RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÈRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DE BOUIRA

FACULTÉ DES SCIENCES ET DES SCIENCES APPLIQUÉES
DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE

MÉMOIRE PREPARÉS POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME
DE MASTER EN PHYSIQUE

OPTION

Physique Théorique des Hautes Energies

<u>THÈME</u>

Etude de l'information quantique à l'aide des états cohérent Diatomique

Présenté par **:**

KARA HOURIA

Soutenu le 20/09/2017

Devant le jury composé de:

Président	**: Zerirgui Djamel**	**M.C.B, Université Bouira**
Rapporteur	**: Benaiche Salim**	**M.A.A, Université Bouira**
Examinateurs	**: Zaamoum Radouane**	**M.C.B, Université Bouira**
Examinateurs	**: Rahli Amel**	**M.A.A, Université Bouira**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2016/2017

Table des matières

Introduction générale

Une fois la mécanique quantique a vu le jour, plusieurs physiciens se posent la question sur le lien entre cette nouvelle théorie et celle de la mécanique classique. C'est dans ce contexte que les états cohérents ont été introduits par Schrödinger dans les années 1920 [13] . Il les décrivit comme des états quantiques de l'oscillateur harmonique ayant la propriété de se comporter de façon semblable aux états classiques du modèle équivalent. En effet, ces états cohérents ont la particularité de minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg, lorsque les valeurs moyennes des opérateurs impulsion et position évoluent de même façon de leurs homologues classiques. Pourtant, malgré cette caractéristique intéressante, ces états sont restés dans l'ombre jusque dans les années 1960 où ils sont redevenus populaires en optique quantique par d'autres physiciens tels que Glauber et Klauder[11], [12]. En effet, puisque le champ électromagnétique peut être vu comme une superposition d'états classiques décrits par les équations de l'oscillateur harmonique, les états cohérents offrent une description parfaite. Cependant, il faut garder en tête que bien que de nombreux systèmes puissent, dans une certaine mesure, être approximés par le modèle de l'oscillateur harmonique, il existe de nombreux systèmes qui pourraient être représentés de façon plus réaliste par un autre modèle. C'est le cas, par exemple, des vibrations des atomes dans une molécule diatomique, mieux décrites par le potentiel de Morse. Il est donc utile de chercher à construire les états cohérents de ce système afin d'obtenir des représentations plus réalistes.

L'idée de construction d'un ordinateur quantique fait proposer par R. Feynman en 1982[1] , puis en 1984 C.H. Bennet et G. Brassard [2] propose le premier protocole de distribution de clé quantique (BB84) basé sur l'utilisation des photons comme un qubit, le postulat de réduction des paquets d'ondes et le théorème de non clonage de la mécanique quantique. En 1994 P. Shor [3] dévoile le premier algorithme (l'algorithme de Shor) efficace qui exploite la transformée de Fourier en mécanique quantique pour factoriser un nombre entier en temps polynomial où sa premier utilisation pratique a eu lieu en 2001.

La physique quantique régit a l'infiniment petit, où le champ d'application de la physique quantique démarre la ou s'arrêtent les capacités de la physique classique, à l'échelle de l'atome dans le monde infiniment petit, les lois de la physique classique n'ont plus cours et laissent la place aux règles quantique. Dans se monde mystérieux, un objet peut être a la foi une chose et son contraire, être dans plusieurs états a la foi, ou encore être corrélé a un autre élément situé a grand distance, aussi facilement qu'il se trouve juste a coté. La physique quantique, qui étudie le comportement des particules et des atomes, est née XXe siècle, elle est à l' origine de développement technologique comme l'IRM ou le laser. La théorie de l'information est elle aussi apparu au début de siècle dernier, à partir d'un système binaire composé de 0 et 1, elle a permis le codage et la transmission de l'information et de développement des ordinateurs et des téléphones portable, ces deux grand théorie se son réunies a la fin du XXe siècle pour constitué « la théorie de l'information quantique ». Cette discipline qui utilisée des calculateur quantique fonctionne grâce aux propriétés de la mécanique quantique.

La mécanique quantique s'intéresse aux phénomènes survenant a l'échelle atomique, l'idée d'une mécanique différent est apparue lorsque XXe des chercheur ont remarqué qu'il n'était pas possible d'expliqué certain problème tel que l'effet photo-électrique, uniquement avec la mécanique classique, le plus connu des concepts quantique est dualité onde-corpuscule, cette loi indique qu'un objet peut avoir des propriétés d'onde mais aussi de corpuscule.

Plus récemment, les états cohérents sont également très utilisés dans le domaine de l'informatique quantique [14]

Le premier chapitre, nous présenterons une initiation sur l'information quantique, après une brève introduction historique, nous donnons certaines définitions comme le qubit, la sphère de Bloch, la cryptographie quantique, les protocoles d'échange des informations, l'intrication quantique et état de Bell et finalement la téléportation quantique.

Dans le deuxième chapitre nous introduisant des généralités sur les états cohérents pour l'oscillateur harmonique et leurs propriétés, puis des généralités pour la construction des états cohérents pour des différents modèles que l'oscillateur harmonique. En finalisant ce chapitre par la construction des états cohérents pour le modèle de Morse.

Finalement dans le dernier chapitre nous utilisant les états cohérents pour définir le qubit par l'intermidiaire des états chat de Schrödinger, pour les utiliser en téléportation des états intriqués.

Chapitre 1

Initiation à l'information quantique

1.1 Introduction

L'idée de construction d'un ordinateur quantique fait proposer par R. Feynman en 1982[1] , puis en 1984 C.H. Bennet et G. Brassard [2] propose le premier protocole de distribution de clé quantique (BB84) basé sur l'utilisation des photons comme un qubit, le postulat de réduction des paquets d'ondes et le théorème de non clonage de la mécanique quantique. En 1994 P. Shor [3] dévoile le premier algorithme (l'algorithme de Shor) efficace qui exploite la transformée de Fourier en mécanique quantique pour factoriser un nombre entier en temps polynomial où sa premier utilisation pratique a eu lieu en 2001.

La physique quantique régit a l'infiniment petit, où le champ d'application de la physique quantique démarre la ou s'arrêtent les capacités de la physique classique, à l'échelle de l'atome dans le monde infiniment petit, les lois de la physique classique n'ont plus cours et laissent la place aux règles quantique. Dans se monde mystérieux, un objet peut être a la foi une chose et son contraire, être dans plusieurs états a la foi, ou encore être corrélé a un autre élément situé a grand distance, aussi facilement qu'il se trouve juste a coté. La physique quantique, qui étudie le comportement des particules et des atomes, est née XXe siècle, elle est à l' origine de développement technologique comme l'IRM ou le laser. La théorie de l'information est elle aussi apparu au début de siècle dernier, à partir d'un système binaire composé de 0 et 1, elle a permis le codage et la transmission de l'information et de développement des ordinateurs et des téléphones portable, ces deux grand théorie se son réunies a la fin du XXe siècle pour constitué « la théorie de l'information quantique ». Cette discipline qui utilisée des calculateur quantique fonctionne grâce aux propriétés de la mécanique quantique.

