

*République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la recherche Scientifique*



*Université de Bouira  
Faculté des sciences et  
Des sciences appliquées  
Département de génie électrique*



## *Mémoire de fin d'Etudes*



*En vue de l'obtention du diplôme de master en électrotechnique  
Option: Conversion et Gestion d'Energie  
Electromécanique et système de commande*

### *Thème*

*Commande adaptative à modèle de  
référence d'ordre fractionnaire de  
systèmes linéaires*

**Proposé et dirigé par :**

Dr: Yassine BENSAFIA

**Réalisé par :**

REZGUI Ahlem  
HAMERLAINE Ratiba

**Membres de jury:**

**President de jury: Mr. issaouni salim**

**Examineur 1: Mr. chalbi**

**Examineur 2: Mr. Lajouzi**

**Encadreur: Mr. BENSAFIA Yassine**

## **Remerciement...**

*Nous remercions Allah tout puissant qui nous a donné la force et la volonté  
pour pouvoir finir ce mémoire de fin d'étude*

*Nous tenons à remercier vivement et très respectueusement notre promoteur  
de mémoire, **docteur Yassine BENSAFIA** pour le choix du sujet, d'avoir  
dirigé ce travail avec professionnalisme, pour tous ces conseils précieux et sa  
critique constructive qui ont été très positifs.*

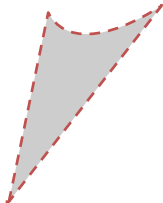
*Nous exprimons notre gratitude envers Mrs les membres de jury de*

*Nous avoir fait l'honneur d'accepter d'examiner notre travail*

*Enfin nous ne pourrions terminer ces remerciement sans une pensée à  
l'ensemble des notre enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir et en  
particulier mes enseignants à l'université de Bouira*

*Que toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin, directement ou  
indirectement à ce travail, trouvent ici le témoignage de ma profonde  
reconnaissance. Sans oublier tout le personnel du département*

*Toute la promotion d'électrotechnique 2016.*





# Dédicace

*Je dédie ce modeste mémoire :*

*A ceux qui m'ont donné le sens de la vie ;*

*Ma très très chère mère, ma fierté et mon bonheur, mon Père*

*A mon marie qui nas pas cessé de m'encourager tout au long de ce travail pour  
que j'arrive à ce jour là. Il est les très chers à mon cœur,*

*A mes très chères frères et sœurs : Dahbia, Hafid, Nacira, Keltoum,  
Samiha, Nourddine, Fouad.*

*A mon beau frère Rabeh et sa femme Nora. A mes belles sœurs surtout  
Fatma et Zahira*

*A toute ma famille. A*

*Ahlem , Oussama, Anis , Asma, Soufiane, Chourouk, Akram, Samah, Issa  
m, Rayane, Soundous, Mouhamed, Anfel, Illina, Salahddine, Hadjer, Abd  
Elfattah, et Meriem.*

*Je ne peux jamais oublier Mr A. Fateh*

*A tous mes amis en particulier Samir, Mahmoud et Nadia*

*Et toute la promo surtout mon binôme Ahlem.*

*ET a tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce  
travail.*

*H. Ratiba*





# Dédicace

*Je tiens à dédier ce modeste travail avant tout :*

*A mon très cher père,*

*A ma très chère mère, ma fierté et mon bonheur.*

*A mes très chers frères et mes sœurs.*

*A tout la famille.*

*A tous mes amis et mes collègues de promos*

*ET a tous ceux qui m'ont aidé de près ou de loin à accomplir ce travail.*

*R. Ahlem*



# Sommaire

NOTATION :

Remerciement

Dédicaces

Table de matière

Table de figures

INTRODUCTION GENERALE.....1

## **Chapitre I : Les Systèmes d'ordre fractionnaire**

I.1. Introduction .....3

I.1.1. Historique.....3

I.1.2. La modélisation d'ordre fractionnaire .....4

I.1.3. Commande d'ordre fractionnaire.....5

I.2. Domaines d'application des systèmes fractionnaires.....5

I.3. Opérateurs d'ordre fractionnaire.....6

I.4.1. Définitions fondamentales .....6

I.4.1.1. Définition de Riemann-Liouville.....6

I.4.1.2. Définition de Gründwald-Leitnikov.....7

I.4.1.3. Définition de Caputo.....8

I.4.2. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.....8

I.5. Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire.....8

I.5.1. Eléments de base de la Transformée de Laplace .....8

I.5.2. Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire.....9

I.5.3. Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire .....10

I.6. Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire.....11

I.6.1. Méthodes Fréquentielles.....11

---

I.6.1.1. Approximation utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation.....	11
I.6.1.1.1. Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégr-différentiels d'ordre fractionnaire .....	12
I.6.1.1.2. Méthode de Carlson.....	12
I.6.1.1.3. Méthode de Matsuda.....	13
I.6.1.2.Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification.....	13
I.6.1.2.1 La méthode d'Oustaloup .....	13
I.6.1.2.2 Méthode de Charef .....	14
I.6.2. Méthodes Numériques .....	16
I.6.2.1. Méthode directe de discrétisation.....	17
I.6.2.1.1. Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière.....	17
I.6.2.1.2. Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue.....	18
I.6.2.2. Méthode indirecte de discrétisation.....	18
I.6.2.2.1.Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui .....	19
I.6.2.2.2. Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui.....	19
I.7. Conclusion .....	20
<b>Chapitre II : Commande Adaptative à Modèle de Référence</b>	
II.1. Introduction.....	21
II.2.Régulateurs adaptatifs déterministes.....	21
II.2.1. Modèle du processus.....	22
II.2.2. Poursuite du modèle.....	23

---

II.2.3. Conditions de causalité.....	24
II.3. Commande adaptative à modèle de référence.....	25
II.3.1.Principe .....	25
II.3.2. Loi de M.I.T.....	26
II.3.3.1. Structure du Régulateur .....	28
II.3.3.2. L'erreur de modèle.....	29
II.4. Exemples de simulation.....	30
II.4.1. Résultats pour un système du 1 <sup>er</sup> ordre.....	30
II.4.1. Résultats pour un système du 2 <sup>nd</sup> ordre.....	30
II.5. Conclusion.....	32
<b>Chapitre III : Simulations et Application à un MC</b>	
III.1. Introduction.....	33
III.2. Exemples de simulation.....	33
III.2.1. Cas entier.....	33
III.2.1.1. Exemple de premier ordre .....	33
III.2.1.2. Exemple de second ordre .....	35
III.2.2. Cas fractionnaire.....	38
III.2.2.1. Exemple de Simulation.....	38
III.3. Application à un MCC.....	40

---



III.3.1. Introduction.....	40
III.3.2. Description du moteur à courant continu .....	41
III.3.2.1. Définition.....	41
III.3.2.2. Le principe de fonctionnement.....	42
III.3.2.3. Modalisation du moteur à courant contenu.....	42
III.3.3. Simulations réalisées sur Matlab.....	44
III.3.3.1. Cas du modèle d'ordre entier.....	44
III.3.3.2. Cas du modèle d'ordre fractionnaire.. ..	46
II.4. Conclusion.....	48
CONCLISION GENERALE.....	49
ANNEXE	
BIBLIOGRAPHIE	

---

**Chapitre II**

**Figure (II.1) :** Un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté.....22

**Figure (II.2) :** Commande adaptative directe à modèle de référence.....26

**Figure (II.3) :** Algorithme classique d'Adaptation.....27

**Figure (II.4) :** Réponse du CAMR pour un système de 1<sup>er</sup> ordre.....31

**Figure (II.5) :** Réponse du CAMR pour un système de 2<sup>nd</sup> ordre.....31

**Chapitre III**

**Figure. III.1 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre entier.....34

**Figure. III.2 :** l'erreur d'ordre entier.....34

**Figure. III.3 :** signal de commande d'ordre entier.....35

**Figure. III.4 :** paramètre d'estimation.....35

**Figure. III.5 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre entier.....37

**Figure. III.6 :** l'erreur d'ordre entier.....37

**Figure. III.7 :** signal de commande d'ordre entier.....38

**Figure. III.8 :** paramètre d'estimation.....38

**Figure. III.9 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre fractionnaire  
.....40

**Figure. III.10 :** l'erreur d'ordre fractionnaire.....40

**Figure. III.11 :** Entrée de commande d'ordre fractionnaire.....41

**Figure. III.12 :** paramètre d'estimation.....41

**Figure. III.13 :** Différents types de moteurs MCC.....42

**Figure. III.14 :** Schéma de principe du moteur à courant continu.....43

**Figure. III.15 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre entier  
d'un MCC.....45

**Figure. III.16 :** l'erreur d'ordre entier.....46

**Figure. III.17 :** signal de commande d'ordre entier.....46

**Figure. III.18 :** paramètre d'estimation.....47

<b>Figure. III.19</b> : Sortie de modèle de référence $y_m$ et Sortie du système $y$ d'ordre fractionnaire d'un MCC.....	48
<b>Figure. III.20</b> : L'erreur dans le cas d'ordre entier.....	48
<b>Figure. III.21</b> : Signal de commande d'ordre fractionnaire.....	49
<b>Figure. III.22</b> : Paramètre Estimé.....	49

# Intruduction Générale

## **Introduction Générale**

Le monde industriel connaît actuellement un énorme développement technologique, sous l'effet de la concurrence et des besoins de plus en plus exigeants du point de vue qualité et performances. Ce progrès technologique et industriel est dû pour beaucoup au grand saut qualitatif qu'a connu l'outil informatique logiciel et matériel, notamment depuis l'apparition des microprocesseurs, ce qui a permis de rendre possible l'application de méthodes et de techniques considérées jusqu'à présent comme purement théoriques. Cela est dû aussi au développement qu'a connu la recherche fondamentale dans divers domaines tels que ceux de l'analyse numérique et de la théorie des systèmes. Tout ceci a permis de mettre en œuvre des méthodes et des approches très complexes pour l'identification et la commande des systèmes.

L'une des techniques de commande qui a connu une grande notoriété, est la commande adaptative, qui comme son nom l'indique, consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du procédé régulé pour assurer une qualité constante de performances. Les processus commandés sont totalement inconnus (systèmes boîtes noires) ou partiellement inconnus, ou des systèmes dont les paramètres varient dans le temps.

Un travail de recherche considérable sur la commande adaptative à été effectué depuis le début des années 1950. La première motivation fut la commande des avions de haute performance. Durant les vingt années suivantes, d'importance contribution théorique ont vu le jour [11].

Il existe deux types de techniques adaptatives à mettre en œuvre qui sont largement utilisées en pratique. L'une s'appelle la commande adaptative directe à modèle de référence (MRAC), la seconde concerne la commande adaptative indirecte avec identification du modèle (MIAC).

Dans ce mémoire, nous allons appliquer la commande adaptative directe à modèle de référence (CAMR) d'ordre entier et d'ordre fractionnaire sur quelques systèmes connus (premier et deuxième ordre) ainsi que le moteur à courant continu. La stratégie CAMR spécifie la forme désirée de la réponse du processus à un signal de commande par l'intermédiaire d'un modèle de référence définissant de manière paramétrique les

performances souhaitées en boucle fermée. Ensuite, un mécanisme d'adaptation élabore, à partir de la sortie du processus et de la sortie du modèle, un jeu de paramètres conçu de telle sorte que la différence entre ces deux sorties tende vers zéro.

Ce mémoire est organisé en trois chapitres :

- Le premier chapitre présente une base théorique du calcul fractionnaire ainsi que les méthodes d'approximation des systèmes d'ordre fractionnaire.
- Le deuxième chapitre est dédié à la commande adaptative à modèle de référence.
- Le chapitre 3 présente des exemples de simulation de la commande Adaptative à Modèle de Référence d'ordre fractionnaire sur les systèmes du premier et deuxième ordre ainsi que l'application de cette dernière approche sur le moteur à courant continu.
- Enfin, une conclusion générale vient récapituler les résultats obtenus dans ce mémoire et donner un aperçu sur les perspectives projetées pour la continuation de ce travail.

# Chapitre I: Les systèmes d'ordre Fractionnaire

# Chapitre I

## Les Systèmes d'ordre Fractionnaire

### I.1 Introduction :

Les systèmes d'ordre fractionnaire ont reçu un intérêt considérable dans de nombreux domaines des sciences appliquées et de l'ingénierie. Ces systèmes sont généralement décrits par des équations différentielles d'ordre fractionnaire. Dans le domaine fréquentiel, ils sont représentés par des fonctions de transfert irrationnelles. A cause de ces fonctions irrationnelles, les systèmes d'ordre fractionnaire ont été marginalement étudiés. Comme ils n'ont pas de solutions analytiques exactes, les techniques numériques et d'approximation sont largement utilisées pour leur résolution, analyse et implémentation.

Dans ce chapitre, nous allons donner des définitions du calcul fractionnaire et des opérateurs d'ordre fractionnaires, quelques propriétés principales et aussi la transformée de Laplace des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire. Nous allons en particulier présenter quelques méthodes d'approximation des opérateurs et transferts d'ordre fractionnaire

#### I.1.1 Historique :

Le calcul d'ordre fractionnaire est le domaine des mathématiques qui traite l'étude et l'application des intégrales et dérivées d'ordre arbitraire. Il est considéré comme un ancien concept. Les graines du calcul d'ordre fractionnaire ont été plantées il y a 300 années. De nombreux mathématiciens comme, N.H. Abel, M. Caputo, L. Euler, J. Fourier, A.K. Grünwald, J. Hadamard, G.H. Hardy, O. Heaviside, H. J. Holmgren, P.S. Laplace, G.W. Leibniz, A.V. Letnikov, J. Liouville, B. Riemann, M. Riesz et H. Weyl ont contribué à ce développement jusqu'à la moitié du siècle passé [19]. Cependant, on peut considérer le calcul d'ordre fractionnaire comme un nouvel axe de recherche, puisque ce n'est que depuis un peu plus d'une trentaine d'années qu'il fait l'objet de beaucoup de travaux. Le premier livre dédié au calcul d'ordre fractionnaire a été publié en 1974, il revient à K.B. Oldham et J. Spanier [4], après un travail de collaboration entamé en 1968. Sur le plan mathématique, il faut citer l'ouvrage russe de Samko, Kilbas et Marichev [42] paru en 1993, qui



regroupe un ensemble de définitions et de théories importantes sur le calcul d'ordre fractionnaire. Aujourd'hui, l'intérêt du calcul d'ordre fractionnaire et ces applications ne cesse de grandir, dans plusieurs domaines. A partir de 2004, un workshop, qui se déroule tous les deux ans, spécialement dédié au calcul d'ordre fractionnaire et ses applications, a été créé.

### **I.1.2. La modélisation d'ordre fractionnaire :**

La représentation mathématique des systèmes fractionnaires dans le domaine fréquentiel donne des fonctions irrationnelles qui, dans le domaine temporel, correspondent à des équations différentielles difficiles à exploiter. Vu l'absence de méthodes mathématiques, les systèmes dynamiques d'ordre fractionnaire étaient jusque là étudiés de façon marginale seulement, que ce soit en théorie ou en application. Pour des raisons d'analyse, de synthèse, et de simulation de tels systèmes, l'utilisation des fonctions rationnelles pour l'approximation s'avère d'une grande importance. Alors pour analyser et concevoir les systèmes de commande d'ordre fractionnaire il faut les approximer par des fonctions rationnelles.

La modélisation d'ordre fractionnaire consiste à décrire les phénomènes physiques associés à des dispositifs dont le comportement peut être régi par des équations aux dérivées partielles. Le calcul infinitésimal (différentiel et intégral) d'ordre fractionnaire marque son début au XVIIème siècle, après quelques travaux de Gottfried Wilhelm Leibniz (1697) et Leonhard Euler (1730). Cent ans plus tard il recommence à être étudié par un grand nombre de mathématiciens célèbres comme P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), H. Holmgren (1865-67), A. K. Grünwald (1867-1872) ou A.V. Letnikov (1868-1872) [17]. Bien qu'il ne soit pas nouveau, le calcul infinitésimal d'ordre fractionnaire est redevenu un sujet d'étude dans la deuxième moitié du XXème siècle. Le formalisme mathématique de la dérivation non entière associé au développement des outils informatiques a permis d'envisager des applications dans le domaine des sciences de l'ingénieur du FOD (Fractional Order Differential).

Aujourd'hui, l'approche fractionnaire est ainsi appliquée pour la modélisation des dispositifs électriques [7, 8, 9,33, 42], pour la modélisation des conséquences des désastres naturel [39] ou pour la synthèse de la commande [26, 36, 38]. La modélisation d'ordre fractionnaire est aussi présente dans le domaine des sciences biologiques (les modèles des parties du corps humain) [14] ou même des sciences humaines et sociales (la modélisation des comportements des marchés) [25].

### I.1.3. Commande d'ordre fractionnaire :

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [37]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Il a été remarqué qu'un tel phénomène physique est robuste au sens de l'automaticien. En effet, une observation attentive de la relaxation montre que son amortissement est indépendant de la nature de la digue, fluvial ou côtière, donc d'un certain nombre de paramètres, entre autre la masse d'eau en mouvement. Ce résultat est aussi remarquable que paradoxale dans l'approche entière de la mécanique où toute relaxation présente un amortissement lié à la masse transportée.

Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1993, Podlubny [40] a proposé le régulateur  $PI^\alpha D^\beta$  comprenant une intégration fractionnaire d'ordre  $\alpha$  et une dérivation fractionnaire d'ordre  $\beta$ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande. La commande adaptative d'ordre fractionnaire a connu ses premières publications au début des années 2000, avec les travaux de Ladaci et Charef [28-27]. Depuis, plusieurs dizaines de travaux sur les approches de commande adaptative d'ordre fractionnaire sont publiés annuellement [29].

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suivent, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

### I.2. Domaines d'application des systèmes fractionnaires:

Les applications de la théorie du calcul fractionnaire aussi bien dans les sciences fondamentales qu'en ingénierie sont très diverses [18, 20].

Les systèmes d'ordre fractionnaires sont tout particulièrement intéressants pour représenter finement et avec un ordre réduit les dispositifs dont le fonctionnement repose sur la diffusion d'une grandeur (champ, température, etc.). Ils apparaissent de plus en plus fréquemment dans les différents domaines de recherches tel que : Electronique, Electrotechnique, Chimie, Automatique, Mécanique.....etc.

### I.3. Opérateurs d'ordre fractionnaire :

Le calcul d'ordre fractionnaire (intégration et différentiation d'ordre fractionnaire) est un vieux concept qui date de l'époque de Cauchy, Riemann Liouville et Leitnikov au 19<sup>ème</sup> siècle. Il a été utilisé en mécanique depuis les années 1930 et en électrochimie depuis les années 1960. Dans le domaine de la commande, des travaux intéressants ont été réalisés par I.A. Brin [8], et plus tard plusieurs mathématiciens et physiciens ont étudié les opérateurs différentiels et les systèmes d'ordre fractionnaire [15].

L'opérateur intégral-différentiel  ${}_c D_t^m$  ou  $m$  et  $t$  sont les limites de l'opération est défini ainsi:

$${}_c D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} \dots \dots \dots \Re(\alpha) > 0, \\ 1 \dots \dots \dots \Re(\alpha) = 0, \\ \int_c^t (d\tau)^{-m} \dots \dots \dots \Re(\alpha) < 0, \end{cases} \quad (I.1)$$

Où  $m$  et  $l'$  ordre l'opération. généralement  $m \in R$

#### I.4.1 Définitions fondamentales :

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions [40].

##### I.4.1.1 Définition de Riemann-Liouville :

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

**Définition 1** Soient  $C$  et  $\Re$  les anneaux des nombres complexes et réels respectivement,

$\Re(.)$  Symbolise la partie réelle d'un nombre complexe.

Soient  $\lambda \in C$  avec  $\Re(\lambda) > 0$ ,  $t_0 \in \Re$  et  $f$  une fonction localement intégrable définie sur

$[t_0, +\infty[$ .

L'intégrale d'ordre  $\lambda$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$  est définie par :

$$I_{t_0}^\lambda f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_{t_0}^t (t - \xi)^{\lambda-1} f(\xi) d(\xi) \quad (I.2)$$

Avec  $t \geq t_0$  et  $\Gamma(.)$  la fonction gamma d'Euler définie par :  $\Gamma(x) = \int_{t_0}^t y^{x-1} e^{-y} dy, x > 0$ .

**Définition 2** Soient  $\mu \in C$  avec  $\Re(\mu) > 0$ ,  $n$  un entier positif,  $t_0 \in \Re$  et  $f$  une fonction

Localement intégrable définie sur  $[t_0, +\infty[$ . La dérivée d'ordre  $\mu$  de  $f$  de borne inférieure  $t_0$

Est définie par:

$$D_{t_0}^\mu f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\mu)} \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-\mu-1} f(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où le nombre entier  $n$  est tel que  $(n-1) < \mu < n$ .

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I.2) comme

Suit:

$$D_{t_0}^{\mu} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \left\{ I_{t_0}^{(n-\mu)} f(t) \right\} \quad (I.4)$$

Remarque: pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite  $I^{\lambda}$  pour  $I_{t_0}^{\lambda}$  et  $D^{\mu}$  pour  $D_{t_0}^{\mu}$ .

#### I.4.1.2 Définition de Grünwald-Leitnikov :

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre  $\mu > 0$  de G-L est donnée par:

$$D_{t_0}^{\mu} f(t) = \frac{d^{\mu}}{dt^{\mu}} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-\mu} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{\mu}{j} f(kh - jh) \quad (I.5)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients

$$\omega_j^{(\mu)} = \binom{\mu}{j} = \frac{\Gamma(\mu + 1)}{\Gamma(j + 1)\Gamma(\mu - j + 1)}$$

Avec  $\omega_0^{(\mu)} = \binom{\mu}{0} = 1$ , sont les coefficients du binôme suivant :

$$(1 - Z)^{\mu} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{\mu}{j} Z^j = \sum_{j=0}^{\infty} \omega_j^{(\mu)} Z^j$$

La définition de Grünwald-Leitnikov de l'intégrale d'ordre fractionnaire est formulée

Comme suit :

$$I_{t_0}^{\lambda} f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{\lambda} \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} f(kh - jh) \quad (I.6)$$

Où  $h$  est la période d'échantillonnage et les coefficients  $\omega_j^{(-\lambda)}$  avec  $\omega_j^{(-\lambda)} \binom{-\lambda}{j} = 1$ , sont les

Coefficients du binôme suivant :

$$(1 - Z)^{-\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \binom{-\lambda}{j} Z^j = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \omega_j^{(-\lambda)} Z^j \quad (I.7)$$

**I.4.1.3 Définition de Caputo :**

A la fin des années 60, dans le cadre de ses travaux sur la dissipation dans un matériau viscoélastique linéaire, Caputo a introduit une autre définition de la dérivation d'ordre fractionnaire.

L'expression mathématique de cette définition est :  ${}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(r-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{r-\alpha-1} f^{(r)}(\tau) d\tau$

Avec  $r$  est un entier positif vérifiant l'inégalité  $(r-1) < \alpha < r$ .

$f^{(r)}(\tau)$ , étant la dérivée d'ordre entier  $r$ , par rapport à  $\tau$ , de la fonction  $f(\tau)$ .  ${}_{t_0}^c D_t^\alpha f(t)$ , désigne la dérivée d'ordre fractionnaire  $\alpha$  de la fonction  $f(t)$  entre  $t_0$  et  $t$  selon la définition de Caputo.

**I.4.2. Propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire :**

Les principales propriétés des dérivées et intégrales d'ordre fractionnaire sont les suivantes :

1. si  $f(z)$  est une fonction analytique de  $z$ , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire  $D^\alpha f(z)$  est

Une fonction analytique de  $z$  et  $\alpha$ .

2. pour  $\alpha = n$ , ou  $n$  est un entier, l'opération  $D^\alpha f(z)$  donne le même résultat que la Différentiation classique d'ordre entier  $n$ .

3. pour  $\alpha = 0$  l'opération  $D^\alpha f(z)$  est l'opérateur identité:  $D^\alpha f(z) = f(z)$ .

4. la différentiation et l'intégration d'ordre fractionnaire sont des opérations linéaires

$$D^\alpha a f(z) + D^\alpha b g(z) = a D^\alpha f(z) + b D^\alpha g(z)$$

5. la loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^\beta D^\alpha f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z)$$

Est valable sous certaines contraintes sur la fonction  $f(z)$ .

**I.5 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire:****I.5.1 Eléments de base de la Transformée de Laplace :**

La fonction  $F(s)$  de la variable complexe  $s$  définie par,

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t); s\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (I.8)$$

Appelée la transformée de Laplace de la fonction  $f(t)$ , qui s'appellera l'originale. Pour l'existence de l'intégrale (I.8) la fonction  $f(t)$  doit être d'ordre exponentiel  $\alpha$ , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives  $M$  et  $T$  telles que :

$$e^{-\alpha t}|f(t)| \leq M \text{ pour tous } t > T.$$

La fonction originale  $f(t)$  peut être retrouvée à partir de la transformée de Laplace  $F(s)$  avec la transformée inverse de Laplace :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s); t\} = \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \Re(s) > c_0, \quad (\text{I.9})$$

Où  $c_0$  se trouve dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (I.8).

L'évaluation directe de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (I.8) est souvent compliquée ; mais elle peut fournir des informations utiles sur le comportement de l'originale inconnue  $f(t)$  qu'on veut trouver.

La transformée de Laplace de la convolution

$$f(t) * h(t) = \int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad (\text{I.10})$$

des deux fonctions  $f(t)$  et  $h(t)$ , qui sont nulles pour  $t < 0$ , est égale au produit de la transformée de Laplace des deux fonctions :

$$\mathcal{L}\{f(t) * h(t); s\} = F(s)H(s) \quad (\text{I.11})$$

Sous l'hypothèse que  $F(s)$  et  $H(s)$  existent. On utilisera la propriété (I.11) pour l'évaluation de la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville.

Une autre propriété très utile dont nous aurons besoin est la formule de la transformée de Laplace de la dérivée d'un ordre entier  $n$  de la fonction  $f(t)$  :

$$\mathcal{L}\{f^n(t); s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0) \quad (\text{I.12})$$

Dans la partie suivante nous considérons la limite inférieure  $a = 0$ .

### I.5.2 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire :

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

de Riemann-Liouville d'ordre  $\lambda > 0$  défini par (I.2), qu'on peut écrire comme une convolution

Des fonctions  $g(t) = t^{\lambda-1} et f(t):$

$$I^\lambda f(t) = D^{-\lambda} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^t (t-\tau)^{\lambda-1} f(\tau) d\tau = t^{\lambda-1} * f \quad (\text{I.13})$$

La transformée de Laplace de la fonction  $t^{\lambda-1}$  est :

$$G(s) = \mathcal{L}\{t^{\lambda-1}; s\} = \Gamma(\lambda)s^{-\lambda} \quad (\text{I.14})$$

En utilisant la formule de la transformée de Laplace de la convolution (I.14) on obtient

$$\mathcal{L}\{I^\lambda f(t)\} = s^{-\lambda}F(s) \quad (\text{I.15})$$

### I.5.3 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire :

Nous citons dans ce qui *suit* la transformée de Laplace des différentes définitions de la Dérivée.

#### - Dérivée de Riemann-Liouville :

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D^{\mu-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.16})$$

Avec  $n - 1 < \mu < n$ . Cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville

Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de

L'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour  $t = 0$ .

#### - Dérivée de Caputo :

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\mu-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.17})$$

Avec  $n - 1 \leq \mu < n$ .

Il faut mentionner ici que d'un point de vue mathématique pur, il y a différentes manières d'interpoler entre les intégrales et dérivées multiples d'ordre entier. La plus connue et la plus étudiée est la définition de Riemann-Liouville des dérivées d'ordre fractionnaire. L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles Faciles à interpréter telles que  $y(0) = y_0, \dot{y}(0) = y_1, \text{etc.}$  De plus, la dérivée de Caputo d'une constante est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à  $t = 0$ . La seule exception est quand on prend  $t = -\infty$  comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à  $-\infty$ ; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

- Dérivée de Gründwald-Leitnikov :

$$\mathcal{L}\{D^\mu f(t)\} = s^\mu F(s) \quad (\text{I.18})$$

**Remarque :**

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

## I.6 Approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire :

Dans la suite nous allons présenter quelque méthodes d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire qui peuvent être divisées en deux catégories (fréquentielles et numériques) [13], avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière [12] qui sera entièrement détaillée dans ce chapitre.

### I.6.1 Méthodes Fréquentielles :

**I.6.1.1 Approximations utilisant l'expansion des fractions continues et les techniques d'interpolation :**

L'expansion des fractions continues [31, 35] est une méthode d'évaluation des fonctions qui converge souvent beaucoup plus rapidement que le développement en série de puissances, et converge dans un domaine plus large du plan complexe. Le résultat de cette approximation pour une fonction irrationnelle  $G(s)$ , peut être exprimé sous la forme

$$G(s) \cong a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + \frac{b_2(S)}{a_2(S) + \frac{b_3(S)}{a_3 + \dots}}} \quad (\text{I.19})$$

$$G(S) = a_0(S) + \frac{b_1(S)}{a_1(S) + \frac{b_2(S)}{a_2(S) + \frac{b_3(S)}{a_3(S) + \dots}}} \quad (\text{I.20})$$

Où  $a_i(S)$  et  $b_i(S)$  sont des fonctions rationnelles de la variable  $S$  ou des constantes. L'application de cette méthode résulte en une fonction rationnelle  $\hat{G}(S)$ , qui est une approximation de la fonction irrationnelle  $G(S)$ .

D'autre part, pour l'interpolation, les fonctions rationnelles sont parfois supérieures aux polynômes, car elles permettent de modéliser les fonctions par des pôles. Ces techniques sont



basées sur l'approximation d'une fonction irrationnelle  $G(S)$  par une fonction rationnelle définie par le quotient de deux polynômes de la variable  $S$  :

$$G(S) \cong R_{i(i+1)\dots(i+m)} = \frac{P_\mu(S)}{Q_\nu(S)} = \frac{p_0 + p_1 S + \dots + p_\mu S^\mu}{q_0 + q_1 S + \dots + q_\nu S^\nu} \quad (\text{I.21})$$

qui passe par les points  $(s_i, G(s_i)); \dots (s_{i+m}, G(s_{i+m}))$ .

Dans la suite nous présenterons quelques unes des méthodes les plus connues de ce type.

#### **I.6.1.1.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrro-différentiels d'ordre fractionnaire :**

En général, une approximation rationnelle de la fonction  $G(s) = s^\mu$  tel que  $0 < \mu < 1$  (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions : [28]

$$G_h(s) = \frac{1}{(1+s.T)^\mu} \quad (\text{I.22})$$

$$G_l(s) = \left(1 + \frac{1}{s}\right)^\mu \quad (\text{I.23})$$

Où  $G_h(s)$  est l'approximation pour les hautes fréquences ( $w_T \gg 1$ ), et  $G_l(s)$  l'approximation pour les basses fréquences ( $w_T \ll 1$ ).

#### **I.6.1.1.2 Méthode de Carlson :**

La méthode proposée par Carlson tirée du processus régulier de Newton utilisé pour l'approximation itérative de la racine d'ordre  $\alpha$ , peut être considérée comme appartenant à ce groupe . Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante :

$$(H(s))^{1/\mu} - G(s) = 0 \quad (\text{I.24})$$

$$H(s) = (G(s))^\mu \quad (\text{I.25})$$

En définissant  $q = \frac{1}{\mu}$  .  $m = \frac{q}{2}$  à chaque itération, partant de la valeur initiale  $H_0(s) = 1$ , une fonction rationnelle approximée peut être donnée par :

$$H_i(s) = H_{i-1}(s) \frac{(q-m)(H_{i-1}(s))^2 + (q+m)G(s)}{(q+m)(H_{i-1}(s))^2 + (q-m)G(s)} \quad (\text{I.26})$$

Le modèle d'approximation est obtenu ensuite, en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle par son approximation rationnelle.

### I.6.1.1.3 Méthode de Matsuda :

La méthode proposée par [34] est basée sur l'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire  $G(s) = s^\alpha$  par une fonction rationnelle  $\hat{G}(s)$  en identifiant le modèle d'approximation à partir de son gain. Le gain est calculé en utilisant  $M$  fréquences réparties dans une bande de fréquence  $[\omega_0, \omega_M]$  dans laquelle se fait l'approximation. Pour un ensemble de points sélectionnés  $\omega_i, i = 0, 1, 2 \dots M$ , l'approximation prend la forme :

$$\hat{G}(s) = a_0 + \frac{s-\omega_0}{a_1+s} \frac{s-\omega_1}{a_2+s} \frac{s-\omega_2}{a_3+s} \dots = \left[ a_0; \frac{s-\omega_{i-1}}{a_i} \right]_{i=1}^M \quad (I.27)$$

Où

$$a_i = f(\omega_i), f_0(\omega) = G(s), f_{i+1}(s) = \frac{s-\omega_i}{f_i(s)-a_i} \quad (I.28)$$

Le modèle d'approximation est obtenu en remplaçant chaque opérateur d'ordre fractionnaire de la fonction de transfert irrationnelle explicite par son approximation.

### I.6.1.2 Approximations utilisant l'ajustement de courbes ou les techniques d'identification :

En général toutes les méthodes d'identification dans le domaine fréquentiel peuvent être appliquées pour obtenir une fonction rationnelle, dont la réponse fréquentielle se rapproche de celle de la fonction irrationnelle originale. Par exemple cela peut être la minimisation de la fonction coût suivante :

$$J = \int W(s) |G(w) - \hat{G}(w)|^2 dw \quad (I.29)$$

Où  $W(s)$  est une fonction de pondération,  $G(w)$  la réponse fréquentielle originale, et  $\hat{G}(w)$  est la réponse fréquentielle de la fonction rationnelle approximée. Les deux approches les plus connues sont celles proposées par Oustaloup et Charef.

