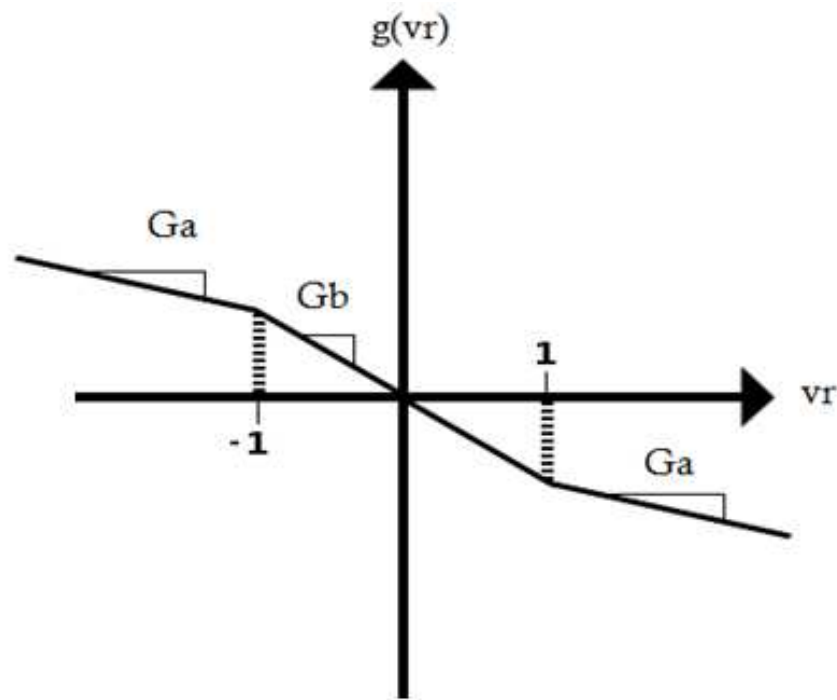
Il y a plusieurs exemples des résistances non linéaires utilisées dans ce circuit, mais elles ont toutes la même fonction courant tension. [16]

Dans notre projet on s'intéresse à la réalisation de la diode de Chua proposée par Kennedy. Elle est constituée de deux montages à impédance négative en parallèle chaque montage est constitué de trois résistances et un amplificateur opérationnel comme montre la figure (8).



**Figure 8:** Structure de la résistance non linéaire en fonction ampli-op proposé par Kennedy. [12]

La diode de Chua (résistance non linéaire) possède une caractéristique voltage/courant non-linéaire régie par la fonction  $g(v_r)$  de l'équation (9)



**Figure 9:** Caractéristique de la résistance non-linéaire de Chua.

Avec :

$G_a$  et  $G_b$ : tangentes intérieure et extérieure respectivement.

L'équation de  $g(v_r)$  est définie par :

$$g(v_r) = G_a |v_r| + \frac{1}{2}(G_b - G_a) |v_r + 1| + \frac{1}{2}(G_b - G_a) |v_r - 1| \quad (12)$$

### 2.2.1. Simplification des équations [14]

Afin de simplifier la notation, on pose :

$$V_1 = x, V_2 = y \text{ et } I_l = \frac{z}{R}$$

D'où, le circuit de Chua peut être représenté par l'ensemble d'équations non linéaires suivantes :

$$\begin{cases} C1 \frac{dx}{dt} = \frac{(y-x)}{R} - g(x) \\ C2 \frac{dy}{dt} = \frac{(y-x+z)}{R} \\ \frac{L}{R} \frac{dz}{dt} = -y \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{RC1} (y - x) - g(x) \\ \frac{dy}{dt} = \frac{1}{RC2} (x - y + z) \\ \frac{dz}{dt} = \frac{-R}{L} y \end{cases} \quad (13)$$

Lors de l'intégration du système, la variable temporelle est en fonction du paramètre

de chargement du condensateur C2.

On obtient les formules suivantes :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \frac{C2}{C1} ((y - x) - Rg(x)) \\ \frac{dy}{dt} = (x - y + z) \\ \frac{dz}{dt} = -\frac{R^2 C2}{L} y \end{cases} \quad (14)$$

Les paramètres de ce circuit dépendent essentiellement des valeurs de la résistance, de l'inductance, ainsi que celles des condensateurs. On pose :

$$\alpha = \frac{C2}{C1} \quad , \quad \beta = \frac{R^2 C2}{L} \quad , \quad m0 = Ga.R \quad \text{et} \quad m1 = Gb.R$$

D'où on obtient le système de Chua représenté par l'ensemble d'équations différentielles d'ordre 1 :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) \\ \dot{y} = x - y + z \\ \dot{z} = -\beta y \end{cases} \quad (15)$$

Avec :

$$f(x) = m_1 x + \frac{m_0 - m_1}{2} (|x + 1| - |x - 1|) \quad (16)$$

Représente l'élément non linéaire du circuit.

### 3. Résolution des équations

A cause de la fonction non linéaire (16) le système d'équations différentielles (15) est un système non linéaire et ne permettant pas une solution analytique. Pour le résoudre on va donc utiliser les méthodes numériques pour la résolution des équations du premier ordre tel que la méthode d'Euler et la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4.

Dans les deux méthodes on va utiliser les mêmes valeurs des paramètres du circuit :

$$\alpha = 15.6, \quad \beta = 28, \quad m_0 = -1.143, \quad m_1 = -0.714$$

Et les mêmes conditions initiales :

$$x(0) = 0.7, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 0.$$

#### 3.1. Résolution par la méthode D'Euler

Pour une équation du premier ordre :  $\dot{x} = F(t, x), \quad x(t_0) = x_0$

La solution sera comme suit :

$$x_1 = x_0 + \Delta t F(x_0, t_0)$$

$$x_2 = x_1 + \Delta t F(x_1, t_1)$$

⋮

$$x_{i+1} = x_i + \Delta t F(x_i, t_i), \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (17)$$

Pour un système de trois équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, z, t) \\ \dot{y} = G(x, y, z, t) \\ \dot{z} = H(x, y, z, t) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \Delta t = h$$

L'algorithme d'Euler est donné par :

$$x_{i+1} = x_i + hF(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$y_{i+1} = y_i + hG(x_i, y_i, z_i, t_i) \tag{18}$$

$$z_{i+1} = z_i + hH(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

- **Application de la méthode d'Euler sur le système (15) :**

Le système (15) est indispensable du temps donc le variable temps n'est pas pris en considération :

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) = F(x, y, z) \\ \dot{y} = x - y + z = G(x, y, z) \\ \dot{z} = -\beta y = H(x, y, z) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \Delta t = h$$

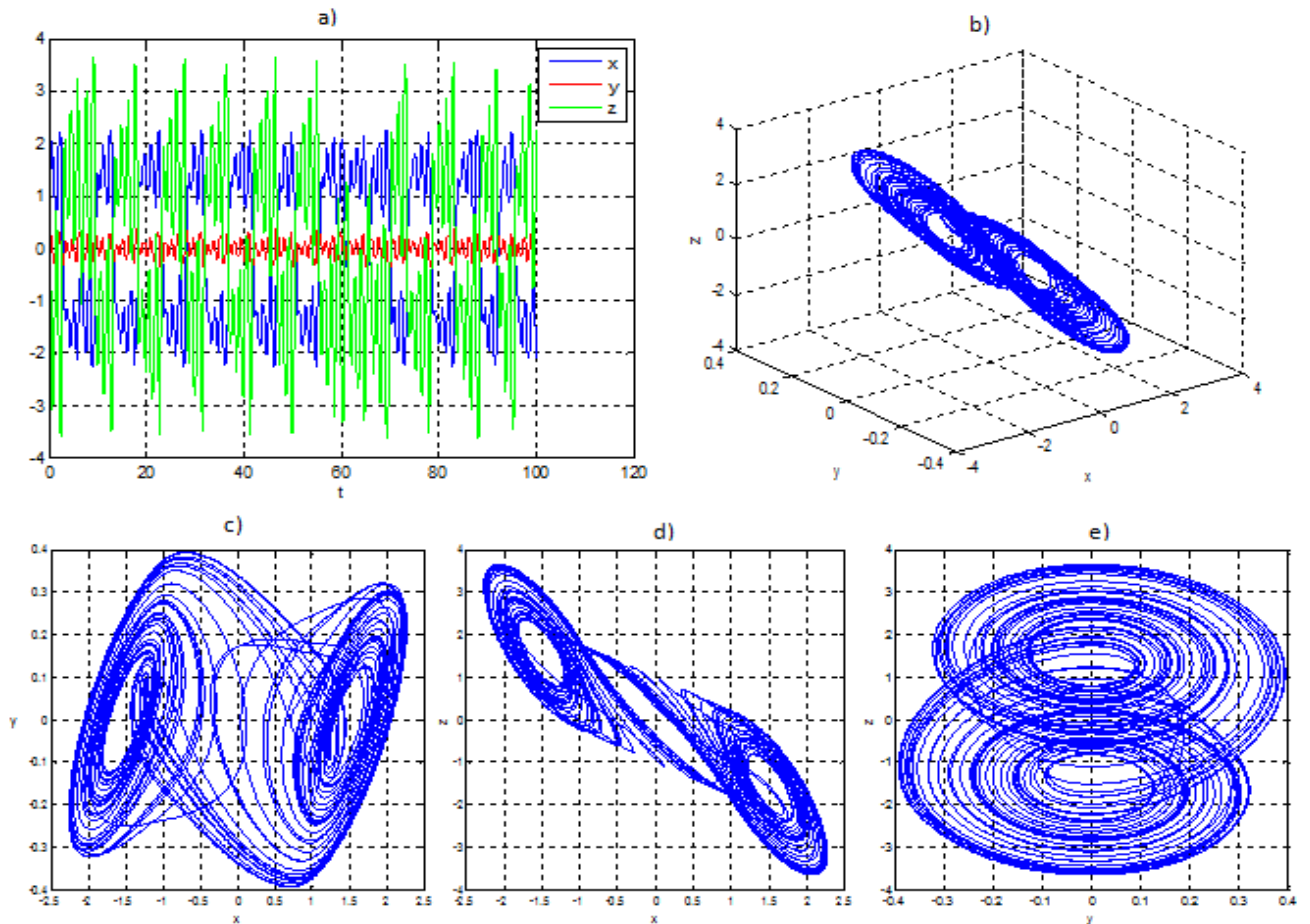
$$x_{i+1} = x_i + h\alpha(y_i - x_i - f(x_i))$$

$$y_{i+1} = y_i + h(x_i - y_i + z_i) \tag{19}$$

$$z_{i+1} = z_i + h(-\beta y_i)$$



- Les résultats de simulation :



**Figure 10:** Résultats de simulation obtenue par la méthode d'Euler : a) x, y et z série temporelle ; b) graphe en 3D (x,y,z) ; c) y=f(x), d) z=f(x), e) z=f(y).

### 3.2. Résolution par la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4

Soit de nouveau l'équation du premier ordre :  $\dot{x} = F(t, x), x(t_0) = x_0$

L'algorithme de la méthode est le suivant :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6} \Delta t (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (20)$$

Avec :

$$k_1 = F(x_i, t_i)$$

$$k_2 = F\left(x_i + \frac{1}{2} \Delta t k_1, t_i + \frac{1}{2} \Delta t\right)$$

$$k_3 = F\left(x_i + \frac{1}{2}\Delta tk_2, t_i + \frac{1}{2}\Delta t\right)$$

$$k_4 = F(x_i + \Delta tk_3, t_i + \Delta t)$$

Pour un système de trois équations du premier ordre :

$$\begin{cases} \dot{x} = F(x, y, z, t) \\ \dot{y} = G(x, y, z, t) \\ \dot{z} = H(x, y, z, t) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \Delta t = h$$

L'algorithme de Runge-Kutta 4 est donné par :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \quad (21)$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43}) \quad i = 0, 1, \dots, n-1$$

Avec :

$$k_{11} = F(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$k_{12} = G(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$k_{13} = H(x_i, y_i, z_i, t_i)$$

$$k_{21} = F\left(x_i + \frac{h}{2}k_{11}, y_i + \frac{h}{2}k_{12}, z_i + \frac{h}{2}k_{13}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_{22} = G\left(x_i + \frac{h}{2}k_{11}, y_i + \frac{h}{2}k_{12}, z_i + \frac{h}{2}k_{13}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_{23} = H\left(x_i + \frac{h}{2}k_{11}, y_i + \frac{h}{2}k_{12}, z_i + \frac{h}{2}k_{13}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_{31} = F\left(x_i + \frac{h}{2}k_{21}, y_i + \frac{h}{2}k_{22}, z_i + \frac{h}{2}k_{23}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_{32} = G\left(x_i + \frac{h}{2}k_{21}, y_i + \frac{h}{2}k_{22}, z_i + \frac{h}{2}k_{23}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_{33} = H\left(x_i + \frac{h}{2}k_{21}, y_i + \frac{h}{2}k_{22}, z_i + \frac{h}{2}k_{23}, t_i + \frac{h}{2}\right)$$

$$k_{41} = F(x_i + hk_{31}, y_i + hk_{32}, z_i + hk_{33}, t_i + h)$$

$$k_{42} = G(x_i + hk_{31}, y_i + hk_{32}, z_i + hk_{33}, t_i + h)$$

$$k_{43} = H(x_i + hk_{31}, y_i + hk_{32}, z_i + hk_{33}, t_i + h)$$

- **Application de la méthode de Runge-Kutta 4 sur le système (15) :**

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(y - x - f(x)) = F(x, y, z) \\ \dot{y} = x - y + z = G(x, y, z) \\ \dot{z} = -\beta y = H(x, y, z) \end{cases}$$

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0, \quad \Delta t = h$$

L'algorithme de Runge-Kutta 4 est donné par :

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6}(k_{11} + 2k_{21} + 2k_{31} + k_{41})$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_{12} + 2k_{22} + 2k_{32} + k_{42}) \tag{22}$$

$$z_{i+1} = z_i + \frac{h}{6}(k_{13} + 2k_{23} + 2k_{33} + k_{43})$$

$$k_{11} = \alpha(y_i - x_i - f(x_i))$$

$$k_{12} = x_i - y_i + z_i$$

$$k_{13} = -\beta y_i$$

$$k_{21} = \alpha((y_i + \frac{h}{2}k_{12}) - (x_i + \frac{h}{2}k_{11}) - f(x_i + \frac{h}{2}k_{11}))$$

$$k_{22} = (x_i + \frac{h}{2}k_{11}) - (y_i + \frac{h}{2}k_{12}) + (z_i + \frac{h}{2}k_{13})$$

$$k_{23} = -\beta(y_i + \frac{h}{2}k_{12})$$

$$k_{31} = \alpha((y_i + \frac{h}{2}k_{22}) - (x_i + \frac{h}{2}k_{21}) - f(x_i + \frac{h}{2}k_{21}))$$

$$k_{32} = (x_i + \frac{h}{2}k_{21}) - (y_i + \frac{h}{2}k_{22}) + (z_i + \frac{h}{2}k_{23})$$

