

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique



Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira
Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département de Physique



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme
de Master en Physique

Spécialité :

Physique Théorique des Hautes Énergies

par :

BRAHIM CHOUYA

Thème :

MODÈLE FLUIDE DES ONDES ACOUSTIQUES DANS UN PLASMA À DEUX COMPOSANTES

Soutenu publiquement, le 30/06/2016, devant le jury composé de :

M. D. MADI	Maître de Conférences (MCA)	U.A.M.O.B.	Président
M. M. A. SADOON	Maître de Conférences (MCB)	U.A.M.O.B.	Examineur
M. S. BENAMARA	Maître Assistant (MAA)	U.A.M.O.B.	Examineur
M. S. BOUKHALFA	Maître Assistant (MAA)	U.A.M.O.B.	Rapporteur

REMERCIEMENTS

En préambule à ce mémoire, je souhaiterais adresser mes remerciements les plus sincères aux personnes qui m'ont apporté leur aide et qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire ainsi qu'à la réussite de cette formidable année universitaire.

Je tiens à remercier sincèrement Monsieur S. Boukhalfa qui, en tant que rapporteur, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il m'a bien consacré et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur D. Madi d'avoir bien voulu présider le jury de ma soutenance.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur M. A. Sadoun et à Monsieur S. Benamara pour leur contribution à l'évaluation de ce travail. Qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Enfin, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et amis, qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de la réalisation de ce mémoire.

TABLE DES MATIÈRES

Remerciements	i
Table des matières	ii
Table des figures	iv
Introduction générale	1
1 Généralités sur les plasmas	4
1.1 Introduction	4
1.2 Les échelles caractéristiques d'un plasma	5
1.2.1 Hypothèse de quasi-neutralité	5
1.2.2 Écrantage électrique et longueur de Debye	5
1.2.3 Fréquence plasma électronique et ionique	7
1.2.4 Critères d'existence d'un plasma	7
1.3 Classification des plasmas	8
1.4 Les différentes descriptions mathématiques d'un plasma	10
1.4.1 Description cinétique	10
1.4.2 Description hydrodynamique	11
2 Ondes acoustiques dans un plasma à deux fluides	13
2.1 Introduction	13
2.2 Relation de dispersion des ondes linéaires	14
2.2.1 Mode ionique de basse fréquence	14

2.2.2	Mode électronique de haute fréquence	16
2.2.3	Comparaison entre les deux modes	18
2.3	Solitons acoustiques ioniques de large amplitude	19
2.3.1	Équations de base et formulation	19
2.3.2	Solitons et conditions d'existence	21
2.3.3	Résultats et discussion	23
2.4	Solitons acoustiques ioniques de faible amplitude	26
3	Ondes acoustiques dans un plasma relativiste à deux fluides	28
3.1	Introduction	28
3.2	Équations de base et formulation	29
3.3	Ondes acoustiques électroniques relativistes	31
3.3.1	Analyse du pseudo-potentiel	31
3.3.2	Résultats et discussion	33
3.4	Ondes acoustiques ioniques relativistes	33
3.4.1	Analyse du pseudo-potentiel	33
3.4.2	Résultats et discussion	35
3.5	Conclusion	36
	Conclusion générale	43
A	Différentes approximations employées en physique des plasmas	45
A.1	Approximation des plasmas froids	45
A.2	Approximation des plasmas isothermes	45
A.3	Approximation des plasmas adiabatiques	46
B	Ondes sonores dans un fluide	48
	Bibliographie	49

TABLE DES FIGURES

1.1	Diagramme de classification des plasmas.	9
2.1	Relation de dispersion pour les ondes électroniques (a) et les ondes ioniques (b) linéaires dans un plasma sans collisions.	18
2.2	Région d'existence de solitons en fonction de M	24
2.3	Potentiel électrostatique solitaire de l'onde acoustique ionique.	24
2.4	Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 2.3.	25
2.5	Le profil spatial de la densité électronique et ionique ($M = 1.12$).	25
3.1	Potentiel de Sagdeev associé aux ondes de Langmuir relativistes de large amplitude ($W = 1849.3$).	38
3.2	Un exemple typique de pseudo-potentiel en forme de puits de potentiel ($W = 1870.5$ et $v_0 = 0.15$).	38
3.3	Un exemple typique de pseudo-potentiel qui n'est pas en forme de puits de potentiel ($W = 1898.4$ et $v_0 = 0.20$).	39
3.4	Région d'existence des ondes de Langmuir relativistes de large amplitude en terme de la vitesse v_0 et de l'énergie W	39
3.5	Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude.	40
3.6	Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude.	40
3.7	Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude ($M = 1.20$).	41
3.8	Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude ($M = 1.50$).	41

3.9	Région d'existence des ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude en terme du potentiel ϕ et du nombre de Mach M .	42
-----	---	----

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Généralement, il est admis que 99% de la matière ordinaire de l'univers est à l'état plasma, milieu composé de particules neutres, d'ions et d'électrons. Un plasma se définit donc comme étant un gaz ionisé dont les atomes sont dissociés en ions à charge positive et en électrons à charge négative. L'état plasma de la matière est très répandu dans la nature : les atmosphères, les nébuleuses et la majeure partie de l'hydrogène interstellaire sont à l'état plasma. Notre planète est elle même entourée d'un plasma à une distance comprise entre 75 et 1000 km de sa surface. Cette couche ionisée de la haute atmosphère, qu'on appelle l'ionosphère, facilite et rend possible les communications radios et est à l'origine de l'apparition des aurores boréales. Dans le voisinage immédiat de notre planète, les ceintures de radiation de Van Allen⁽ⁱ⁾ et le vent solaire sont autant d'autres exemples de l'abondance du plasma. Plus près de nous, on le rencontre dans les flammes, les explosions et les ondes de chocs, mais également dans les arcs électriques et en particulier les éclairs atmosphériques. Les plasmas sont aussi créés de façon artificielle, en laboratoire. Les décharges électriques dans les tubes fluorescents et les plasmas de fusion dans les tokamaks en constituent deux exemples. Par ailleurs, le développement de la physique des plasmas, a permis la découverte de nombreuses applications technologiques telles que les lampes à néon, les écrans plasmas, et notamment en micro-électronique où

(i). Régions de la magnétosphère renfermant des particules chargées à haute énergie qui sont piégées par le champ magnétique terrestre.

tous les composants électroniques nécessitent des traitements plasma pour l'amélioration et le contrôle fin des propriétés de surface des matériaux : dépôt, gravure, implantation, etc.

Un plasma, un milieu dispersif fortement non linéaire, est le siège d'une variété considérable d'ondes linéaires et non linéaires. L'utilisation et l'étude de ces dernières est une des techniques les plus puissantes pour diagnostiquer le plasma. La caractérisation des ondes et leurs conditions de propagation constitue un champ d'études à lui seul de la physique des plasmas. Dans de nombreuses situations, l'accès aux caractéristiques d'un plasma pour en comprendre le comportement et l'évolution passe par l'utilisation d'ondes. Ainsi, l'analyse des informations extractibles à partir d'une onde ayant traversé un plasma inclut intrinsèquement le fait que l'historique de cette onde est connu ou suppose d'être capable de le reconstituer pour fournir une interprétation appropriée des données engrangées durant son passage au travers du plasma. Dans un plasma non-magnétisé le tableau des ondes est assez restreint. Seul trois modes peuvent exister ; deux électrostatiques et un électromagnétique. Le mode électromagnétique n'est autre que l'onde de lumière. Le premier mode électrostatique est l'onde acoustique ionique, et le second est l'onde de Langmuir. Dans ce qui suit, nous nous proposons, dans le premier temps, d'analyser ces deux modes électrostatiques, linéaires et non linéaires, qui peuvent se propager dans un plasma sans collisions à deux composantes. Par la suite, nous allons chercher dans quelle mesure et sous quelles conditions les effets relativistes dus aux vitesses fluides des électrons et des ions peuvent affecter et modifier ces deux modes acoustiques dans un plasma à deux fluides relativistes.

Ce présent mémoire est organisé de la façon suivante : le premier chapitre sera dédié au rappel des propriétés des plasmas en général et des éléments théoriques nécessaires à l'étude de la dynamique des plasmas. Nous explorons ainsi les deux approches habituellement utilisées en physique des plasmas, à savoir l'approche hydrodynamique et l'approche cinétique.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des deux modes acoustiques électrostatiques linéaires dans un plasma composé de deux fluides en dérivant pour

chaque mode une relation de dispersion. Ensuite, dans le but d'analyser le comportement non linéaire de l'onde acoustique ionique stationnaire localisée, nous considérons le cas d'un plasma composé d'ions froids et d'électrons chauds supposés à l'équilibre thermodynamique. Nous nous intéresserons aussi bien au cas de l'amplitude arbitraire, en utilisant la méthode de pseudo-potentiel, qu'à celui de l'amplitude faiblement non linéaire, en employant la technique de la perturbation réductive.

Le troisième et dernier chapitre de ce mémoire sera dédié à l'étude des ondes acoustiques électrostatiques de large amplitude dans un plasma relativiste à deux fluides. Le point de départ sera l'ensemble des équations de base de l'hydrodynamique relativiste, qui décrit la dynamique des deux fluides électronique et ionique relativistes, couplée avec l'équation de Poisson, qui décrit l'évolution du potentiel électrostatique dans le plasma. Les solutions stationnaires non linéaires de notre modèle peuvent être formulées en termes d'une équation intégrale qui peut être vue comme l'équation d'énergie d'une pseudo-particule qui se déplace dans un pseudo-potentiel. L'analyse de ce dernier nous permettra d'examiner de près les conditions d'existence des ondes acoustiques stationnaires électroniques et ioniques dans un plasma relativiste à deux fluides relativistes.

Le mémoire se terminera par une conclusion générale, où nous présenterons un résumé des résultats obtenus et quelques perspectives, ainsi que de quelques compléments servant d'annexes pour le présent manuscrit.

1

GÉNÉRALITÉS SUR LES PLASMAS

1.1 Introduction

Le terme « plasma » a été introduit pour la première fois par le physicien américain Irving Langmuir [1] en 1928 pour désigner le comportement du gaz ionisé électriquement neutre dans des tubes à décharge. Ce terme de plasma fut ensuite repris par les astrophysiciens pour désigner un état dilué de la matière, analogue à un gaz constitué de particules chargées mais électriquement neutre. Un plasma est donc un gaz partiellement ou totalement ionisé qui se compose d'un ensemble de particules de différentes espèces : atomes, molécules neutres, ions positifs ou négatifs et électrons. À l'échelle macroscopique, ils sont généralement quasi-neutres. Cela signifie que la somme totale des charges est nulle dans un volume macroscopique. Les propriétés spéciales des plasmas sont dues au long rayon d'action de la force d'interaction électromagnétique entre particules. Les plasmas conservent cependant certaines propriétés des gaz (grande compressibilité, énergie interne, et pression proportionnelle à la température absolue).

Le plasma est aussi présenté comme le quatrième état de la matière, dans l'échelle des températures, après les états solide, liquide et gazeux. En effet, la matière passe de l'état solide à l'état liquide puis à l'état gazeux en fonction de la

température. À une température de 10^5 K correspond une énergie d'environ 10 eV, ce qui est approximativement l'énergie d'ionisation. À cette température la matière est ionisée : on passe à l'état plasma. Nous observons les plasmas à l'état naturel dans les étoiles, les aurores boréales, les nébuleuses, les couronnes solaires, les éclairs ou encore dans l'ionosphère. Cependant, des plasmas existent à des températures inférieures, notamment ceux produits artificiellement en laboratoire. Ces derniers rendent réalisables de nombreuses applications de notre vie quotidienne tels que : les écrans plasma, les néons, les photocopieurs les arcs électriques pour la soudure, les torches à plasma pour le découpage ou le revêtement de surface, les traitements de surface, etc.

1.2 Les échelles caractéristiques d'un plasma

Nous rappelons ici très brièvement un certain nombre de concepts fondamentaux à la nature de n'importe quel type de plasma à savoir : la fréquence de Langmuir ou fréquence plasma, la longueur de Debye et les critères d'existence d'un plasma.

1.2.1 Hypothèse de quasi-neutralité

La quasi-neutralité est une particularité très importante qui régit l'existence et l'évolution des plasmas. Dans un plasma, la matière est dissociée en ses composante électriquement positive et négative. Il est donc en générale macroscopiquement neutre de point de vue électrique. Une des caractéristique de l'état plasma est sa tendance à maintenir cette quasi-neutralité. En effet, si, dans un plasma initialement neutre, on produit une perturbation locale sous la forme d'un excès de charges électriques positives ou négatives, le développement des champs de charge induit une réponse collective qui va tendre à restaurer cette neutralité macroscopique. Le terme macroscopique signifié que cette neutralité est vérifié qu'en moyenne, à une échelle spatialement suffisamment grande.