#### I.6.1.2.1 La méthode d'Oustaloup :

L'approximation d'Oustaloup d'un dérivateur généralisé, dont l'action différentielle couvre tout l'espace des fréquences, repose sur une distribution récursive d'une infinité de zéros et de pôles réels négatifs (afin d'assurer un comportement à phase minimale) [37]. Dans le cadre d'une synthèse réaliste (pratique) fondée sur un nombre fini de zéros et de pôles, il convient de réduire le comportement différentiel généralisé sur un intervalle fréquentiel borné, choisi selon les besoins de l'application [37].

Ainsi, l'approximation de l'opérateur  $s^\alpha, \alpha \in R^+$ , dans une bande de fréquence  $[\omega_0, \omega_M]$  est donnée par une fonction rationnelle :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1+s/z_k}{1+s/w'_k} \quad (I.30)$$

En utilisant l'ensemble des formules de synthèse suivantes :

$$w'_0 = \alpha^{0.5} \cdot w_u ; w_0 = \alpha^{0.5} w_u ; \frac{w'_{k+1}}{w'_k} = \frac{w_{k+1}}{w_k} = \alpha \cdot \eta > 1; \quad (I.31)$$

$$\frac{w_{k+1}}{w_k} = \eta > 1 ; \frac{w_k}{w'_k} = \alpha > 0 ; N = \frac{\log(w_N/w_0)}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \mu = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha \cdot \eta)} ; \quad (I.32)$$

$w_u$  étant le gain fréquentiel unité et la fréquence centrale d'une bande de fréquences distribuées géométriquement autour. Soit,  $w_u = \sqrt{w_h \cdot w_b}$   $w_h$  et  $w_b$  sont la haute et basse fréquence respectivement.

### I.6.1.2.2 Méthode de Charef : Fonction de singularité

Dans le but d'implémenter des modèles d'ordre fractionnaire dans les schémas de commande présentés dans ce travail, nous utiliserons la méthode appelée "Méthode de la fonction de singularité" développée par Charef et al. [12 ,10], qui est présentée dans cette section. La méthode d'approximation sera différente selon que le transfert d'ordre fractionnaire à approximer soit du premier ou du second ordre.

- **Système du premier ordre fractionnaire :**

Pour un système d'ordre fractionnaire du premier ordre :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \quad (I.33)$$

On peut réécrire la fonction (I.33) comme suit [10] :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z+i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (I.34)$$

où  $(N + 1)$  est le nombre total des singularités qui peut être déterminé par la bande de fréquences du système. L'équation (I.34) peut être tronquée à un nombre fini  $N$ , et l'approximation devient :

$$G(s) = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{P_T}\right)^\beta} \approx \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (I.35)$$

Les pôles et les zéros de la fonction de singularités peuvent être obtenus comme suit :

$$p_i = (ab)^i p_{0i} = 1, 2, 3, \dots, N \quad (I.36)$$

$$z_i = (ab)^i a z_{0i} = 1, 2, 3, \dots, N - 1 \quad (I.37)$$

avec,

$$p_0 = P_T 10^{\frac{\epsilon p}{20\beta}} \quad (I.38a)$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\beta)}} \quad (\text{I.38b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\beta}} \quad (\text{I.38c})$$

$$\beta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.38d})$$

$\epsilon p$  est l'erreur tolérée en dB .

Avec une pente de  $-20\beta$  dB/dec et son approximation par des lignes droites en zig-zig avec des pentes individuelles de  $-20$  dB/dec et  $0$  dB/dec .

- **Système du second ordre fractionnaire :**

Pour un système de second ordre décrit par l'équation (I.39):

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\xi\frac{s}{w_n} + 1\right)^\beta} \quad (\text{I.39})$$

avec  $\beta$  un nombre réel positif tel que  $0 < \beta < 1$  , on peut distinguer deux cas :

- **Cas où  $0 < \beta < 0.5$  :**

On peut exprimer la fonction (I.39) comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_n + 1}\right)^\eta}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)} \quad (\text{I.40})$$

avec  $\alpha = \xi^\beta$  et  $\eta = 1 - 2\beta$  , ce qui peut aussi être approximé par la fonction,

$$G_e(s) \approx \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{s}{Z_i}\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right) \prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{s}{P_i}\right)} \quad (\text{I.41})$$

Les singularités (pôles  $P_i$  et zéros  $Z_i$ ) sont données par les formules suivantes :

$$p_i = (ab)^{i-1} z_1 i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.42})$$

$$z_i = (ab)^{i-1} z_1 i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.43})$$

avec

$$Z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.44a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.44b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}} \quad (\text{I.44c})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.44d})$$

$\epsilon p$  est l'erreur tolérée en dB

L'ordre d'approximation  $N$  est calculé en fixant la bande de fréquences de travail, spécifiée par  $w_{max}$  telle que :  $P_{N-1} < w_{max} < P_N$ , ce qui mène à la valeur suivante :

$$N = \text{Partie entière de } \left[ \frac{\log\left(\frac{w_{max}}{P_1}\right)}{\log(ab)} + 1 \right] + 1 \quad (\text{I.45})$$

$G_e(s)$  peut alors être écrite sous la forme d'une fonction paramétrique d'ordre  $N + 2$  :

$$G_e(s) = \frac{b_{m_0}s^N + b_{m_1}s^{N-1} + \dots + b_{m_N}}{s^{N+2} + a_{m_1}s^{N+1} + \dots + a_{m_N}} \quad (\text{I.46})$$

Les coefficients  $a_{m_i}$  et  $b_{m_i}$  sont calculés à partir des singularités  $P_i$ ,  $Z_i$  ainsi que  $\alpha$  et  $w_n$ .

- Pour  $0.5 < \beta < 1$

La fonction d'approximation est donnée comme suit :

$$G_e(s) = \frac{\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)}{\left(\frac{s^2}{w_n^2} + 2\alpha\frac{s}{w_n} + 1\right)\left(\frac{s}{w_n} + 1\right)^\eta} \quad (\text{I.47})$$

Où  $\alpha = \xi^\beta$  et  $\eta = 1 - 2\beta$ , qui développée comme précédemment avec les valeurs singulières suivantes :

$$P_i = (ab)^{i-1} p_{1i} \quad i = 1, 2, 3, \dots, N \quad (\text{I.48})$$

$$Z_i = (ab)^{i-1} a p_{1i} \quad i = 2, 3, \dots, N - 1 \quad (\text{I.49})$$

$$\text{avec } Z_1 = w_n \sqrt{b} \quad (\text{I.50a})$$

$$a = 10^{\frac{\epsilon p}{10(1-\eta)}} \quad (\text{I.50b})$$

$$b = 10^{\frac{\epsilon p}{10\eta}} \quad (\text{I.50c})$$

$$\eta = \frac{\log(a)}{\log(ab)} \quad (\text{I.50d})$$

$\epsilon p$  est l'erreur tolérée en dB.

$G_e(s)$  peut alors être écrite sous la forme de la fonction paramétrique (I.32).

## I.6.2 Méthodes Numériques :

Le principe de ces méthodes consiste à approximer le modèle d'ordre fractionnaire par un modèle rationnel discret en substituant l'opérateur de Laplace  $s$  dans le modèle fractionnaire par son équivalent en temps discret. La discrétisation est une étape nécessaire lorsqu'on utilise des machines fonctionnant en discret pour commander ou simuler des modèles continus. Dans le cas des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques, il existe deux méthodes permettant d'obtenir l'équivalent discret de ces opérateurs analogiques [2].

### I.6.2.1 Méthode directe de discrétisation :

La première méthode est appelée méthode directe de discrétisation, car elle permet d'approximer directement l'intégrateur et le dérivateur d'ordre fractionnaire dans le domaine discret. Parmi les techniques de discrétisation existantes on peut citer les plus utilisées, la technique de l'expansion en série entière et la technique de l'expansion en fraction continue [16].

#### I.6.2.1.1 Discrétisation utilisant la technique de l'expansion de série entière :

La combinaison de la fonction génératrice d'Euler donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur  $s = \frac{1-z^{-1}}{T}$  et la technique de l'expansion de série entière (PSE) pour l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^m = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^m$ , mène à l'expression suivante [41]:

$$s^m \cong T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} z^{-k}$$

Cette équation est l'expression du dérivateur d'ordre fractionnaire de Grundwald-Leitnikov d'ordre  $m$ . Alors, la dérivée d'ordre fractionnaire  $m$  d'une fonction causale  $f(t)$  comme suit :

$$\frac{d^m f(t = nT)}{dt} = T^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{m}{k} f((n-k)T)$$

où  $T$  est la période d'échantillonnage. L'exécution de la PSE pour l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-m} = \left(\frac{1-z^{-1}}{T}\right)^{-m}$  mène aussi à la formule donnée par Lubich comme suit :

$$s^{-m} \cong T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} z^{-k}$$

Donc, l'intégration d'ordre fractionnaire  $m$  d'une fonction causale  $f(t)$  est :

$$I^m f(t = nT) = T^m \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{-m}{k} f((n-k)T)$$

Où  $I^m$  dénote l'opération d'intégration d'ordre fractionnaire  $m$ .

Une autre possibilité pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire analogiques avec la technique de l'expansion de série entière (PSE) est l'utilisation de la règle de Tustin (bilinéaire)  $s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$  comme une fonction génératrice.

### 1.6.2.1.2 Approximation discrète en utilisant l'intégration numérique et l'expansion de fraction continue :

La technique de l'expansion en fraction continue (CFE) qui approxime une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle a été aussi utilisée pour la discrétisation des opérateurs d'ordre fractionnaire. Cette technique d'approximation a été appliqué pour le dérivateur et l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^m$  et  $s^{-m}$  respectivement, lorsque la fonction génératrice de Tustin donnée par la règle de discrétisation de l'opérateur dérivateur  $s = \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$  est utilisé. Alors, l'expression suivante a été obtenue :

$$s^{\pm m} = \left( \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right)^{\pm m} \cong T^{\mp m} CFE \left[ \left( 2 \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}} \right)^{\pm m} \right] = T^{\mp m} \frac{P_p(Z^{-1})}{Q_q(Z^{-1})}$$

où T est la période d'échantillonnage, p et q sont les ordres de l'approximation des polynômes P et Q.

### 1.6.2.2 Méthode indirecte de discrétisation :

La deuxième méthode, appelée la méthode indirecte, se déroule en deux étapes. Dans la première étape on calcule le modèle rationnel continu qui approxime l'opérateur d'ordre fractionnaire comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Puis dans une seconde étape, en utilisant les méthodes de discrétisation usuelles pour obtenir le modèle rationnel discret qui approxime le modèle fractionnaire analogique comme suit :

$$s^{\pm m} \cong G(s)|_{s=F(z)}$$

où F(z) est la fonction génératrice de discrétisation donnée par :

- Euler [39]:  $s = F(z) = \frac{1-z^{-1}}{T}$

- Tustin [39]:  $s = F(z) = \frac{2}{T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}$

- Al-Alaoui [40]:  $s=F(z)=\frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}$

où T est la période d'échantillonnage.

Dans ce qui suit, on présente le modèle rationnel discret obtenu en utilisant les trois méthodes classiques de discrétisation appliquées au model rationnel analogique obtenu par la méthode de Charef [11].

### I.6.2.2.1 Discrétisation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui :

Dans notre cas, l'implémentation numérique de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle GI(s) de l'équation (I.41) approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire  $s^{-m}$  (avec  $0 < m < 1$ ) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui. Par conséquent, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\text{- Euler [6, 19] : } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{(\delta_i z - \chi_i)}$$

$$\text{- Tustin [6, 19]: } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{21-Z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = (z+1) \sum_{i=0}^N \frac{h_i z}{(\alpha_i z - \lambda_i)}$$

$$\text{- Al-Alaoui [6, 19]: } s^{-m} \cong \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{\frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}}{p_i}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i (z + \frac{1}{7})}{(l_i z - \sigma_i)}$$

Avec :

$$\alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1, \quad \delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}$$

$$\chi_i = \frac{1}{Tp_i}, \quad l_i = 1 + \frac{8}{7Tp_i}, \quad \sigma_i = \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}$$

### I.6.2.2.2 Discrétisation du dérivateur d'ordre fractionnaire par la transformation Bilinéaire, Backward et Al-Alaoui :

De la même manière, l'implémentation numérique de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est la discrétisation de la fonction rationnelle GD(s) de l'équation (1.23) approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire  $s^m$  (avec  $0 < m < 1$ ) par les trois méthodes d'Euler, Tustin et Al-Alaoui. Donc, les filtres à Réponse Impulsionnelle Infinie (RII) obtenus sont donnés par les fonctions de transfert suivantes :

$$\text{- Euler [6, 19] : } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{1-z^{-1}}{T}}{\left(1 + \frac{\frac{1-z^{-1}}{T}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i (z-1)}{T(\delta_i z - \chi_i)}$$



$$\text{- Tustin [6, 19]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{21-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}{\left(1 + \frac{\frac{21-Z^{-1}}{1+Z^{-1}}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{2}{T} \frac{g_i(z-1)}{(\alpha_i z - \lambda_i)}$$

$$\text{- Al-Alaoui [6, 19]: } s^m \cong K_D + \sum_{i=0}^N \frac{g_i \frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}}{\left(1 + \frac{\frac{8}{7T} \frac{1-Z^{-1}}{1+Z^{-1}/7}}{p_i}\right)} = K_D + \sum_{i=0}^N \frac{8}{7T} \frac{g_i(z-1)}{(l_i z - \sigma_i)}$$

$$\text{Avec : } \alpha_i = 1 + \frac{2}{Tp_i}, \lambda_i = \frac{2}{Tp_i} - 1, \delta_i = 1 + \frac{1}{Tp_i}, \chi_i = \frac{1}{Tp_i}, l_i = 1 + \frac{8}{7Tp_i}, \sigma_i = \frac{8}{7Tp_i} - \frac{1}{7}$$

## I.7 Conclusion :

Ce chapitre est une introduction aux éléments de base du calcul fractionnaire. Nous avons présenté quelques définitions mathématiques des opérateurs fractionnaires avec leurs propriétés et leur transformées de Laplace. Nous avons présenté aussi deux classes de méthodes d'approximation de la dérivée et l'intégrale d'ordre fractionnaire à savoir les méthodes fréquentielles et les méthodes numériques.

# Chapitre II: Commande Adaptative à Modèle de Référence

## Chapitre II

# Commande Adaptative à Modèle de Référence

### II.1 Introduction :

La commande adaptative joue un rôle très important dans les applications industrielles, qui comme son nom l'indique, consiste à adapter le régulateur en ligne aux variations du processus régulé pour assurer une qualité constante des performances. Elle peut être classée en deux types [32,21]. i). *Commande adaptative indirecte*, i.e. le calcul des paramètres du régulateur passe par l'estimation en temps réel des paramètres du processus à commander. ii). *Commande adaptative directe*, i.e. le processus à commander n'est pas identifié, et les paramètres du régulateur sont estimés directement selon une structure imposée par le concepteur.

La commande adaptative à modèle de référence (CAMR) se présente comme l'une des principales méthodes de la commande adaptative, est une manière pratique d'imposer des spécifications au système de commande.

Dans ce chapitre, nous présentons la commande adaptative à modèle de référence avec ses lois de commande et sa structure de régulation.

### II.2 Régulateurs adaptatifs déterministes : [32, 21,31] ;

Dans cette partie on présentera une méthode algébrique simple de conception de la commande adaptative. L'idée est de déterminer le régulateur qui impose les pôles désirés en boucle fermée. De plus, on veut que le système suive le signal de référence d'une manière spécifiée.

Cette méthode permet en plus d'avoir une meilleure compréhension de la commande adaptative.

### II.2.1 Modèle du processus :

On considère un processus décrit par un système à une entrée et une sortie (SISO). Même si on traitera essentiellement des systèmes discrets, on peut étudier simultanément les systèmes continus en écrivant:

$$Ay(t) = B(u(t) + v(t)) \quad (\text{II.1})$$

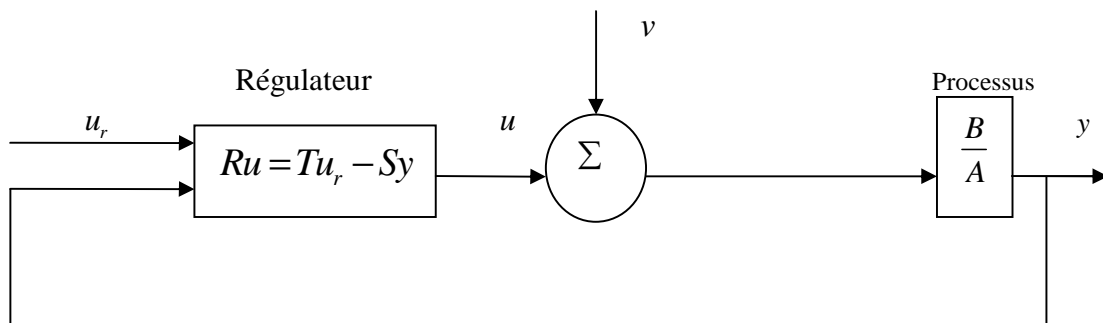
Où A et B représentent des polynômes fonctions.