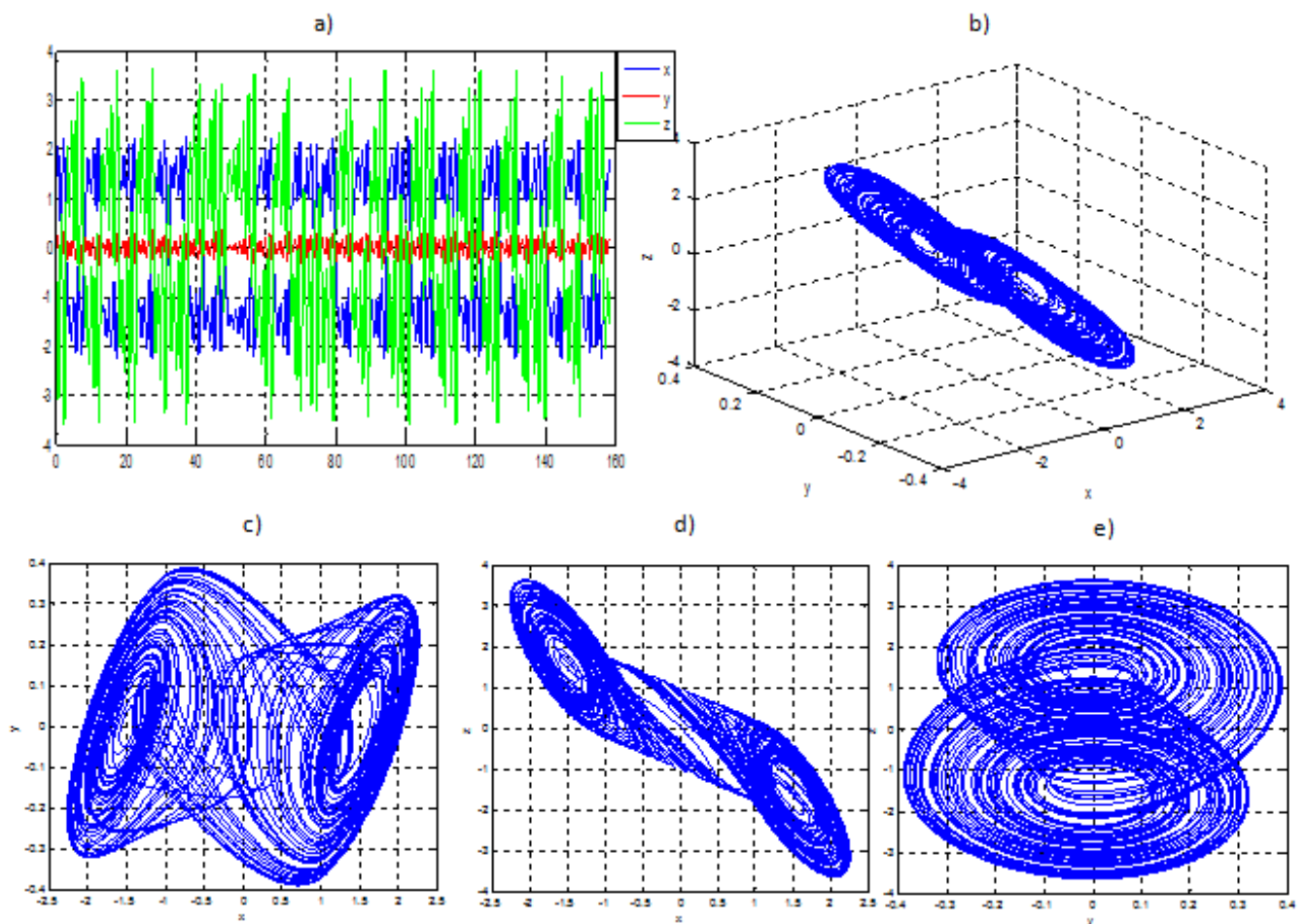
$$k_{33} = -\beta(y_i + \frac{h}{2}k_{22})$$

$$k_{41} = \alpha((y_i + hk_{32}) - (x_i + hk_{31}) - f(x_i + hk_{31}))$$

$$k_{42} = (x_i + hk_{31}) - (y_i + hk_{32}) + (z_i + hk_{33})$$

$$k_{43} = -\beta(y_i + hk_{32})$$

- Les résultats de simulation:



**Figure 11:** Résultats de simulation par la méthode de Runge-Kutta 04 : a) x, y et z série temporelle ; b) graphe en 3D (x, y, z) ; c) y=f(x), d) z=f(x), e) z=f(y).

Les figures (10) et (11) montrent le comportement chaotique du circuit de Chua, tel que :

L'attracteur étrange est représenté avec deux point d'attraction et des trajectoires qui ne se coupent jamais.

On a choisis les deux méthodes :

- La méthode d'Euler est simple et pas précise.
- La méthode de Runge Kutta est simple, précise et adapté aux équations différentielles.

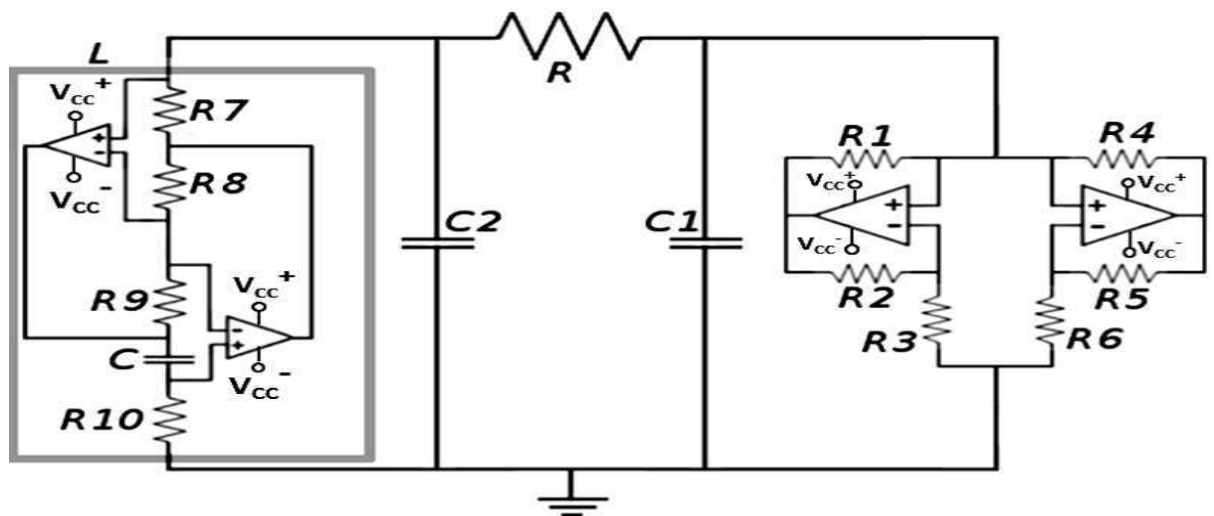
#### 4. Simulation sous Multisim

- **Logiciel Multisim :**

Multisim est un logiciel destiné à la simulation et la modélisation des circuits électroniques, presque tout circuit peut être modélisé dans Multisim.

Dans notre circuit (partie oscillateur) on va utiliser deux condensateurs C1 et C2 avec des capacités de 10nF et 100nF respectivement, une résistance R variable (potentiomètre) et une inductance variable.

Pour obtenir une inductance variable on va utiliser un circuit équivalent d'une inductance composé de quatre résistances, deux amplificateurs opérationnels et un condensateur comme le montre la figure (12) :



**Figure 12:** Circuit de Chua avec un circuit équivalent d'une inductance.

Tel que  $R7=100\Omega$ ,  $R8=1K\Omega$ ,  $R9=1K\Omega$ ,  $C=100nf$  et  $R10$  est un potentiomètre.

$$\text{Avec } L = \frac{R7 * R9 * C * R10}{R8} .$$

Donc l'inductance  $L$  varie en fonction de la résistance  $R10$

Pour l'alimentation des amplificateurs opérationnels on va utiliser deux sources de tension continue de 9v.

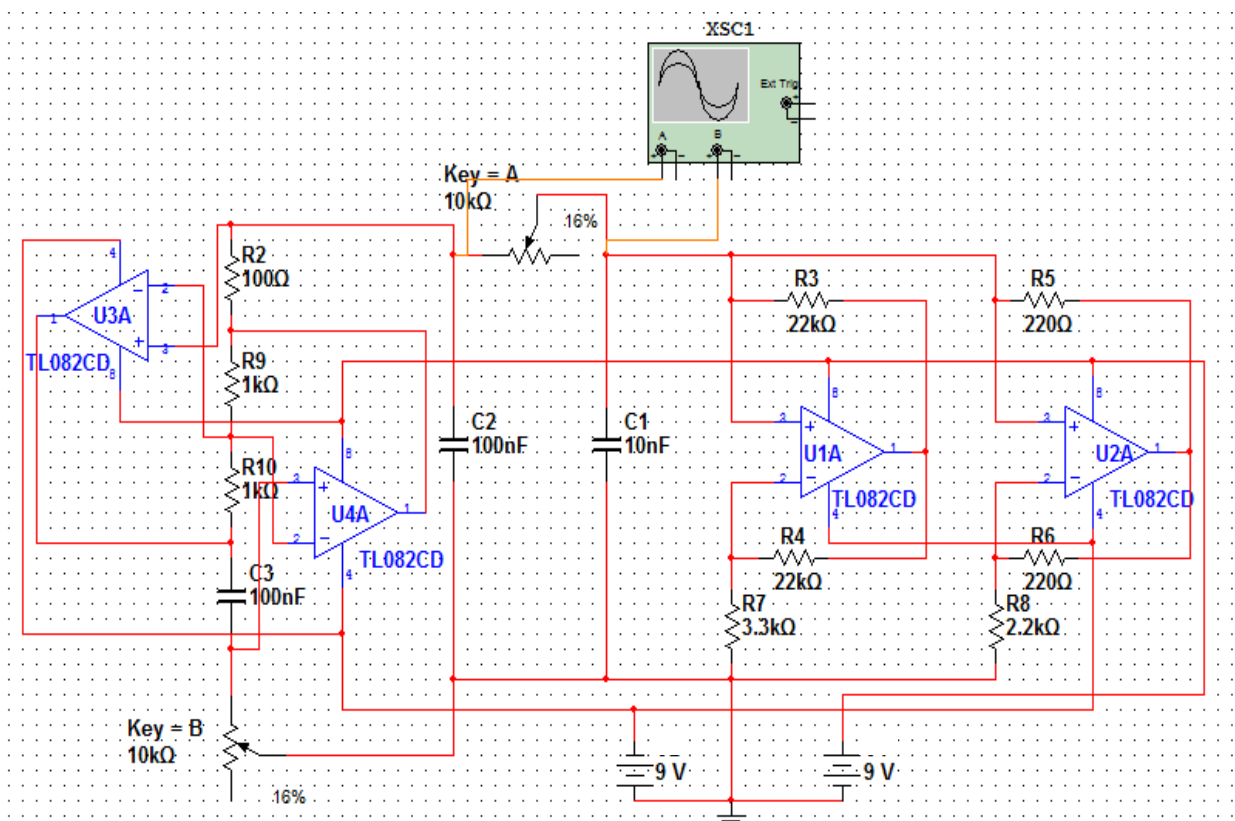


Figure 13: Schéma du circuit de Chua sous Multisim.

- Les résultats de simulation :

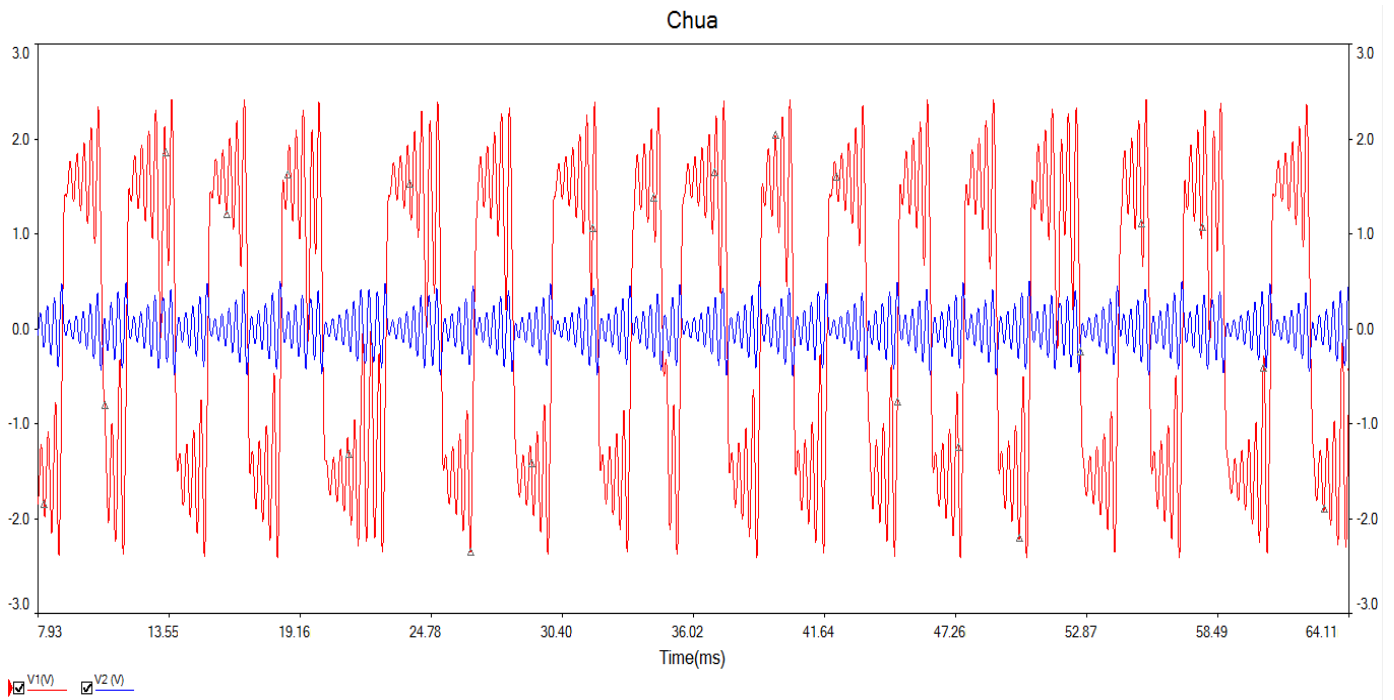


Figure 14: Série temporelle des tensions V1 et V2.