1.2.2 Écrantage électrique et longueur de Debye

Dans un plasma, les électrons et les ions suivent des trajectoires aléatoires et se meuvent avec des grandes vitesses. Une charge positive quelconque attire les électrons et repousse les ions créant ainsi un nuage électronique dans son voisinage immédiat. On parle alors d'écrantage de Debye, car au delà d'une certaine distance,

appelée longueur de Debye, le champ électrique créé par cette charge test sera annihilé et ne sera plus ressenti par le reste des particules chargées. En effet, la charge test créera un potentiel électrique dont l'évolution est donnée par l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 \phi = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \quad (1.1)$$

avec n_i et n_e sont la densité ionique et électronique respectivement. La densité ionique est considérée uniforme et égale à la densité à l'équilibre $n_{i0} = n_{e0} = n_0$. Les électrons, quant à eux, sont supposés être à l'équilibre thermodynamique, autrement dit, leur densité obéit à la loi de Maxwell-Boltzmann :

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (1.2)$$

où k_B est la constante de Boltzmann et T_e est la température électronique. L'équation de Poisson se réécrit donc sous cette forme

$$\nabla^2 \phi = \frac{n_0 e}{\epsilon_0} \left[\exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) - 1 \right] \quad (1.3)$$

Si on développe l'exponentielle, qui figure dans la dernière équation, au premier ordre, en supposant des perturbations électrostatiques de faible amplitude ($|\frac{e\phi}{k_B T_e}| \ll 1$), on obtient une équation différentielle du second ordre en ϕ et dont la solution s'écrit

$$\phi(r) = \phi_0 \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right), \quad \text{où} \quad \lambda_D \equiv \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T_e}{n_0 e^2}} \quad (1.4)$$

est un paramètre inhérent à tout état plasma de la matière, ayant la dimension d'une longueur, appelé longueur de Debye. Il s'agit d'une estimation de la distance au-delà de laquelle l'influence du champ électrique d'une charge test n'est plus ressentie par les autres particules chargées. Elle correspond donc à une échelle spatiale à partir de laquelle nous pourrions considérer le plasma quasi-neutre.

1.2.3 Fréquence plasma électronique et ionique

Si un plasma initialement quasi-neutre subit une perturbation, ses électrons vont spontanément et collectivement se mettre à osciller autour de leurs positions d'équilibres avec une certaine pulsation [2]

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} \simeq 56.4 \sqrt{n_e} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (1.5)$$

dite « pulsation plasma électronique » à laquelle est associée la fréquence (propre) électronique $f_{pe} = \omega_{pe}/2\pi$. Lors d'une oscillation dans un plasma avec dissipation, l'inverse de cette fréquence correspond à l'échelle de temps caractéristique de la réponse collective des électrons à la perturbation. On peut montrer que, dans certaines conditions, les ions effectuent aussi de telles oscillations, avec une pulsation [2]

$$\omega_{pi} = \sqrt{\frac{n_i Z^2 e^2}{\epsilon_0 m_i}} \simeq 1.32Z \sqrt{\frac{n_i}{A}} \quad (\text{s}^{-1}) \quad (1.6)$$

dite « pulsation plasma ionique », Z et A dénotent le nombre de charge et le nombre de masse respectivement.

1.2.4 Critères d'existence d'un plasma

Pour que la neutralité macroscopique soit réalisée au sein d'un plasma, il faut que L , la plus petite dimension définissant le volume occupé par le plasma, soit beaucoup plus grande que la longueur de Debye, soit

$$L \gg \lambda_D \quad (1.7)$$

et que le nombre de particules chargées N_D que comporte une sphère de Debye (sphère dont le rayon est égal à la longueur de Debye λ_D) doit être beaucoup plus grand que 1, soit

$$N_D = n_e \left(\frac{4}{3} \pi \lambda_D^3 \right) \gg 1 \quad (1.8)$$

Dans ce cas de figure, l'écrantage est fort et les effets collectifs sont dominants. Les plasmas sont dits alors cinétiques. Dans le cas contraire, i.e. pour un nombre N_D très petit devant 1, l'écrantage est faible et les plasmas sont fortement corrélés. Par

	n_e (m ⁻³)	T_e (keV)	ω_p (s ⁻¹)	λ_D (m)	N_D	ν_{ei} (Hz)
Gaz interstellaire	10 ⁶	10 ⁻⁵	6 × 10 ⁴	0.7	3 × 10 ⁵	4 × 10 ⁸
Vent solaire (1UA)	10 ⁷	10 ⁻²	2 × 10 ⁵	2	4 × 10 ⁹	10 ⁻⁴
Ionosphère	10 ¹²	10 ⁻⁴	6 × 10 ⁷	2 × 10 ⁻³	10 ⁴	10 ⁴
Couronne solaire	10 ¹²	0.1	6 × 10 ⁷	0.07	4 × 10 ⁸	0.5
Décharge d'arc	10 ²⁰	10 ⁻³	6 × 10 ¹¹	7 × 10 ⁻⁷	40	10 ¹⁰
Plasmas de Tokamak	10 ²⁰	10	6 × 10 ¹¹	7 × 10 ⁻⁵	3 × 10 ⁷	4 × 10 ⁴
FCI	10 ²⁸	10	6 × 10 ¹⁵	7 × 10 ⁻⁹	4 × 10 ³	4 × 10 ¹¹

Table 1.1 – Paramètres de quelques plasmas typiques.

ailleurs, la présence des phénomènes de collision entre les différents constituants de plasma, caractérisés par une fréquence ν_{col} , tendent à amortir les oscillations de plasma. Par conséquent, l'existence des effets collectifs implique que

$$\omega_{pe,i} \gg \nu_{col} \quad (1.9)$$

qui permet, en fait, de négliger les collisions dans la description des oscillations de plasma. Les inégalités (1.7), (1.8) et (1.9) constituent donc les trois conditions d'existence d'un plasma ; autrement il s'agirait d'un plasma « non idéal » dans lequel il ne peut y avoir d'effet d'écran. La Table 1.1 dresse les valeurs approximatives des paramètres plasma pour différentes variantes de plasmas artificiels et naturels [2]. En conclusion, le comportement collectif caractéristique d'un plasma n'est observé que sur une échelle de temps plus longue que la période de plasma ($2\pi/\omega_p$) et sur une échelle d'espace plus grande que la longueur de Debye (λ_D).

1.3 Classification des plasmas

Les divers types de plasmas peuvent être classés selon leur densité et température électronique car ces deux paramètres déterminent en grande partie les propriétés des plasmas. Les plasmas classiques couvrent une très large gamme de densité électronique allant de 1 à plus de 10²⁵ électrons par centimètre cube pour des températures électronique de quelques centièmes d'électrons-volts (1eV \equiv 1.6 × 10⁴ K) à plus de 1 MeV (1.6 × 10¹⁰ K). Le diagramme de la figure (1.1) récapitule les différents plasmas selon leur densité électronique (en cm⁻³) et leur température (en

eV) dans une échelle logarithmique [3].

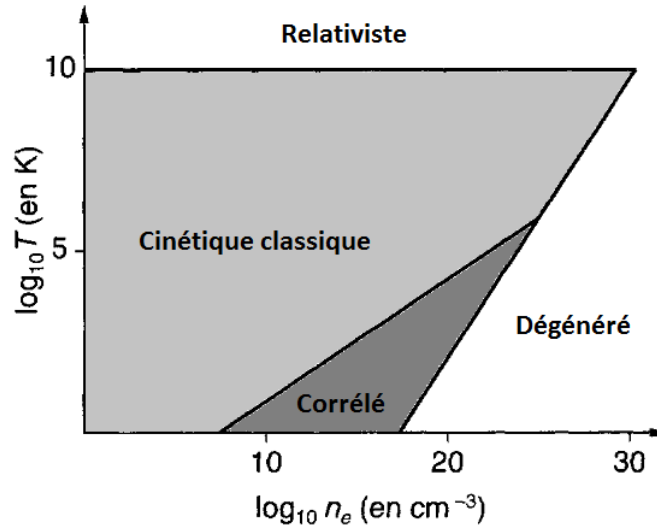


Figure 1.1 – Diagramme de classification des plasmas.

Nous distinguons également les plasmas relativistes dans lesquels l'énergie d'agitation thermique est de l'ordre de l'énergie de masse ou au repos des électrons (c'est-à-dire $T \geq m_e c^2$). En général, ce sont les électrons qui ont une température élevée (de l'ordre de quelques MeV), alors que les ions et les neutres restent à des températures relativement basses. $T = m_e c^2$ (soit $T \sim 10^{10}$ K) représente la limite du domaine d'application de la mécanique classique non relativiste. Une autre frontière s'impose entre le cas classique et quantique (dégénéré). En effet, si dans un plasma l'énergie d'agitation thermique est supérieure à l'énergie de Fermi d'un gaz dégénéré, i.e.,

$$k_B T \geq \epsilon_F \equiv \frac{\hbar^2}{2m_e} (3\pi^2 n_e)^{2/3} \quad (1.10)$$

celui-ci est de nature quantique, autrement il est de nature classique. Dans les plasmas classiques, on distingue deux catégories de plasma selon que les effets d'interactions entre particules dominant ou pas. On exprime ceci avec le paramètre de couplage $g = 1/N_D$. Si g est plus petit que 1 ($g \ll 1$), alors le plasma est cinétique, c'est à dire dominé par les effets cinétiques des particules le composant. Dans le cas contraire ($g \geq 1$), alors le plasma est corrélé ou fortement couplé dont la structure est fluide.

1.4 Les différentes descriptions mathématiques d'un plasma

Pour décrire la dynamique d'un plasma, nous pouvons soit adopté l'approche hydrodynamique, qui considère le plasma comme étant un fluide caractérisé par un certain nombre de grandeurs macroscopiques telles que la densité, la vitesse du fluide, la pression, etc. ; soit, pour une description plus fine, adopté l'approche cinétique, qui tient compte de la nature moléculaire du fluide, en introduisant des grandeurs telles que les fonctions de distribution des vitesses qui donnent une description microscopique classique du fluide.

1.4.1 Description cinétique

Dans ce type de description, chaque espèce de particules s dans le plasma est caractérisée par sa fonction de distribution $f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ définie comme la densité de particules dans l'espace de phase à six dimensions. Le nombre de particules doit être conservé, ce qui impose l'équation de continuité dans l'espace de phase, appelée équation de Vlasov,

$$\frac{\partial f_s}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{r}} + \frac{q_s}{m_s} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot \frac{\partial f_s}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (1.11)$$

où s dénote l'espèce de particules considérée, \mathbf{E} , \mathbf{B} , m_s et q_s représentent respectivement le champ électrique, le champ magnétique, la masse et la charge de l'espèce s . La fonction de distribution f_s contient toutes les informations physiquement pertinentes sur l'espèce s . Ces informations sont obtenues en prenant les moments successifs de la fonction de distribution :

La densité des particules de l'espèce s :

$$n_s(\mathbf{r}, t) = \int f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.12)$$

La vitesse moyenne des particules de l'espèce s :

$$\mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{n_s(\mathbf{r}, t)} \int \mathbf{v} f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.13)$$

La pression et la température :

$$p_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = k_B n_s T_s = m_s \int (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) \otimes (\mathbf{v} - \mathbf{v}_s) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.14)$$

Le flux d'énergie :

$$\mathbf{Q}(\mathbf{r}, t) = \frac{m_s}{2} \int \mathbf{v}^2 \mathbf{v}_s(\mathbf{r}, t) f_s(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v \quad (1.15)$$

La description cinétique est, en pratique, le modèle le plus complet pour la description d'un plasma. Cependant, les moyens numériques actuels ne permettent que la description de petits volumes de plasma. Pour traiter de plus grands volumes, il est nécessaire de faire appel à une modélisation réduite : la description hydrodynamique.