On suppose que A et B sont coprimes (premiers entre eux), i.e. ils n'ont aucun facteur commun. De plus A est supposé normalisé (monique), i.e. le coefficient du plus haut degré dans A est l'unité.

Un régulateur linéaire général peut être décrit par :

$$Ru = Tu_r - Sy \quad (\text{II.2})$$

où  $R$ ,  $S$  et  $T$  sont des polynômes. Cette loi de commande représente une contre réaction (ou feedback) négative avec l'opérateur de transfert  $-\frac{S}{R}$  et une action directe (ou feedforward) avec un opérateur de transfert  $\frac{T}{R}$ . Il possède donc deux degrés de liberté. Un schéma-bloc du système en boucle fermée est montré dans la figure (II.1)



**Figure (II.1) :** Un régulateur linéaire général à deux degrés de liberté.

Le système en boucle fermée :

$$y(t) = \frac{BT}{AR + BS}u_r(t) + \frac{BR}{AR + BS}V(T)$$

$$u(t) = \frac{AT}{AR+BS}u_r(t) + \frac{BS}{AR+BS}V(T) \quad (\text{II.3})$$

Le polynôme caractéristique de la boucle fermée est donc,

$$AR + BS = A_r \quad (\text{II.4})$$

L'idée clé de la méthode de conception est de spécifier le polynôme caractéristique désiré en boucle fermée  $A_r$

Les polynômes S et R peuvent être déterminés à partir de l'équation (II.4). Noter que dans cette procédure de conception on considère le polynôme  $A_r$  comme paramètre de conception, qui est choisi pour donner les propriétés désirées du système en boucle fermée.

L'équation (II.4), qui joue un rôle fondamental en Algèbre, est appelée l'équation Diophantine, on l'appelle aussi identité de Bezout ou équation de Aryabhata.

Cette équation possède toujours une solution si les polynômes A et B n'ont aucun facteur commun. La solution peut être cependant mal conditionnée si les polynômes ont des facteurs trop proches. Elle peut être obtenue en introduisant des polynômes avec des coefficients inconnus et en résolvant les équations linéaires obtenues.

### II.2.2 Poursuite du modèle :

L'équation Diophantine (II.4) ne détermine que les polynômes S et R. D'autres conditions doivent être introduites pour déterminer le polynôme T dans le régulateur (II.2) également. Pour ce faire, il est requis que la réponse de la sortie au signal de référence  $A_r$  soit décrite par les dynamiques :

$$A_m y_m(t) = B_m u_r(t) \quad (\text{II.5})$$

Il vient alors de l'équation (II.4) que la condition suivante doit être vérifiée

$$\frac{BT}{AR+BS} = \frac{BT}{A_r} = \frac{B_m}{A_m} \quad (\text{II.6})$$

Cette condition de poursuite de modèle implique que la réponse du système en boucle fermée aux signaux de référence soit spécifiée par le modèle (II.5). La réalisation de la poursuite de modèle dépend du modèle, du processus et des signaux de référence. S'il est possible d'annuler l'erreur pour tous les signaux de référence, alors la poursuite parfaite du modèle est réalisée. Maintenant, on discute des conséquences de la condition de la poursuite du modèle. L'équation (II.6) implique qu'il existe des simplifications des facteurs communs de  $BT$  et  $A_r$

On factorise le polynôme B comme suit :

$$B = B^+ B^- \quad (\text{II.7})$$

Où  $B^+$  est un polynôme monique dont les racines sont stables et si bien amorties qu'on peut les compenser par le régulateur et  $B^-$  correspond aux facteurs instables ou faiblement amortis.

Il s'en suit que  $B^-$  doit être un facteur de  $B_m$  soit

$$B_m = B^- B'_m \quad (\text{II.8})$$

Puisque  $B^+$  est compensé, il doit être un facteur de  $A_r$ . De plus, il vient de l'équation (II.7) que  $A_m$  doit aussi être un facteur de  $A_r$ . Le polynôme caractéristique de la boucle fermée prend donc la forme :

$$A_r = A_0 A_m B^+ \quad (\text{II.9})$$

Puisque  $B^+$  est un facteur de B et  $A_r$ , il vient de l'équation (II.5) qu'il divise R aussi, soit

$$R = R' B^+ \quad (\text{II.10})$$

Et l'équation Diophantine (II.4) est réduite à :

$$AR' + B^- S = A_0 A_m = A'_r \quad (\text{II.11})$$

En introduisant les équations (II.7), (II.8) et (II.9) dans l'équation (II.6) on obtient :

$$T = A_0 B'_m \quad (\text{II.12})$$

### II.2.3 Conditions de causalité :

Pour obtenir un régulateur causal dans le cas discret ou propre dans le cas continu, on doit imposer les conditions suivantes :

$$\deg S \leq \deg R \quad (\text{II.13})$$

$$\deg T \leq \deg R \quad (\text{II.14})$$

L'équation Diophantine (II.4) possède plusieurs solutions, car si  $R^0$  et  $S^0$  sont solutions, alors de même, les polynômes R et S sont solutions, tels que

$$R = R^0 + QB$$

$$S = S^0 + QA \quad (\text{II.15})$$

Où Q est un polynôme arbitraire. Puisqu'il existe plusieurs solutions, on peut choisir la solution qui donne le régulateur de plus petit degré. On l'appelle la solution du degré minimal.

Puisque  $\deg A = \deg B$ , le terme du plus haut degré sur le coté gauche de l'équation (II.4) est AR. Soit :

$$\deg R = \deg A_r - \deg A$$

A cause de l'équation (II.14) il y a toujours une solution telle que  $\deg S < \deg A_r - \deg A$ .

On peut donc toujours trouver une solution dans laquelle le degré de  $S$  est au plus égal à  $\deg A - 1$ . Ceci est appelé la solution du degré minimal de l'équation Diophantine.

La condition  $\deg S \leq \deg R$  implique alors que

$$\deg A_r = 2 \deg A - 1.$$

Il vient de l'équation (II.12) que la condition  $\deg T \leq \deg R$  implique que

$$\deg A_m - \deg B'_m = \deg A - \deg B^+$$

En ajoutant  $\deg B^-$  aux deux cotés, on trouve que c'est équivalent à  $\deg A_m - \deg B_m = d_0$

Où  $d_0$  est le degré relatif du processus.

Cela veut dire dans le cas discret que le temps de retard du modèle doit être au moins égal au temps de retard du processus, ce qui est une condition très naturelle.

En résumé, les conditions de causalité (II.13) peuvent être réécrites ainsi

$$\deg A_r = 2 \deg A - 1.$$

$$\deg A_m - \deg B_m \geq \deg A - \deg B = d_0 \quad (\text{II.16})$$

Il est naturel de choisir une solution dans laquelle le régulateur a le plus petit degré possible.

Dans le cas discret il est aussi raisonnable d'exiger qu'il n'y ait pas de retard supplémentaire dans le régulateur. Ceci n'implique que les polynômes  $S$ ;  $R$  et  $T$  doivent avoir le même degré.

## II.3 Commande adaptative à modèle de référence : [35, 4,3]

### II.3.1 Principe :

La commande adaptative à modèle de référence a été proposée par Whitaker et ses collègues en 1958. Le développement de cette technique repose sur une hypothèse fondamentale, où pour toutes valeurs possibles des paramètres du procédé, on suppose qu'il existe un contrôleur de structure donnée qui peut assurer la réalisation des performances désirées. Le rôle de la boucle d'adaptation se limite uniquement à trouver les bonnes valeurs des paramètres de ce contrôleur.

Dans ce mémoire, on s'intéresse à la commande adaptative directe, un schéma bloc représente le principe de cette approche est donné dans la figure (II.2).

Le schéma possède une boucle de réaction (feedback) ordinaire composée du processus et du régulateur et une autre boucle de réaction (feedback) qui permet de changer les paramètres du régulateur. Les paramètres sont variés en fonction de l'erreur, qui est la différence entre la sortie

du processus et celle du modèle de référence. La boucle de réaction ordinaire est appelée boucle interne, celle de l'ajustement des Paramètres est appelée boucle externe.

Le mécanisme d'ajustement des paramètres peut être obtenu de deux manières : en utilisant la méthode du gradient ou en appliquant la théorie de la stabilité.

La CAMR ont été développés à l'origine pour les systèmes continus déterministes, puis étendus aux systèmes discrets et aux systèmes avec perturbations stochastiques.

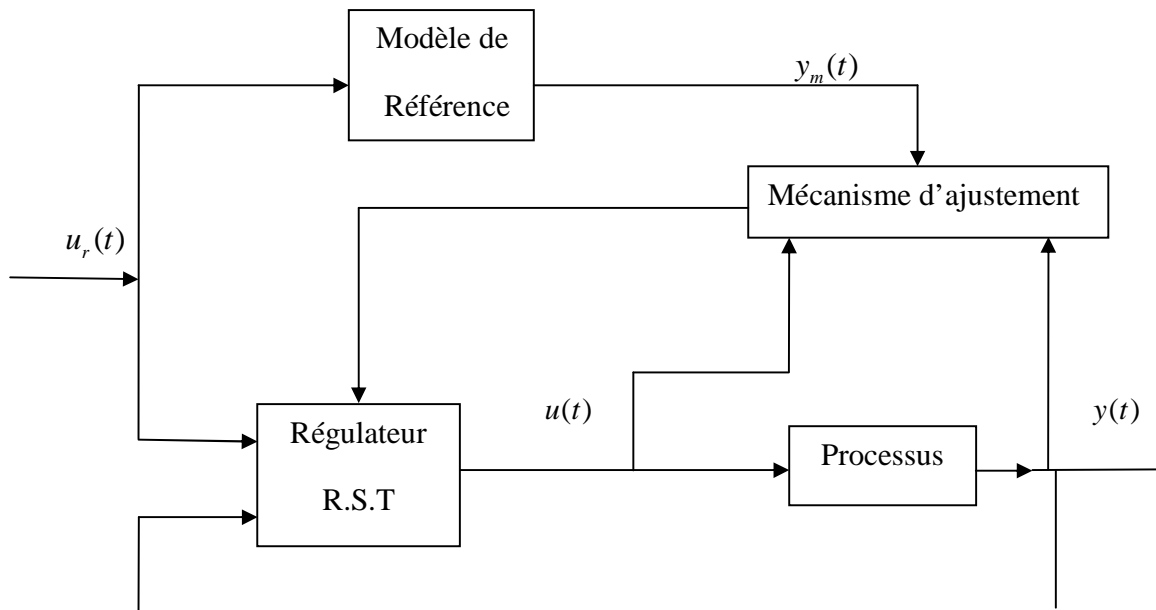


Figure (II.2) : Commande adaptative directe à modèle de référence

### II.3.2 Loi de M.I.T :

La loi de M.I.T. est l'approche originale pour la commande adaptative à modèle de référence (CAMR). Le nom est dérivé du fait qu'elle a été développée au laboratoire d'instrumentation (Maintenant Laboratoire de Draper) à l'université de M.I.T. (Massachusetts Institute of Technology).

Pour représenter la loi M.I.T., on considère un système en boucle fermée dans lequel le régulateur possède un vecteur  $\theta$  de paramètres ajustables. La réponse désirée en boucle fermée est spécifiée par la sortie  $y_m$  du modèle de référence.

Soit  $e$  l'erreur entre la sortie  $y$  de la boucle fermée et celle du modèle de référence  $y_m$ .

L'ajustement des paramètres est fait de manière à minimiser une fonction coût  $J$  définie par :



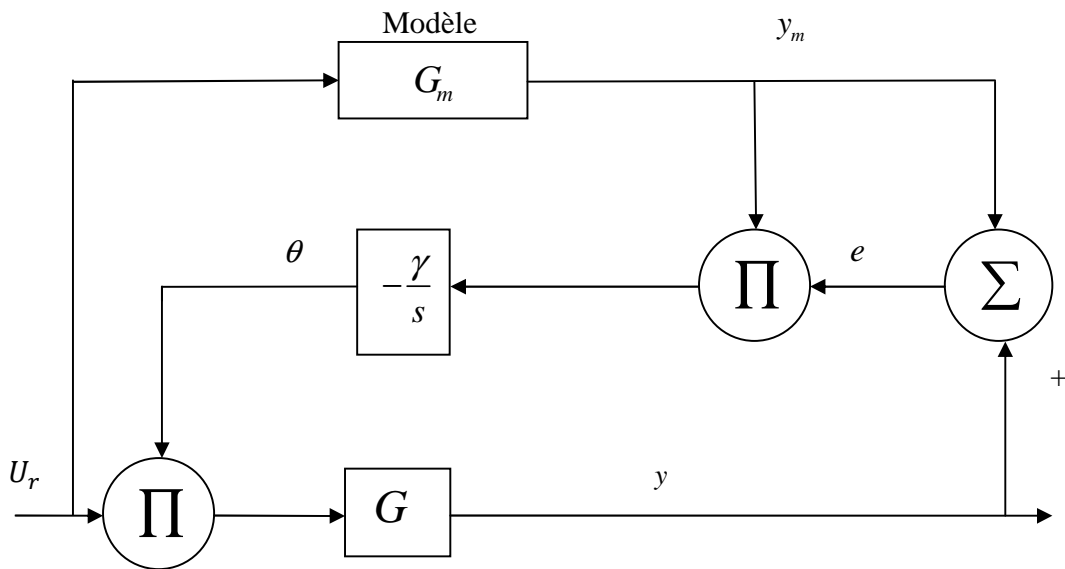
$$J(\theta) = \frac{1}{2} e^2 \quad (\text{II.17})$$

Pour minimiser J, il faut changer les paramètres dans la direction du gradient négatif de J, soit :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta J}{\delta \theta} = -\gamma e \frac{\delta e}{\delta \theta} \quad (\text{II.18})$$

L'équation (II-18) est la fameuse loi de M.I.T. La dérivée partielle  $\frac{\delta e}{\delta \theta}$ , appelée dérivée de la sensibilité du système, exprime l'influence des paramètres ajustables sur l'erreur.

En supposant que la variation des paramètres est plus lente que celle des autres variables du système, la dérivée  $\frac{\delta e}{\delta \theta}$  peut être évaluée en considérant que  $\theta$  est constant, voir figure(II.3)



**Figure (II.3) :** schéma classique d'Adaptation.

Il existe plusieurs alternatives à la fonction de coût donnée par l'équation (II.17). Si on choisit :

$$J(\theta) = |e| \quad (\text{II.19})$$

La méthode du gradient donne

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\delta e}{\delta \theta} \text{sign}(e) \quad (\text{II.20})$$

Le premier SAMR qui fût implémenté était basé sur cette formule. Cependant il existe beaucoup d'autres possibilités, par exemple

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \text{sign}\left(\frac{\delta e}{\delta \theta}\right) \text{sign}(e) \quad (\text{II.21})$$

qui est appelée l'algorithme du sign-sign. Une version discrète de cet algorithme est utilisée en télécommunications, dans laquelle une implémentation simple et des calculs rapides sont requis.

On peut décrire le problème de la commande à modèle de référence comme suit :

Soit  $G_m(s)$  la fonction de transfert du modèle de référence spécifiant les performances désirées.

Soit  $G_{BF}(s, \theta)$  la fonction de transfert du processus en boucle fermée où  $\theta$  est le vecteur des paramètres ajustables.  $r$  est le signal de référence.

Le CAMR essaie de varier les paramètres du régulateur tel que l'erreur :

$$e(t) = (G_{BF}(p, \theta) - G_m(s))r(t) = y - y_m$$

est tendre vers zéro.

La loi de M.I.T. donnée par :

$$\frac{d\theta}{dt} = \gamma \varphi e \quad (\text{II.22})$$

où  $\varphi = -\frac{\delta e}{\delta \theta}$  et  $\gamma$  le gain d'adaptation, peut être interprété comme une méthode du gradient pour minimiser l'erreur.

L'algorithme normalisé :

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\varphi e}{\alpha + \varphi^T \varphi} \quad (\text{II.23})$$

**Remarque :**

- Le but des CAMR est de faire converger l'erreur  $y - y_m$  vers zéro. Cela n'implique pas nécessairement que les paramètres du régulateur convergent vers leurs valeurs correctes.
- Le choix du gain d'adaptation est crucial et dépend des niveaux des signaux, est moins sensible aux niveaux des signaux.
- Le système obtenu avec la loi de M.I.T fonctionne comme prévu pour de petits gains d'adaptation. Des comportements plus complexes peuvent apparaître pour de grands gains d'adaptation.

### II.3.3.1 Structure du Régulateur :

On suppose que le processus est décrit par le modèle continu,

$$Ay(t) = b_0 Bu(t) \quad (\text{II.24})$$

où les polynômes  $A$  et  $B$  sont supposés ne pas avoir de facteurs communs et le polynôme

$B$  est monique et a tous ses zéros dans le demi-plan gauche. La variable  $b_0$  est dite gain instantané ou gain à hautes fréquences.