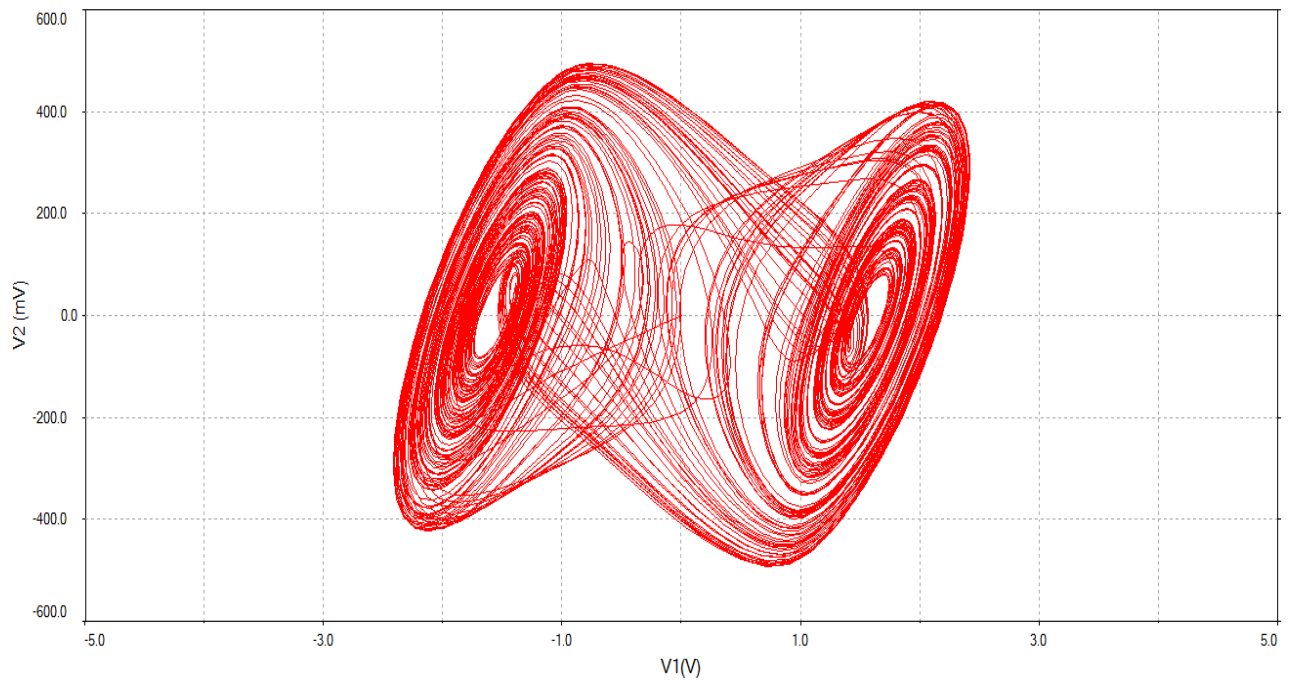


Figure 15: Double attracteur du circuit de Chua.

La figure (14) représente les séries temporelles des deux tensions générés par le circuit de Chua ( $V_1$  aux bornes du condensateur  $C_1$  et  $V_2$  aux bornes du condensateur  $C_2$ ). Ces deux tensions ont une allure qui semble être aléatoire, donc ce sont des signaux chaotiques ce qui est confirmé par le plan de phase représenté sur la figure (15) qui est un attracteur étrange de Chua avec deux point d'attraction tel que les trajectoires autour de ces deux points ne se coupent jamais.

### **5. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons présenté une étude théorique du circuit de Chua, de quoi il se compose et le système d'équations qui le décrit.

La résolution du système d'équations sous MATLAB et sa simulation sous le logiciel Multisim nous ont permis d'obtenir les différents signaux chaotiques générés par ce circuit, et son attracteur.

Ceci nous ouvre la voie au prochain chapitre dans lequel nous allons essayer d'étudier la synchronisation de deux circuits chaotiques identiques.



# CHAPITRE III

---

## Étude de la synchronisation

## 1. Introduction

Le mot "synchronisation" vient du grec " συν " (syn) qui veut dire "ensemble " et "χρονος " (chronos) qui veut dire "temps. " De plus le dictionnaire la définit en tant qu'action de faire se produire ou s'accomplir simultanément (plusieurs faits, plusieurs actions appartenant à des séries différentes). [13]

L'utilisation du chaos dans les systèmes de télécommunication a été rendue possible depuis la maîtrise de la synchronisation des systèmes chaotiques. En effet le problème de synchronisation du récepteur dans le but de dupliquer le signal chaotique utilisé au niveau du récepteur se pose directement. [5]

Dans ce chapitre on va étudier théoriquement la synchronisation de deux générateurs de chaos (circuits de Chua), en présentant les différentes méthodes de la synchronisation, avec les simulations correspondantes sous le logiciel Multisim.

## 2. Synchronisation de deux circuits chaotiques

A présent, nous n'avons qu'un circuit chaotique à trois états (trois signaux). Un des avantages d'un circuit chaotique est que, s'il est laissé seul, deux circuits n'auront jamais les trois signaux identiques en tout point dans le temps (en raison de la propriété de «sensibilité aux conditions initiales»).

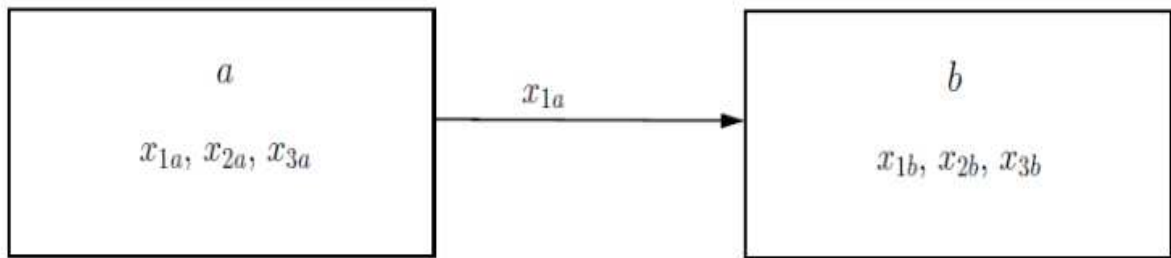
Les circuits chaotiques synchronisés sont fréquemment utilisés dans des applications réelles. Pour réaliser la synchronisation de base de deux circuits, nous devons mettre en place nos deux circuits avec un circuit de couplage intermédiaire. [12]

### 2.1. Couplage d'un système de synchronisation

Il ya plusieurs façons de coupler un système de synchronisation, les deux les plus populaires sont, le couplage unidirectionnel (Maître / Esclave) et le couplage bidirectionnel.

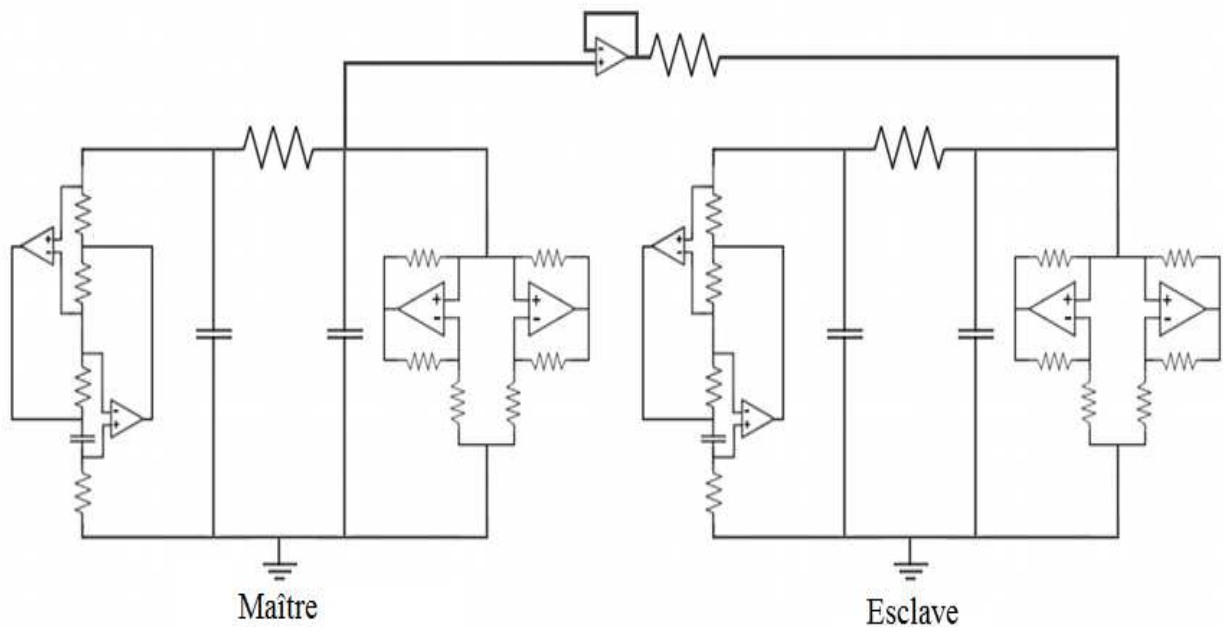
### 2.1.1. Couplage unidirectionnel [19]

Dans le cas d'une synchronisation unidirectionnelle, le couplage entre deux systèmes identiques a et b est réalisé à l'aide d'un élément fonctionnant dans un seul sens, par exemple l'utilisation d'un circuit électrique suiveur.



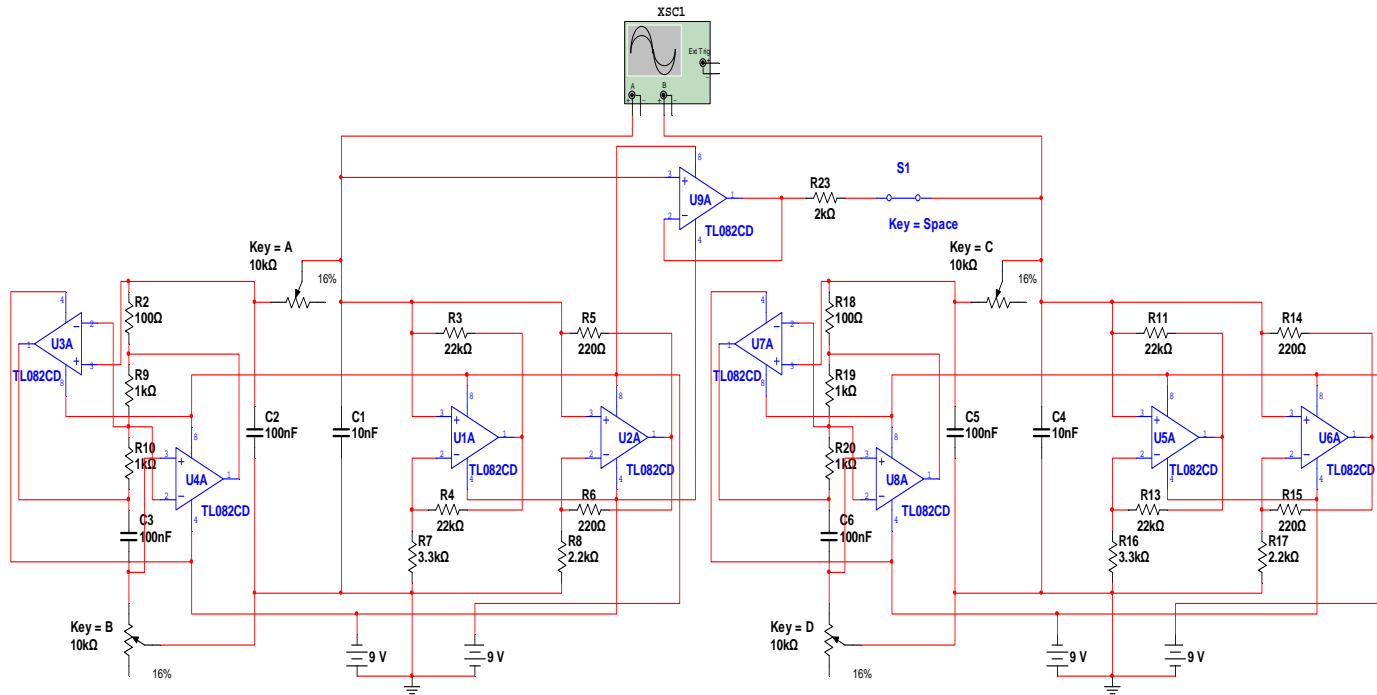
**Figure 16:** Couplage unidirectionnel.

- **Le couplage unidirectionnel de deux circuits de Chua :**



**Figure 17:** Couplage unidirectionnel de deux circuits de Chua.

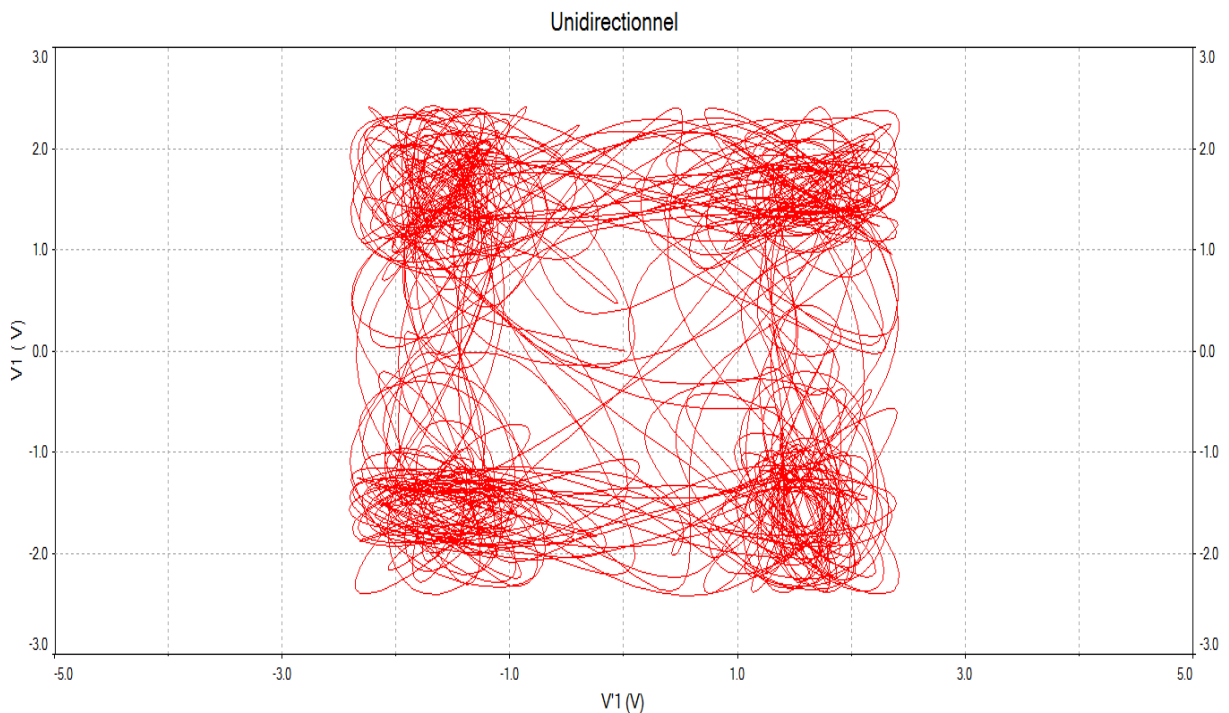
• Simulation sous Multisim :