La mécanique quantique s'intéresse aux phénomènes survenant a l'échelle atomique, l'idée d'une mécanique différent est apparue lorsque XXe des chercheur ont remarqué qu'il n'était pas possible d'expliqué certain problème tel que l'effet photo-électrique, uniquement avec la mécanique classique, le plus connu des concepts quantique est dualité onde-corpuscule, cette loi indique qu'un objet peut avoir des propriétés d'onde mais aussi de corpuscule.

La lumière par exemple peut être représentés par une onde puisque elle a une longueur d'onde mais elle est également composée de photon qui sont donc des corpuscules selon le moyenne d'étude de la lumière, il faudra donc considérer cette dernière comme une onde ou comme un phénomène corpusculaire, il existe d'autre concepts particuliers a la physique quantique tel que l'intrication quantique ou encoure la superposition quantique, ces deux concepts interviennent directement dans l'information quantique.

1.2 Qubit (quntum-bit) :

L´élément fondamentale en information classique est le bit (binary digit originellement)[4] qui prend deux valeurs 0 ou 1. La réalisation physique du principe de fonctionnement des ordinateurs, basée sur des systèmes à deux états, par éxemple aimantation " up - down ", interrupteur "on - off ", condensateurs "chargés - d´echargés" dans les RAM... Même si le fonctionnement des composants électroniques qui constitue l'ordinateur pour créer, stocker et manipuler les bits repose sur les principes de la mécanique quantique, les états du système qui définissent les bits sont décrits par la physique classique, essentiellement parce qu'ils mettent en jeu un grand nombre de particules (courants électriques).

Le bit quantique ou qubit [5] peut lui aussi se trouver dans deux états $|0\rangle/|1\rangle$ mais qui sont maintenant les états d'un système quantique. La différence essentielle avec l'état classique 0/1 est que le qubit peut se trouver dans d'autres états (une infinité) que l'état $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. En fait tout état de la forme $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$, où α et β sont deux nombres complexes, est accessible au qubit, autrement dit l' ´etat du qubit est un vecteur d'un espace vectoriel complexe de deux dimensions dans lequel les éléments $|0\rangle$ et $|1\rangle$ forment une base dite base de calcul. Les règles de la mésure en mécanique quantique indiquent qu'on obtient le $|0\rangle$ et $|1\rangle$ d'une façon aléatoire, avec les probabilité $|\alpha|^2$ et $|\beta|^2$ respectivement. Cependant le premier postulat de la mécanique quantique concernant la mesure et la description de l'état quantique, qu'on ne peut pas observer directement l'état de superposition du qubit. De plus, une fois qu'il a été mesuré, l'état du qubit est projeté dans l'état correspondant au résultat de la mesure. Pour cela en va changer l'état du qubit, en lui appliquant des portes logiques ou en l'associant à un ou plusieurs autres qubit, sans faire des mesures, sur les états $|0\rangle$ ou $|1\rangle$. C'est seulement à la fin du calcul que le qubit est lu et si l'algorithme est bien choisi le processus de projection que réalise la mesure finale du qubit permet de tirer l'information recherchée.

1.3 L'intrication Quantique :

Le phénomène d'intrication quantique est observé en mécanique quantique, il consiste a étudier l'état quantique de deux objets de manière globale, c'est -a- dire qu'il n'est pas possible de séparer un objet de l'autre même s'ils ne son pas dans la même position, lorsque deux objets son intriqué les propriétés physique observée sur ces deux objets son corrélées. Ce n'est pas le cas lorsque l'on étudier ces objets de manière séparée, si deux objets ObJ1, ObJ2 sont intriquée leur propriété ne sont pas indépendantes, il faut donc les considérer comme un système {ObJ1+ObJ2}, l'idée d'intrication quantique provient d'une expérience de pensée réalisée par (Einstein, Podolsky et Rosen)[6].

On prend l'exemple usuel de l'état du spin de deux particule corréler, si on connait l'état de la premier particule après l'avoir mesuré, il nous donne automatiquement l'information sur la seconde particule sans avoir mesuré son état, ce phénomène est indépendant de la distance qui sépare les particules. De nos jour l'existence d'états intriqués a été montrée au laboratoire pour confirmer le paradoxe EPR, cependant le transfère d'information entre deux particule intriquées ne peut pas se faire instantanément.

1.4 Télépotation quantique :

La téléportation quantique est un processus permettant de transmettre un état quantique inconnu d'un émetteur (Alice) à un récepteur (Bob) par un canal composé d'états intriqués. Il s'agit donc d'une téléportation d'information, et l'état de la particule initiale ne sera plus le même après l'expérience une fois le processus terminé, on dit que, le processus est destructif. En 1993, Bennett et al [2] ont proposé pour la première fois, un schéma pour téléporter un état arbitraire à deux niveaux d'une particule en utilisant le paires d'Einstein-Podolsky-Rosen [6]. Plus tard la téléportation a été étendu aux variables continues [10](par exemple, position et impulsion d'une particule, ou les composants de la quadrature d'une mode du champ électromagnétique). Depuis, la téléportation quantique est devenue très intéressante en raison de ses importantes applications dans la communication quantique et le calcul quantique. Expérimentalement, la téléportation du photon polarisé a été réalisée en employant la conversion paramétrique basse "parametric down-conversion [7] en 1998 par l'équipe de Kimble. Après, ces [8] articles sont considérés comme le début de la communication quantique avec des variables continues. Un nombre de schémas expérimentaux et théoriques ont été présentés pour la téléportation à deux niveaux. Récemment, beaucoup d'intérêt a été concentré sur l'utilisation des variables continues dans le traitement de l'information quantique Parmi ces variables continues, l'état cohérent qui peut être utilisé pour encoder et transmettre une information quantique [7]. van Enk et Hirota [8] ont examiné la téléportation d'une superposition de deux états cohérents $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$ en utilisant les états cohérents intriqués. La superposition linéaire de deux états cohérents est désignée par le nom de chat de Schrödinger [?, ?].