1.4.2 Description hydrodynamique

La description hydrodynamique du plasma repose sur l'hypothèse que les fonctions de distribution des particules sont proches de la distribution de Maxwell-Boltzmann. Dès lors, l'état de chaque espèce dans le plasma se caractérise par ses variables hydrodynamiques telles que sa densité, sa vitesse moyenne, sa température. Le plasma est alors décrit par l'ensemble des équations d'hydrodynamique établies à partir de l'équation de Vlasov. Ainsi, en intégrant l'équation (1.11) par rapport à la vitesse \mathbf{v} et en utilisant les relations (1.12) et (1.13), on obtient l'équation de continuité

$$\frac{\partial n_s}{\partial t} + \nabla \cdot (n_s \mathbf{v}_s) = 0 \quad (1.16)$$

qui traduit la conservation de la quantité de particules. En multipliant maintenant l'équation (1.11) par $m_s \mathbf{v}$ et en intégrant par rapport à la vitesse \mathbf{v} , on obtient l'équation du mouvement

$$m_s n_s \left[\frac{\partial \mathbf{v}_s}{\partial t} + \mathbf{v}_s \cdot \nabla \mathbf{v}_s \right] = n_s q_s (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \nabla p_s \quad (1.17)$$

qui traduit la conservation de la quantité de mouvement. En multipliant maintenant l'équation de Vlasov par $\frac{1}{2} m_s \mathbf{v}^2$ et en intégrant par rapport à la vitesse \mathbf{v} , on obtient

l'équation de conservation d'énergie

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{3}{2} p_s + \frac{1}{2} m_s n_s \mathbf{v}_s \right] + \nabla \cdot \mathbf{Q} = q n_s \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{E} \quad (1.18)$$

où \mathbf{Q} est le flux d'énergie. On pourrait continuer à calculer des moments de f_s , mais on voit que chaque nouvelle expression fait apparaître un moment d'ordre supérieur. On a donc besoin d'informations supplémentaires pour avoir autant d'inconnues que d'équations afin de pouvoir résoudre ces équations. Cette information supplémentaire s'appelle relation de fermeture.

2

ONDES ACOUSTIQUES DANS UN PLASMA À DEUX FLUIDES

2.1 Introduction

De même que dans les milieux neutres (gaz ou liquides), des ondes peuvent se propager dans les plasmas. Du fait qu'il existe un couplage entre les variables hydrodynamiques et électrodynamiques dans les plasmas, la variété des ondes pouvant y exister est considérable. En revanche, dans un plasma non-magnétisé le tableau des ondes est assez limité. Seul trois modes peuvent exister ; deux électrostatiques et un électromagnétique. Le mode électromagnétique n'est autre que l'onde de lumière (dont l'équation de dispersion est modifiée par la présence du plasma). Le premier mode électrostatique est l'onde acoustique ionique (mode de basse fréquence), et le second est l'onde de Langmuir (mode de haute fréquence).

Nous présenterons dans ce chapitre quelques exemples caractéristiques des ondes électrostatiques linéaires et non linéaires. Nous dériverons, en premier lieu, les relations de dispersion qui décrivent la propagation des deux modes électrostatiques dans un plasma, homogène, stationnaire et infini, à deux composantes en utilisant l'approche hydrodynamique. Le principe de base est qu'il y a de petites perturbations dans le plasma et que ces perturbations peuvent être décrites comme des ondes

planes progressives. En second lieu, nous nous intéresserons à l'étude des ondes acoustiques ioniques localisées (solitons) de large amplitude dans le cas d'un plasma composé de deux fluides (ions froids et électrons chauds) en utilisant la méthode de pseudo-potential de Sagdeev. En fin, nous dériverons l'équation de Korteweg-de Vries, qui décrit la dynamique et l'évolution de des ondes acoustiques ioniques non linéaires de faible amplitude, par la technique de la perturbation reductive.

2.2 Relation de dispersion des ondes linéaires

Les collisions entre molécules sont à l'origine des ondes de pression dans un gaz neutre. Ces ondes sont caractérisées par leur vitesse de propagation : la vitesse du son [voir appendice B]. Nous montrons dans cette section que des ondes peuvent cependant exister dans un plasma sans collisions du seul fait des interactions coulombiennes entre électrons et ions. Nous nous intéressons en particulier aux deux types d'onde (onde ionique et électronique) en établissant pour chaque mode linéaire une relation de dispersion.

2.2.1 Mode ionique de basse fréquence

Considérons un plasma à deux fluides (ions et électrons), unidimensionnel, sans collisions et décrit dans l'approximation quasi-neutre ($n_i = n_e = n$). Étant donné que les fréquences sont basses, nous devons, au moins initialement, considérer les mouvements thermiques des deux espèces, électrons et ions. Les équations caractérisant ce mode sont les suivantes :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nv) = 0 \quad (2.1)$$

$$m_i n \left[\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} \right] = enE - \gamma_i k_B T_i \frac{\partial n}{\partial x} \quad (2.2)$$

$$\gamma_e k_B T_e \frac{\partial n}{\partial x} = -enE \quad (2.3)$$

où v est la vitesse fluide ionique, T_e et T_i sont les températures électronique et ionique respectivement, k_B est la Constante de Boltzmann, m_i est la masse des ions, γ_e et γ_i sont les indices adiabatiques électronique et ionique respectivement et E est le champ électrique. Si nous nous limitons à rechercher des ondes de faibles amplitudes, nous pouvons considérer le système linéarisé autour d'un état d'équilibre de densité

uniforme et stationnaire tel que

$$n = n_0 + n_1 \quad (2.4)$$

$$v = v_1 \quad (2.5)$$

$$E = E_1 \quad (2.6)$$

où les grandeurs indexées par 1 représentent des perturbations par rapport à l'état de référence. La linéarisation consiste à utiliser ces expressions dans les équations du système différentiel en ne gardant que les termes d'ordre 1 (les contributions non-linéaires, comme $v_1 \partial_x v_1$ par exemple, sont négligées en tant que produit de deux grandeurs perturbatives) :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.7)$$

$$m_i n_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = e n_0 E_1 - \gamma_i k_B T_i \frac{\partial n_1}{\partial x} \quad (2.8)$$

$$\gamma_e k_B T_e \frac{\partial n_1}{\partial x} = -e n_0 E_1 \quad (2.9)$$

En combinant ces trois dernières équations entre elles, nous pouvons obtenir l'équation de propagation d'une onde de densité⁽ⁱ⁾ sous la forme

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - v_s^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) n_1 = 0 \quad (2.10)$$

avec

$$v_s = \sqrt{\frac{\gamma_e k_B T_e + \gamma_i k_B T_i}{m_i}} \quad (2.11)$$

est la vitesse du son dans le plasma ou, simplement, la vitesse acoustique. À la différence de ce qui se passe dans les fluides neutres, il est remarquable de noter que la vitesse des ions ne s'annule pas, même si $T_i \rightarrow 0$, car il reste la contribution de pression (souvent dominante du reste) due aux électrons. Dans ce cas, l'équation

(i). La vitesse et le potentiel électrostatique obéissent à la même équation.

(2.11) conduit à l'expression suivante de la vitesse acoustique

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i}} \quad (2.12)$$

appelée vitesse acoustique ionique. En cherchant des solutions de l'équation d'onde sous la forme d'ondes progressives, $n_1 \sim e^{i(kx - \omega t)}$, nous obtenons

$$(-\omega^2 + v_s^2 k^2) n_1 = 0 \quad (2.13)$$

ce qui conduit à la relation de dispersion pour l'onde ionique

$$\omega = v_s k \quad (2.14)$$

Les ondes acoustiques ioniques sont donc sans dispersion et les vitesses de phase et de groupe sont identiques, ce sont des ondes propagatives de vitesses constantes qui n'existent que lorsqu'il y a de l'agitation thermique (dépendent de T_e et T_i). L'étude du système linéarisé montre également que la vitesse acoustique ionique est la vitesse naturelle de propagation de faibles perturbations extérieures. Cette vitesse joue encore un rôle important lorsque les effets non linéaires sont pris en compte et marque, à l'instar de la vitesse du son, une frontière entre les comportements subsonique et supersonique. Remarquons enfin que la vitesse acoustique ionique prend, dans les plasmas hors-équilibre où $T_i \ll T_e$, une valeur intermédiaire entre les vitesses thermiques des électrons et des ions :

$$\sqrt{\frac{k_B T_i}{m_i}} < \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_i}} \ll \sqrt{\frac{k_B T_e}{m_e}}$$

2.2.2 Mode électronique de haute fréquence

Si nous considérons le mouvement des électrons avec des ions immobiles (ce qui peut être justifié par la très grande différence de masses entre ions et électrons), nous obtiendrons les solutions pour les ondes électroniques. La fluctuation locale de la densité de charge est produite seulement par le mouvement des électrons dans le champ électrique de l'onde. Les électrons sont donc les seules particules réagissant

aux perturbations. Cette classe de plasma à une seule composante (les électrons) est prise en compte, l'autre composante assurant seulement une neutralité électrique globale, s'appelle un plasma à une composante. En considérant, une fois encore, un plasma unidimensionnel et sans collisions, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e v_e) = 0 \quad (2.15)$$

$$m_e n_e \left[\frac{\partial v_e}{\partial t} + v_e \frac{\partial v_e}{\partial x} \right] = -en_e E - \gamma_e k_B T_e \frac{\partial n_e}{\partial x} \quad (2.16)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial x} = e (n_0 - n_e) \quad (2.17)$$

En suivant la même démarche que dans la section précédente, après avoir posé, $n_e = n_0 + n_1$, $v_e = v_1$ et $E = E_1$, nous procédons à la linéarisation qui conduit au système d'équations suivant :

$$\frac{\partial n_1}{\partial t} + n_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0 \quad (2.18)$$

$$m_e n_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -en_0 E_1 + \gamma_e k_B T_e \frac{\partial n_1}{\partial x} \quad (2.19)$$

$$\epsilon_0 \frac{\partial E_1}{\partial x} = -en_1 \quad (2.20)$$

En considérant une perturbation sous forme d'une onde progressive du type $e^{i(kx - \omega t)}$, nous obtenons

$$i\omega n_1 + n_0 i k v_1 = 0 \quad (2.21)$$

$$-i m_e n_0 \omega v_1 + \gamma_e k_B T_e i k n_1 + en_0 E_1 = 0 \quad (2.22)$$

$$\epsilon_0 i k E_1 + en_1 = 0 \quad (2.23)$$

À l'aide des équations (2.21) et (2.23), nous pouvons exprimer v_1 et E_1 en fonction de n_1 et substituer le résultat dans l'équation (2.22). Ce qui permet d'obtenir la relation de dispersion, dite de Bohm-Gross, suivante

$$\omega^2 = \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} + \frac{\gamma_e k_B T_e k^2}{m_e} \quad (2.24)$$

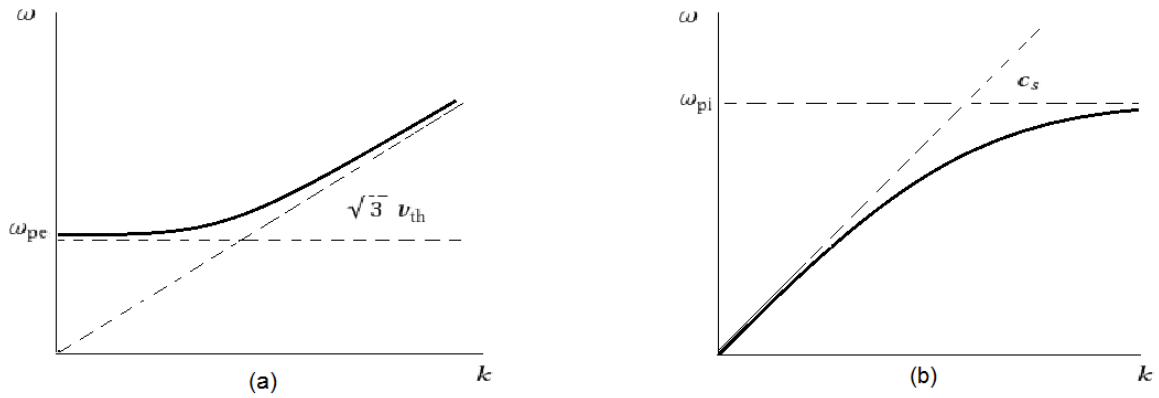


Figure 2.1 – Relation de dispersion pour les ondes électroniques (a) et les ondes ioniques (b) linéaires dans un plasma sans collisions.

que nous pouvons mettre sous cette forme

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + \gamma_e v_{th}^2 k^2 \quad (2.25)$$

avec $\omega_{pe} = \sqrt{e^2 n_0 / \epsilon_0 m_e}$ est la fréquence de plasma électronique et $v_{th} = \sqrt{k_B T_e / m_e}$ est la vitesse thermique électronique. Ces deux grandeurs sont reliées à la longueur de Debye par la relation : $v_{th} = \lambda_D \omega_{pe}$. Notons que la fréquence des oscillations dépend maintenant de k et que la vitesse de groupe est non nulle, donc il y a propagation d'information (énergie, ...etc). Par ailleurs, si nous nous plaçons dans la limite de plasma froid ($T_e = 0$), les électrons fluctuent à la fréquence plasma indépendamment de la longueur d'onde. Ce n'est pas une onde à proprement dit, la vitesse de groupe est nulle. Ainsi nous pouvons conclure que c'est l'agitation thermique des électrons qui engendre une propagation de l'onde.