**Figure 18:** Schéma de couplage unidirectionnel sous Multisim.

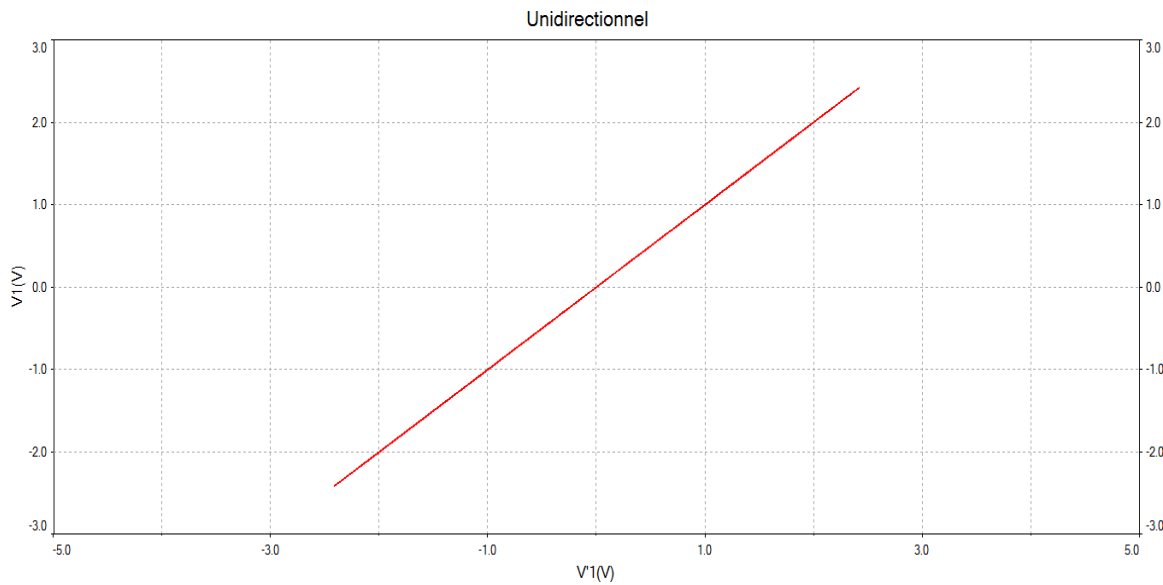
La figure (18) nous montre le schéma du couplage unidirectionnel utilisé. On a ajouté un interrupteur pour contrôler le couplage de deux circuits

Les résultats de simulation sont illustrés sur les figures (19,20 et 21) :



**Figure 19:** interrupteur ouvert : pas de couplage entre les deux circuits.

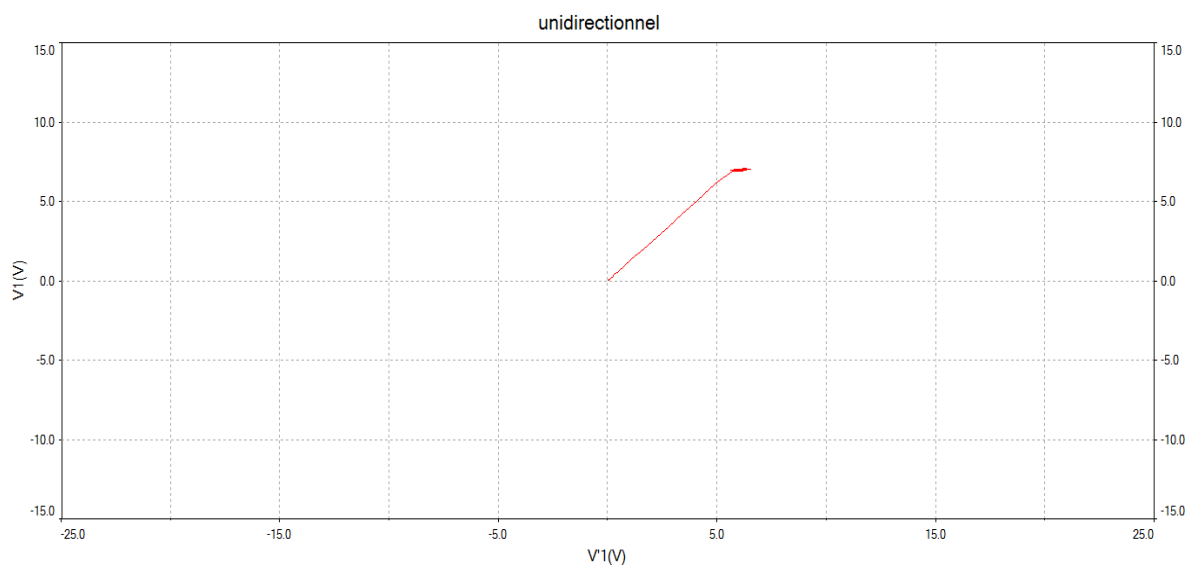
On ferme l'interrupteur et on lance la simulation avec des valeurs identiques des potentiomètres des deux circuits :



**Figure 20:** synchronisation des deux circuits.

La figure (20) représente la courbe de la tension  $V1$  du circuit maître en fonction de la tension  $V'1$  du circuit esclave, d'après le résultat obtenu les deux circuits sont synchronisés.

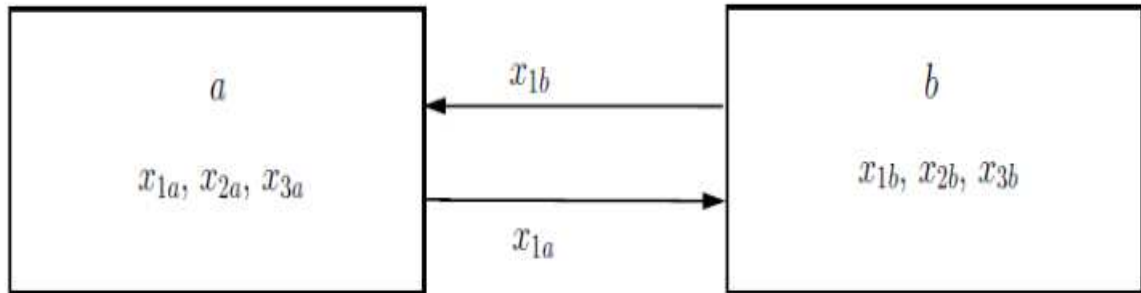
En laissant toujours l'interrupteur fermé et en modifiant légèrement les valeurs des deux potentiomètres du circuit maître, la figure (21) montre que les deux circuits ne sont pas synchronisés, ce qui se traduit la sensibilité aux conditions initiales :



**Figure 21:** désynchronisation des deux circuits.

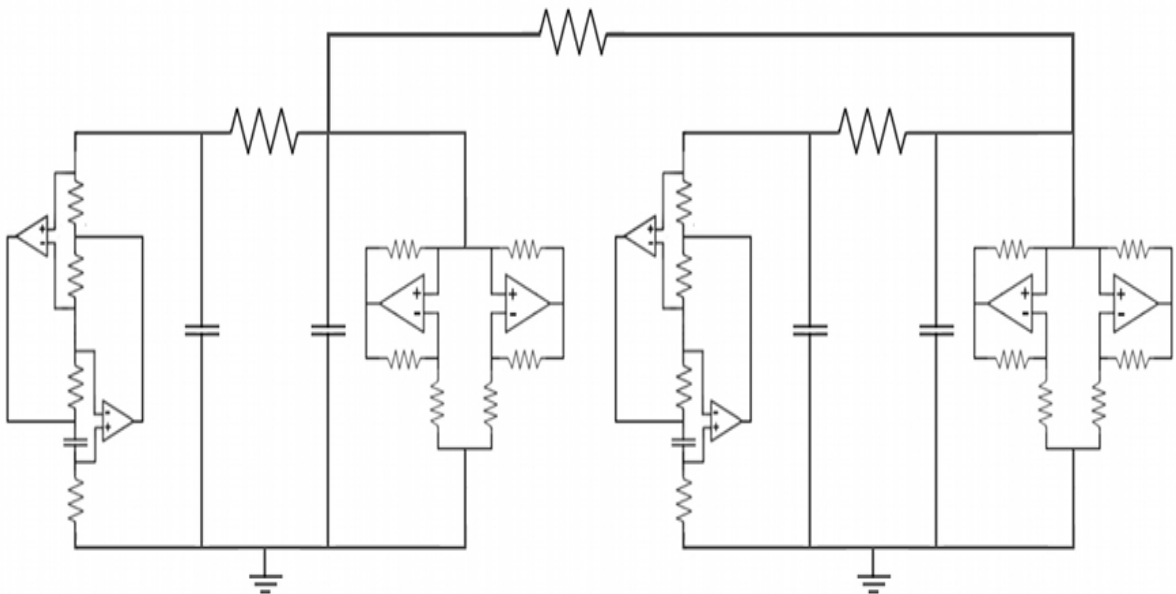
### 2.1.2. Couplage bidirectionnel [19]

Dans le cas d'une synchronisation bidirectionnelle, le couplage entre deux systèmes identiques  $a$  et  $b$  est réalisé à l'aide d'un élément permettant l'échange d'énergie dans les deux sens, par exemple l'utilisation d'une simple résistance.



**Figure 22:** Couplage bidirectionnel.

- **Le couplage bidirectionnel des deux circuits de Chua :**



**Figure 23:** Couplage bidirectionnel de deux circuits de Chua.

• Simulation sous Multisim :

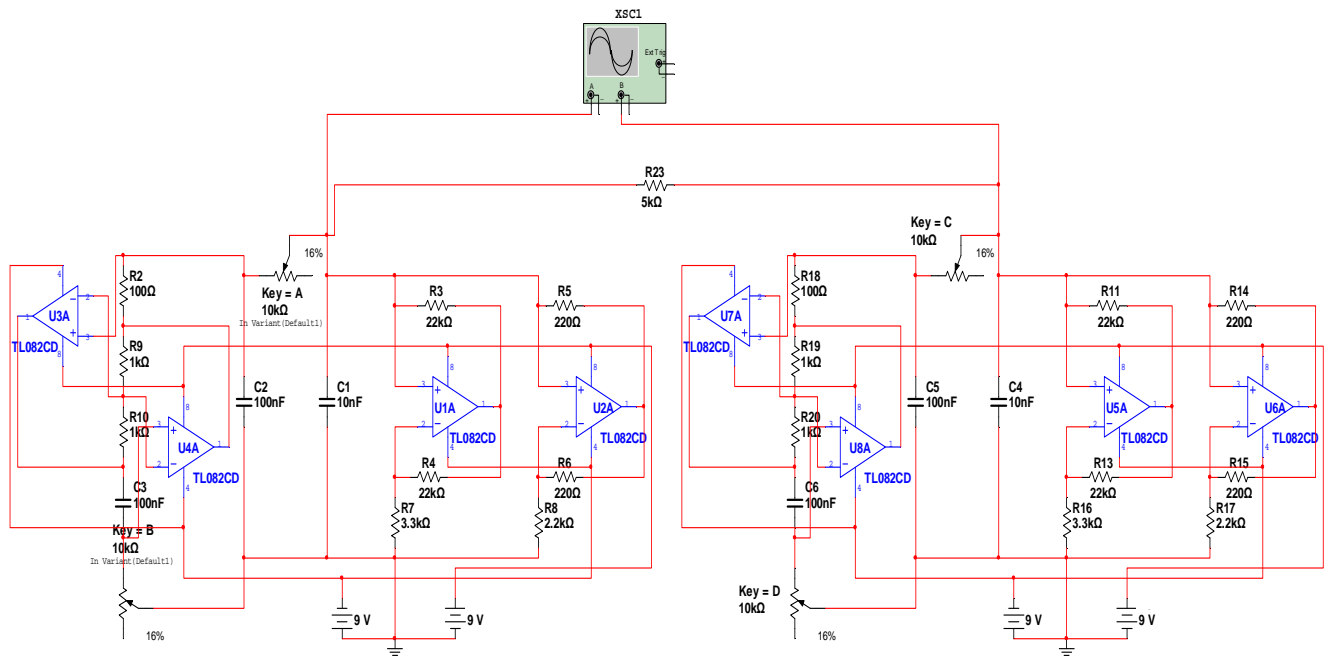


Figure 24 : Schéma de couplage bidirectionnel sous Multisim.

On lance la simulation avec des paramètres identiques :

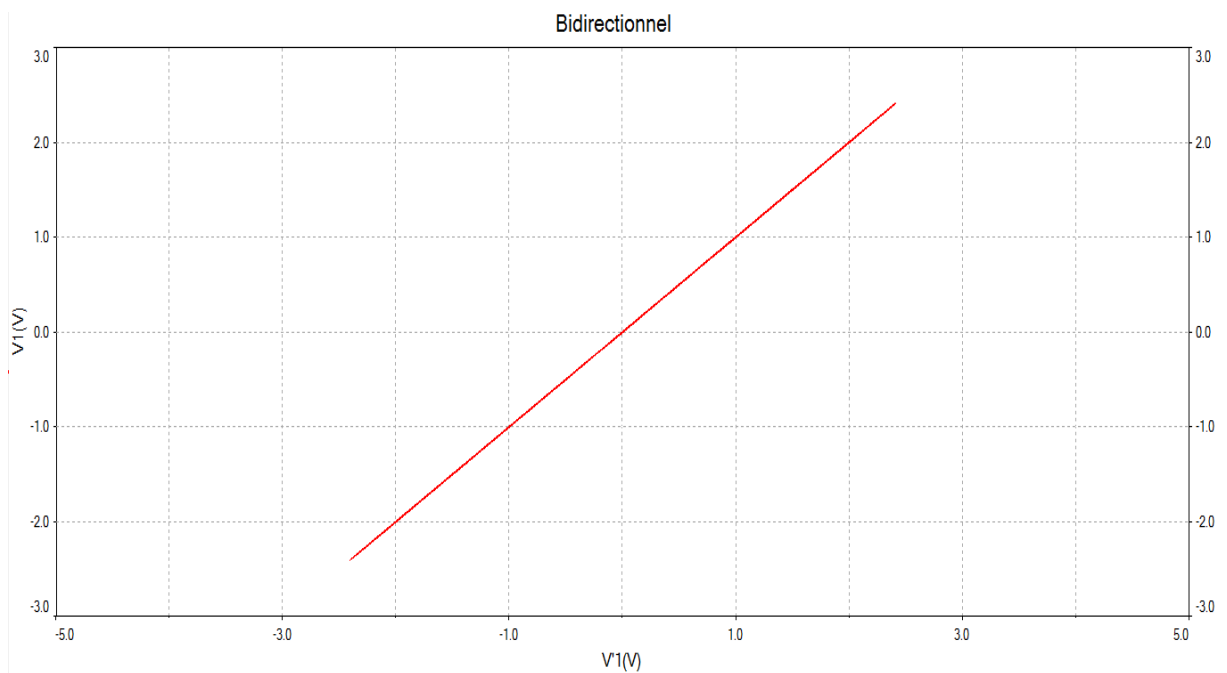


Figure 25: synchronisation des deux circuits.