Le régulateur peut être écrit sous la forme (II.2) :

$$R(z)u(t) = T(z)u_r(t) - S(z)y(t)$$

où est le signal de référence. Puisque le polynôme B est stable, les pôles correspondant peuvent être compensés par le régulateur. Cela correspond à  $R = R_1 B$ .

Le système en boucle fermée obtenu quand le régulateur est appliqué au processus (II.21) est décrit par :

$$(AR_1 + b_0 S)y = b_0 T u_r \quad (\text{II.25})$$

Si le polynôme T est choisi tel que, où est un polynôme monique stable et  $R_1$  et S satisfont:

$$AR_1 + b_0 S = A_0 A_m \quad (\text{II.26})$$

Il est possible de réaliser une poursuite de modèle parfaite avec le modèle :

$$A_m y_m(t) = b_0 t_0 u_r(t) \quad (\text{II.27})$$

### II.3.3.2 L'erreur de modèle :

A partir des équations (II.21) et (II.22) il vient que :

$$A_0 A_m y = AR_1 y + b_0 S y = R_1 b_0 B u + b_0 S y$$

Introduisons l'erreur  $e = y - y_m$ , il vient à partir des équations (II.23) et (II.24) que :

$$A_0 A_m e = A_0 A_m (y - y_m) = b_0 (R u + S y - T u_r) \quad (\text{II.28})$$

Ou bien

$$e = \frac{b_0}{A_0 A_m} (R u + S y - T u_r) \quad (\text{II.29})$$

Soient k, l et m les degrés des polynômes R, S et T respectivement. Introduisons le vecteur des vrais paramètres du régulateur :

$$\theta^0 = (r_1 \dots r_k \ s_0 \dots s_l \ t_0 \dots t_m) \quad (\text{II.30})$$

et introduisons le vecteur de régression (ou de mesures)  $\varphi$  :

$$\begin{aligned} \varphi^T &= - \left[ \frac{\delta e}{\delta r_1} \frac{\delta e}{\delta r_2} \dots \frac{\delta e}{\delta r_k} \frac{\delta e}{\delta s_0} \frac{\delta e}{\delta s_1} \dots \frac{\delta e}{\delta s_l} \frac{\delta e}{\delta t_0} \frac{\delta e}{\delta t_1} \dots \frac{\delta e}{\delta t_m} \right] \\ &= \frac{b_0}{A_0 A_m} [p^{k-1} u \dots u \ p^l y \dots y \ - p^m u_r \dots - u_r] \end{aligned} \quad (\text{II.31})$$

L'erreur pourra s'écrire

$$e = \varphi^T \theta^0 \quad (\text{II.32})$$

Les polynômes R, S et T doivent vérifier les conditions,

$$R(p) = p^k + r_1 p^{k-1} + r_2 p^{k-2} + \dots + r_k$$

$$S(p) = s_0 p^l + s_1 p^{l-1} + s_2 p^{l-2} + \dots + s_l$$

$$T(p) = t_0 p^m + t_1 p^{m-1} + t_2 p^{m-2} + \dots + t_m \quad (\text{II.33})$$

Avec,

$$\begin{aligned} \deg A_m - \deg B_m &\geq \deg A - \deg B \\ \deg A_0 &\geq 2\deg A - \deg A_m - \deg B^+ - 1 \end{aligned} \quad (\text{II.34})$$

Ces deux conditions sont toujours vérifiées, même dans le cas où  $A_0 = 1$  (l'observateur est négligé) car on utilise un modèle tel que  $\deg A_m > \deg A$

$$\begin{aligned} k = \deg R &= \deg R_1 + \deg B = \deg A_m + \deg B - \deg A \\ l = \deg S &\leq \deg R \end{aligned} \quad (\text{II.35})$$

donc on prendra,

$$\deg S = \deg R$$

Ou bien

$$\deg S = \deg R - 1$$

Et

$$m = \deg T = \deg B_m$$

Généralement on prend  $\deg S = \deg R - 1$  pour que le filtre  $S/R$  soit causal.

## II.4 Exemples de simulation :

### II.4.1 Résultats pour un système du 1<sup>er</sup> ordre :

Le processus est un système du premier ordre, régi par l'équation suivante [10] :

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1} \quad (\text{II.36})$$

et le modèle de référence d'ordre entier choisi comme :

$$G_m(s) = \frac{0.5}{s^2+1.8s+1} \quad (\text{II.37})$$

Les résultats de simulation sont donnés par la figure (II.4).

### II.4.2 Résultats pour un système du 2<sup>nd</sup> ordre :

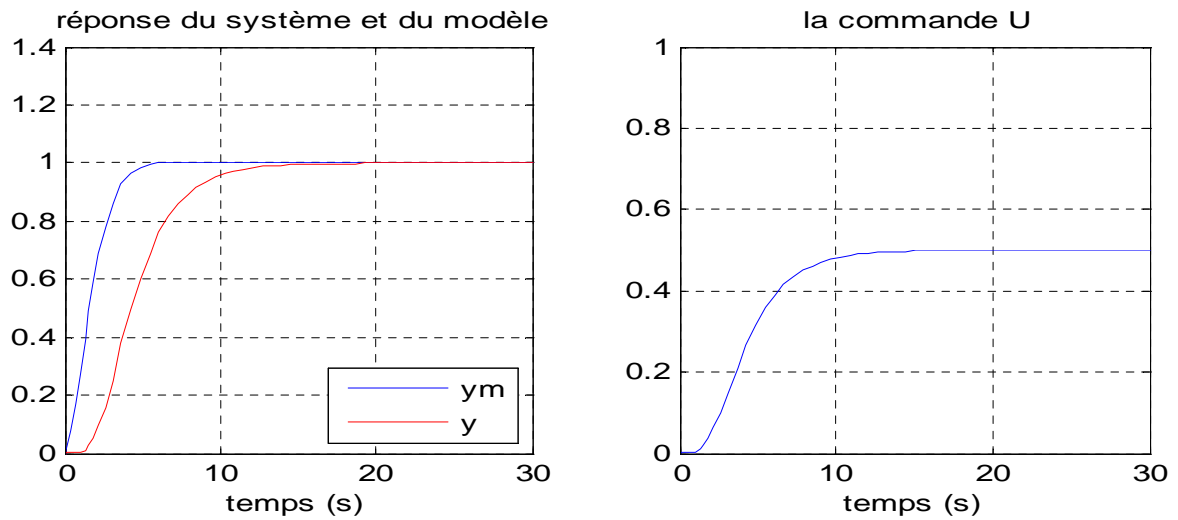
Le processus est un système du 2<sup>nd</sup> ordre, régi par l'équation suivante :

$$G(s) = \frac{0.5}{s^2+2s+1} \quad (\text{II.38})$$

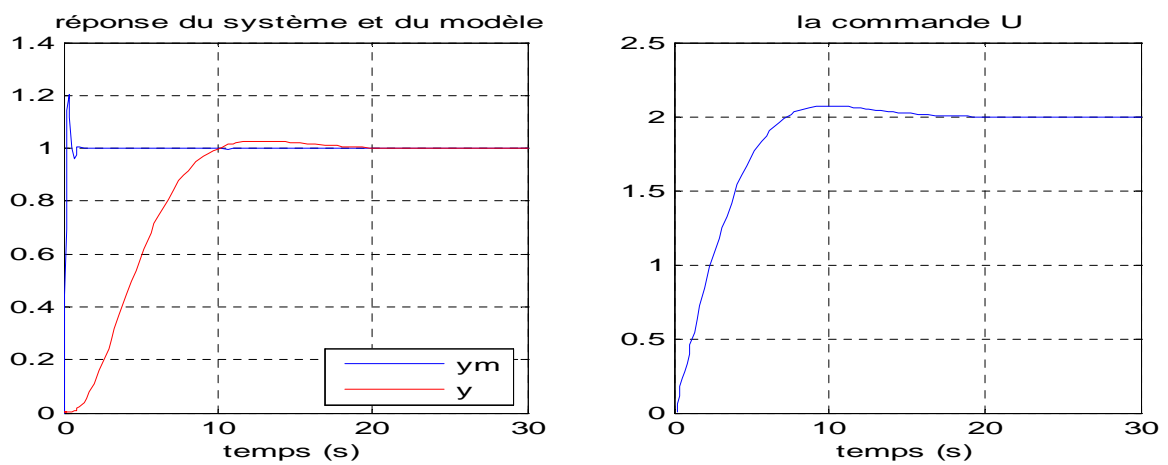
et le modèle de référence choisi :

$$G_m(s) = \frac{100}{s^2+9s+100} \quad (\text{II.39})$$

Les résultats de simulation sont donnés par la figure (II.5).



**Figure (II.4) :** Réponse du CAMR pour un système de 1<sup>er</sup> ordre



**Figure (II.5) :** Réponse du CAMR pour un système de 2<sup>nd</sup> ordre

D'après les résultats de simulation des figures (II.4) et (II.5), on remarque que la sortie du système suit le signal du modèle de référence, et la commande est bornée.

## **II.5 Conclusion:**

Dans ce chapitre, on a présenté la commande adaptative à modèle de référence avec ses lois de commande et sa structure de régulation. Cet algorithme de (CAMR) est une commande directe, l'identification du processus à commander n'est pas nécessaire, la synthèse du commande consiste à chercher la structure d'un contrôleur puis ajuster ses paramètres de façon à réaliser une poursuite parfaite du modèle, l'ajustement des paramètres est fait par la méthode MIT qu'est plus facile à implanter.

Des exemples de simulation (systèmes du premier et second ordre) sont faits sur le schéma de CAMR que réalisent le suivi du modèle et montrent la validité de cette commande.

Dans le chapitre suivant, on va étudier le schéma du CAMR plus loin, par l'utilisation les systèmes d'ordre fractionnaire comme modèle de référence pour l'objectif d'améliorer les performances des systèmes.

# Chapitre III: Simulation et Application à un MCC

## Chapitre III :

### Simulations et Application à un MCC

#### III.1 Introduction :

Dans ce chapitre nous allons implémenter les algorithmes présentés dans la partie théorique concernant la commande adaptative à modèle de référence d'ordre entier et d'ordre fractionnaire. Nous allons présenter des exemples de simulation liés au développement théorique et nous allons appliquer cette technique à la commande en vitesse d'un moteur à courant continu MCC.

#### III.2 Exemples de simulation

##### III.2.1 Cas entier

##### III.2.1.1 Exemple de premier ordre

Soit le processus de premier ordre d'écrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{0.5}{s+1} \quad (\text{III.1})$$

avec le modèle donner par :

$$G_m^e(s) = \frac{2}{s+2} \quad (\text{III.2})$$

L'équation récurrente de système avec une période d'échantillonnage  $T = 0.2$  s est :

$$y(k+1) = y(k) + 0.8187y(k-1) + 0.09063u(k) \quad (\text{III.3})$$

L'équation récurrente de système avec une période d'échantillonnage  $T = 0.2$  s est :

$$y_m(k+1) = y_m(k) + 0.670y_m(k-1) + 0.3297u_c(k) \quad (\text{III.4})$$

#### Implémentation sous Matlab :

Les paramètres de réglage sont :

Le gain d'adaptation  $\gamma = 0.0000099$

Le vecteur de paramètre  $\theta = [-1.0000201 \ 1.0009998]$

Les résultats obtenus après l'application de la commande adaptative d'ordre entier sont donnés par les figures suivantes :



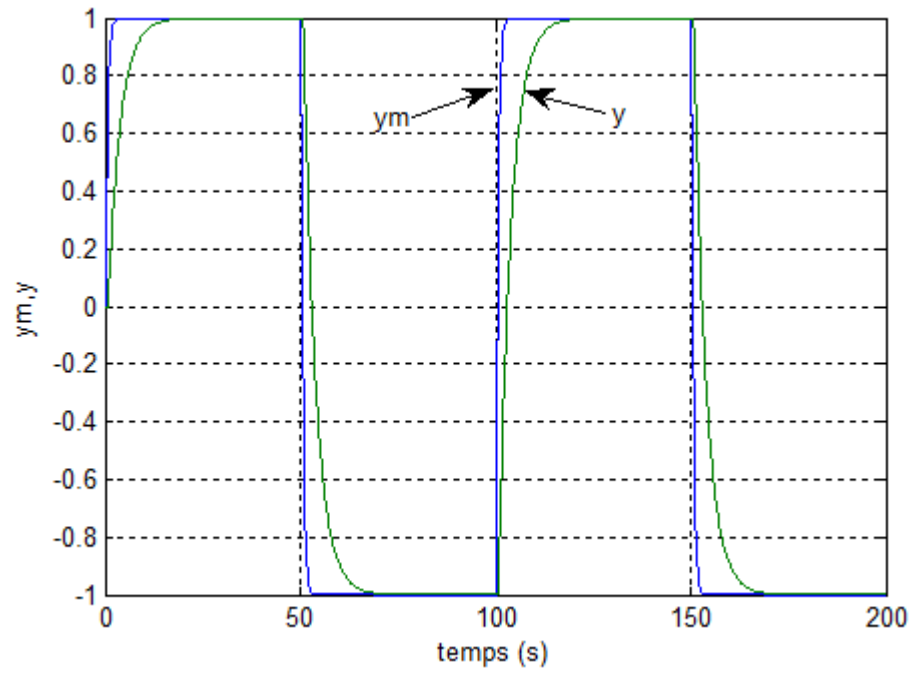


Figure. III.1 : Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre entier

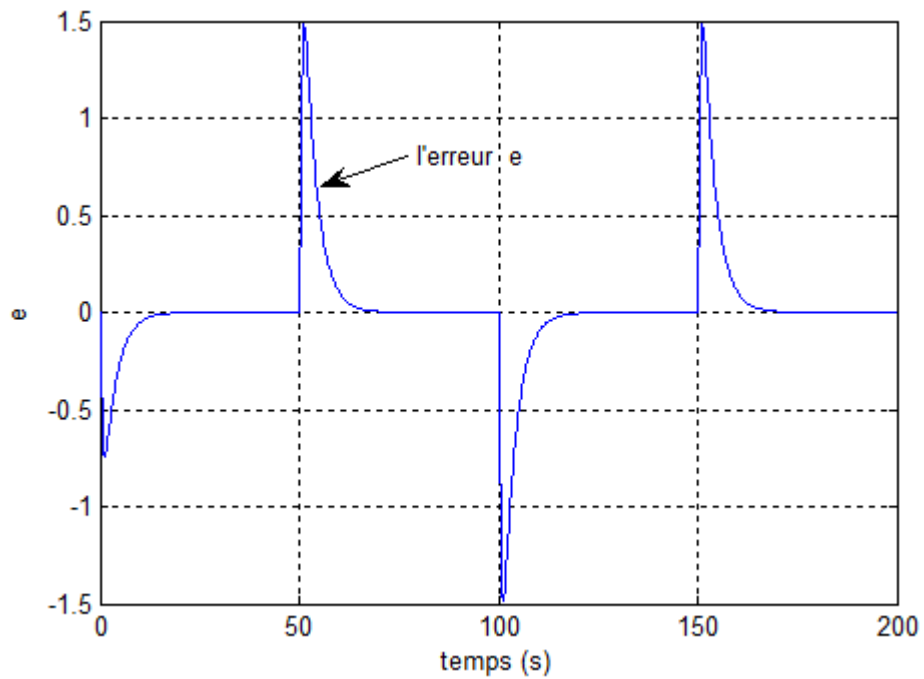


Figure. III.2 : l'erreur d'ordre entier

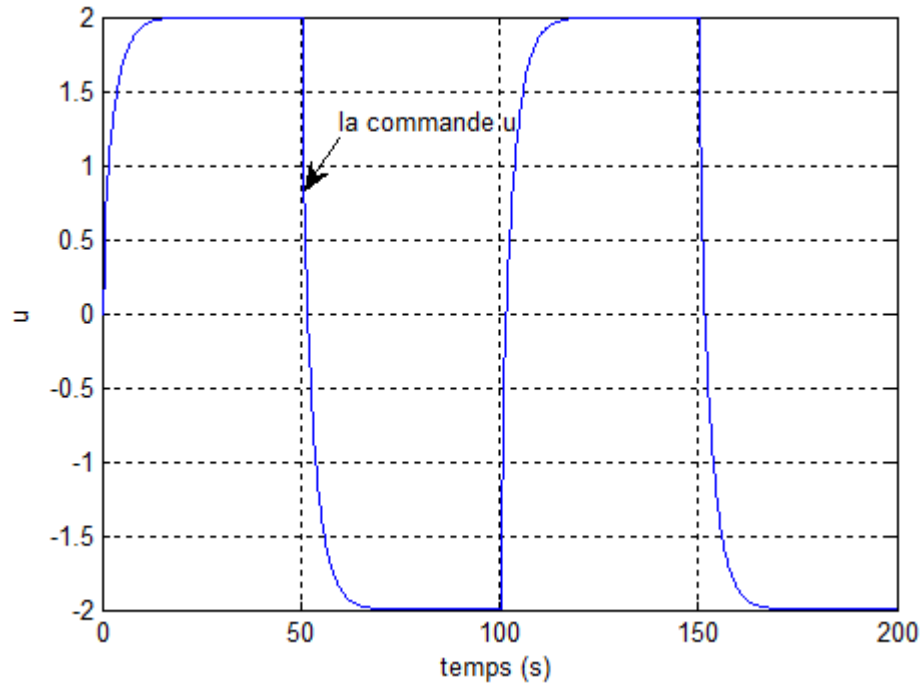


Figure. III.3 : signal de commande d'ordre entier

#### Commentaires :

D'après les figures obtenues, on constate :

- la stabilité du système est assurée.
- le système suit le modèle de référence.
- dépassement nulle dans le régime transitoire.
- l'erreur statique quasi nulle.
- temps de réponse rapide.