Chapitre 2

Les états cohérents

2.1 Introduction :

Les états cohérents ont été introduits par R. Glauder [11]dans les années 1950 comme des états quantiques de l'oscillateur harmonique qui minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg. Ils sont aussi connus comme des états quasi-classiques. Par la suite, plusieurs généralisations de ceux-ci ont été obtenues tant du point de vue mathématique que physique. Ils trouvent à présent des applications pour de nombreux systèmes quantiques. Ces états cohérents pour l'oscillateur harmonique sont largement utilisés en optique quantique, par exemple. En plus de minimiser la relation d'incertitude de Heisenberg, ils ont des dispersions identiques pour les observables de position et impulsion. Il est possible de généraliser ces états afin de réduire la dispersion d'une des observables (au prix d'augmenter celle sur l'autre) tout en maintenant la minimisation de la relation d'incertitude. Ces nouveaux états sont appelés comprimés. Dans les années 1980, des expériences ont permis de mettre en évidence l'existence de tels états pour la lumière. Le potentiel de Morse constitue une meilleure approximation que l'oscillateur harmonique pour décrire les interactions au sein de molécules diatomiques et il possède un spectre discret fini. Les états cohérents et comprimés peuvent également être construits pour ce modèle. Dans cet exposé, je commencerai par rappeler différentes définitions des états cohérents et comprimés associés à l'oscillateur harmonique et j'expliquerai brièvement leur intérêt en optique quantique. Ensuite, ces définitions seront étendues au contexte du potentiel de Morse. J'insisterai sur la façon d'ajuster les paramètres introduits pour décrire ces états afin d'assurer une bonne localisation de ceux-ci en termes de l'opérateur position notamment.

2.2 Lés états cohérents pour l'oscillateur harmonique :

EN 1926 Schrödinger[13] a introduit une famille d'états pour l'oscillateur harmonique appelés les états cohérents (les états quasi-classiques). Ces états ont été introduits lorsqu'il a étudié l'oscillateur harmonique quantique. Il a considéré le problème de rapprochement le plus possible des valeurs moyennes des opérateurs impulsion et position de leurs homologues classiques. Il a montré que ces états cohérents minimisent la relation d'incertitude d'Heisenberg. Ces mêmes états ont été redécouverts en 1960 par Klauder[12], Glauber [11] et Sandershan.

En 1963 Glauber[11] , a appliqué les états cohérents dans le contexte de l'optique quantique. Au cours de l'année même, Klauder [12], a introduit un système d'états similaire à celui de Glauber mais dans le même contexte que celui de Schrödinger. Les travaux de Klauder expriment la possibilité de généraliser la notion des états cohérents aux différents domaines de la physique et non seulement l'oscillateur harmonique.

La construction des états cohérents pour d'autres systèmes que l'oscillateur harmonique est basée sur ces trois définitions standard[12] [11].

Définition 1 : Les états cohérents sont les états qui minimise la relation d'incertitude de Heisenberg

$$\Delta p \Delta x = \frac{\hbar}{2}. \tag{2.1}$$

En plus de la minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg, ils vérifient que les valeurs moyennes (Δp et Δx) sont égales

Définition 2 : Les états cohérents sont générés par l'action de l'opérateur de déplacement $D(\alpha)$ sur l'état de vide $|0\rangle$ (ou l'état fondamental) , groupe de Weyl-Heisenberg

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle = \exp\left(\alpha a^{+} - \alpha^{*} a\right)|0\rangle . \tag{2.2}$$

Définition 3 : Les états cohérents sont les états propres de l'opérateur d'annihilation a pour la valeur propre α

$$a|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{2.3}$$

Où les opérateurs (a^{+} et a) sont les opérateurs d'échelles de système quantique (opérateur de création et d'annihilation respectivement)

Les états cohérents de l'oscillateur harmonique ont été introduits par E. Schrödinger en 1926 [13], et réintroduit par Glauber [11] en 1963 dans le contexte de l'optique quantique. Ces états quantiques sont une combinaison linéaire des états nombre d'occupation de l'oscillateur harmonique $|n\rangle$

2.2.1 Oscillateur Harmonique (étude des états stationnaire)

L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique est

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 \rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{d\partial}\Psi(x,t) \tag{2.4}$$

La résolution de l'équation de Schrödinger est

$$\begin{aligned}
\Psi_n(x,t) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp -\frac{m\omega}{2\hbar}x^2 \exp -(\frac{i}{\hbar}E_n t) H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) && (2.5)\\
\Psi_n(p,t) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp\left(-\frac{p^2}{2\hbar m\omega}\right) \exp(-\frac{i}{h}E_n t) H_n\left(\frac{p}{\sqrt{\hbar m\omega}}\right) && (2.6)\\
E_n &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) && (2.7)
\end{aligned}$$

où $H_n(x)$ sont les polynomes d'Hermit donné par

$$H_n(x) = (-1)^n \exp x^2 \frac{d^n \exp -x^2}{dx^n} \tag{2.8}$$

Méthode Algébrique

On définie les opérateurs de création et d'annihilation

$$\hat{a} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) \tag{2.9}$$

$$\hat{a}^{+} = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right) \tag{2.10}$$

avec la relation de commutation

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^{+}\right] = 1 \tag{2.11}$$

L'hamiltonien de système devient

$$H = \hbar\omega(\hat{a}^{+}\hat{a} + \frac{1}{2}) \tag{2.12}$$

$$N = \hat{a}^{+}\hat{a}, [N, \hat{a}] = -\hat{a}, \left[N, \hat{a}^{+}\right] = \hat{a}^{+} \tag{2.13}$$

$$|n\rangle, N|n\rangle = n|n\rangle, \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \hat{a}^{+}|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle \tag{2.14}$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^{+}\right)^{n}|0\rangle \tag{2.15}$$

2.2.2 les états cohérents de Schrödinger :

L'hamiltonien de l'oscillateur harmonique est

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2 \to \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2\right)\Psi(x,t) = i\hbar\frac{\partial}{d\partial}\Psi(x,t) \tag{2.16}$$

La résolution de l'équation de Shrodinger est

$$\begin{aligned}
\Psi_n(x,t) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp -\frac{m\omega}{2\hbar} x^2 H_n\left(x\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\right) \exp -\frac{i}{\hbar} E_n t & (2.17)\\
Or \quad H_n(x) &= (-1)^n \exp x^2 \frac{d^n \exp -x^2}{dx^n} \text{ est les polynomes de Hermite} & (2.18)\\
\Psi_n(p,t) &= \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \exp -\frac{p^2}{2\hbar m\omega} H_n\left(\frac{p}{\sqrt{\hbar m\omega}}\right) \exp -\frac{i}{\hbar} E_n t & (2.19)\\
E_n &= \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) & (2.20)
\end{aligned}$$