En modifiant légèrement les paramètres initiaux et on lance la simulation.

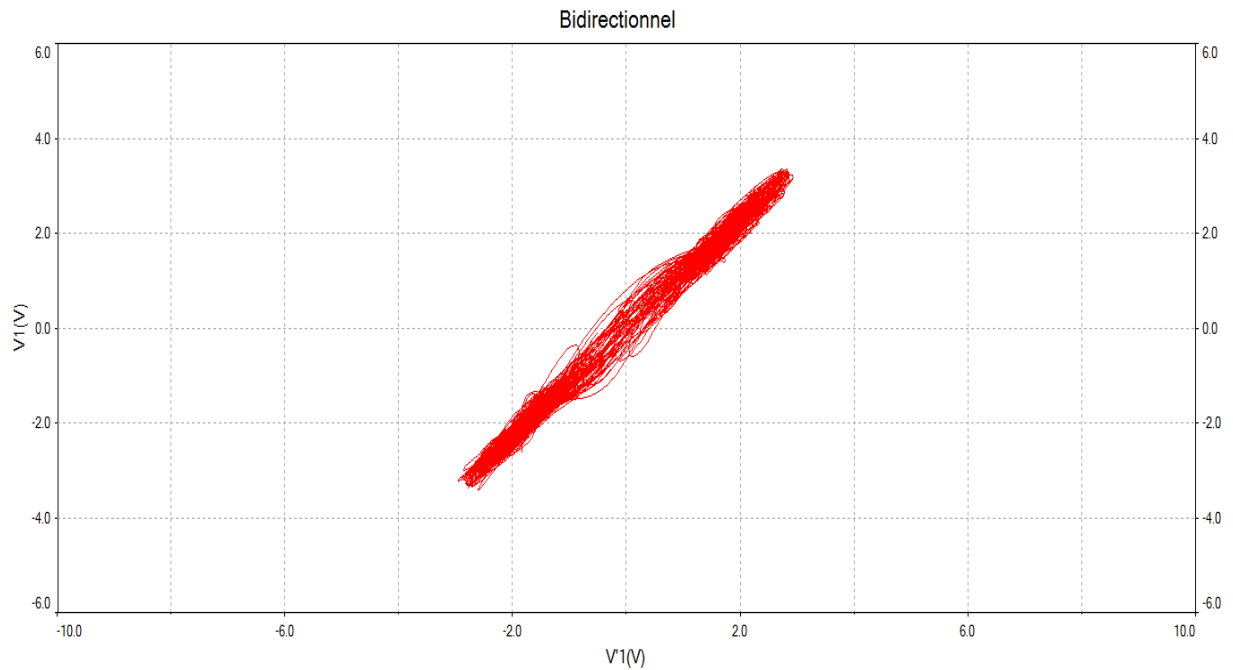


Figure 26: désynchronisation des deux circuits.

### 3. Soustraction de des signaux générés par deux circuits de Chua

Une autre méthode pour étudier la synchronisation est de faire la soustraction entre les signaux sortants des deux circuits, si le résultat est un signal nul, donc les deux signaux sont égaux, et ainsi les deux circuits sont considérés synchronisés.

#### 3.1. Schéma d'un soustracteur

Dans ce montage, des tensions sont appliquées à chacune des bornes d'entrée comme illustré sur la figure (27).

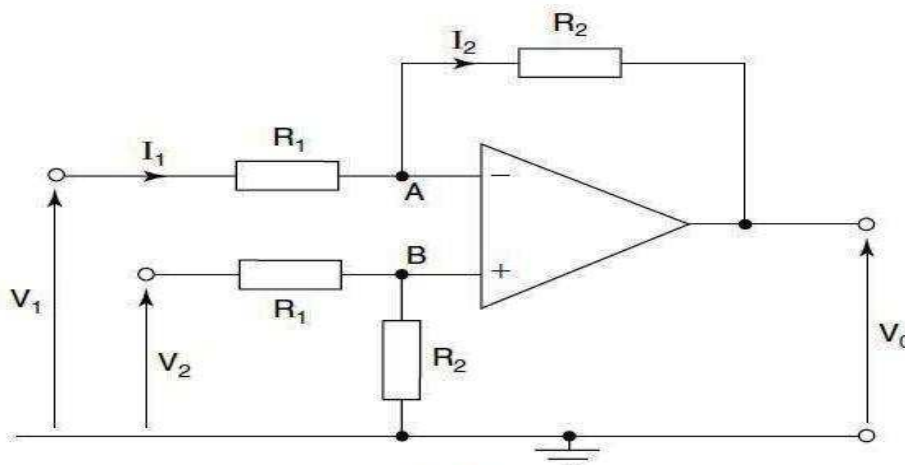


Figure 27: Schéma fonctionnel d'un soustracteur.



La tension de sortie est donnée par :

$$V_0 = \frac{R_2}{R_1}(V_2 - V_1)$$

Si on choisit :  $R_1 = R_2$ , alors  $V_0 = V_2 - V_1$ .

### 3.2. Soustraction de deux signaux chaotiques

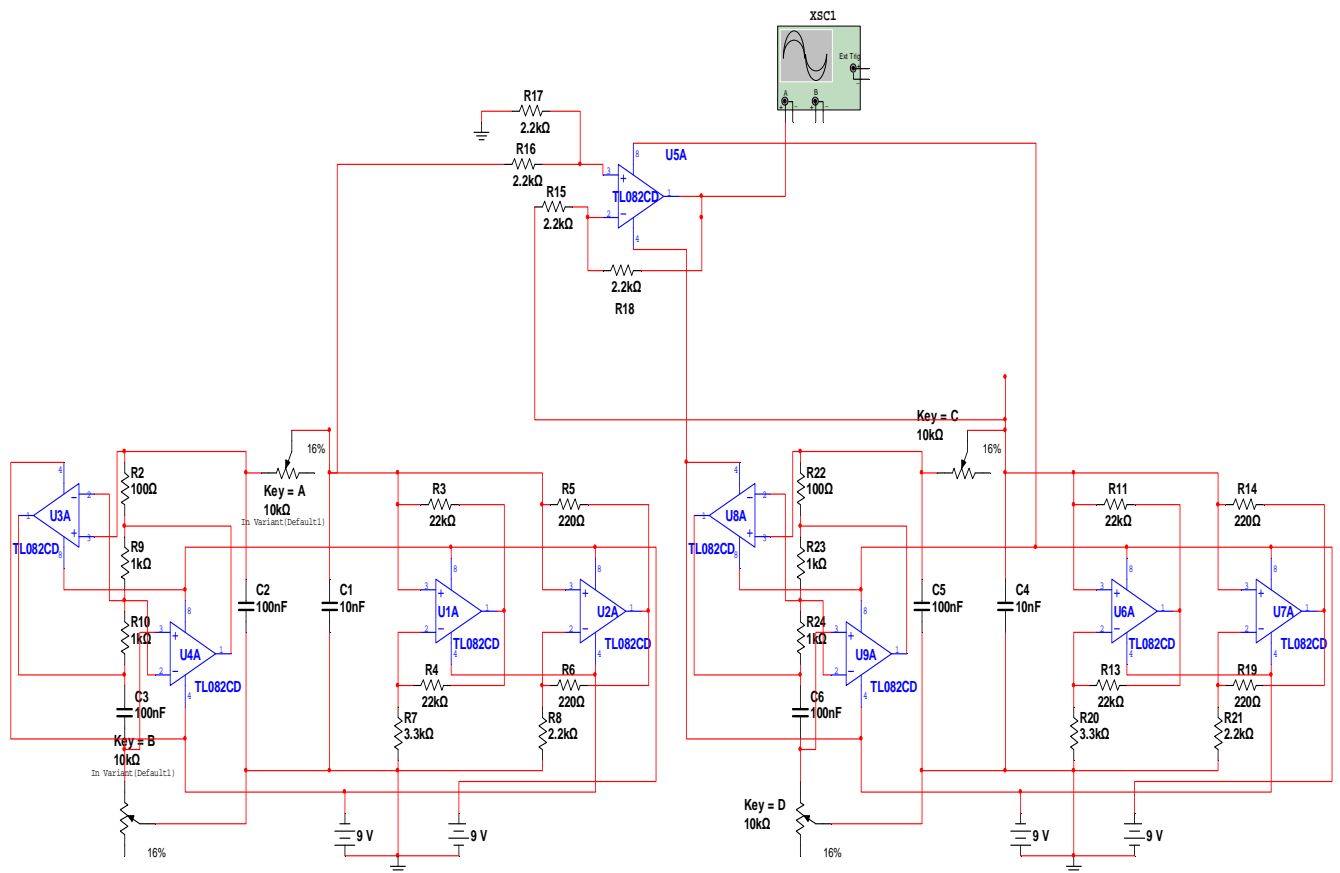
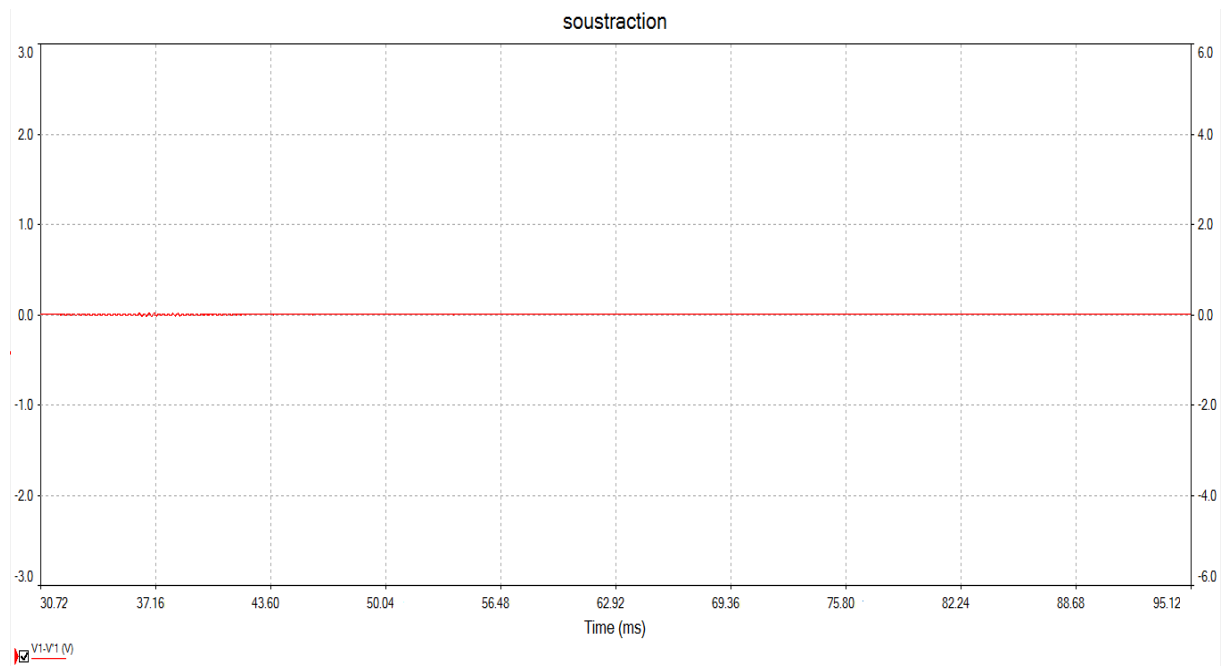


Figure 28: Schéma d'une soustraction de deux signaux chaotiques.

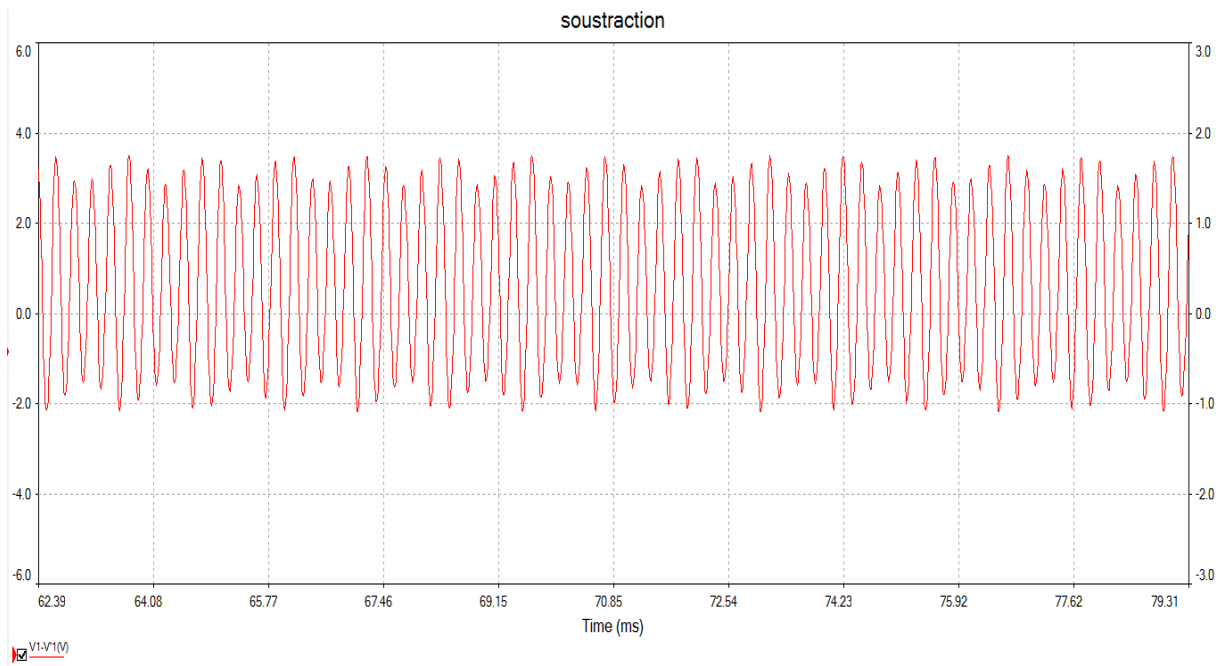
- **Résultats de simulation :**



**Figure 29:** Résultat de soustraction des signaux des deux circuits identiques.

Le signal résultant par la soustraction des signaux des deux circuits est nul, donc on peut dire que les deux circuits sont synchronisés.