#### III.2.1.2 Exemple de second ordre :

On prendra le système d'écrit par la fonction de transfert suivant :

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1} \quad (\text{III.5})$$

et le modèle de référence aussi définit par sa fonction de transfert :

$$G_m^e(s) = \frac{w_n^2}{s^2+2\xi w_n s+w_n^2} \quad (\text{III.6})$$

Avec :  $w_n = 2$ ,  $\xi = 0.8$

L'équation récurrente de système avec une période d'échantillonnage  $T = 0.5$  s est :

$$y(k+1) = 1.096y(k) - 0.2019y(k-1) + 0.4064u(k) - 0.1526u(k-1) \quad (\text{III.7})$$

L'équation récurrente de système avec une période d'échantillonnage  $T = 0.5$  s est :

$$y_m(k+1) = 0.7417y_m(k) + 0.2019y_m(k-1) + 0.1454u_c(k) + 0.08466u_c(k-1) \quad (\text{III.8})$$

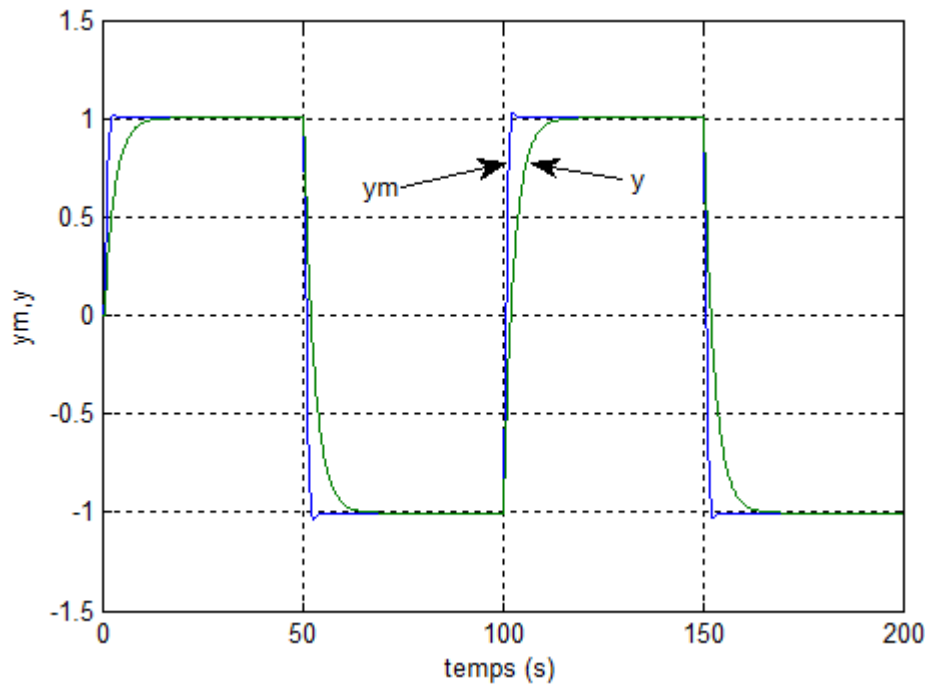
### Implémentation sous Matlab :

Les paramètres de réglage sont les suivants :

Le gain d'adaptation  $\gamma = 0.000001$

Le vecteur de paramètre  $\theta = [-0.2494 \quad 0.005]$

Les résultats obtenus après l'application de la commande adaptative d'ordre entier sont donnés par les figures suivantes :



**Figure. III.4 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre entier

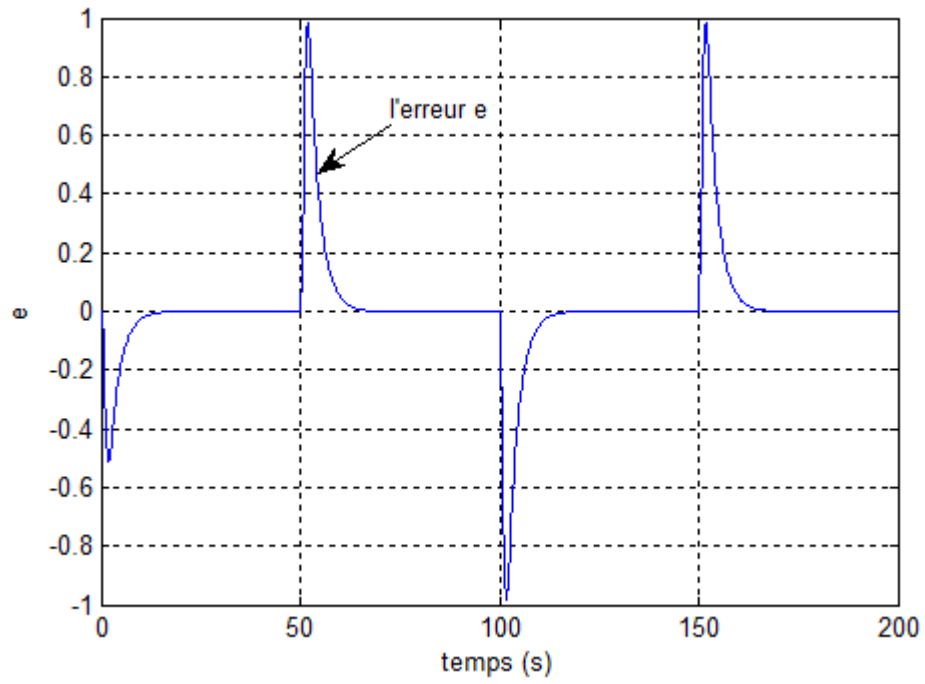


Figure. III.5 : l'erreur d'ordre entier

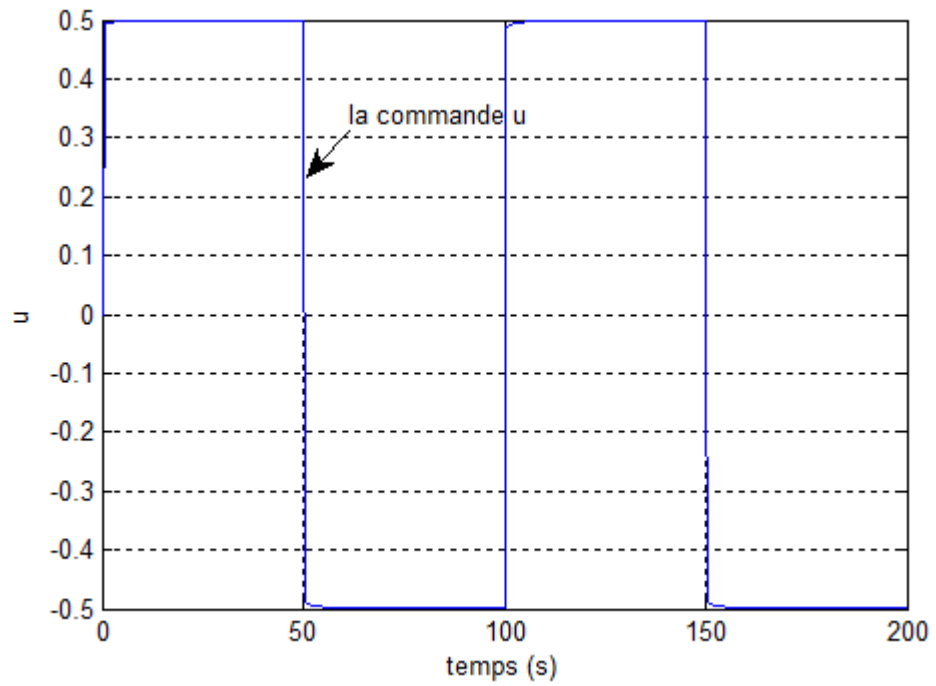


Figure. III.6 : signal de commande d'ordre entier

**Commentaires :**

D’après les figures obtenues, on constate :

- la stabilité du système est vérifiée.
- le système suite le modèle de référence.
- dépassement nulle dans le régime transitoire.
- l’erreur statique quasi nulle.
- temps de réponse acceptable.

**III.2.2 Cas fractionnaire :**

**III.2.2.1 Exemple de Simulation :**

Soit le processus du deuxième ordre d’écrit par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+3s+1} \tag{III.9}$$

Avec modèle de référence fractionnaire donné par :

$$G_m^f(s) = \frac{w_n^2}{(s^2+2\xi w_n s+w_n^2)^\beta} \tag{III.10}$$

Avec :  $w_n = 2, \xi = 0.8, \beta = 0.8$  ce qui donne

$$G_m^f(s) = \frac{4}{(s^2+3.4s+4)^{0.8}}$$

L’approximation du modèle obtenu par la méthode singularité avec une discrétisation de 0.1 s est donnée par :

$$G_m^*(s) = \frac{0.0241z^7 - 0.01935z^6 + 0.003749z^5 - 6.036 \cdot 10^{-006}z^4 - 1.109 \cdot 10^{-009}z^3 + 5.07 \cdot 10^{-026}z^2 - 9.303 \cdot 10^{-043}z + 2.837 \cdot 10^{-060}}{1.766 \cdot 10^{-053}z + 1.151 \cdot 10^{-059}} \tag{III.11}$$

**Implémentation sous Matlab :**

Les paramètres de réglage sont les suivants :

Le gain d’adaptation  $\gamma = 0.000000001$

Le vecteur de paramètre  $\theta = [-0.000001 \ 0.0048745 \ 0.0000001 \ 0.0000000001]$

Les résultats obtenus après l’application de la commande adaptative d’ordre fractionnaire sont donnés par les figures suivantes :

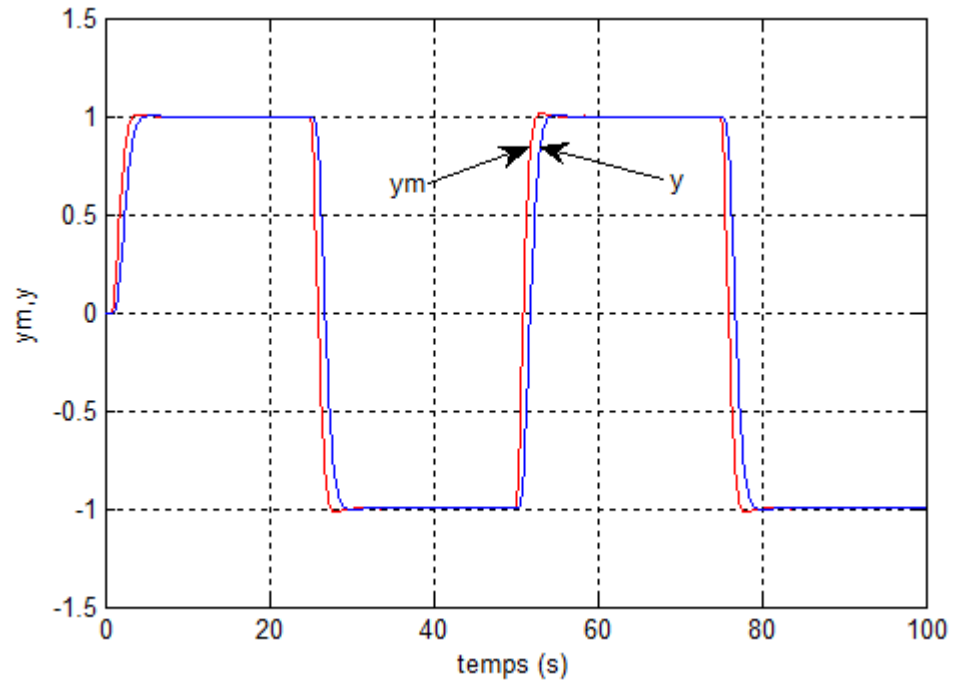


Figure. III.7 : Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre fractionnaire

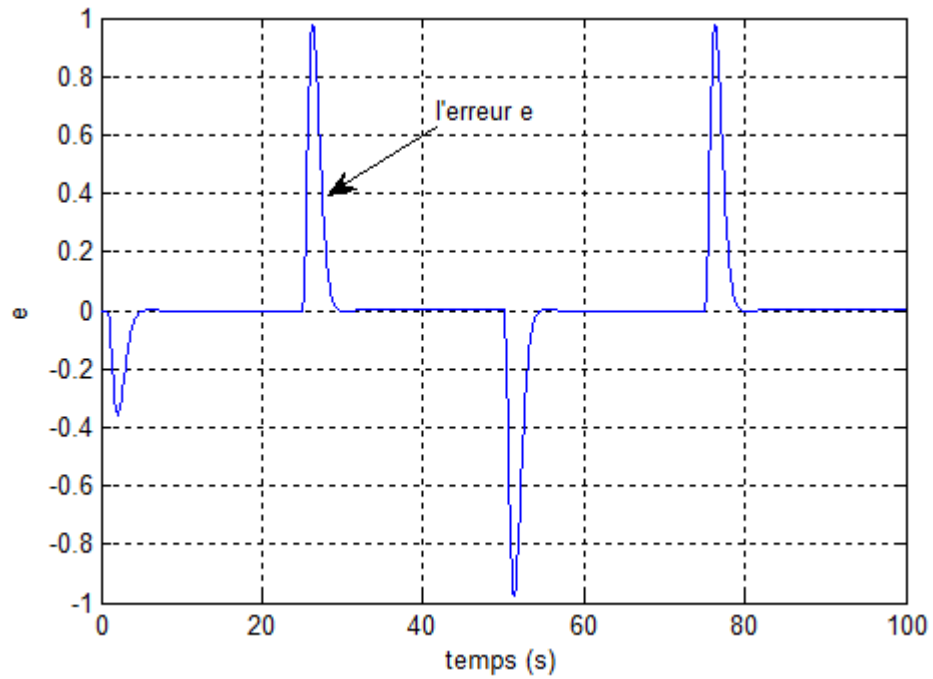


Figure. III.8 : l'erreur d'ordre fractionnaire

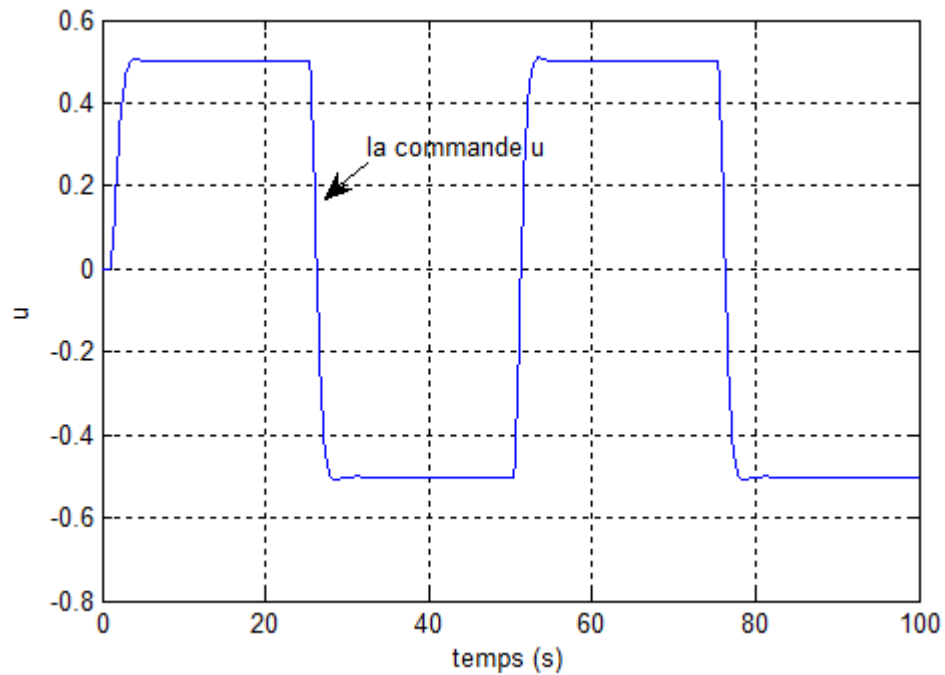


Figure. III.9 : Entrée de commande d'ordre fractionnaire

#### Commentaires :

D'après les figures obtenues, on constate :

- la stabilité du système est assurée.
- le système suit le modèle de référence.
- dépassement nulle dans le régime transitoire.
- l'erreur statique quasi nulle.
- temps de réponse très petite.