2.2.3 Comparaison entre les deux modes

Nous pouvons réécrire respectivement les relations de dispersions (2.14) et (2.25) en fonction de la longueur de Debye λ_D comme suit :

$$\omega^2 = k^2 \left(\frac{\gamma_e k_B T_e}{m_i} \frac{1}{1 + k^2 \lambda_D^2} + \frac{\gamma_i k_B T_i}{m_i} \right) \quad (2.26)$$

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 \left(1 + \gamma_e k^2 \lambda_D^2 \right) \quad (2.27)$$

La figure (2.1) montre comment varie la pulsation ω en fonction du vecteur d'onde k pour les ondes électroniques et ioniques respectivement dans un plasma

non collisionnel à deux fluides. Nous pouvons constater, d'une part, que pour des fréquences significativement plus basses que la fréquence plasma ionique, i.e. $k\lambda_D \ll 1$, ces ondes sont appelées ondes acoustiques ioniques parce qu'elle se propage à une vitesse acoustique ionique c_s constante sans dispersion puisque la vitesse de phase n'est pas une fonction de la fréquence. D'autre part, pour des nombres d'ondes plus élevés, i.e. $k\lambda_D \gg 1$, la fréquence approche la fréquence plasma ionique. Dans le cas des ondes électroniques, le milieu passe donc d'un système purement oscillant à la fréquence plasma pour les grandes longueurs d'ondes ($k\lambda_D \ll 1$) à un système propagatif à la vitesse thermique $\sqrt{3}v_{th}$ dans la limite opposée ($k\lambda_D \gg 1$).

2.3 Solitons acoustiques ioniques de large amplitude

Nous avons étudié dans la section précédente les propriétés des ondes acoustiques linéaires dans un plasma à deux composantes. Nous allons considérer maintenant celles des solitons acoustiques ioniques dans un tel plasma. Pour définir précisément un soliton, nous devons d'abord donner la définition d'une perturbation stationnaire. Une équation d'onde admet une solution stationnaire si celle-ci est une fonction seulement de $z = x - v_0t$, où v_0 est la vitesse de l'onde. Un soliton est alors une solution stationnaire et localisée en z d'une équation d'onde. Les ingrédients nécessaires à la formation des solitons sont la non-linéarité et la dispersion. Dans un milieu qui est seulement dispersif, on ne peut avoir de soliton car les différentes composantes de Fourier d'une perturbation initiale se propagent à des vitesses différentes. Le soliton est dû alors à un équilibre entre les effets de la non linéarité et la dispersion.

2.3.1 Équations de base et formulation

Dans le but d'analyser les ondes solitaires acoustiques ioniques d'amplitude arbitraire, considérons un plasma d'hydrogène, unidimensionnel, complètement ionisé avec une densité suffisamment basse pour négliger toutes les collisions et ne considérer que les interactions coulombiennes. Nous considérons les ions froids. De plus nous négligerons l'inertie des électrons ($m_e \ll m_i$). Cette approximation est en fait équivalente à considérer les électrons, dans une échelle de temps liée à la dynamique des ions, isothermes donc distribués selon la loi de Maxwell-Boltzmann. Le

comportement du système sera décrit par conséquent par les équations fluides pour les ions

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i v_i) = 0 \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_i \frac{\partial v_i}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2.29)$$

et par l'équation de Poisson pour le potentiel électrostatique

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = e^\phi - n_i \quad (2.30)$$

où n_i et n_e représentent les densités des ions et des électrons normalisées par la densité à l'équilibre n_0 (à l'équilibre, on a $n_{i0} = n_{e0} = n_0$), v_i la vitesse fluide des ions normalisée par la vitesse acoustique ionique $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ et ϕ le potentiel électrostatique normalisé par T_e/e . Le temps t et la variable d'espace x sont normalisées, respectivement, par la fréquence plasma ionique $\omega_{pi} = \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m_i}$ et la longueur de Debye $\lambda_D = \sqrt{\epsilon_0 k_B T_e / n_0 e^2}$. Les équations (2.28) et (2.29) sont respectivement les équations de continuité et de conservation de la quantité de mouvement. Nous cherchons une solution stationnaire localisée des équations (2.28)-(2.30) dans le repère lié à l'onde, en introduisant la variable $\xi = x - Mt$, où M est la vitesse de l'onde normalisé par c_s appelé nombre de Mach. Celles-ci peuvent être réécrites de la sorte

$$-M \frac{dn_i}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (n_i v_i) = 0 \quad (2.31)$$

$$-M \frac{dv_i}{d\xi} + v_i \frac{dv_i}{d\xi} = -\frac{d\phi}{d\xi} \quad (2.32)$$

$$\frac{d^2 \phi}{d\xi^2} = e^\phi - n_i \quad (2.33)$$

En intégrant maintenant les équations (2.31) et (2.32), et en imposant les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($\phi \rightarrow 0$, $v_i \rightarrow 0$, $n_i \rightarrow 1$ lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$), nous obtenons la relation suivante pour la densité

$$n_i = \left(1 - \frac{2\phi}{M^2}\right)^{-1/2} \quad (2.34)$$

En portant celle-ci dans l'équation de Poisson (2.33), en multipliant chaque membre de l'équation résultante par $d\phi/d\xi$, en intégrant une fois et en imposant à nouveau les conditions aux limites appropriées aux solutions localisées ($\phi \rightarrow 0$, $d\phi/d\xi \rightarrow 0$ lorsque $|\xi| \rightarrow \infty$), nous obtenons la quadrature

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{d\xi} \right)^2 + V(\phi) = 0 \quad (2.35)$$

où $V(\phi)$ représente le potentiel de Sagdeev ou pseudo-potentiel [4]

$$V(\phi) = 1 - e^\phi + M^2 \left[1 - \left(1 - \frac{2\phi}{M^2} \right)^{1/2} \right] \quad (2.36)$$

L'équation (2.35) peut être regardée comme étant l'équation du mouvement d'une pseudo-particule de masse unité, de position ϕ et de vitesse $d\phi/d\xi$, oscillant dans un potentiel $V(\phi)$.

2.3.2 Solitons et conditions d'existence

Pour qu'une onde solitaire puisse se propager dans un plasma, il faut que le pseudo-potentiel $V(\phi)$ satisfait les conditions d'existence suivantes :

- a) $V|_{\phi=0} = 0$,
- b) $\partial V / \partial \phi|_{\phi=0} = 0$,
- c) ϕ admet un extremum non nul noté ϕ_m tel que : $V(\phi) < 0$ pour $0 < \phi < \phi_m$,
- d) $\partial V / \partial \phi|_{\phi=\phi_m} > 0$ (< 0) pour $\phi > 0$ (< 0).

Il est aisé de vérifier à partir de l'équation (2.36) que les deux premières conditions sont toujours satisfaites. Les conditions c) et d) impliquent que notre modèle de plasma admet uniquement des solutions solitaires compressives ($\phi > 0$) pourvu que

$$\left(1 - \frac{2\phi_m}{M^2} \right)^{-1/2} > \exp(\phi_m) \quad (2.37)$$

Nous pouvons obtenir une relation de dispersion non linéaire en exprimant, à partir de (2.36), la vitesse du soliton M en terme de son amplitude ϕ_m comme suit

$$M^2 = \frac{1}{2} \frac{[\exp(\phi_m) - 1]^2}{\exp(\phi_m) - 1 - \phi_m} \quad (2.38)$$

Il serait alors souhaitable de voir s'il existe une limite supérieure de M au delà de laquelle les structures solitaires n'existent plus. À partir de l'expression de la densité ionique n_i , l'équation (2.34), nous pouvons voir que celle-ci reste partout réelle pour

$$\phi_m < \phi_{cr} = \frac{M^2}{2} \quad (2.39)$$

Comme $V(\phi_m) = 0$, une condition équivalente pour $V(\phi)$ est la suivante

$$V(\phi_{cr}) = 1 + M^2 - \exp(M^2/2) > 0 \quad (2.40)$$

autrement dit, $M < M_{max} = 1.58$ (voir la figure (2.2)). Cette dernière condition (avec M^2 est donné dans (2.38)) conduit à $\phi_m \approx 1.3$. Nous pouvons aussi déterminer M_{min} en faisant un développement limité de $V(\phi)$ pour $\phi \ll 1$ de la sorte

$$V(\phi) \simeq -\frac{M^2 - 1}{M^2} \phi^2 + \frac{3 - M^4}{6M^4} \phi^3 \quad (2.41)$$

Il en résulte que $V(\phi) < 0$ pour $M^2 > 1$. Par conséquent, la condition d'existence des ondes acoustiques ioniques d'amplitude finie sera

$$1 < M < 1.58 \quad (2.42)$$

Pour M proche de l'unité $M = 1 + \delta M$, i.e. dans le cas des ondes solitaires d'amplitude faible et finie, nous obtenons à partir de (2.41) l'expression suivante

$$V(\phi, \delta M) = \frac{2}{3} \phi^2 (\phi - 3\delta M) \quad (2.43)$$

En substituant cette dernière dans (2.35) et en intégrant une fois, nous obtenons la solution suivante

$$\phi = 3\delta M \operatorname{sech}^2 \left[\left(\frac{\delta M}{2} \right)^{1/2} (x - Mt) \right] \quad (2.44)$$

Selon l'équation (2.44), l'amplitude du soliton acoustique ($\phi_m = 3\delta M \ll 1$) est inversement proportionnel à la racine carrée de sa largeur.

2.3.3 Résultats et discussion

L'équation (2.35) est alors intégrée numériquement pour différentes valeurs du nombre de Mach M . La figure (2.3) indique la formation et l'existence des structures acoustiques solitaires de compression ($\phi > 0$) dont l'amplitude augmente à mesure que le nombre de Mach M augmente. Ce résultat est d'ailleurs confirmé par leurs structures en forme de puits du potentiel de Sagdeev indiquées sur la figure (2.4). Celles-ci existent pour des valeurs du nombre de Mach comprises entre 1 et 1.58. Le profil des densités électronique et ionique montre une accumulation des électrons et des ions dans la région de localisation de l'onde solitaire comme l'indique la figure (2.5).

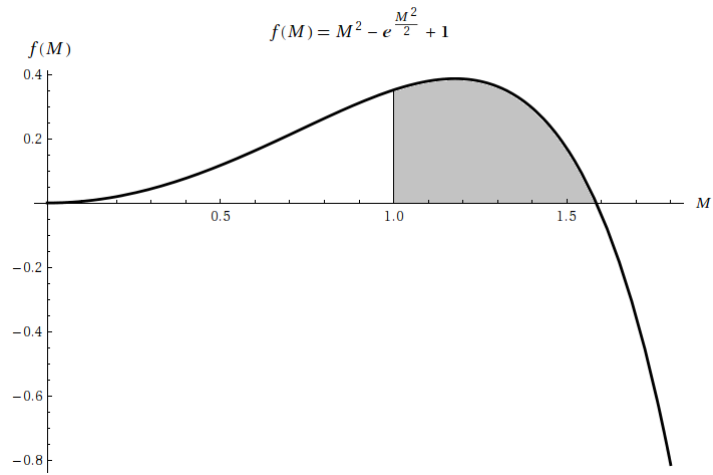


Figure 2.2 – Région d'existence de solitons en fonction de M .

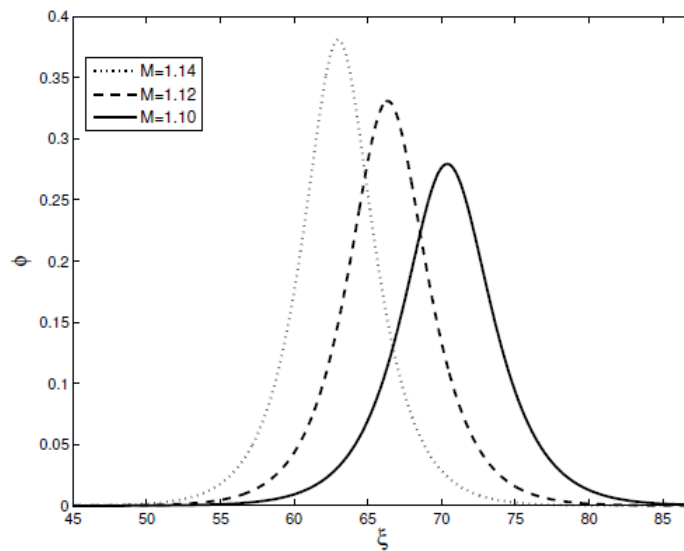


Figure 2.3 – Potentiel électrostatique solitaire de l'onde acoustique ionique.