Pour des paramètres légèrement modifiés on obtient le résultat suivant :



**Figure 30:** Exemple de soustraction des signaux des deux circuits non identiques.

Le signal résultant par la soustraction des signaux des deux circuits est non-nul, donc on peut dire que les deux circuits ne sont pas synchronisés.

#### **4. Conclusion**

Dans ce chapitre, une étude théorique sur les différentes méthodes de la synchronisation des circuits chaotiques et des simulations nécessaires ont été données.

Le chapitre suivant sera consacré à la réalisation pratique des différents circuits qu'on a étudiés et simulés dans les chapitres II et III.

# CHAPITRE IV

---

**Réalisation et étude expérimentale**

## 1. Introduction

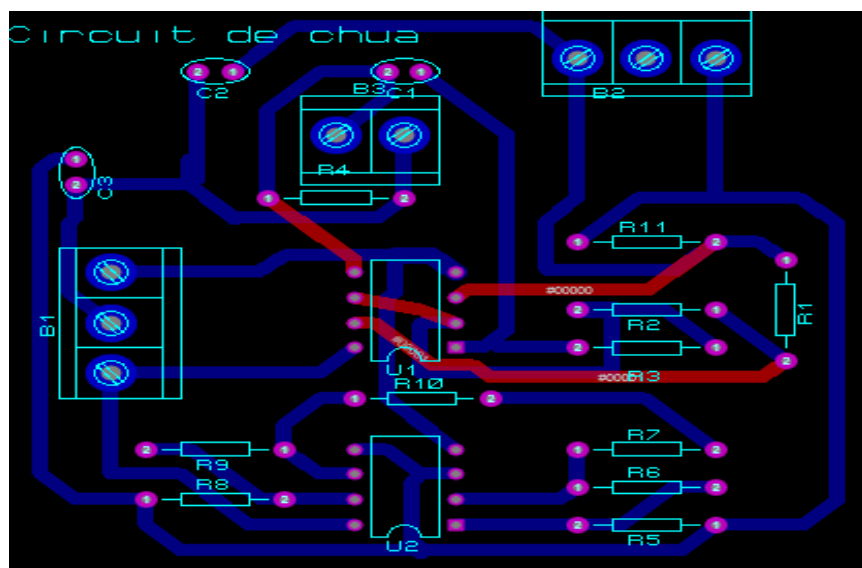
Nous allons, dans ce chapitre, appliquer les connaissances que nous avons vues dans les chapitres II et III sur le circuit de Chua et son fonctionnement théorique et simulé, ainsi que la synchronisation de deux circuits chaotiques afin de réaliser une carte électronique qui contient deux circuits de Chua, un circuit de synchronisation et un soustracteur. Pour relever ensuite les différents résultats expérimentaux et voir le fonctionnement pratique des circuits de Chua.

## 2. Réalisation pratique de la carte électronique

Le circuit de Chua peut être réalisé de différentes façons, en utilisant des composants électroniques standards ou spéciaux. Puisque tous les éléments linéaires du circuit sont disponibles pour les deux terminaux, notre préoccupation majeure sera de réaliser la résistance non-linéaire de Chua [20].

Pour réaliser notre carte électronique on va utiliser le logiciel Proteus ARES qui permet de créer des prototypes des circuits imprimés (PCB : Printed Circuit Boards) avec une grande facilité, on obtient les schémas PCB des différents circuits :

- **Circuit de Chua :**



**Figure 31:** Schéma PCB du circuit de Chua.

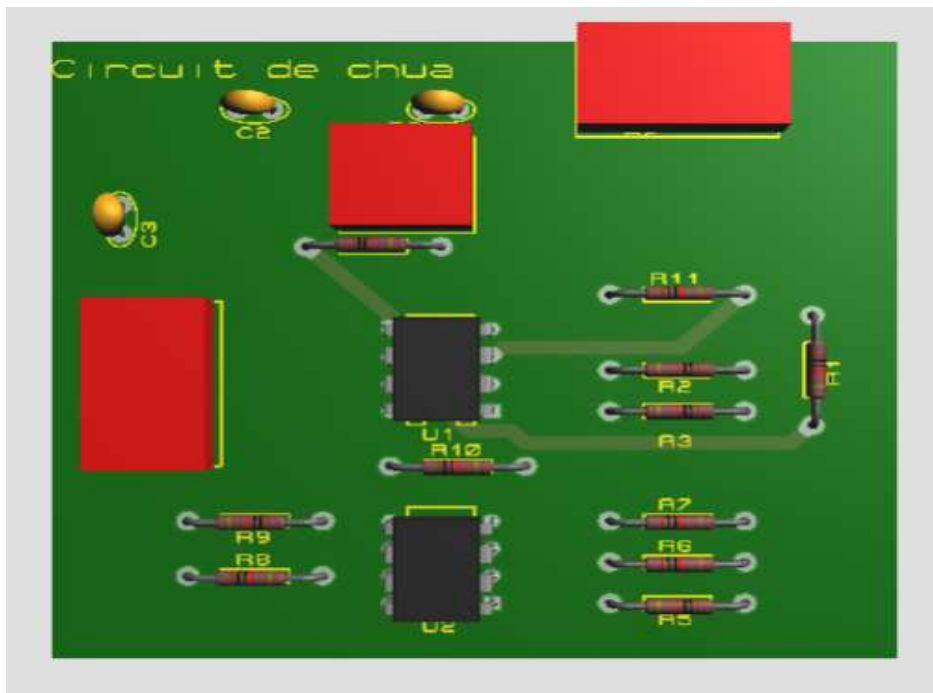


Figure 32: Vue en 3D du circuit de Chua.

- Soustracteur et circuit de couplage:

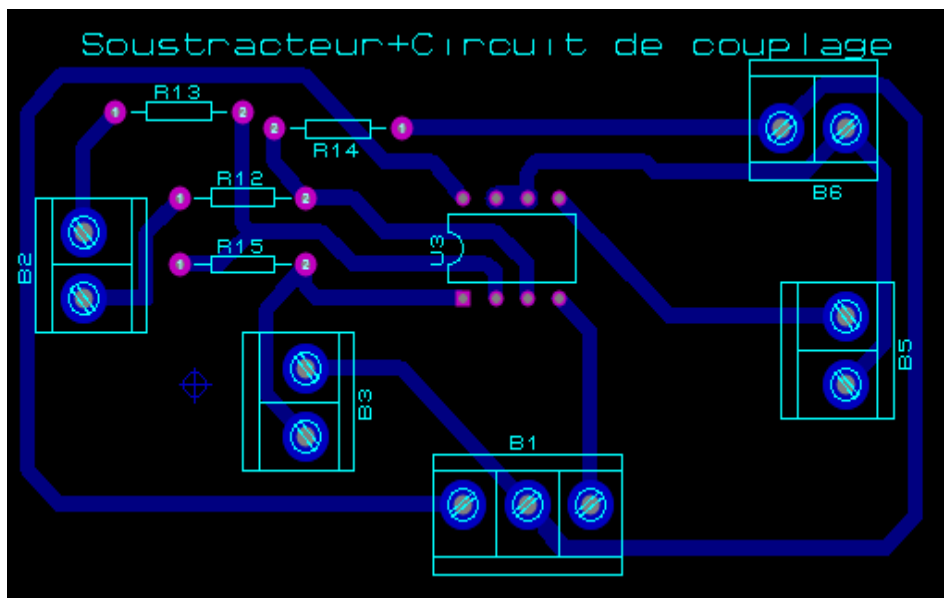
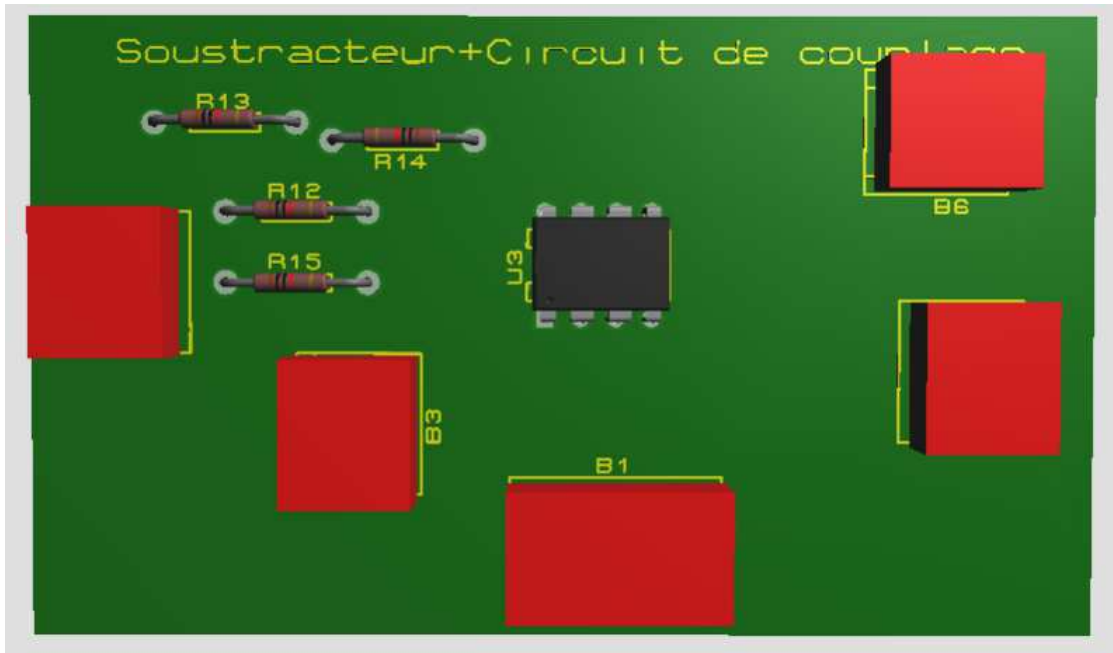
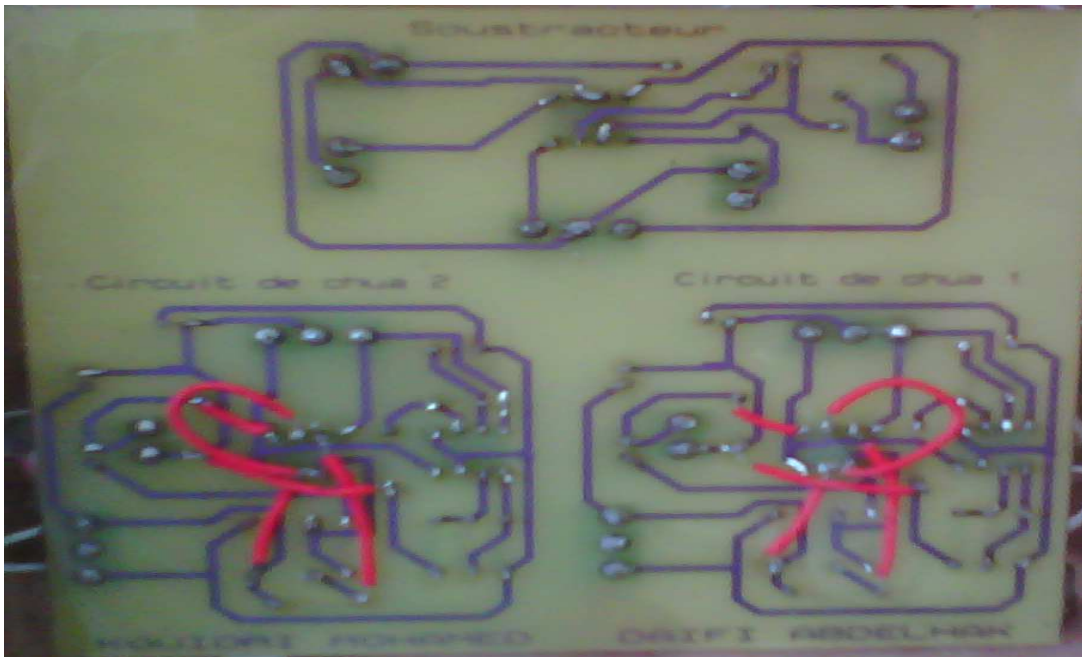


Figure 33: Schéma PCB du circuit soustracteur+ circuit de couplage.



**Figure 34:** Vue en 3D du circuit soustracteur+circuit de couplage.

Dans une seule plaque électronique on a réalisé deux circuits de Chua, un soustracteur et un circuit de couplage comme il est indiqué sur la figure suivante :

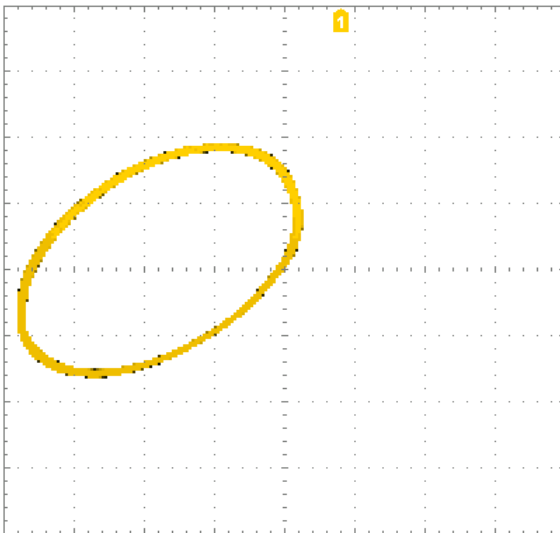


**Figure 35:** La carte électronique réalisée.

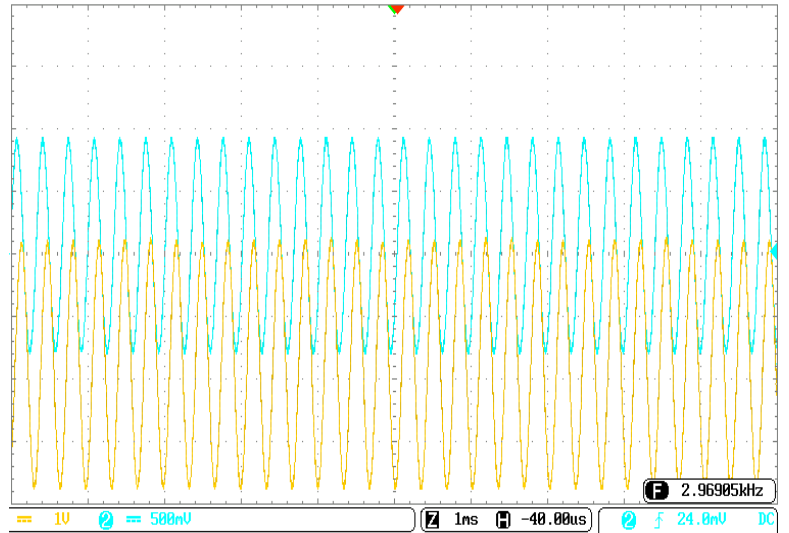
### 3. Les résultats expérimentaux

#### 3.1. Les signaux générés

Après avoir réalisé la carte électronique illustrée dans la figure (35) on a fait une étude expérimentale pour montrer le comportement du circuit de Chua, en fixant le potentiomètre du circuit équivalent de l'inductance à une résistance de  $1.8 \text{ k}\Omega$  ce qui nous donne une inductance de  $18 \text{ mH}$ , et jouant sur la résistance variable  $R$ . les résultats de cette étude sont données par les figures suivantes :