### III.3 Application à un MCC :

#### III.3.1 Introduction :

Les équipements industriels utilisent de plus en plus les entraînements à vitesse variable, et les moteurs à courant continu demeurent le plus utilisé car on peut varier sa vitesse de rotation par une simple action sur sa tension induit.



Figure. III.10 : Différents types de moteurs MCC

### III.3.2 Description du moteur à courant continu :

#### III.3.2.1 Définition :

Un moteur à courant continu est un dispositif qui permet de transformer l'énergie électrique en énergie mécanique. Il comporte un induit bobiné (le rotor) et un inducteur bobiné ou à aimant permanent (stator). Le rotor tournant confère une inertie propre ( $J$ ) et son implantation sur paliers implique des frottements mécaniques ( $fr$ ). Le schéma fonctionnel pour un moteur à courant continu est donné par la figure. III.14.

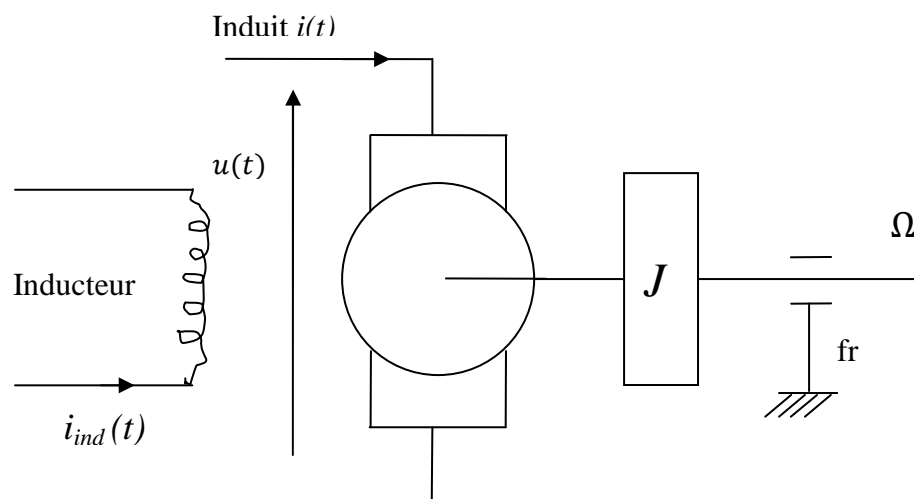


Figure. III.11 : Schéma de principe du moteur à courant continu.



### III.3.2.2. Le principe de fonctionnement :

La machine à courant continu fut la première à être inventée. Elle utilise comme source d'énergie une source continue. Son fonctionnement est basé sur un phénomène simple : la force de LAPLACE.

Un conducteur (une barre) de longueur ( $l$ ) placé dans un champ magnétique ( $B$ ) et parcouru par un courant ( $I$ ), est soumis à une force électromagnétique de Laplace. La force de Laplace ( $\vec{F}$ ) est toujours perpendiculaire au courant électrique ( $\vec{I}$ ) et au vecteur d'induction magnétique.

$$\vec{F} = \vec{I} \wedge \vec{B}.l$$

$l$ : longueur

La loi de Laplace constitue le principe de fonctionnement du moteur à courant continu. Cette force engendre un couple pour entraîner le moteur en rotation.

### III.3.2.3 Modélisation du moteur à courant continu :

La modélisation représente l'indispensable étape préliminaire à la conduite de processus industriels. Cette étape fondamentale est nécessaire soit pour l'élaboration d'une loi de commande ou pour le développement d'une procédure de diagnostic. modélisation d'un processus vise à établir les relations qui lient ses variables caractéristiques entre elles et à représenter d'une manière rigoureuse le comportement de ce processus dans un domaine de fonctionnement donné.

Nous considérons un moteur à courant continu alimenté par un hacheur [21]. L'ensemble (convertisseur + moteur) est régi par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} \frac{di(t)}{dt} &= -\frac{R}{L}i(t) - \frac{k_e}{L}u(t) \\ \frac{dy(t)}{dt} &= -\frac{k_e}{L}i(t) - \frac{f}{J}y(t) + \frac{1}{J}C_r(t) \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

où  $i(t)$  représente le courant d'induit,  $y(t)$  la vitesse angulaire du moteur,  $u(t)$  la tension de commande et  $C_r(t)$  le couple résistant (perturbation).

Ce moteur est à faible puissance, ses caractéristiques sont :

- Moment d'inertie  $J = 0.018 \text{ kg.m}^2$ ,
- Coefficient d'amortissement  $f = 0.0055 \text{ Nm/rad.s}$ ,
- Constante du couple moteur  $k_e = 1$
- Résistance du moteur  $R = 6.25 \Omega$
- Inductance du moteur  $L = 0.024 \text{ H}$

- Constante d'amplification  $k = 35$

En introduisant l'opérateur de différentiation, le système (III.12) devient :

$$i(t) = \frac{-k_e y + k u}{Ls + R} \quad (\text{III.13a})$$

$$y(t) = \frac{k_e i(t) - C_r(t)}{Js + f} \quad (\text{III.13b})$$

En substituant l'équation (III.13a) dans (III.13b),

$$y(s) = \frac{b_0}{s^2 + a_1 s + a_2} u(s) - \frac{br_0 + br_1}{s^2 + a_1 s + a_2} C_r(s) \quad (\text{III.14})$$

Avec ,

$$- b_0 = \frac{k_e k}{J.L}$$

$$- br_0 = \frac{1}{J}$$

$$- br_1 = \frac{R}{J.L}$$

$$- a_1 = \frac{J.R + L.f}{J.L}$$

$$- a_2 = \frac{f.R + k_e^2}{J.L}$$

Et le système devient après remplacement des valeurs numériques des paramètres,

$$y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} u(t) - \frac{55.55s + 14460}{s^2 + 260.7s + 2394} C_r(s) \quad (\text{III.15})$$

On supposant que le couple de perturbation est nul on obtient

$$y(s) = \frac{81018}{s^2 + 260.7s + 2394} u(s) \quad (\text{III.16})$$

Le modèle est un système de second ordre donné par l'équation (III.6)

Avec :  $w_n = 10$  ,  $\xi = 0.95$  ce qui donne

$$G_m(s) = \frac{100}{s^2 + 19s + 100} \quad (\text{III.17})$$

La fonction de transfert du moteur décret avec une période d'échantillonnage  $T=0.04$  s est donnée comme suit :

$$G(z) = \frac{9.816 z + 0.9112}{z^2 - 0.683 z + 2.959 \cdot 10^{-005}} \quad (\text{III.18})$$

La fonction de transfert du modèle est :

$$G_m(z) = \frac{0.06227 z + 0.04832}{z^2 - 1.357 z + 0.4677} \quad (\text{III.19})$$

### III.3.3 Simulations réalisées sous Matlab :

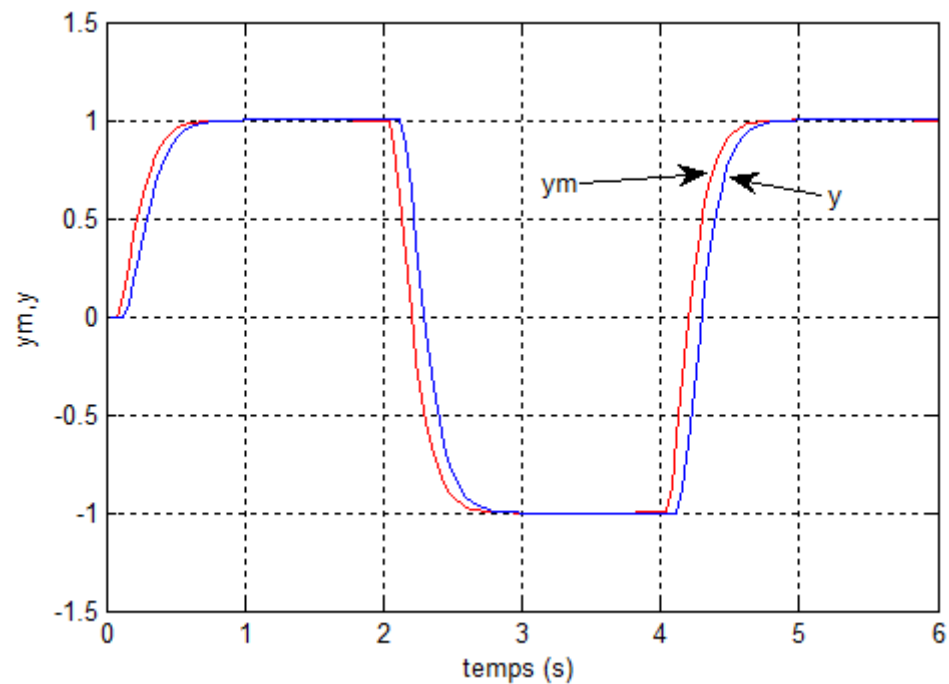
#### III.3.3.1 Cas du modèle d'ordre entier :

En prenant le moteur MCC et le modèle de référence  $G_m(z)$  et en appliquant la commande d'ordre entier on obtient les résultats suivants, avec les paramètres de réglage :

Le gain d'adaptation  $\gamma = 0.000001$

Le vecteur de paramètre  $\theta = [-0.2494 \quad 0.005]$

Les figures obtenus sont les suivantes :



**Figure. III.12 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre entier d'un MCC

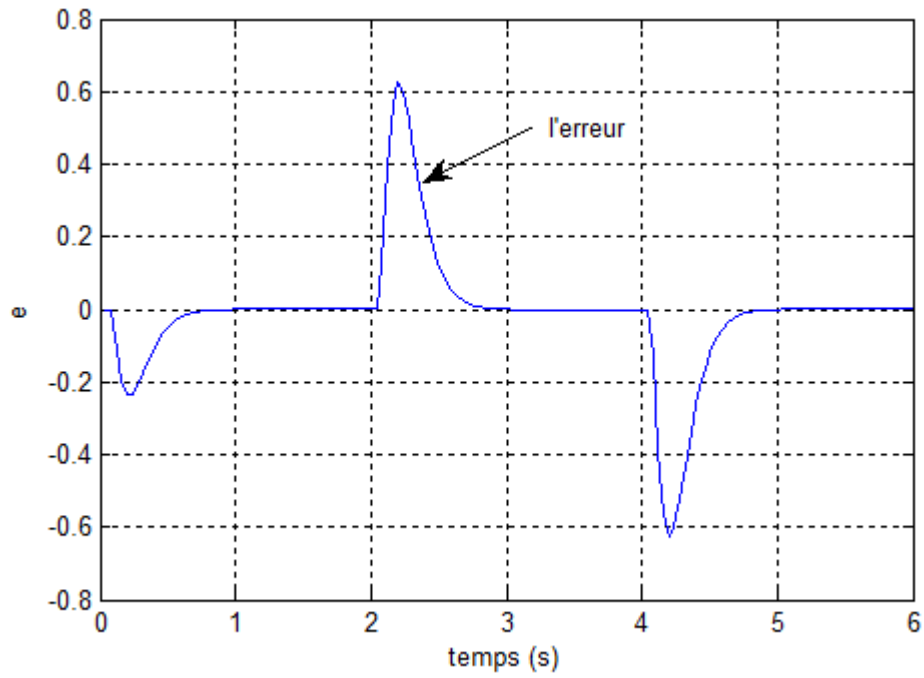


Figure. III.13 : l'erreur d'ordre entier

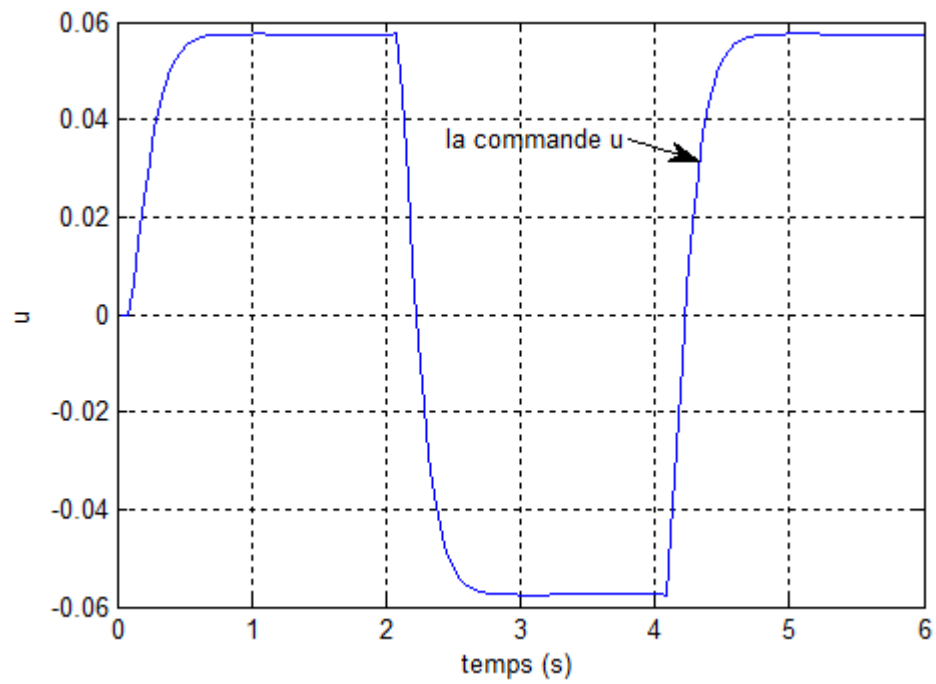


Figure. III.14 : signal de commande d'ordre entier

**Commentaires :**

D'après les figures obtenues, on constate :

- la stabilité du système est assurée.
- le système suit le modèle de référence.
- dépassement nulle dans le régime transitoire.
- l'erreur statique quasi nulle.
- temps de réponse rapide est petit.

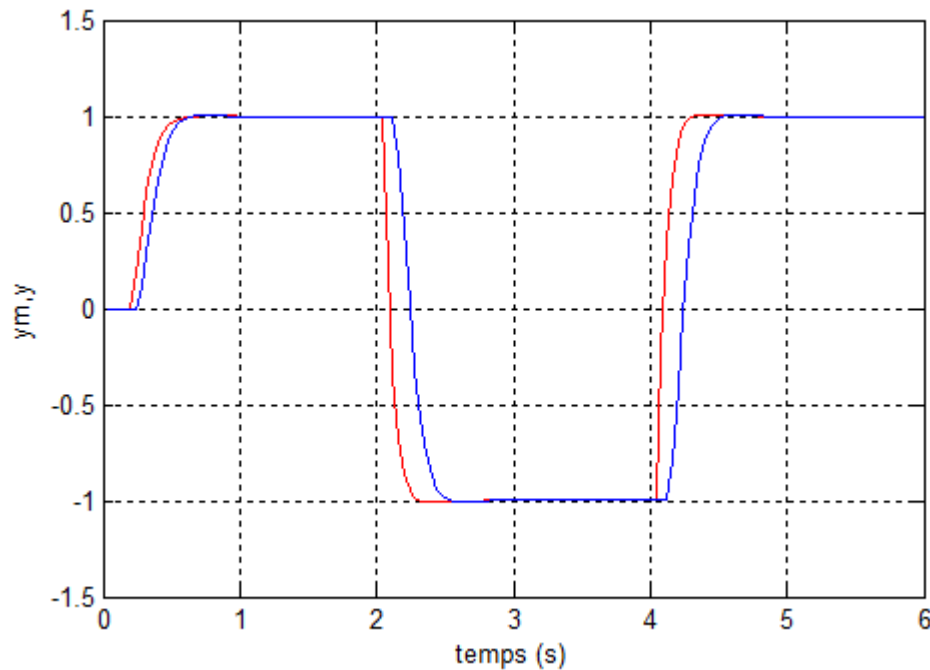
**III.3.3.2 Cas du modèle d'ordre fractionnaire :**

On garde le même système d'écrit par l'équation (III.5), et un modèle de référence d'ordre fractionnaire

Le modèle fractionnaire est :

$$G_m^f(s) = \frac{100}{(s^2 + 19s + 100)^{0.6}} \quad (\text{III.20})$$

Après l'application de la commande on obtient les résultats présents par les figures suivantes :