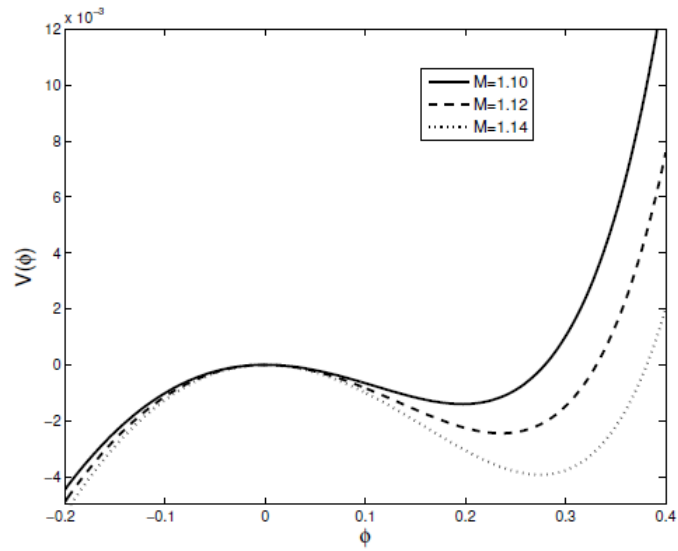


Figure 2.4 – Potentiel de Sagdeev associé au soliton de la figure 2.3.

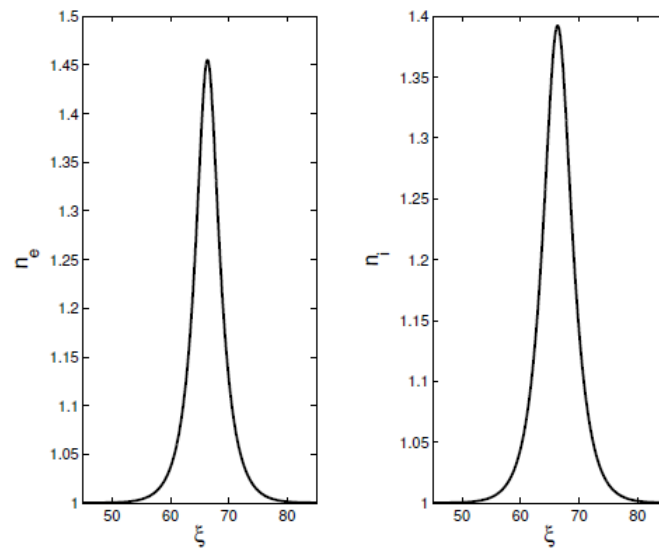


Figure 2.5 – Le profil spatial de la densité électronique et ionique ($M = 1.12$).

2.4 Solitons acoustiques ioniques de faible amplitude

Nous allons maintenant nous intéresser à la dynamique des solitons acoustiques ioniques d'amplitude faible et finie. Pour cela, nous utilisons la méthode de la perturbation réductive de Washimi et Taniuti [5] qui consiste à introduire la transformation de coordonnées suivante :

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t \quad (2.45)$$

où ε est un petit paramètre mesurant la faiblesse de l'amplitude (ou la dispersion de l'onde). Dans ce nouveau système de coordonnées, les équations (2.28)-(2.30) deviennent

$$\varepsilon \frac{\partial n_i}{\partial \tau} - \frac{\partial n_i}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_i v_i) = 0 \quad (2.46)$$

$$\varepsilon \frac{\partial v_i}{\partial \tau} + (v_i - 1) \frac{\partial v_i}{\partial \xi} + \frac{\partial \phi}{\partial \xi} = 0 \quad (2.47)$$

$$\varepsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial \xi^2} = e^\phi - n_i \quad (2.48)$$

Les variables n_i , v_i et ϕ sont alors développées en séries de puissances de ε autour de leur valeur d'équilibre

$$\begin{pmatrix} n_i \\ v_i \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n_i^{(1)} \\ n_i^{(1)} \\ \phi^{(1)} \end{pmatrix} \varepsilon + \begin{pmatrix} n_i^{(2)} \\ v_i^{(2)} \\ \phi^{(2)} \end{pmatrix} \varepsilon^2 + \dots \quad (2.49)$$

En remplaçant, dans (2.46)-(2.48), n_i , v_i , ϕ par leur développement en série de puissance et en égalisant les termes de même puissance en ε , nous obtenons à l'ordre le plus faible en ε

$$n_i^{(1)} = v_i^{(1)} = \phi^{(1)} \quad (2.50)$$

À l'ordre suivant, le système d'équations (2.46)-(2.48) devient

$$\frac{\partial n_i^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial n_i^{(1)}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial \xi} (n_i^{(1)} v_i^{(1)}) - \frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} = 0 \quad (2.51)$$

$$\frac{\partial v_i^{(2)}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \tau} - v_i^{(1)} \frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial \xi} = \frac{\partial \phi^{(2)}}{\partial \xi} \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial^2 \phi^{(1)}}{\partial \xi^2} = \phi^{(2)} + \frac{1}{2} (\phi^{(1)})^2 - n_i^{(2)} \quad (2.53)$$

En éliminant les termes de second ordre ainsi que $n_i^{(1)}$ et $v_i^{(1)}$, nous obtenons l'équation de Korteweg-de Vries (K-dV) [6], qui décrit l'évolution des variables dynamiques d'un milieu plasma faiblement non linéaire et faiblement dispersif,

$$\frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \tau} + \phi^{(1)} \frac{\partial \phi^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{1}{2} \frac{\partial^3 \phi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (2.54)$$

Le deuxième terme $\phi^{(1)} \partial_\xi \phi^{(1)}$ de l'équation de K-dV décrit la non linéarité du plasma, et le troisième terme $\partial_\xi^3 \phi^{(1)}$ représente les effets dispersifs du plasma. En effet, pour les grands k , la relation de dispersion des ondes acoustiques n'est plus linéaire, mais doit être corrigée par un terme proportionnel à k^3 . Dans un référentiel $z = x - Mt$, où M est le nombre de Mach $M = 1 + \delta M$ ($\delta M > 0$), l'équation de K-dV (2.54) admet une solution stationnaire localisée donnée par

$$\phi^{(1)} = \phi_m^{(1)} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{x - Mt}{w} \right] \quad (2.55)$$

où l'amplitude $\phi_m^{(1)}$ et la largeur w sont données respectivement par, $\phi_m^{(1)} = 3\delta M$ et $w = \sqrt{2/\delta M}$. La perturbation décrite par (2.55) répond à la définition d'un soliton que nous avons donnée au début de la section (2.3) : elle ne dépend que de $z = x - Mt$ et est localisée autour de $z = 0$. Enfin, il est nécessaire de noter que la solution (2.55) est en accord avec l'expression obtenue dans la section précédente (l'équation (2.44)) définissant ainsi la validité de notre développement.

3

ONDES ACOUSTIQUES DANS UN PLASMA RELATIVISTE À DEUX FLUIDES

3.1 Introduction

L'analyse de l'existence des structures non linéaires dans des plasmas relativistes à deux composantes a suscité un grand intérêt durant ces dernières années et fait l'objet de nombreuses études [7]-[8]. L'atmosphère solaire et la magnétosphère terrestre sont deux exemples de plasmas astrophysiques où les effets relativistes peuvent devenir prépondérant [9, 10]. Bien que les ondes acoustiques électroniques relativistes ont été intensivement étudiées dans le cadre de l'interaction plasma-laser, les études sur les ondes acoustiques ioniques relativistes se développent également rapidement pendant ces dernières années dans les plasmas astrophysiques [11]-[12]. Dans l'espace, les ondes solitaires de basses fréquences sont fréquemment observés et les ondes de modulation stables et instables ont été détectées [13, 14]. Dans le but expliquer ces phénomènes, des modèles théoriques des ondes acoustiques relativistes ont été proposés [10]-[13]. Ces études classiques qui prennent en considération seulement les effets relativistes dus aux électrons ne sont pas en mesure de se rendre en compte de toutes les propriétés intrinsèques des ces phénomènes dans les plasmas spatiaux composés en générale de particules énergétiques. En effet,

lorsque la vitesse des particules se rapprochent de celle de la lumière, les ondes non linéaires qui se produisent dans l'espace présentent une caractéristique particulière en raison de l'effet de l'écoulement à grande vitesse des ions [15, 16]. Dans ce cas, il existe non seulement des électrons énergétiques mais aussi des ions qui peuvent atteindre des vitesses relativistes. Ces derniers provoquent l'excitation des différents types d'ondes non linéaires telles que les ondes de choc et les ondes solitaires. Dans le but d'analyser le comportement non linéaire de ces structures cohérentes de large amplitude, nous considérons dans ce chapitre un plasma composé de deux fluides relativistes : fluide électronique et ionique. D'abord, nous présenterons les équations de base qui décrivent la dynamique des deux espèces de particules relativistes contenues dans le plasma puis, nous chercherons les solutions stationnaires en se plaçant dans le repère lié à l'onde. Celles-ci peuvent être formulées en termes d'une équation intégrale qui peut être vue comme l'équation d'énergie d'une pseudo-particule qui se déplace dans un pseudo-potentiel. L'analyse de ce dernier nous permettra d'examiner de près les conditions d'existence des ondes acoustiques stationnaires électroniques et ioniques dans un plasma relativiste à deux fluides relativistes.

3.2 Équations de base et formulation

Considérons un plasma relativiste composé de deux fluides et dont le mouvement, à une dimension, s'effectue suivant la direction des x . Par conséquent, tous les paramètres du plasma, à savoir la densité, la pression, ...etc, devraient changer uniquement le long de cette dernière. Nous supposons également que le plasma est exempt du champ magnétique et sans collisions, et que le seul champ qui subsiste est le champ électrostatique. La dynamique de tel système peut être décrit par l'ensemble des équations hydrodynamiques pour chaque composante :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_e n_e) + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_e n_e v_e) = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\gamma_i n_i) + \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_i n_i v_i) = 0 \quad (3.2)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + v_e \frac{\partial}{\partial x} \right) \gamma_e v_e = \frac{e}{m_e} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{m_e n_e} \frac{\partial p_e}{\partial x} \quad (3.3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + v_i \frac{\partial}{\partial x} \right) \gamma_i v_i = -\frac{e}{m_i} \frac{\partial \phi}{\partial x} - \frac{1}{m_i n_i} \frac{\partial p_i}{\partial x} \quad (3.4)$$

et par l'équation de Poisson, pour le potentiel électrostatique ϕ ,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{e}{\epsilon_0} (n_e - n_i) \quad (3.5)$$

où $\gamma_{e,i}$ est le facteur de Lorentz donné par

$$\gamma_{e,i} = \frac{1}{\sqrt{1 + v_{e,i}^2/c^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v_{e,i}^2}{c^2} \quad (3.6)$$

avec v_e (v_i) est la vitesse fluide des électrons (ions), $p_e = k_B T_e n_e$ ($p_i = k_B T_i n_i$) est la pression électronique (ionique), T_e (T_i) est la température électronique (ionique), n_e (n_i) est la densité des électronique (ionique) et k_B est la constante de Boltzmann. Nous cherchons une solution stationnaire des équations (3.1)- (3.4) dans le repère lié à l'onde. Il s'ensuit, en supposant que T_e et T_i sont constantes,

$$n_e v_e \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \right] = C_1 \quad (3.7)$$

$$n_i v_i \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \right] = C_2 \quad (3.8)$$

$$\frac{m_e v_e^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \right] - e\phi + k_B T_e \ln n_e = C_3 \quad (3.9)$$

$$\frac{m_i v_i^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \right] + e\phi + k_B T_i \ln n_i = C_4 \quad (3.10)$$

où C_i ($i = 1, 2, 3, 4$) sont des constantes d'intégration. Les deux premières équations traduisent respectivement la conservation du flux des électrons et des ions, et les deux dernières équations traduisent respectivement la conservation de l'énergie totale pour les électrons et les ions dans le repère stationnaire. En additionnant, terme à terme, les équations (3.3) et (3.4), en utilisant l'équation de Poisson et en intégrant une fois, nous obtenons

$$m_e n_e v_e^2 \left[1 + \frac{5}{6} \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \right] + m_i n_i v_i^2 \left[1 + \frac{5}{6} \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \right] + k_B (T_e n_e + T_i n_i) - \epsilon_0 \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = -C_5 \quad (3.11)$$

où C_5 est une constante d'intégration. En partant de cette dernière équation, nous pouvons aboutir à la quadrature suivante

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + V(\phi) = 0 \quad (3.12)$$

où $V(\phi)$ représente le pseudo-potentiel ou le potentiel de Sagdeev donné par

$$V = U - W \quad (3.13)$$

avec

$$U = -\frac{1}{\epsilon_0} \left\{ m_e n_e v_e^2 \left[1 + \frac{5}{6} \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \right] + m_i n_i v_i^2 \left[1 + \frac{5}{6} \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \right] + k_B (T_e n_e + T_i n_i) \right\} \quad (3.14)$$

et

$$W = \frac{C_5}{\epsilon_0} \quad (3.15)$$

L'équation (3.12) représente une équation d'énergie d'une particule classique qui se déplace à la vitesse $d\phi/dx$ dans un potentiel $V(\phi)$.