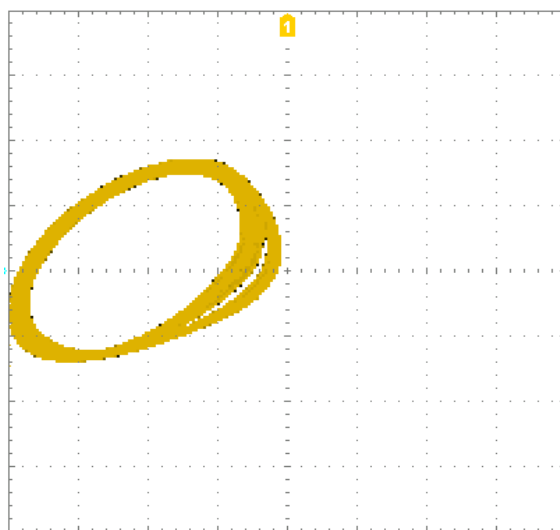


Plan de phase

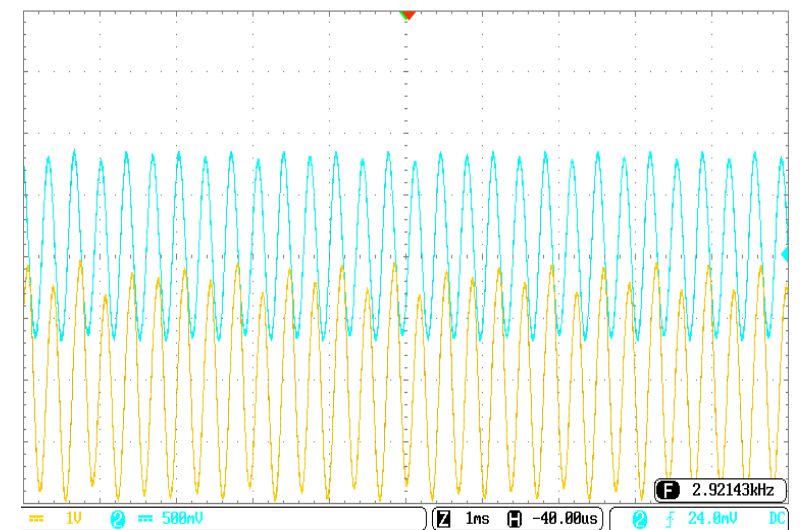


Réponses temporelles

(a)  $R=1.9 \text{ K}\Omega$



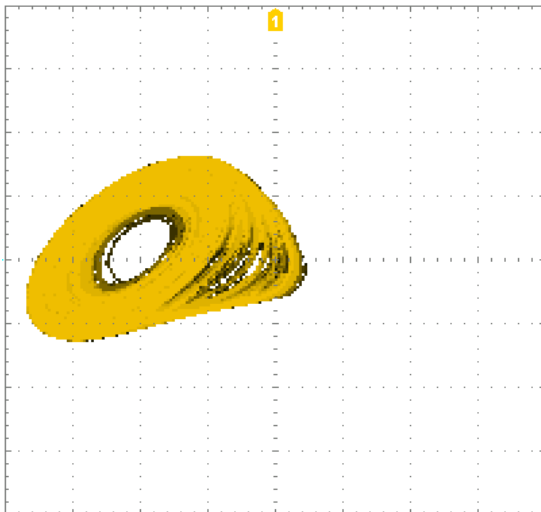
Plan de phase



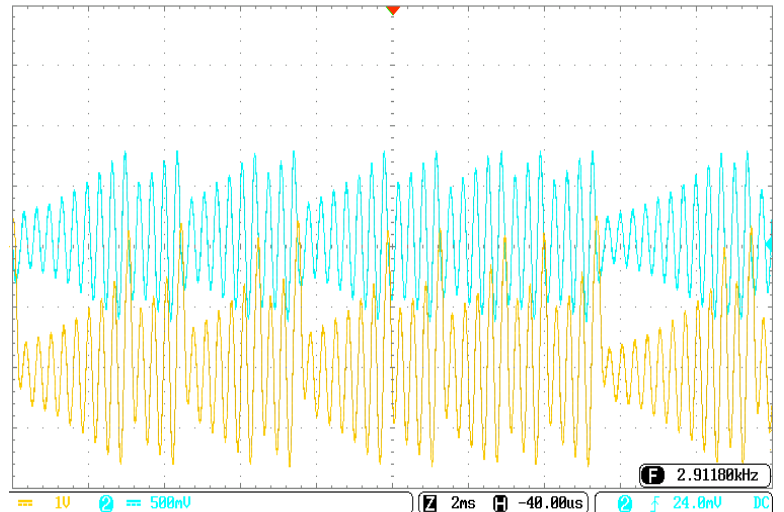
Réponses temporelles

(b)  $R=1.84 \text{ K}\Omega$ .

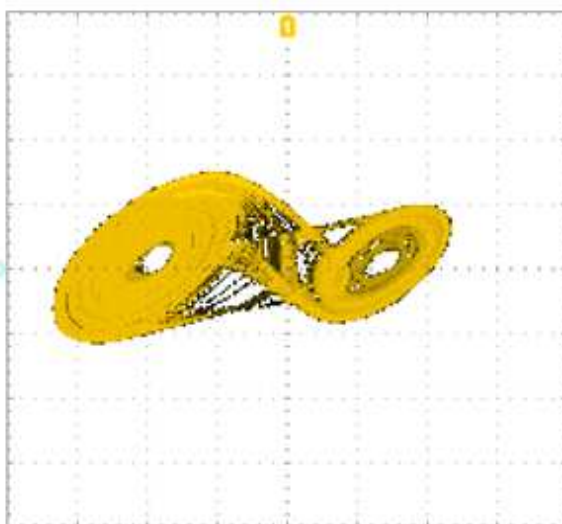




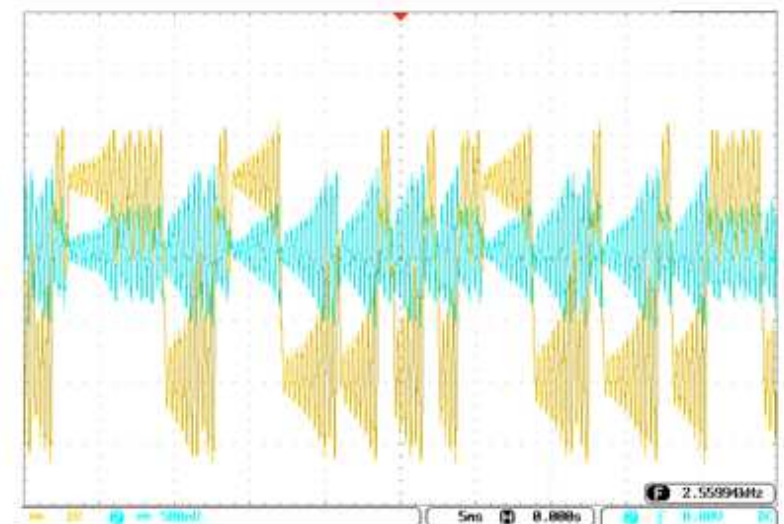
Plan de phase



Réponse temporelle

(c)  $R=1.82K\Omega$ .

Plan de phase



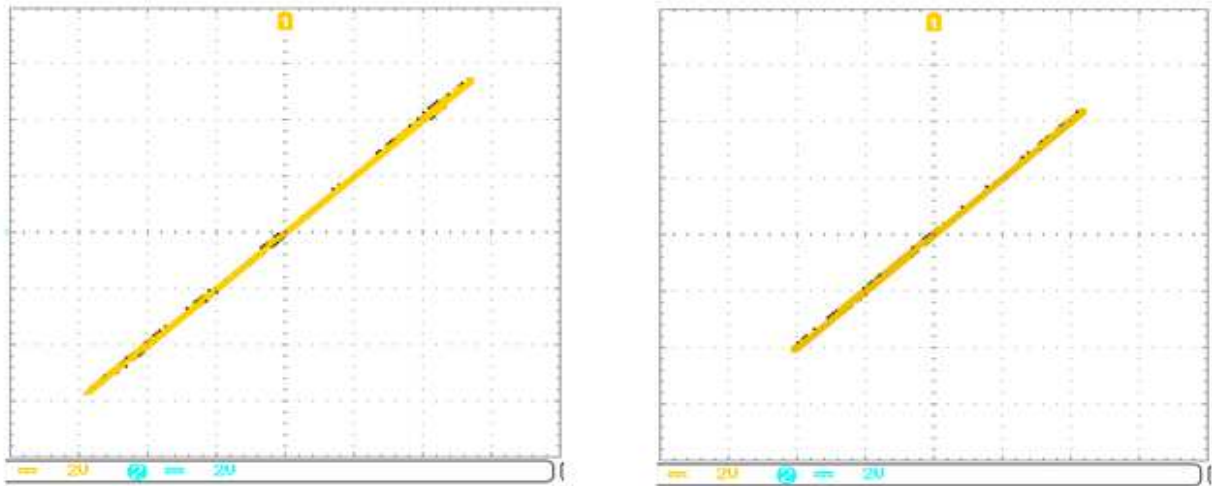
Réponse temporelle

(d)  $R=1.77K\Omega$ .**Figure 36:** Résultat expérimentaux de l'oscillateur de Chua.

La figure (36) montre les différents états des signaux générés par le circuit de Chua en fonction de la variation de la résistance  $R$ , tel que : Pour (a)  $R=1.9k\Omega$ , génération d'un signal périodique sinusoïdal ;(b)  $R =1.84 k\Omega$ , génération d'un signal périodique avec dédoublement de la période ; (c)  $R= 1.82 k\Omega$ , génération d'un signal qui a un aspect qui semble aléatoire et ressemble avec le système de Rössler donc c'est un système chaotique ;(d)  $R =1.77 k\Omega$ , génération d'un signal sous forme de deux ailes de papillons donc c'est un système chaotique.

### 3.2. Etude de la synchronisation

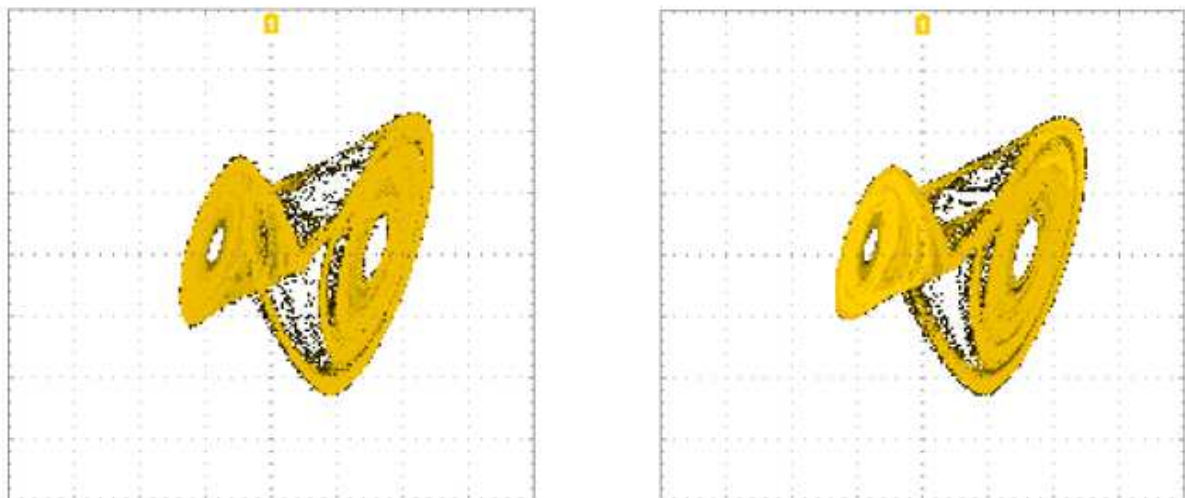
La synchronisation des deux circuits de Chua est assurée par un suiveur qui a pour rôle d'assurer un couplage dans un seul sens (synchronisation unidirectionnel), les droites apparaissant dans les plans de phase des signaux  $V_1$ ,  $V'_1$  et  $V_2$ ,  $V'_2$  nous montrent que les deux circuits sont bien synchronisés ce qui est confirmé par la figure (38) tel que les deux signaux chaotiques sont identiques.