Méthode Algébrique

On définie les opérateurs de création et d'annihilation

$$\begin{aligned}
\hat{a} &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + i\frac{p}{m\omega}\right) & (2.21)\\
\hat{a}^+ &= \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x - i\frac{p}{m\omega}\right) & (2.22)
\end{aligned}$$

avec la relation de commutation

$$\left[\hat{a}, \hat{a}^+\right] = 1 \qquad (2.23)$$

L'hamiltonien de système devient

$$\begin{aligned}
H &= \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + \frac{1}{2}) & (2.24)\\
N &= \hat{a}^+\hat{a}, [N,\hat{a}] = -\hat{a}, \left[N,\hat{a}^+\right] = \hat{a}^+ & (2.25)\\
|n\rangle, N|n\rangle &= n|n\rangle, \hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \hat{a}^+|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle & (2.26)\\
|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}}\left(\hat{a}^+\right)^n|0\rangle & (2.27)
\end{aligned}$$

Les états cohérents de Schrodinger : Les états propres $|n\rangle$ de l'hamiltonien ne sont pas trés utiles pour faire le lien avec la théorie classique de l'oscillateur harmonique. On introduit une famille d'états appelés états cohérents, caractérisée par un paramètre complexe α .Introduit par Shrodinger en 1926 pour résoudre le problème de l'oscilateur harmonique quantique

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi(t,x) = H_{osc}\Psi(t,x) \quad \Psi(t=0) = \Psi_0 \tag{2.28}$$

Où Ψ_0 est un état Gaussien φ_{α_0} centré en un point $\alpha_0(q_0, p_0)$ dans l'espace de phase En defini la gaussien centré en (0,0) par

$$\varphi_0 = (\pi\hbar)^{-\frac{1}{4}} \exp\frac{-x^2}{2\hbar} \tag{2.29}$$

Et la gaussien centré en $\alpha(q,p)$ par l'opérateur de translation de Weyl-Heisenberg $\hat{T}(\alpha)$

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha(x) &= \hat{T}(\alpha)\varphi_0 \ \text{ avec } \hat{T}(\alpha) = \exp\frac{i}{\hbar}(p\ \hat{Q} - q\ \hat{P}) \qquad (2.30) \\ \hat{P}\ \Psi &= -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}\Psi \quad , \qquad \hat{Q}\ \Psi = x\Psi \qquad (2.31) \end{aligned}$$

La famille d'opérateurs unitaires $\hat{T}(\alpha)$ est reliée au groupe de Heisenberg $H_1.R_t \times R^2$ muni de la loi de groupe de Lie :

$(t,\alpha)(t\prime,\alpha\prime) = (t + t\prime + \sigma(\alpha,\alpha\prime), \alpha + \alpha\prime)$.

$(t,\alpha) \rightarrow \rho(t,\alpha) = \exp\frac{it}{\hbar}\hat{T}(\alpha)$ représentation de Von Newmann

Donc les solutions pour l'équation de Schrodinger peuvent s'ecrire

$$\psi_t = \exp\frac{it}{\hbar}\hat{T}(\alpha)\varphi_\alpha \tag{2.32}$$

la formule de recurance est donnée par

$$\begin{aligned} \psi &= \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{R^2} \langle\varphi_\alpha,\psi\rangle\,\varphi_\alpha d\alpha \qquad (2.33) \\ \langle\varphi_\alpha,\varphi_{\alpha'}\rangle &= \exp\left(\frac{\hbar}{i}\sigma(\alpha,\alpha') - \frac{|\alpha-\alpha'|^2}{4\hbar}\right) \qquad (2.34) \end{aligned}$$

avec

$$\sigma(\alpha, \alpha') = qp' - q'p \tag{2.35}$$

2.2.3 Représentation complexe des états cohérents

Pour cela en définie l'état cohérent dans l'espace des $|\alpha\rangle$:

$$\hat{a}\,|\alpha\rangle = \alpha\,|\alpha\rangle$$

$|\alpha\rangle$ est l'état propre pour l'opérateur $\hat{a}$ avec la valeure propre $\alpha, (\alpha \in \mathbb{C})$ donc

$$|\alpha\rangle \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,|n\rangle\,, c_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}c_0 \tag{2.36}$$

$$< \;\alpha \mid \alpha >= 1 \Longrightarrow c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \tag{2.37}$$

Finalement on peut écrire les états cohérent sous la forme suivante :

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!}\left(\hat{a}^+\right)^n|0\rangle \tag{2.38}$$

On peut facilement montrer que les états cohérents peuvent écrire en fonction de l'opérateur unitaire de Weyl-Heisenberg :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)\,|0\rangle\,; D(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^+ - \alpha^*\hat{a}}$$

Où α^* est le complexe conjugué de α

En utilisant la relation de Compbell-Baker-Hausdorf

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \tag{2.39}$$

Si en appliquant l'opérateur d'évolution sur l'état cohérent $|\alpha\rangle$

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}H_0 t\right\}|\alpha\rangle = \exp\left\{-i\omega(N+\frac{1}{2})t\right\}|\alpha\rangle = e^{-i\frac{\omega t}{2}}\left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle \tag{2.40}$$

La valeur moyènne de x

$$\left\langle \alpha e^{-i\omega t}\right| x \left|\alpha e^{-i\omega t}\right\rangle = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\left(\alpha e^{-i\omega t} + \alpha^* e^{i\omega t}\right)\ ,\ \alpha = a + ib \tag{2.41}$$

$$\Rightarrow\ \langle x\rangle = A(a\cos\omega t + b\sin\omega t \tag{2.42}$$

qui ressemble à la solution classique

$$\left\langle \Delta x^2\right\rangle = \left\langle x^2\right\rangle - \langle x\rangle^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \tag{2.43}$$

$$\left\langle \Delta p^2\right\rangle = \left\langle p^2\right\rangle - \langle p\rangle^2 = \frac{m\omega\hbar}{2} \tag{2.44}$$

$$\Delta x\Delta p = \frac{\hbar}{2} \tag{2.45}$$

En 1997 Nieto a introduit les états cohérents dans l'espace des conféguartion (la représentation x), où les fonctions d'ondes des états cohérents sont des paquets gaussiens[15]

$$\psi_\alpha(x) = \langle x\,|\alpha\rangle = \left(\frac{1}{2\pi\sigma_0}\right)^{\frac{1}{4}}\exp\left\{-\left(\frac{x-x_0}{2\sigma_0}\right) + ip_0 x\right\}, \tag{2.46}$$

$$x_0 = \langle x\rangle\ ,\ p_0 = \langle p\rangle\ ,\quad \sigma_0 = \frac{1}{\sqrt{2m\omega}}\ \text{et}\ \alpha = \sqrt{\frac{m\omega}{2}}\left(x_0 + \frac{i}{m\omega}p_0\right). \tag{2.47}$$