3.3 Ondes acoustiques électroniques relativistes

3.3.1 Analyse du pseudo-potentiel

Nous considérons dans cette première partie le cas des ondes de Langmuir de large amplitude dans un plasma relativiste à deux composantes en tenant compte de l'inertie des électrons ($T_i = T_e = 0$). Nous supposons que, à l'équilibre, le flux des électrons est égal à celui des ions tel que $n_e v_e = n_i v_i = \varphi_0$. À partir des équations (3.9) et (3.10), nous pouvons tirer les constantes d'intégration C_3 et C_4 en considérant le cas où $v_e = v_i = v_0$ lorsque $\phi = 0$ et $T_e = T_i = 0$. Cela implique

$$C_3 = \frac{m_e v_0^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right] \quad (3.16)$$

$$C_4 = \frac{m_i v_0^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right] \quad (3.17)$$

où v_0 est une vitesse constante. En apportant ces dernières relations dans les équations (3.9) et (3.10), celles-ci se réduisent à

$$\frac{m_e v_e^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_e}{c} \right)^2 \right] - e\phi = \frac{m_e v_0^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right] \quad (3.18)$$

$$\frac{m_i v_i^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_i}{c} \right)^2 \right] + e\phi = \frac{m_i v_0^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_0}{c} \right)^2 \right] \quad (3.19)$$

Maintenant, à partir des équations (3.9) et (3.10) et en faisant l'approximation $1 + (3/4)(v_0/c)^2 \approx 1 + (3/4)(v_{e,i}^2/c^2)$, nous obtenons

$$\frac{v_e}{v_0} \approx \left[1 + \frac{2e\phi}{m_e v_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{c^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (3.20)$$

$$\frac{v_i}{v_0} \approx \left[1 - \frac{2e\phi}{m_i v_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{c^2} \right)} \right]^{1/2} \quad (3.21)$$

À l'aide des dernières relations, le potentiel $U(\phi)$, donné par l'équation (3.14), s'écrit

$$U(\phi) = \left[1 + \frac{\phi}{1 + \frac{3}{4} v_0^2} \right]^{1/2} \left\{ 1 + \frac{5}{6} v_0^2 \left[1 + \frac{\phi}{1 + \frac{3}{4} v_0^2} \right] \right\} + \delta \left[1 - \frac{\phi \delta^{-1}}{1 + \frac{3}{4} v_0^2} \right]^{1/2} \left\{ 1 + \frac{5}{6} v_0^2 \left[1 - \frac{\phi \delta^{-1}}{1 + \frac{3}{4} v_0^2} \right] \right\} \quad (3.22)$$

où U est normalisé par $\omega_{pe}^2 v_0^2 m_e^2 / e^2$, le potentiel ϕ est normalisé par $m_e v_0^2 / 2e$, v_0 est normalisé par c et $\delta = m_i / m_e$. Une solution en ondes acoustiques électroniques de large amplitude existe si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

- a) Le potentiel $U(\phi)$ possède une valeur minimale U_{min} à $\phi = 0$:

$$U_{min} = U(\phi = 0) = -(1 + \delta) \left[1 + \frac{5}{6} v_0^2 \right]$$

- b) Le potentiel $U(\phi)$ possède une valeur maximale U_{max} à $\phi = \phi_c = - \left[1 + (3/4)v_0^2 \right]$:

$$U_{max} = U(\phi_c) = -\delta \sqrt{1 + \delta^{-1}} \left[1 + \frac{5}{6} v_0^2 (1 + \delta^{-1}) \right]$$

Par conséquent, l'existence d'une solution en ondes acoustiques électroniques se réduit à ce que le potentiel constant W satisfait la condition suivante

$$U_{min} < W < U_{max} \quad (3.23)$$

Il est nécessaire de noter que le potentiel normalisé $U(\phi)$ est réel si

$$-1 < \frac{\phi}{1 + \frac{3}{4}v_0^2} < \delta$$

3.3.2 Résultats et discussion

La figure (3.1), qui montre comment varie le pseudo-potentiel associé aux ondes de Langmuir relativistes de large amplitude pour différentes valeurs de ϕ et v_0 , illustre bien la dépendance étroite de celui-ci en ϕ et de l'effet relativiste dû à la vitesse fluide v_0 . En effet,

- a) Dans le cas où $v_0 < 0.145$, le pseudo-potentiel $V(\phi)$ est toujours positif et par conséquent les ondes de Langmuir relativistes ne peuvent se propager.
- b) Dans le cas où $0.145 < v_0 < 0.155$, $V(\phi)$ forme un puits de potentiel. Ce qui revient à dire que, dans cette intervalle, les ondes acoustiques électroniques peuvent exister. À titre d'exemple, la figure (3.2) montre bien cette forme en puits de potentiel pour $v_0 = 0.150$ et $W = 1870.5$.
- c) Dans le cas où $v_0 > 0.155$, le pseudo-potentiel $V(\phi)$ est toujours négative, comme le confirme d'ailleurs la figure (3.3) pour une valeur de $v_0 = 0.20$ et $W = 1898.4$.

Par ailleurs, la figure (3.4) montre la région d'existence (en gris) des ondes acoustique électroniques en terme du potentiel constant W et de la vitesse fluide relativiste v_0 .

3.4 Ondes acoustiques ioniques relativistes

3.4.1 Analyse du pseudo-potentiel

Nous avons analysé dans la section précédente le pseudo-potentiel dans le cas des ondes acoustiques électroniques de large amplitude dans un plasma relativiste à deux fluides. Nous allons considérer maintenant le cas des ondes acoustiques

ioniques de large amplitude dans un plasma relativiste composé d'ions froids ($T_i = 0$) et d'électrons isothermes ($m_e = 0$). Nous supposons également que, à l'équilibre, le flux des électrons est égal à celui des ions tel que $n_e v_e = n_i v_i = \varphi_0$. Le fait que les électrons sont isothermes se traduit par

$$n_e = n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) \quad (3.24)$$

Puisque nous considérons le cas où $v_e = v_i = v_0$ lorsque $\phi = 0$ et $T_i = 0$, l'équation (3.10) implique

$$\frac{m_i v_i^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_i}{c}\right)^2\right] + e\phi = C_4 = \frac{m_i v_0^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} \left(\frac{v_0}{c}\right)^2\right] \quad (3.25)$$

Ce qui conduit, en faisant l'approximation $[1 + (v_0/c)^2] \approx [1 + (v_i/c)^2]$, à

$$\frac{v_i}{v_0} \approx \left[1 - \frac{2e\phi}{m_i v_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{c^2}\right)}\right]^{1/2} \quad (3.26)$$

En substituant les équations (3.24) et (3.26) dans (3.14), nous obtenons l'expression suivante du pseudo-potentiel

$$U(\phi) = -\frac{1}{\epsilon_0} \left\{ k_B T_e n_0 \exp\left(\frac{e\phi}{k_B T_e}\right) + m_i \varphi_0 v_0 \left[1 - \frac{2e\phi}{m_i v_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{c^2}\right)}\right]^{1/2} \times \left[1 + \frac{5}{6} \left(\frac{v_0}{c}\right)^2 \left[1 - \frac{2e\phi}{m_i v_0^2 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{c^2}\right)}\right]\right] \right\} \quad (3.27)$$

Il s'ensuit que le potentiel $U(\phi)$ est une fonction à valeurs réelles si seulement si

$$\frac{m_i v_0^2}{2} \left(1 + \frac{3}{4} \frac{v_0^2}{c^2}\right) > e\phi \quad (3.28)$$

D'autre part, nous pouvons obtenir une solution particulière en ondes acoustiques ioniques en imposant les conditions aux limites suivantes :

- a) $V|_{\phi=0} = 0$,
- b) $\partial V / \partial \phi|_{\phi=0} = 0$.

En utilisant ces dernières conditions, nous pouvons déterminer l'expression du potentiel constant W de la sorte

$$W = -\frac{1}{\epsilon_0} \left\{ k_B T_e n_0 + m_i \varphi_0 v_0 \left[1 + \frac{5}{6} \frac{v_0^2}{c^2} \right] \right\} \quad (3.29)$$

En combinant les deux équations (3.27) et (3.29), nous obtenons l'expression finale du pseudo-potentiel $V(\phi)$ donnée par

$$V(\phi) = -\exp(\phi) + 1 + M^2 \left\{ 1 + \frac{5}{6} v_0^2 - \left[1 - \frac{2\phi}{M^2 \left(1 + \frac{3}{4} v_0^2 \right)} \right]^{1/2} \times \left[1 + \frac{5}{6} v_0^2 \left[1 - \frac{2\phi}{M^2 \left(1 + \frac{3}{4} v_0^2 \right)} \right] \right] \right\} \quad (3.30)$$

avec

$$M^2 = \frac{v_0^2}{k_B T_e / m_i} = \frac{v_0^2}{c_s^2} \quad (3.31)$$

est le nombre de Mach et c_s est la vitesse acoustique ionique. Le pseudo-potentiel $V(\phi)$, le potentiel ϕ et la vitesse fluide v_0 sont normalisés par $\omega_{pi}^2 c_s^2 m_i^2 / e^2$, $k_B T_e / e$ et c respectivement.

3.4.2 Résultats et discussion

Les figures (3.5) et (3.6) montrent le pseudo-potentiel associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes pour différentes valeurs du nombre de Mach M et ϕ pour $c_s = 0.05$. Dans le cas où $1.00 < M < 1.58$, le pseudo-potentiel varie des valeurs négatives aux valeurs positives à mesure que ϕ augmente. Ce qui se traduit par $V(\phi)$ en forme d'un puits de potentiel. À titre d'exemple, pour $M \simeq 1.25$ la valeur critique du potentiel où $V(\phi)$ s'annule est $\phi \simeq 0.65$. Les figures (3.7) et (3.8) sont des exemples typiques de pseudo-potentiel pour des valeurs du nombre de Mach M égales à 1.20 et 1.50 respectivement. Nous constatons également que $V(\phi) < 0$ est peu profond pour des petites valeurs de M , mais il le devient de plus en plus à mesure que M augmente. La figure (3.9) montre la région d'existence des ondes acoustiques ioniques de large amplitude. Ainsi, ces dernières peuvent se propager

uniquement dans la région A où $V(\phi)$ admet une solution réelle pour

$$\phi < \frac{M^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} v_0^2 \right] \quad (3.32)$$

Cette dernière relation nous permet définir une borne supérieure pour le potentiel électrostatique

$$\phi_{max} = \frac{M^2}{2} \left[1 + \frac{3}{4} v_0^2 \right] \quad (3.33)$$

Nous pouvons aussi déterminer M_{max} à partir de la condition $V(\phi_{max}) = 0$ (ce qui donne $M_{max} \approx 1.6$), ainsi que M_{min} en faisant un développement limité de $V(\phi)$ pour $\phi \ll 1$ (ce qui donne $M_{min} \approx 1$). Notons aussi que le pseudo-potentiel $V(\phi)$ reste insensible aux valeurs que peut prendre la vitesse acoustique ionique c_s (normalisée par c) dans l'intervalle $0.01 \leq c_s \leq 0.05$.

3.5 Conclusion

Ce chapitre est consacré à l'étude des structures non linéaires (solitons et ondes de choc) de large amplitude dans un plasma relativiste à deux fluides. Premièrement, nous avons analysé les conditions d'existence de solutions stationnaires en ondes de Langmuir relativistes de large amplitude en examinant de près la structure du pseudo-potentiel illustré dans les figures (3.1) et (3.2). Cette analyse nous a permis de conclure que :

- a) Les conditions d'existence de telles structures dépendent fortement du facteur relativiste v_0 et l'énergie W , ainsi que du potentiel ϕ et du rapport $\delta = m_i/m_e$.
- b) Comme le rapport $\delta = m_i/m_e$ est constant, la gamme des valeurs de l'énergie W dépend étroitement de l'effet relativiste.
- c) Les ondes de Langmuir relativistes de large amplitude peuvent se propager uniquement pour certaines valeurs de v_0 et W .
- d) Les valeurs permises du potentiel normalisé ϕ , pour lesquelles les ondes de Langmuir de large amplitude existent, dépendent des effets relativistes.