**Figure. III.15 :** Sortie de modèle de référence  $y_m$  et Sortie du système  $y$  d'ordre fractionnaire d'un MCC

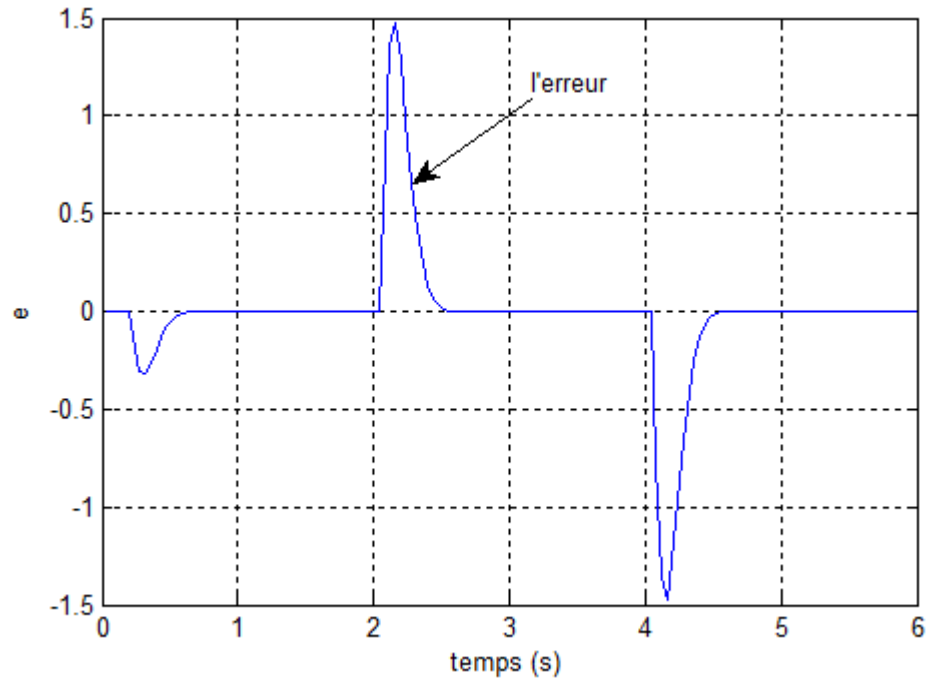


Figure. III.16 : L'erreur dans le cas d'ordre entier

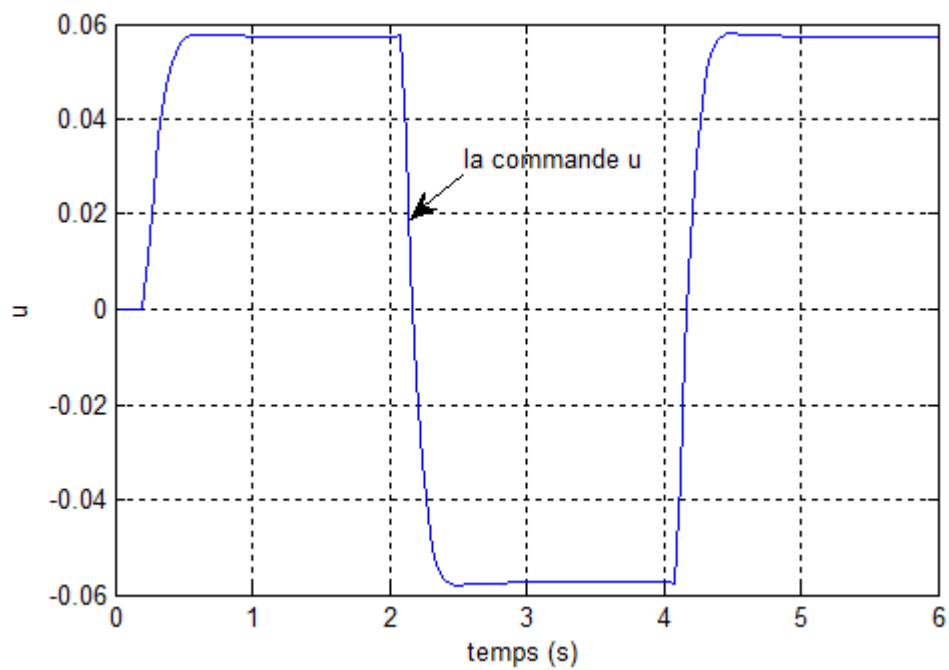


Figure. III.17 : Signal de commande d'ordre fractionnaire

**Commentaires :**

D'après les figures obtenues, on constate :

- la stabilité du système est assurée.
- le système suit le modèle de référence.
- dépassement nulle dans le régime transitoire.
- l'erreur statique quasi nulle.
- Temps de réponse très petite.

D'après les figures (III.12) jusqu'à (III.17), on remarque que nous avons joué sur les trois performances suivant : la précision, la rapidité et la stabilité.

- la précision : en remarque que la sortie du système  $y$  suit la référence  $y_m$  et les petites oscillations sont dues au changement brusque de  $U$  signal de références.

-la rapidité : la commande adaptative a modèle de référence d'ordre fractionnaire nous donne un meilleur temps de réponse par rapport au cas entier.

-la stabilité : Dans les deux cas (entier et fractionnaire) le système est stable.

**III.4 Conclusion :**

Le travail présenté dans ce chapitre expose une contribution à la commande adaptative avec modèle de référence. Notre objectif a été de trouver une commande qui conduit le système à un objectif désiré (le signal de référence).

Les résultats de simulation ont montré que la commande adaptative d'ordre fractionnaire est meilleure par rapport à la commande d'ordre entier surtout concernant la rapidité et la précision.

# Conclusion Générale



## **Conclusion Générale**

Le concept de la dérivation et de l'intégration d'ordre fractionnaire est un prolongement de la dérivation et de l'intégration d'ordre entier. Récemment, les opérateurs d'ordre fractionnaire ont trouvés beaucoup d'applications dans le domaine de l'électronique. Mais ces opérateurs sont en général mathématiquement très difficiles à manipuler.

Le travail présenté dans ce mémoire expose la commande adaptative avec modèle de référence. Notre objectif a été d'avoir une commande qui conduit le système à un objectif désiré (le signal de référence).

Les résultats de simulation ont montré que la commande adaptative d'ordre fractionnaire est meilleure par rapport à la commande d'ordre entier surtout concernant la rapidité et la précision.

Ce travail pourrait donner lieu à des études complémentaires dans les directions suivantes :

- Jusqu'à présent, nous avons considéré des systèmes bien modélisés, mais on sait qu'en pratique, les modèles sur lesquels on s'appuie sont incertains. La prise en charge de modèles incertains est un challenge important pour les futurs travaux.
- Généraliser les résultats obtenus au cas des systèmes multi-variables (MIMO).
- Etudier l'application des algorithmes de commande classique et moderne à des processus régis par des équations différentielles d'ordre fractionnaire.
- Développer de nouveaux schémas de commande adaptative robuste d'ordre fractionnaire.

# ANNEXES

## Annexe A

# Propriétés de la fonction Gamma

La fonction gamma complète  $\Gamma(x)$  joue un rôle important dans la théorie de l'intégration.

Il est donc convenable de présenter ici certaines formules liées à cette fonction.

Une définition générale de  $\Gamma(x)$  est celle donnée par la limite d'Euler,

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{N! N^x}{x(x+1)(x+2)\dots(x+N)} \right] \quad (\text{A.1})$$

Mais la définition intégrale,

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy, \quad x > 0 \quad (\text{A.2})$$

est utilisée plus souvent, même si elle est restreinte aux valeurs positives de  $x$ .

Une intégration par parties de (A.2) mène à la relation de récurrence suivante,

$$\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x) \quad (\text{A.3})$$

qui est la propriété la plus importante de la fonction gamma. Le même résultat est une conséquence simple de la définition de la limite d'Euler. Puisque,

$$\Gamma(1) = 1$$

Cette récurrence montre que pour tout entier positif  $n$

$$\Gamma(n + 1) = n\Gamma(n) = n[n - 1]\Gamma(n - 1) = \dots = n[n - 1] \dots 2.1.\Gamma(1) = n! \quad (\text{A.4})$$

qu'on peut réécrire comme,

$$\Gamma(x - 1) = \frac{\Gamma(x)}{[x-1]},$$

cette formule récursive sert aussi comme une continuation analytique, qui étend la définition de la fonction gamma aux arguments négatifs pour lesquels la définition (A.2) n'est pas applicable. L'extension montre que  $\Gamma(0)$  et  $\Gamma(-1)$  sont infinis, comme sont les valeurs de la fonction gamma pour tous les arguments entiers négatifs. Cependant le rapport des fonctions gamma d'entiers négatifs est fini. En effet, si  $n$  et  $N$  sont des entiers négatifs,

---

## Propriétés de la fonction Gamma

---

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = (-N)(-N+1) \dots (-n-2)(-n-1) = [-1]^{N-n} \frac{N!}{n!} \quad (\text{A.5})$$

Vu l'alternation de signe pour les arguments négatifs et la convergence asymptotique vers zéro pour les grandes valeurs de  $x$ , on peut approximer la fonction gamma par,

$$\frac{1}{\Gamma(x)} \approx \frac{x^{\frac{1}{2}-x}}{\sqrt{2\pi}} e^x, \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.6})$$

La fonction gamma  $\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)$  et  $\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)$  donne des multiples de  $\sqrt{\pi}$  ; en effet,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!} \quad (\text{A.7})$$

et,

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{[-4]^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!} \quad (\text{A.8})$$

---

# BIBLIOGRAPHIE

## Références bibliographiques

- [1] Ahn H.-S., Bhambhani V., Chen Y.-Q. Fractional-order integral and derivative controller for temperature profile tracking. *Sadhana*. Vol. 34, No. 5, pp. 833–850, October 2009.
- [2] Aoun M., Malti R., Levron F., Oustaloup A. Numerical Simulations of Fractional Systems: An Overview of Existing Methods and Improvements. *Nonlinear Dynamics*, Vol. 38, pp. 117–131, 2004.
- [3] Bensafia Y., Khettab K., Ladaci S. “Using the Fractional Model Reference for Tracking Trajectory in Adaptive Control,” In: 2nd International Conference on Networking and Advanced Systems, ICNAS 2015, Annaba, Algeria, May 6-7, 2015.
- [4] Bensafia Y., Ladaci S. “Adaptive control with fractional order reference model,” *Int. J. of Sciences and Techniques of Automatic control & computer engineering, IJ-STA*, Vol. 5, No. 2, pp. 1614–1623, 2011.
- [5] Bensafia Y., Ladaci S., Khettab K. “Commande Multi-modèles du Moteur a Courant Continu,” International Conference on Electronics and Oil, ICEO’2011, Ouragla, Algeria, March 2011.
- [6] Bensouici. T., Charef.A. “Design of fractional order digital FIR integrator and differentiator,” 1<sup>ère</sup> Conférence Internationale en Génie Electrique, CIGET’09, Tébessa, Algérie, 25-26 Octobre, 2009.
- [7] Bertrand N., Sabatier J., Briat O., Vinassa J.M. “Fractional non-linear modelling of ultracapacitors,” *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, Elsevier, Vol.15, No. 5, pp. 1327-1337, 2010.
- [8] Brin. I.A. On the stability of certain systems with distributed and lumped parameters, *Automatic Remote Control*, N° 23, 1962.
- [9] Caponetto R., Dongola G., Fortuna L., Petráš I. “A Fractional Model for IPMC Actuators,” *IEEE Instrumentation and Measurement Technology Conference Proceedings, IMTC 2008*, pp. 2103-2107, 12-15 May 2008.
- [10] Charef A. “Analogue realisation of fractional-order integrator, differentiator and fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  controller,” *IEE Proc.-Control Theory Appl.*, Vol. 153, pp. 714-720, 2006.
- [11] Charef A., “Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation”, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 46, pp. 195-210, 2006.
-

- [12] Charef A., Sun. H.H., Tsao .Y.Y., Onaral. B. “Fractal system as represented by singularity function,” IEEE Trans. On Automatic Control, Vol.37, No. 9, pp.1465-1470,1992.
- [13] Colbaugh R., Glass K., Seraji H., “Adaptive tracking control of manipulators: Theory and experiments,” Robotics& Computer-Integrated Manufacturing; pp209–216,1996.
- [14] Craiem D.O.,Armentano R.L. “Arterial viscoelasticity: a fractional derivative model,” 28th Annual International Conference of the IEEE on Engineering in Medicine and Biology Society, EMBS '06, pp. 1098-1101, September 3, 2006.
- [15] El-Sayed A.M.A. and F.M. Gaafar. Fractional calculus and some intermediate physical processes. Applied Mathematics and Computation, 144, 2003.
- [16] Ferdi Y. “Computation of Fractional Order Derivative and Integral via Power Series Expansion and Signal Modelling”. Nonlinear Dynamics, Vol. 46, pp. 1–15, 2006.
- [17] Gorenflo R.,Mainardi F. “ Fractional Calculus: Integral and Differential Equations of Fractional Order, Fractals and Fractional Calculus ,” in Continuum Mechanics, Springer Verlag, pp. 223 – 276, Wien and New York, 1997.
- [18] Hilfer R. “Applications of Fractional Calculus in Physics,” World Scientific, 2000
- [19] Hamdaoui K. CharefA. “A New Discretization Method for Fractional Order Differentiators via Bilinear Transformation,” 15th Int. Conference on Digital Signal Processing, Cardiff, UK, July 1-4, pp. 280-283,2007.
- [20] Houmor T. “Analyse du Chaos dans un Système d’Équations Différentielles Fractionnaires,” Thèse Doctorat en sciences, Université Mentouride Constantine,2014.
- [21] Isermann. R, Lachmann. K..H. and Matko. D. “ Adaptive control systems,” ,1992.
- [22] Kulish V.V.,Chan W.K. “Fractional Model of Market Behavior: a New Modeling Approach,” International Conference onCyberworlds, pp. 289-296, 23-25 November 2005.
- [23] Ladaci S., Bensafia Y. “Indirect fractional order pole assignment based adaptive control”, Engineering Science and Technology, an International Journal, Elsevier, [DOI: 10.1016/j.jestch.2015.09.004], 2015.
- [24] Ladaci S., Charef A. “An Adaptive Fractional  $PI^{\lambda}D^{\mu}$  Controller” in Proceedings Sixth International Symposium on Tools and Methods of Competitive Engineering, TMCE 2006. Edited by I. Horvath and J. Duhovnik, Ljubljana, Slovenia, pp. 1533-1540, Avril 18-22, 2006.
- [25] Ladaci S., Charef A. “Commande adaptative à modèle de référence d’ordre fractionnaire d’un bras de robot,” Revue Communication Sciences & Technologie, pp. 50–52, 2002
-

- [26] Ladaci S., Charef A. “Fractional order adaptive control systems: A survey,” In: E. W. Mitchell, S. R. Murray (Ed.), *Classification and Application of Fractals*. Nova Science Publishers, USA, pp. 261-275, October 2012.
- [27] Ladaci S., Charef A., Loiseau. J.J., “Robust fractional adaptive control based on the strictly positive realness condition,” *Int. J. of Applied Mathematics and Computer Science*; Vol. 19, No. 1, pp. 69-76, 2009.
- [28] Ladaci S. “Contribution a la Commande Adaptative d'Ordre Fractionnaire,” Thèse de Doctorat, Département d'Electronique, Université Mentouri de Constantine, 2007.
- [29] Landau. I.D. “A survey of model reference adaptive techniques: Theory and applications,” In: *Automatica*, vol. 10, pp. 353-379 , 1974.
- [30] Martinez R.,Bolea Y.,Grau A.,Martinez H. “Fractional DC/DC converter in solar-powered electrical generation systems,” *IEEE Conference on Emerging Technologies & Factory Automation, ETFA 2009*, pp. 1-6, 22-25 September 2009.
- [31] Matsuda K., Fuji H. “H1 optimized wave-absorbing control: analytical and experimental results,” *J. Guidance, Contr. & Dynamics*, Vol. 16, pp. 1146–1153,1993.
- [32] MonjeA., Chen Y.-Q. “Fractional-order Systems and Controls, Fundamentals and Applications”, pp. 193-194, Springer, 2010.
- [33] N'Doye I.,Zasadzinski M.,Radhy N.E.,Bouaziz A. “Robust Controller Design for Linear Fractional-Order Systems with Nonlinear Time-Varying Model Uncertainties,” *17th Mediterranean Conference on Control and Automation, MED'09*, pp. 821-826, Thessaloniki, 24-26 June 2009.
- [34] Oustaloup A., Mathieu B., LanusseP. “The CRONE control of resonantplants: application to a flexible transmission,” *European J. Contr.*, Vol. 1, pp.113–121,1995.
- [35] OustaloupA. “La Commande CRONE,” Hermès science publications, Paris, 1991.
- [36] Oustaloup A., Moreau X., Nouillant M. “The CRONE suspension,” *Control Eng. Practice*, Vol. 4, No. 8, pp. 1101–1108,1996.
- [37] Podlubny I. “Fractional Differential Equations,” Academic Press, New York,1999.
- [38] Petras I., Podlubny I., O'Leary P., Dorcak L., Vinagre B.M. “ Analogue Realization of Fractional Order Controllers,” *Fakulta Berg , TU Kosice*, 2002.
- [39] Racewicz S.,RiuD.,RetièreN.,ChrzanP.J. “Non linear half-order modeling of synchronous machine,” *IEMDC 2009*, pp. 778-783, Miami, Florida, 3-6 May 2009.
- [40] Samko S.G., A.A. Kilbas, and O.I. Marichev. *Fractional integrals and derivatives: Theory and applications*. Gordon and Breach Science Publishers. 1993.
-



[41] Srivastava. H.M. and R.K. Saxena. Operators of fractional integration and their applications. Applied Mathematics and Computation, 118, 2001.

[42] Vinagre B.M., Petras I., PodlubnyI., Chen Y.-Q. "Using fractional-order adjustment rules and fractional order reference models in model reference adaptive control," Nonlinear Dynamics and Chaos in Engineering Systems, Nonlinear Dynamics, Vol. 29, pp. 269-279, 2002.

---