Les états cohérents ont plusieurs propriétés intéressantes. Ils nous fournissent une résolution de l'opérateur identité :

$$\int \frac{d\alpha}{\pi}\,|\alpha\rangle\langle\alpha| = I, \tag{2.48}$$

où I représente l'opérateur identité et $d^2\alpha = d\,\mathrm{Re}\,\alpha d\,\mathrm{Im}\,\alpha$. Ils forment alors un ensemble sur-complet car ils sont normés mais non orthogonaux puisque :

$$\langle\alpha\,|\beta\rangle = \exp\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta\right). \tag{2.49}$$

Comme les états cohérents forment une base sur-complète, un état quelconque $|m\rangle$ ($m \in \mathbb{N}$) , appartenant au même espace de Hilbert que $|\alpha\rangle$, peut s'exprimer sur la base d'un état cohérent $|\beta\rangle$ par :

$$|m\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\beta m(\beta^*)\,|\beta\rangle\,,\; m(\beta^*) = \langle\beta\,|m\rangle \tag{2.50}$$

En particulier :

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\pi}\int d^2\beta\;\; \exp\frac{-1}{2}\left(|\alpha|^2 + |\beta|^2 - 2\alpha^*\beta\right)|\beta\rangle \tag{2.51}$$

2.3 Lés états cohérents pour le moment cinétique :

Pour le moment cinétique (de nombre principal j), les opérateurs j_x, j_y et j_z de moment cinétique vérifient :

$$[j_u, j_v] = i\varepsilon_{uvw}j_w \tag{2.52}$$

On introduit les opérateurs d'échelle :

$$j_\pm = j_x \pm j_y \tag{2.53}$$

Ces opérateurs vérifient $j_\pm^+ = j_\mp$, et nous vérifions la relation de commutation suivante :

$$[j_\pm, j_z] = \mp j_\pm \tag{2.54}$$

On introduit la base propre $\{|jm\rangle\}_{m\in[-j,j]}$ à j_z et j^2

$$\begin{aligned} j_z\,|jm\rangle &= \hbar m\,|jm\rangle & (2.55)\\ j^2\,|jm\rangle &= \hbar^2 j(j+1)\,|jm\rangle & (2.56)\\ j_\pm\,|jm\rangle &= \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\,|j\,(m\pm1)\rangle & (2.57)\end{aligned}$$

On remarque que la facteur devant le vecteur annule $j_+\,|jj\rangle = j_-\,|j-j\rangle = 0$. De plus

$$j_\pm^n\,|jm\rangle = \left\| j_\pm^N\,|jm\rangle \right\| \,|jm\pm n\rangle \text{ avec } n\in[0,j\mp m] \qquad (2.58)$$

On introduit alors les états cohérents du moment cinétique ($z\in\mathbb{C}$) :

$$|z\rangle = Ae^{zj_+}\,|j-j\rangle \qquad (2.59)$$

où A est une constante de normalisation.

La forme série de ces états s'écrit :

$$\begin{aligned} |z\rangle &= A\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}j_+^n\,|j-j\rangle & (2.60)\\ |z\rangle &= A\sum_{n=0}^{2j}\frac{z^n}{n!}\left\|j_+^n\,|j-j\rangle\right\|\,|jn-j\rangle & (2.61)\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} \left\|j_+^n\,|j-j\rangle\right\| &= \sqrt{\prod_{k=0}^{n-1}\left(j(j+1)-(k-j)\,(k-j+1)\right.} & (2.62)\\ &= \sqrt{\prod_{k=0}^{n-1}(2j-k)\prod_{k=0}^{n-1}(k+1)} = \sqrt{\frac{(2j)!n!}{(2j-n)!}} & (2.63)\end{aligned}$$

Finalement les états cohérents pour le mement cinétique, s'écrit dans la base propre

$\{|jm\rangle\}_{m\in[-j,j]}$ à j_z et j^2 :

$$
\begin{aligned}
|z\rangle &= A\sum_{n=0}^{2j}\frac{z^n}{n!}\sqrt{\frac{(2j)!n!}{(2j-n)!}}\,|jn-j\rangle &(2.64)\\
&= A\sum_{n=0}^{2j}\frac{z^n}{n!}\,n!\sqrt{\binom{2j}{n}}\,|jn-j\rangle &(2.65)\\
&= A\sum_{n=0}^{2j}\sqrt{\binom{2j}{n}}z^n\,|jn-j\rangle &(2.66)\\
A &= \frac{1}{\langle z\,|z\rangle}=\left(1+|z|^2\right)^{-j} &(2.67)
\end{aligned}
$$

De la même manière que pour l'oscillateur harmonique, on cherche une relation de fermeture sous forme intégrale en considérant tout le plan complexe. Toujours avec $x = \operatorname{Re} z$ et $y = \operatorname{Im} z$, nous définissons naïvement, par anlogie avec l'oscillateur harmonique, l'opérateur suivant, avec les vecteurs normés :

$$
\begin{aligned}
\hat{O} &= \int_{\mathbb{R}^2} dxdy\left(1+|z|^2\right)^{-2j}|z\rangle\langle z| &(2.68)\\
I &= \frac{2j+1}{\pi}\int_{\mathbb{R}^2} dxdy\left(1+|z|^2\right)^{-2j}|z\rangle\langle z| &(2.69)
\end{aligned}
$$

2.4 Lés états cohérents pour une particule diatomique (Modèle du potentiel de Morse) :

À l'aide des propriétés des états cohérents pour l'oscillateur harmonique, plusieurs travaux sont consacrés pour construire des états cohérents par une méthode générale, pour les systèmes ayant un spectre énergétique infini, constitués par la superposition d'un nombre infini des états énergétique, basé sur trois définitions standard.

Le système de Morse est un système ayant un spectre d'énergie des états liées fini, pour la généralisation de la construction des états cohérents basé sur l'action de l'opérateur de déplacement qui est une application infini de l'opérateur d'échelle sur l'état fondamental de système (état du vide), puisque cet opérateur est une exponentielle des opérateurs d'échelles qui factorise l'hamiltonien de système, ce dernier a un spectre fini, en plus le terme d'exponentielle de la relation de commutation entre ces opérateurs d'après la relation de Baker-Campbell-Hausdorff pour ramener l'opérateur de déplacement aux produit des exponentiels des ces opérateurs isoler ne représente pas la constante de normalisation pour ces états. Pour l'approche utilisée pour définir les états cohérents semi-classique et aussi basé sur l'action de l'exponentielle de l'opérateur d'annihilation. C'est deux méthode n'assure pas la deuxième définition que les états cohérents sont les états propre de l'opérateur annihilation, sauf pour le cas des opérateurs d'échelles du genre oscillateur.