Deuxièmement, nous avons étudié les conditions d'existence de solutions stationnaires en ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude. La structure en

forme de puits de potentiel, illustré dans les figures (3.5)-(3.8), confirme l'existence de telles solutions. L'analyse de ce potentiel nous a permis de conclure que :

- a) Les conditions d'existence des ondes acoustiques ioniques de large amplitude dépendent sensiblement du nombre de Mach M plutôt que des effets relativistes.
- b) Les ondes acoustiques ioniques de large amplitude n'existent que pour une certaine gamme de valeurs du nombre de Mach M .
- c) Les ondes acoustiques ioniques de large amplitude peuvent se propager même dans la limite $v_0 \approx 0$.
- d) Le pseudo-potentiel dépend étroitement du nombre de Mach mais reste insensible à la variation du rapport de la vitesse acoustique ionique sur la vitesse de la lumière c_s/c .
- e) Dans la région où les ondes acoustiques ioniques existent le potentiel normalisé ϕ dépend du nombre de Mach.
- f) Dans la limite où les effets relativistes sont négligeables, l'équation (3.30) coïncide avec l'équation (2.36). Dans ce cas, les ondes acoustiques ioniques de large amplitude peuvent se propager pour $1 < M < 1.58$.

Pour terminer, nos résultats prédisent la coexistence des ondes de Langmuir et acoustiques ioniques de large amplitude dans les plasmas composés de deux fluides relativistes. Bien que nous n'avons pas de données d'observation directe relatives à de tels événements énergétiques, le présent modèle est applicable pour analyser les ondes solitaires et les ondes de choc énergiques associées aux ondes de Langmuir et aux ondes acoustiques ioniques relativistes fréquemment observés dans les milieux astrophysiques et l'espace.

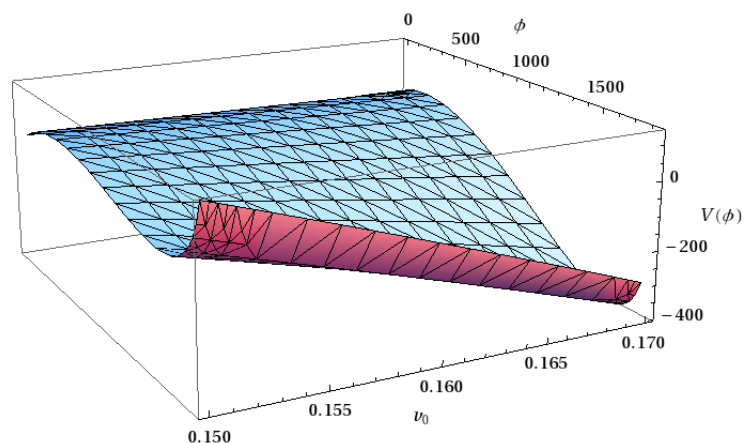


Figure 3.1 – Potentiel de Sagdeev associé aux ondes de Langmuir relativistes de large amplitude ($W = 1849.3$).

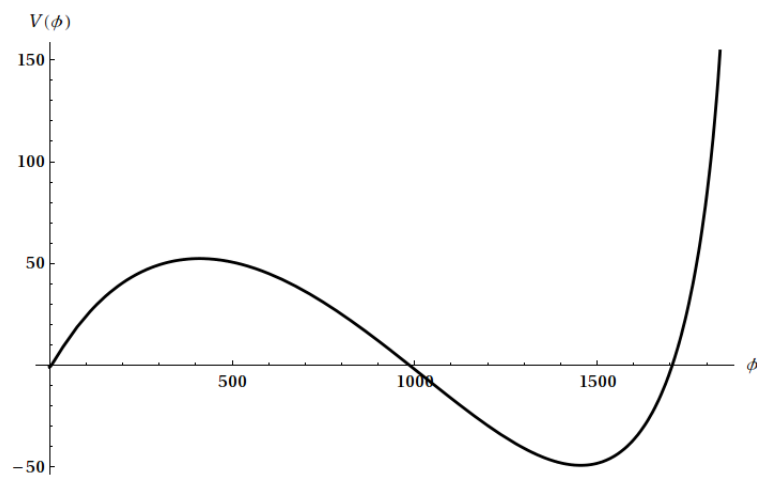


Figure 3.2 – Un exemple typique de pseudo-potentiel en forme de puits de potentiel ($W = 1870.5$ et $v_0 = 0.15$).

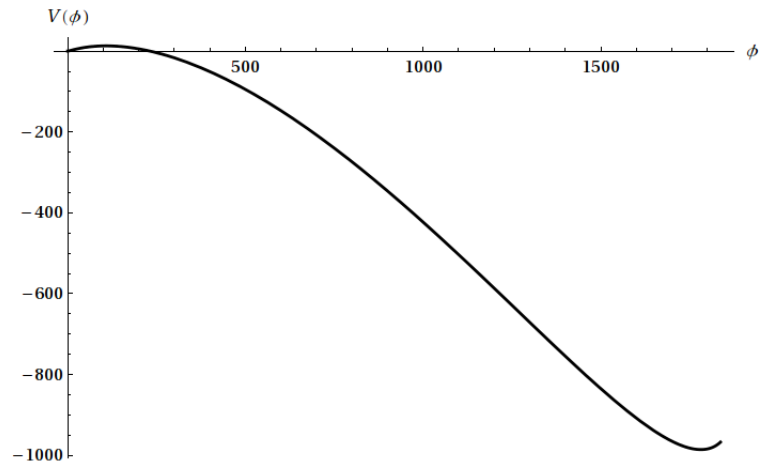


Figure 3.3 – Un exemple typique de pseudo-potentiel qui n'est pas en forme de puits de potentiel ($W = 1898.4$ et $v_0 = 0.20$).

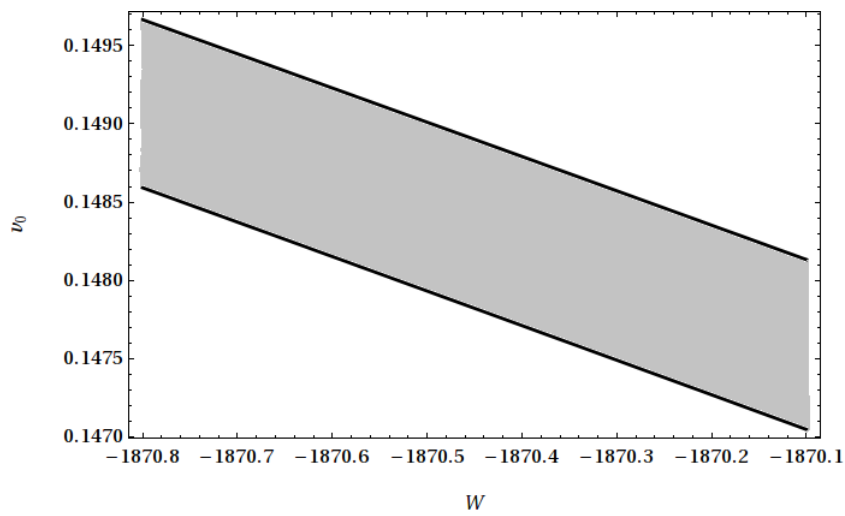


Figure 3.4 – Région d'existence des ondes de Langmuir relativistes de large amplitude en terme de la vitesse v_0 et de l'énergie W .

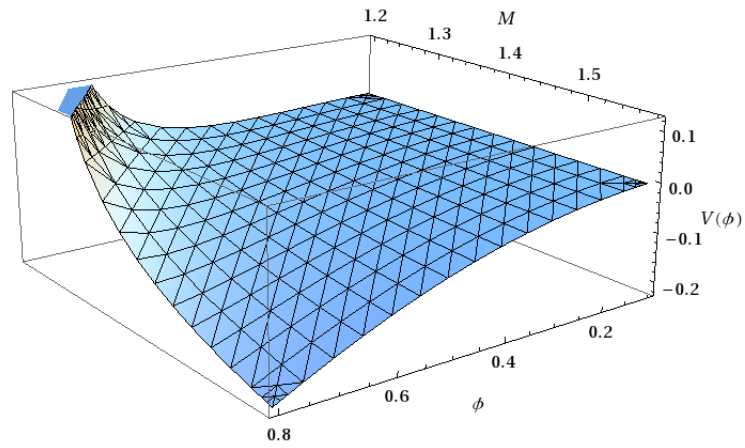


Figure 3.5 – Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude.

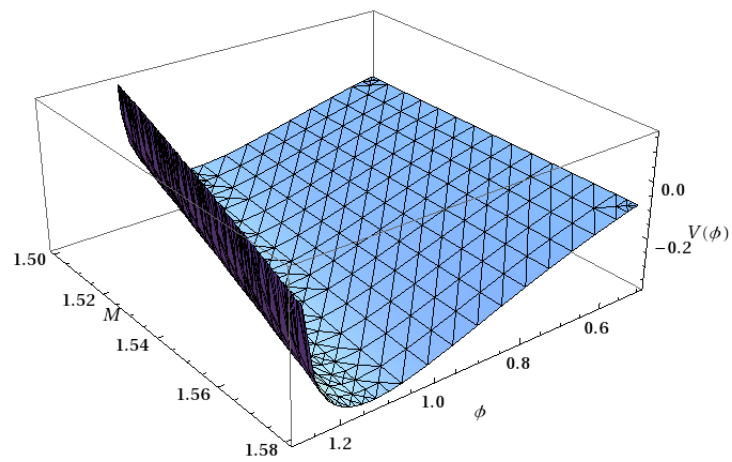


Figure 3.6 – Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude.

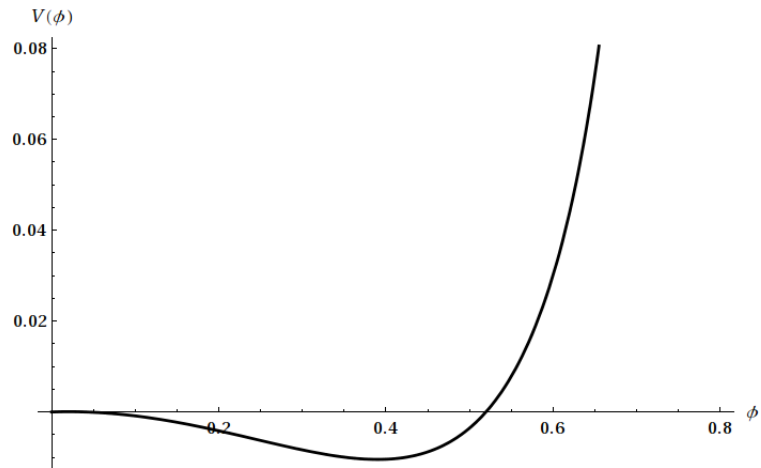


Figure 3.7 – Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude ($M = 1.20$).

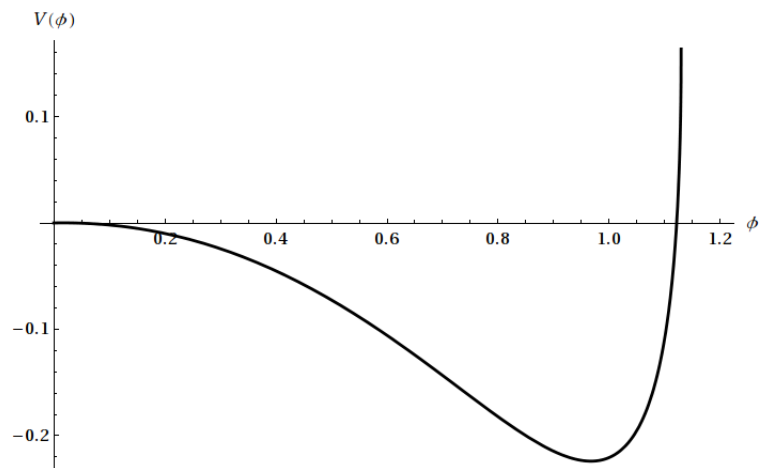


Figure 3.8 – Potentiel de Sagdeev associé aux ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude ($M = 1.50$).