**Plan de phase ( $V_1 - V'_1$ )**

**Plan de phase ( $V_2-V'_2$ )**

**Figure 37:** Résultats de synchronisations des états  $V_1-V'_1$  et  $V_2-V'_2$ .

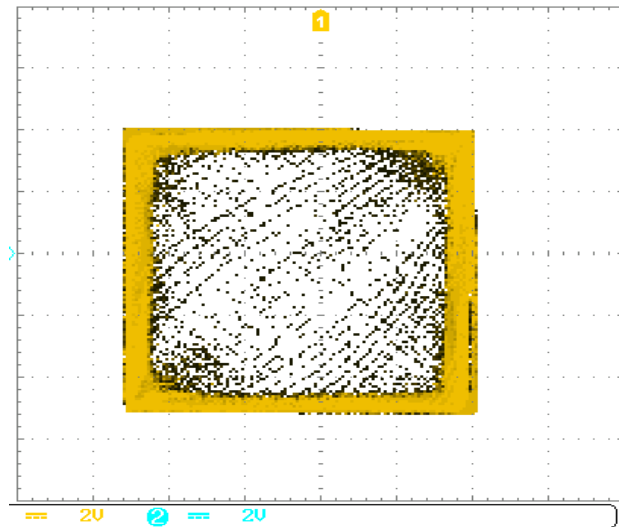


**Signal du circuit maitre**

**Signal du circuit esclave**

**Figure 38:** Signaux chaotiques des deux circuits synchronisés.

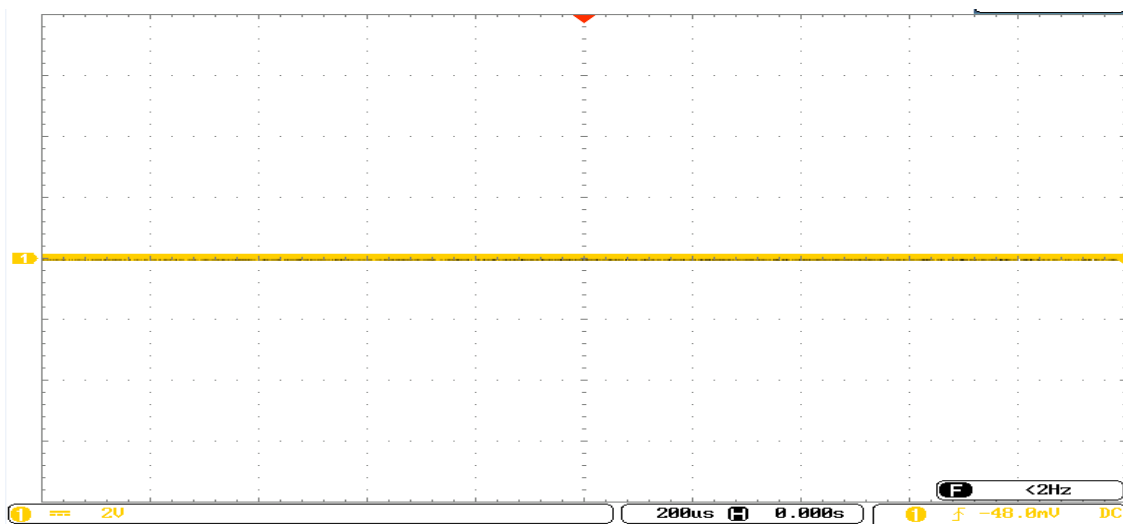
Lorsque la synchronisation est absente (pas de couplage avec le circuit de synchronisation) entre les deux circuits on obtient la figure ci-dessus :



**Figure 39:** Absence de la synchronisation entre les deux circuits.

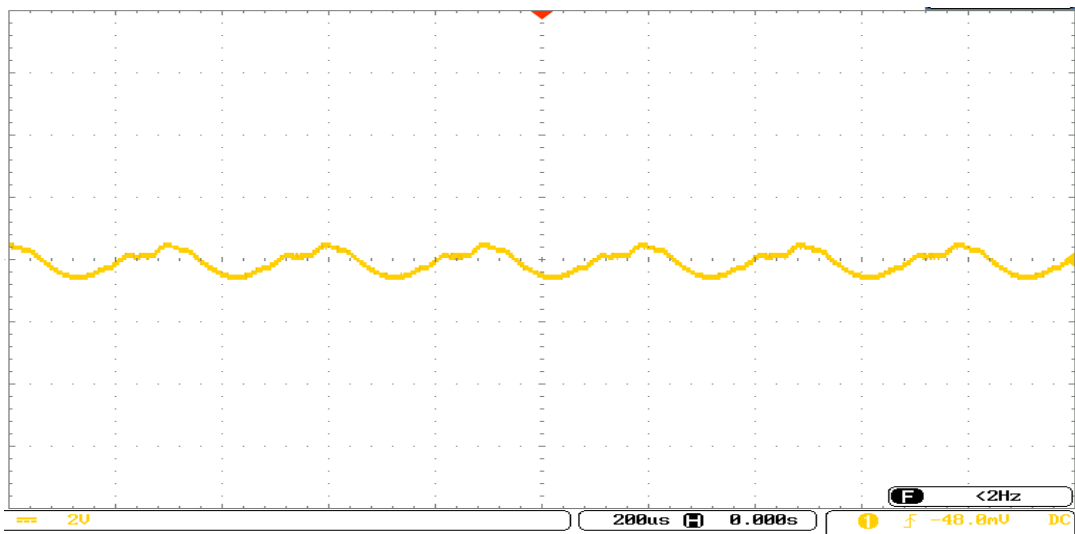
### 3.3. Résultat de la soustraction

Pour tester la synchronisation entre les deux circuits , on a fait une soustraction entre le signal généré par le circuit maitre et le signal généré par le circuit esclave, si le signal résultant soit nul donc on peut dire que les deux signaux sont identiques et bien synchronisés, si le signal résultant soit différent de zéro, donc on dit que les deux signaux sont pas bien synchronisés.



**Figure 40:** Résultat de soustraction entre deux circuits synchronisés.

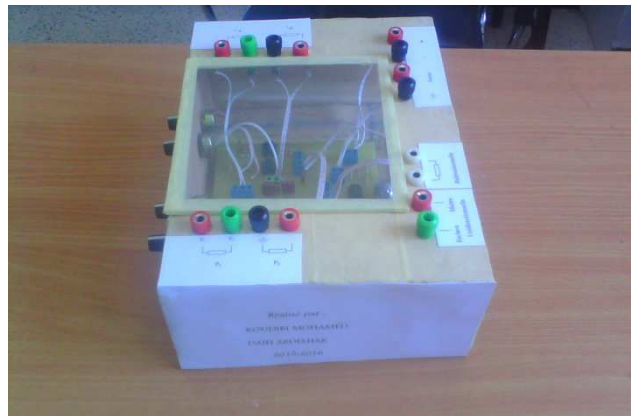
La figure (40) représente le résultat de soustraction des deux circuits synchronisés, tel que le signal résultant est nul.



**Figure 41:** exemple de Résultat de soustraction des signaux des deux circuits non synchronisés.

La figure (41) représente un exemple de signal produit par la soustraction de deux circuits non synchronisés.

- Quelques photos de la maquette réalisée :



**Figure 42:** La maquette réalisée.

#### **4. Conclusion**

Dans ce chapitre, nous avons expliqué toutes les étapes de réalisation de notre projet.

Les résultats expérimentaux obtenus sont similaires par rapport aux résultats obtenus dans la partie de simulation.

# **CONCLUSION GÉNÉRALE**

## CONCLUSION GENERALE :

Le travail développé dans le cadre de ce PFE, concerne la réalisation pratique de deux générateurs des signaux chaotiques et l'étude de la possibilité de leur synchronisation.

Dans le premier chapitre, après un court historique sur le chaos nous avons fourni quelques notions concernant les systèmes dynamiques en générale et les systèmes chaotiques en particulier avec la présentation des caractéristiques très intéressantes des systèmes chaotiques, parmi ces caractéristiques on peut citer la non-linéarité, le déterminisme et la sensibilité aux conditions initiales, tel que de très petits changements dans les conditions initiales peuvent conduire à une évolution qui diffère à chaque fois, ce qui rend l'imprévisibilité impossible à long terme.

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, nous avons donné une étude théorique sur un générateur de chaos à base du circuit de Chua en décrivant son comportement, nous avons ainsi donné la résolution du système d'équations qui décrit ce circuit et simulé son modèle par la suite.

Le troisième chapitre a été dédié à la synchronisation des systèmes chaotiques en utilisant les deux méthodes de synchronisation, unidirectionnelle et bidirectionnelle, de bons résultats ont été obtenus par le test de la synchronisation du chaos par ces deux méthodes.

Ce travail a été finalisé dans le quatrième chapitre avec la réalisation d'une maquette qui contient deux circuits de Chua et un circuit de couplage, nous avons fait des essais expérimentaux sur son comportement et la synchronisation du chaos, des bons résultats expérimentaux ont été obtenus.

Ce travail nous a permis de nous familiariser avec un domaine quelque peu sensible qui est la synchronisation du chaos et aussi nous a permis de faire des connaissances dans les domaines pratiques.

La réalisation de ce projet nous a permis de proposer d'utiliser la maquette pour faire des travaux pratiques sur les systèmes chaotiques afin de bien former les étudiants.

**BIBLIOGRAPHIE**

- [1] : DJ. GOUMIDI, « Fonction logistique et standard chaotique pour le chiffrement des images satellitaires », thèse magister, Université Mentouri de Constantine, 2010.
- [2] : T. HOET, B. LOERNZI, S. SAHIN, « La cryptographie chaotique », INSA TOULOUSE, 2012.
- [3]: A. HUBLER, « Adaptive control of chaotic systems, » *Helv. Phys. Acta*, Vol. 62, pp. 343-347, 1989.
- [4] : J. XU, « Dynamique Chaotique En Vue d'Applications Aux Télécommunications Etude d'une transformation ponctuelle symétriquement découplée définie à partir d'une fonction sinus carré », thèse de Doctorat, Université de Toulouse délivré par l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 07 Février 2008.
- [5]:L. M. PECORA and T. L. CARROLL, «Synchronization in chaotic systems, »*Phys. Rev. Lett.* Vol. 64, pp. 821-824, 1990.
- [6]:G. PEREZ and H. CERDERIA, «Extracting message masked by chaos, » *Phys. Rev. Lett.* 74, pp. 1970-1973, 1995.
- [7] : A. IKHLEF, « Synchronisation, Chaotification et Hyperchaotification des Systèmes Non-linéaires : Méthodes et Applications », thèse de doctorat en électronique, Université Mentouri de Constantine, 2011.
- [8] : H. DIMASSI, « Synchronisation des systèmes chaotiques par observateurs et applications à la transmission d'informations », thèse de Doctorat, Université Paris Sud XI – Université Tunis El-Manar, ECOLES DOCTORALES : STITS (France) – STI ENIT (Tunisie), 2012.
- [9] : C. MOREL, « Analyse et contrôle de dynamiques chaotiques, application à des circuits électroniques non-linéaires. », Thèse de doctorat, l'Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur (ISTIA) de l'Université d'Angers, 2005.
- [10] : A. BOUKABOU, « Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches », thèse de Doctorat, Université de Constantine, 2006.
- [11] :[http://www.12manage.com/methods\\_lorenz\\_chaos\\_theory\\_fr.html#summary](http://www.12manage.com/methods_lorenz_chaos_theory_fr.html#summary), Consultation le 09/04/2016.
- [12] : A. AIT HAMMI, « étude et réalisation d'un système chaotique basé sur le circuit de Chua », thèse de master professionnel, Université Mouloud Maameri Tizi-Ouzou, 2014.
- [13] : A.R. KIHAL, «Systèmes chaotiques pour la transmission sécurisée de données », Thèse de Magister en électronique, Université de Biskra, 2013.



[14] : I. BELGASMI, « Simulation et démonstration expérimentale de génération d'une dynamique chaotique : application au Circuit de Chua » Thèse de Master, Université de Brouira, 2014.

[15] : O. MAGHERBI, « Etude et réalisation d'un système sécurisée à base de systèmes chaotiques », Mémoire de magister, université de mouloud maameri tizi-ouzou, 2013.

[16] : A. BOUKABOU, « Méthodes de contrôle des systèmes chaotiques d'ordre élevé et leur application pour la synchronisation : Contribution à l'élaboration de nouvelles approches. », thèse de doctorat, Université de Constantine, 2006.

[17] : C. AISSI & D. KAZAKOS « An Improved Realization Of The Chua's Circuit Using RC-OP Amps », College of Engineering, University of Louisiana at Lafayette, USA College of Engineering, University of Toledo.

[18]: [http://en.wikipedia.org/wiki/Chua's\\_diode](http://en.wikipedia.org/wiki/Chua's_diode).

[19] : H. HAMICHE. «Inversion à Gauche des systèmes Dynamiques Hybrides Chaotiques, Application à la transmission Sécurisée de Données». These de Doctorat, Université Mouloud Mammeri de Tizi-Ouzou, 2011.

[20]: G. GANDHI, « Electronic Realizations of Chaotic Circuits: From Breadboard to Nanotechnology », A dissertation submitted for the degree of Doctor of Philosophy Faculty of Information Technology Péter Pàzmány Catholic University Budapest, 2008.

**ANNEXE : Les programmes de résolution des équations sous MATLAB Blank M-file :**

- Le programme de la méthode d'EULER :

```
alpha=15.6; betta=28; m0=-1.143; m1=-0.714;%paramètres du circuit.
t(1)=0; x(1)=0.7; y(1)=0; z(1)=0;%valeurs initiales.
h=10^(-3);%pas d'échantillonnage.
f=inline ('-0.714*x-0.2145*(abs(x+1)-abs(x-1))','x');%fonction non
linéaire.
%Résolution du système d'équations par la méthode d'Euler:
for i=1:100000 %nombre d'itérations
    i%compteur de simulation.
    t(i+1)=t(i)+h;
    x(i+1)=x(i)+h*alpha*(y(i)-x(i)-f(x(i)));
    y(i+1)=y(i)+h*(x(i)-y(i)+z(i));
    z(i+1)=z(i)+h*(-betta*y(i));
end
figure(1);plot3(x,y,z);xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');grid
figure(2);plot(t,x);hold on; plot(t,y,'r');hold on;
plot(t,z,'g');grid
figure(3);plot(x,y);xlabel('x');ylabel('y');grid
figure(4);plot(x,z);xlabel('x');ylabel('z');grid
figure(5);plot(y,z);xlabel('y');ylabel('z');grid
```

- Le programme de la méthode de Runge-Kutta 4 :

```
alpha=15.6;betta=28; m0=-1.143; m1=-0.714;%paramètres du circuit.
t(1)=0; x(1)=0.7; y(1)=0; z(1)=0;%valeurs initiales.
h=10^(-5/2);%pas d'échantillonnage..
f=inline('-0.714*x-0.2145*(abs(x+1)-abs(x-1))','x');%fonction non
linéaire.
%résolution du système par la méthode de Runge-Kutta.
for i=1:50000 %nombre d'itérations
    i%compteur de simulation.
    t(i+1)=t(i)+h;
    k11=alpha*(y(i)-x(i)-f(x(i)));
    k12=x(i)-y(i)+z(i);
    k13=-betta*y(i);

    k21=alpha*((y(i)+h*k12/2)-(x(i)+h*k11/2)-(f(x(i)+h*k11/2)));
    k22=(x(i)+h*k11/2)-(y(i)+h*k12/2)+(z(i)+h*k13/2);
    k23=-betta*(y(i)+h*k12/2);

    k31=alpha*((y(i)+h*k22/2)-(x(i)+h*k21/2)-(f(x(i)+h*k21/2)));
    k32=(x(i)+h*k21/2)-(y(i)+h*k22/2)+(z(i)+h*k23/2);
    k33=-betta*(y(i)+h*k22/2);

    k41=alpha*((y(i)+h*k32)-(x(i)+h*k31)-(f(x(i)+h*k31)));
    k42=(x(i)+h*k31)-(y(i)+h*k32)+(z(i)+h*k33);
    k43=-betta*(y(i)+h*k32);
```

---

```
x(i+1)=x(i)+h*(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;
y(i+1)=y(i)+h*(k12+2*k22+2*k32+k42)/6;
z(i+1)=z(i)+h*(k13+2*k23+2*k33+k43)/6;
end
figure(1);plot3(x,y,z);xlabel('x');ylabel('y');zlabel('z');grid
figure(2);plot(t,x);hold on; plot(t,y,'r');hold on;
plot(t,z,'g');grid
figure(3);plot(x,y);xlabel('x');ylabel('y');grid
figure(4);plot(x,z);xlabel('x');ylabel('z');grid
figure(5);plot(y,z);xlabel('y');ylabel('z');grid
```