La généralisation la plus proche pour la construction des états cohérents pour des systèmes d'états énergétique fini est celle donné par Klauder [12], qui est une solution d'une superposition des états énergétique du système pour résoudre la relation de récurrence qui ce résulte de la deuxième définition des états cohérents.

2.4.1 Le Modèle du potentiel de Morse :

Étude des états stationnaires

Dû à l'importance du modèle de Morse dans la physique diatomique. Plusieurs travaux sont consacré pour la réalisation de la solution exacte pour ce modèle.

L'hamiltonien du système pour le potentiel de Morse est donné par [16]

$$H = \frac{p^2}{2m_r} + V_0 \left(e^{-2\beta x} - 2e^{-\ \beta x} \right) \tag{2.70}$$

où V_0 correspond à la profondeur de potentiel x donne la distance relative de la position d'équilibre des atomes.

La solution exacte de l'équation Schrödinger avec le potentiel de Morse peut être exprimée comme [17] [18] :

$$\psi_n^\nu(y) = N_n^\nu y^s e^{-\frac{y}{2}} L_n^{2s}(y), \tag{2.71}$$

avec le changement de variable $y = \nu e^{-\beta x}$, $L_n^{2s}(y)$ sont les polynômes de Laguerre associes, N_n^ν est une constante de normalisation et s et le paramètre de Landau Lifshitz.

$$N_n^\nu = \sqrt{\frac{\beta\left(\nu - 2n - 1\right)\Gamma(n+1)}{\Gamma(\nu - n)}} \tag{2.72}$$

$$\nu = \sqrt{\frac{8m_r V_0}{\hbar^2\beta^2}}, s = \sqrt{\frac{-2m_r E}{\hbar^2\beta^2}} \tag{2.73}$$

$$2s = \nu - 1 - 2n, \quad p = \frac{\nu - 1}{2} \tag{2.74}$$

et les énergies de système sont :

$$E_n = -\frac{\hbar}{2m_r}\beta^2 s^2 \tag{2.75}$$

Le nombre quantique principal n, prend un nombre fini des valeurs $n = 0, 1, ..., n_{\max} - 1(n_{\max} = p = \frac{\nu-1}{2})$, avec :

$$\Delta E_n = E_{n+1} - E_n = \frac{\hbar}{2m_r}\beta^2\left[\nu - 2\left(n+1\right)\right] \tag{2.76}$$

Contrairement à l'oscillateur harmonique l'écart énergétique entre deux états consécutifs n'est pas constant.

Introduisant la différence énergétique suivante :

$$e(n) = \frac{2m_r}{\hbar^2\beta^2}\left(E_n - E_0\right) = n(n - \nu + 1) \tag{2.77}$$

qui représente un spectre énergétique décaler avec $e(0) = 0$, n est le nombre quantique principale des états énergétique pour le modèle de Morse prend un nombre fini . On réalité lorsque le nombre quantique principale franchie la valeur maximale l'état énergétique doit être nul c'est-a-dire que le dernier état énergétique des états liées $E_p = 0$ et le système prend un comportement complexe où le spectre énergétique passe d'un spectre discret vers un spectre continue.

Les opérateurs d'échelle :

Le rapport du groupe SU(2) avec l e modèle de Morse peut être établi directement par la méthode de factorisation. Cette méthode permet d'obtenir directement les opérateurs de l'échelle de la fonction d'onde pour obtenir seulement les générateurs des groupes dynamiques de la coordonnée physique, et alors a constitué une algèbre de Lie convenable [19] [20] [21].

La méthode de factorisation est basé sur la définition d'un opérateur de nombre des particules N diagonale qui satisfait :

$$N\psi_n^\nu(y) = n\psi_n^\nu(y) \tag{2.78}$$

Le rapport du groupe $SU(2)$ avec l e modèle de Morse peut être établi directement par la méthode de factorisation. Cette méthode permet d'obtenir directement les opérateurs d'échelle de la fonction d'onde pour obtenir seulement les générateurs des groupes dynamiques de la coordonnée physique, et alors de constituer une algèbre de Lie convenable [17] [18]. Les opérateurs d'échelle pour le Groupe $SU(2)$ sont dans le cas du modèle satisfont les relations suivantes :

$$K^- = -\left[\frac{d}{dy}(2s+1) - \frac{s(2s+1)}{y} + \frac{\nu}{2}\right]\sqrt{\frac{s+1}{s}} \tag{2.79}$$

$$K^-\psi_n^\nu(y) = \sqrt{n(\nu-n)}\psi_{n-1}^\nu(y) \tag{2.80}$$

$$K^+ = -\left[\frac{d}{dy}(2s-1) - \frac{s(2s-1)}{y} - \frac{\nu}{2}\right]\sqrt{\frac{s}{s+1}} \tag{2.81}$$

$$K^+\psi_n^\nu(y) = \sqrt{(n+1)(\nu-n+1)}\psi_{n+1}^\nu(y) \tag{2.82}$$

Ces relations sont valides pour $n \in [0, n_{\max}-1]$.

Ces opérateurs de création et d'annihilation satisfont les relations de commutation suivantes :

$$\begin{aligned} \left[K^{+}, K^{-}\right] &= 2K_0, \left[K_0, K^{\pm}\ \right] = \pm K^{\pm} && (2.83) \\ K_0\ \psi_n^{\nu}(y) &= \left(n - \frac{\nu - 1}{2}\right) \psi_n^{\nu}(y) && (2.84) \end{aligned}$$

La fnction d'onde peut s'exprimer par :

$$\psi_n^{\nu}(y) = \sqrt{\frac{\Gamma\left(\nu - n\right)}{n!\Gamma\left(\nu\right)}} \left(b^{+}\right)^{n} \psi_0^{\nu}(y) \tag{2.85}$$

Les opérateurs d'échelle du genre énergétique sont construit pour factoriser l'hamiltonien du système de telle sorte que :

$$\begin{aligned} b^{+}\psi_n^{\nu}(y) &= \sqrt{e(n+1)}\psi_{n+1}^{\nu}(y) && (2.86) \\ b^{-}\psi_n^{\nu}(y) &= \sqrt{e(n)}\psi_{n-1}^{\nu}(y) && (2.87) \end{aligned}$$

où $e(n)$ est donnée par la relation (d'écart énergétique) et $n \in [0, n_{\max} - 1]$. Dans ce cas, on a :

$$\begin{aligned} \left[b^{+}, b^{-}\right] \psi_n^{\nu} &= -\left(2K_0 + 1\ \right) \psi_n^{\nu} && (2.88) \\ b^{-} &= K^{-}A(N)\ \ ,\ b^{+} = A(N)K^{+} && (2.89) \\ A(N) &= \sqrt{\frac{N - \nu + 1}{N - \nu}} && (2.90) \end{aligned}$$