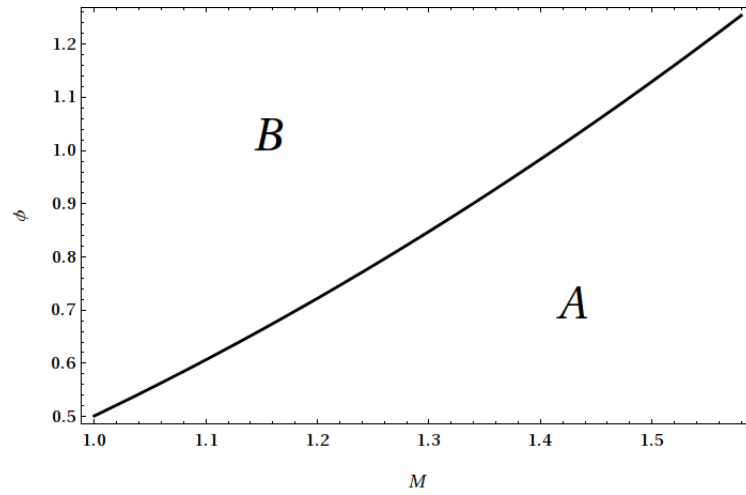


Figure 3.9 – Région d'existence des ondes acoustiques ioniques relativistes de large amplitude en terme du potentiel ϕ et du nombre de Mach M .

CONCLUSION GÉNÉRALE

Notre travail théorique a été consacré à l'étude des propriétés linéaires et non linéaires des ondes acoustiques électrostatiques, de large et de faible amplitude, dans un plasma à deux composantes.

Le premier chapitre a été dédié au rappel des propriétés des plasmas en général, ainsi que les différentes approches mathématiques employées pour décrire leur dynamique en particulier.

Au cours du deuxième chapitre, nous nous sommes intéressés à l'étude des structures électrostatiques linéaires et non linéaires de hautes et basses fréquences qui peuvent être excitées dans un plasma à deux fluides. Ce chapitre comprend trois parties, la première concerne les ondes électrostatiques linéaires, la seconde concerne l'onde acoustique ionique non linéaire de large amplitude et la dernière concerne l'onde acoustique non linéaire de faible amplitude. Dans la première partie, nous avons dérivé les relations de dispersion qui décrivent la propagation des deux modes électrostatiques dans un plasma, homogène, stationnaire et infini à deux composantes. Pour ce faire, nous avons cherché, en supposant de petites perturbations du milieu, des solutions sous forme d'ondes planes progressives en linéarisant l'ensemble des équations hydrodynamiques décrivant la dynamique du plasma. Nos résultats ont révélés que les ondes acoustiques ioniques linéaires existent pour des fréquences significativement plus basses que la fréquence plasma ionique ; et

les ondes acoustiques électroniques linéaires, quant à elles, existent pour les petites longueurs d'ondes, donc pour des fréquences plus hautes que la fréquence de Langmuir. La deuxième partie a été consacrée à l'étude des solitons acoustiques ioniques de large amplitude. Ces derniers sont des ondes stationnaires localisées qui se propagent sans se déformer dans des milieux non linéaires et dispersifs. L'analyse du pseudo-potentiel, en terme du nombre de Mach (vitesse du soliton normalisée par la vitesse acoustique), nous a révélé la formation et l'existence du potentiel solitaire de compression associé à l'onde acoustique ionique, et nous a permis d'établir sous quelles conditions ces structures cohérentes existent, à savoir pour des valeurs du nombre de Mach comprises entre 1 et 1.58. Dans la dernière partie, i.e. dans le cas des faibles amplitudes mais finies, nous avons obtenu, en employant la technique de la perturbation réductive, une équation non linéaire dite de Korteweg-de Vries régissant l'évolution non linéaire de l'onde acoustique ionique de faible amplitude. Celle-ci admet des solutions stationnaires localisées dont les propriétés intrinsèques (amplitude et largeur) dépendent fortement du nombre de Mach.

Le troisième chapitre a été dédié à l'étude des ondes acoustiques électrostatiques non linéaires de large amplitude dans un plasma relativiste à deux fluides. Nous avons d'abord présenté l'ensemble des équations de base décrivant la dynamique d'un plasma relativiste à deux fluides. Ces dernières ont été intégrées dans le repère stationnaire lié à l'onde et une expression générale du potentiel de Sagdeev a été obtenue. L'analyse de ce potentiel nous a permis d'examiner de près les conditions d'existence des ondes acoustiques stationnaires électroniques et ioniques dans un plasma relativiste à deux fluides relativistes. Nos résultats ont prédit la coexistence de ces deux modes électrostatiques non linéaires et révèlent que les effets relativistes peuvent modifier de manière significative leurs propriétés intrinsèques.

Les perspectives de ce présent mémoire sont nombreuses, nous nous proposons à l'avenir d'étendre l'étude faite dans le dernier chapitre à des plasmas relativistes de fluides imparfaits ou visqueux en tenant compte des différents phénomènes de dissipation (à savoir, la viscosité, le transfert de chaleur, ...) d'une part, et de considérer le champ magnétique ou le champ de gravitation d'autre part.

A

DIFFÉRENTES APPROXIMATIONS EMPLOYÉES EN PHYSIQUE DES PLASMAS

A.1 Approximation des plasmas froids

Dans les situations où la pression au sein du fluide peut être négligée par rapport aux autres contributions, on pose $p = 0$. Les deux équations de continuité et du mouvement suffisent alors à déterminer les champs de densités et de vitesses :

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$m n \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = q \mathbf{E} \quad (\text{A.2})$$

Cette approximation est connue sous le nom d'approximation des plasmas froids : la densité n'étant pas supposée nulle, l'équation d'état $p = nk_B T$ avec $p = 0$ est équivalente à $T = 0$, d'où le nom donné à cette approximation.

A.2 Approximation des plasmas isothermes

Rappelons que chaque composante du plasma vérifie l'équation d'état des gaz parfaits : $p(\mathbf{r}, t) = n(\mathbf{r}, t)k_B T(\mathbf{r}, t)$. Notez que cette relation ne peut être une relation de fermeture pour la pression que si la température est une fonction supposée connue. Faute de quoi, cette relation n'est qu'une relation de définition d'une nou-

velle variable, la température, à partir de la pression et de la densité. Un cas simple correspond au cas où les conditions physiques sont telles que la température est uniforme. Le gradient de pression ne met alors en jeu que les gradients de densités, de sorte que l'approximation

$$\nabla p = k_B T \nabla n \quad (\text{A.3})$$

permet également de fermer le système d'équations pour T , constante et donnée. Cette situation correspond physiquement au cas où les gradients de température relaxent rapidement sur l'échelle de temps étudiée. La valeur de la température n'est donc pas fixée par les équations mais soit par une considération physique extérieure, soit indirectement par les conditions aux limites imposées au système (cas des plasmas confinés par exemple). Le système d'équations à considérer s'écrit donc

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\mathbf{v}) = 0 \quad (\text{A.4})$$

$$mn \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = q\mathbf{E} - k_B T \nabla n \quad (\text{A.5})$$

Cette approximation est appelée approximation isotherme. Dans un cadre cinétique, on peut justifier que cette approximation est pertinente dans la limite où la vitesse de phase des perturbations est faible devant la vitesse thermique, i.e., $\omega/k \ll v_{\text{th}}$.

A.3 Approximation des plasmas adiabatiques

L'approximation des plasmas isothermes suppose implicitement une conductivité thermique très élevée pour la composante considérée. L'hypothèse extrême opposée correspond à une conductivité thermique faible et donc à un flux de chaleur quasi nul. Pour déterminer la contrainte sur la pression qui correspond à cette approximation, considérons l'équation d'évolution de la pression, soit :

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (\text{A.6})$$

où le paramètre γ , le rapport entre les chaleurs spécifiques, peut être relié au nombre de degrés de liberté f par $\gamma = (f + 2)/f$. Pour une compression à une dimension par

exemple, $f = 1$ de telle sorte que $\gamma = 3$. Pour un processus isotherme, on a $\gamma = 1$. En absence de collisions, l'équation de bilan de particules montre que la divergence du vecteur vitesse s'exprime très simplement en fonction de la dérivée convective de la densité

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = -\frac{1}{n} \left[\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right] n = -\frac{1}{n} \frac{Dn}{Dt} \quad (\text{A.7})$$

ce qui conduit après substitution dans l'expression précédente à la forme simplifiée suivante

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{p}{n^\gamma} \right) = 0 \quad (\text{A.8})$$

ce qui montre que le produit $pn^{-\gamma}$ est invariant dans le repère lié au fluide en mouvement lorsque, viscosité, collisions et le flux de chaleur sont négligés. Cette approximation est connue sous le nom d'approximation adiabatique. Dans un cadre cinétique, on peut justifier que cette approximation est pertinente dans la limite où la vitesse de phase des perturbations est grande devant la vitesse thermique, i.e., $\omega/k \gg v_{\text{th}}$.

En résumé, pour chaque composante du plasma, il y a donc (au moins) 3 situations limites pour lesquelles on peut fermer les équations de bilan de particules et de quantité de mouvement en imposant une des relations algébriques suivantes :

Approximation des plasmas froids : $p = 0$

Approximation isotherme : $pn^{-1} = k_B T = \text{Cte}$

Approximation adiabatique : $pn^{-\gamma} = \text{Cte}$

B

ONDES SONORES DANS UN FLUIDE

Les ondes sonores correspondent à des oscillations longitudinales des particules fluides. Si l'on néglige les contraintes visqueuses, le mouvement d'une particule fluide, au passage de l'onde, peut se décrire par l'équation d'Euler

$$\rho \left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right] = -\nabla p = -\frac{\gamma p}{\rho} \nabla \rho \quad (\text{B.1})$$

La compressibilité implique que la masse volumique d'une particule fluide, ρ , puisse varier, en accord avec l'équation de continuité de la masse

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (\text{B.2})$$

En supposant de petites variations du milieu, on linéarise les équations (B.1) et (B.2) autour d'un état de repos ($\mathbf{v} = 0$) de densité ρ_0 et de pression p_0 uniformes. En plus, en supposant une solution sous forme d'une onde du type $\exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)]$ et en considérant le problème à une dimension, on retrouve l'expression de la vitesse du son (ou la vitesse acoustique) dans un gaz neutre

$$c_s \equiv \frac{\omega}{k} = \left(\frac{\gamma p_0}{\rho_0} \right)^{1/2} = \left(\frac{\gamma k_B T}{M} \right)^{1/2} \quad (\text{B.3})$$

BIBLIOGRAPHIE

- [1] I. Langmuir, *Proceedings of the National Academy of Sciences* **14**, 627 (1928).
- [2] T. Boyd and J. Sanderson, *The Physics of Plasmas*, Cambridge University Press, 2003.
- [3] J.-L. D. et Abraham Bers, *Physique des Plasmas*, volume 1, EDP Sciences, 1994.
- [4] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion*, volume 1, Plenum Press (New York), 1983.
- [5] H. Washimi and T. Taniuti, *Phys. Rev. Lett.* **17**, 996 (1966).
- [6] D. J. Kortweg and G. D. Vries, *Phil. Mag.* **39**, 422 (1895).
- [7] G. Das and S. Paul, *Phys. Fluids* **28**, 823 (1985).
- [8] K. Singh and V. Kumar, *Phys. Plasmas* **12**, 052103 (2005).
- [9] F. Scarf et al., *Geophys. Res. Lett.* **11**, 1050 (1984).
- [10] F. Scarf et al., *Geophys. Res. Lett.* **11**, 335 (1984).
- [11] Y. Nejoh, *Trans. Plasma Sci.* **20**, 80 (1992).
- [12] Y. Nejoh, *Phys. Fluids* **31**, 2914 (1988).
- [13] Y. Nejoh, *Phys. Fluids B* **31**, 2914 (1988).
- [14] R. Lin, W. Levedahl, W. Lotko, D. Gurnett, and F. L. Scarf, *Astrophys. J* **308**, 954 (1986).
- [15] C. J. McKinstrie and D. F. DuBois, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2022 (1986).

-
- [16] Y. Nejoh, *J. Plasma Phys.* **37**, 487 (1987).
- [17] R. Roychoudhury and S. Bhattacharyya, *Phys. Fluids* **30**, 2582 (1987).
- [18] K. Ghosh and D. Ray, *Phys. Fluids* **3**, 303 (1991).
- [19] H. Kuehl and C. Zhang, *Phys. Fluids B* **3**, 555 (1991).
- [20] Y. Nijoh, *Phys. Fluids B* **4**, 2830 (1992).
- [21] Y. Nejoh and H. Sanuki, *Phys. Plasmas* **1**, 2154 (1994).
- [22] O. Sah and K. Goswami, *Phys. Plasmas* **2**, 365 (1995).
- [23] A. Esfandyari, S. Khorram, , and A. Rostami, *Phys. Plasmas* **8**, 4753 (2001).
- [24] P. Chatterjee and R. Jana, *Can. J. Phys.* **54**, 489 (2004).
- [25] Y. Nejoh, *J. Phys. A : Mth. Gen.* **23**, 1973 (1990).