Les opérateurs d'échelle de genre oscillateur (lorsque $\beta \to 0, \nu \to \infty$) sont :

$$\begin{aligned} a^{-}\psi_n^{\nu} &= \sqrt{n}\psi_{n-1}^{\nu}, a^{+}\psi_n^{\nu} = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}^{\nu} && (2.91) \\ a^{-} &= K^{-}\sqrt{\frac{1}{\nu - N}}, a^{+} = \sqrt{\frac{1}{\nu - N}}K^{+} && (2.92) \end{aligned}$$

2.4.2 Les états cohérents pour le modèle de Morse :

La forme générale des états cohérents pour des systèmes ayant un spectre énergétique fini est celle donné par Klauder . Elle représente une superposition des états énergétiques du système pour résoudre la relation de récurrence qui résulte de la troisième définition des états cohérents :

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{N^{\nu}\left(|\alpha|^{2}\right)}} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{\alpha^{n}}{\sqrt{\rho(n)}} |\psi_{n}^{\nu}\rangle \tag{2.93}$$

$$|\alpha\rangle = \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)\right)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu-n-1)}{n!}}\alpha^{n} |\psi_{n}^{\nu}\rangle \tag{2.94}$$

Les états cohérents sont censés être normalisés, à savoir la constante de normalisation $N^{\nu}\left(|\alpha|^{2}\right)$ est choisie de telle sorte que $\langle\alpha|\ \alpha\rangle = 1$. Les quantités $\rho(n)$ forment un ensemble de paramètres strictement positifs qui sera lié aux énergies propres, avec :

$$\rho(n) = \prod_{i=0}^{n} e(i) = \frac{n!\Gamma(\nu-1)}{\Gamma(\nu-n-1)} \tag{2.95}$$

$$N^{\nu}\left(|\alpha|^{2}\right) = \frac{1}{\Gamma(\nu-1)} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1) \tag{2.96}$$

L'évolution temporelle de ces états cohérents est donnée par :

$$|\alpha\rangle = \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)\right)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \sqrt{\frac{\Gamma(\nu-n-1)}{n!}}\alpha^{n} e^{\frac{-iE_n}{\hbar}t} |\psi_{n}^{\nu}\rangle \tag{2.97}$$

où E_n est l'énergie du système donner par la relation (2.75). Ce choix est fait pour que ces états cohérents soient des états propres de l'opérateur d'annihilation a^{-} et tendent vers les états cohérents de l'oscillateur harmonique lorsque $\beta x \to 0$.

Les états cohérents pour le modèle de Morse de genre oscillateur et leurs évolution temporelle, sont donnés par la relation (2.95) avec $\rho(n) = n!$

$$
\begin{aligned}
|\alpha\rangle &= \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\right)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n^\nu\rangle \qquad (2.98)\\
|\alpha\rangle &= \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\right)^{\frac{-1}{2}} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} e^{\frac{-iE_n}{\hbar}t} |\psi_n^\nu\rangle \qquad (2.99)
\end{aligned}
$$

2.4.3 La forme gaussienne :

La forme gaussienne des états cohérents [22] a été définie pour donner une bonne approximation des états cohérents standards de l'oscillateur harmonique. C'est une généralisation qui mène à une bonne localisation de la position de la particule. Cette forme gaussienne :

$$
\begin{aligned}
|\mu,\sigma\rangle &= \frac{1}{\sqrt{N(\mu,\sigma)}} \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \exp -\left(\frac{(n-\mu)^2}{4\sigma^2}\right) |\psi_n^\nu\rangle \qquad (2.100)\\
N(\mu,\sigma) &= \sum_{n=0}^{n_{\max}-1} \exp -\left(\frac{n-\mu}{2\sigma}\right), \{\mu,\sigma\} \in \mathbb{R} \qquad (2.101)
\end{aligned}
$$

est définie indépendamment de l'opérateur d'annihilation, où les paramètres $\{\mu,\sigma\}$ seront fixés pour avoir une bonne localisation de la particule.

Pour le cas de l'oscillateur harmonique

$$
\begin{aligned}
\mu &= \langle N\rangle, \qquad (2.102)\\
\sigma &= \Delta N = \sqrt{\langle N^2\rangle - \langle N\rangle^2} \qquad (2.103)\\
\langle N\rangle &= (\Delta N)^2 = |z|^2 \qquad (2.104)
\end{aligned}
$$

La forme gaussienne des états cohérents pour le modèle de Morse, qui sont une généralisation pour la relation (2.100), on déduit les paramètres réels $\{\mu,\sigma\}$ a partir de l'équation$(2.102),(2.103),(2.104)$ qui donne

$$\Phi^{\nu}(\mu,\sigma,x)=\frac{1}{\sqrt{N(\mu,\sigma)}}\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\exp-\left(\frac{(n-\mu)^2}{4\sigma^2}\right)\psi_n^{\nu}(x) \tag{2.105}$$

Pour poser les paramètres $\{\mu,\sigma\}$ défini par l'equation, nous devrons calculer les valeurs moyennes à partir des états cohérents définis par l'équation (2.93)et(2.94) pour avoir une compatibilité entre les états cohérents et leur forme gaussienne, où [23] [24] :

$$\langle N\rangle^2 = \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)\right)^{-1}|\alpha|^2\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{\Gamma(\nu-n-2)}{n!}|\alpha|^{2n} \tag{2.106}$$

$$\langle N^2\rangle = \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)\right)^{-1}|\alpha|^2\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{(n+1)\,\Gamma(\nu-n-2)}{n!}|\alpha|^{2n} \tag{2.107}$$

$$\Delta N = \sqrt{\langle N^2\rangle-\langle N\rangle^2}=|\alpha|^2 \tag{2.108}$$

2.4.4 Conclusion :

Dans ce chapitre, après l'étude de différentes on a construit une certaine famille des états cohérents pour le modèle de Morse. Où la généralisation la plus proche pour la construction des états cohérents pour des systèmes d'états énergétique fini est celle donné par Klauder [12], qui est une solution d'une superposition des états énergétique du système pour résoudre la relation de récurrence qui ce résulte de la deuxième définition des états cohérents.

Chapitre 3

Téleportation via les états cohérents

3.1 Introduction

Nouvellement, plusieurs travaux sont consacrer à l'utilisation des variables continues dans le traitement de l'information quantique [25]. Parmi ces variables continues, les états cohérents qui peut être utilisé pour crypter et transmettre les informations, dans le cadre de l'information quantique[26]. Van Enk et Hirota [réf], ont examiné la téléportation d'une superposition de deux états cohérents $\mid \alpha\rangle$ et$\mid -\alpha\rangle$ en utilisant les états cohérents intriqués. La superposition linéaire de deux états cohérents est désignée par le nom de chat de Schrödinger, une des caractéristiques des états cohérent, est qu'ils sont très voisines de leurs homologue classiques, pour cette raison ils sont appelés, les états casi-classiques$\mid \alpha\rangle$ et$\mid -\alpha\rangle$ ces états ont été introduits pour la première fois par Schrödinger en 1926, dans le cadre de l'oscillateur harmonique, Le but de Schrödinger est de trouver des états quantiques qui présentent un rapport entre les formulations quantiques et classiques d'un système physique donné. Il a démontré aussi que ces états minimisent le principe d'incertitude de Heisenberg. Plus tard, après l'invention du Laser en 1963, les physiciens étaient épris (passionné) par l'étude de ces états dans le cadre de l'optique quantique. les états cohérents sont faciles à générer et à manipuler avec les composants optiques, comme la séparatrice de faisceau, en comparaison avec d'autres états quantiques. par conséquent, une capacité est de les utiliser dans la théorie quantique de l'information, particulièrement dans les communications quantiques. Notre travaille est fondée sur l'utilisation des états cohérents comme support de l'information, dans ce cas La clé quantique est codé selon une superposition des états cohérents $\mid \alpha\rangle$ et $\mid -\alpha\rangle$ généralement ces états ne sont pas orthogonaux, tel que $\langle\alpha \mid -\alpha\rangle \neq 0$, Toutefois, incohérent $\langle\alpha \mid -\alpha\rangle = \exp\left(-2 \mid \alpha \mid^2\right)$, la superposition de ses états appelé le chat de Schrödinger, a partir de ses états en peut définir les états chat de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique, ces états illustrent en effet le fameux paradoxe(étrangeté) du chat de Schrödinger. L'Étrangeté repose sur un dispositif expérimental plaçant un chat dans une superposition d'états mort et vivant $\frac{1}{2}$ (mort+vivant). A la base de cette expérience on va introduire les état chat pour l'oscillateur harmonique.

3.2 Les états chat de Schrödinger pour l'oscillateur harmonique

En définie l'état cohérent dans l'espace des $\mid \alpha\rangle$:

$$\hat{a} \mid \alpha\rangle = \alpha \mid \alpha\rangle$$

$\mid \alpha\rangle$ est l'état propre pour l'opérateur â avec la valeur propre $\alpha, (\alpha \in \mathbb{C})$donc

$$\mid \alpha\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \mid n\rangle, C_n = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} c_0$$

ona $\langle\alpha \mid \alpha\rangle = 1 \Longrightarrow c_0 = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}$

finalement en peut écrir les états cohérent sous la forme suivante

$$\mid \alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \left(\hat{a}^{+}\right)^n \mid 0\rangle$$

A l'aide de ses états en peut introduire les états chat pour l'oscillateur harmonique qui prend la forme suivante ,peuvent étre exprimées comme une superposition des etats propres $\mid n\rangle$ de la facon suivante :

$$\mid \Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle$$

N est le facteur de normalisation

$$N = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mid \alpha \mid^2}{n!}$$

Dans le cas de chat de shrodinger $\alpha, \Psi, et\ N$,ces états cohérent peuvent étre écrit en fonction de l'état de Fock(état de nombre de photon $\mid n\rangle$:

$$\mid \pm\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm\alpha)^n}{\sqrt{n!}} \mid n\rangle \tag{3.1}$$

L'état intriqué prend la forme suivant

$$\mid \alpha\rangle_{ab} = \frac{(\mid \alpha, \alpha\rangle + \mid -\alpha, -\alpha\rangle)}{N_{ab}} \tag{3.2}$$

$$N_{ab} = \sqrt{2 - \exp\left(-2 \mid \alpha \mid^2\right)} \tag{3.3}$$

$$\langle\alpha \mid -\alpha\rangle = \exp\left(-2 \mid \alpha \mid^2\right) \tag{3.4}$$

dans le cas du chat de shrodinger Φ prend la forme suivant :

$$\mid \Phi\rangle = N_\alpha \left(\mid \alpha\rangle + e^{i\varphi} \mid -\alpha\rangle\right) \tag{3.5}$$

(N_α) est le facteur de normalisation en fonction de l'amplitude $\mid \alpha \mid$ et la phase φ tel que sécrive comme suit

$$N_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\left(1+\cos\left(\varphi\right)e^{-2|\alpha|^2}\right)}} \tag{3.6}$$

En Choisissant des valeurs spécifiques de la phase. En Choisissant des valeurs spécifiques de la phase φ pour porter notre information, on obtenons quatre états superposer

$$|\ \alpha\rangle+|-\alpha\rangle \rightarrow|\ 0_L\rangle \tag{3.7}$$

$$|\ \alpha\rangle-|-\alpha\rangle \rightarrow|\ 1_L\rangle \tag{3.8}$$

$$|\ \alpha\rangle+i\ |-\alpha\rangle \rightarrow|\ 0_L\rangle \tag{3.9}$$

$$|\ \alpha\rangle-i\ |-\alpha\rangle \rightarrow|\ 1_L\rangle \tag{3.10}$$

qui donne deux base pour un qubit logique, codage de qubit,on va définir le qubit

3.2.1 Qubit via les états cohérents

En informatique quantique, un qubit (quantum bit), est l'état quantique qui représente la plus petite unité de stockage d'information quantique. En va les représenté comme suite :

$$|\ \varphi\rangle = \alpha\ |\ 0\rangle + \beta\ |\ 1\rangle \text{ avec } |\ \alpha\ |^2 + |\ \beta\ |^2 = 1 \tag{3.11}$$

$$|\ 0\rangle = A\ |\ \Psi_+\rangle + B\ |\ \Psi_-\rangle \tag{3.12}$$

$$|\ 1\rangle = A\ |\ \Psi_-\rangle - B\ |\ \Psi_-\rangle \tag{3.13}$$

Si en revien a l'état intriqué $|\ \alpha\rangle_{ab}$,soit deux qubit H_A et H_B

$$|\quad \varphi_A\rangle = a_0 \mid 0\rangle_A + a_1 \mid 1A\rangle, \mid a_0 \mid^2 + \mid a_1 \mid^2 = 1 \tag{3.14}$$

$$|\quad \varphi_B\rangle = b_0 \mid 0_B\rangle + b_1 \mid 1_B\rangle, \mid b_0 \mid^2 + \mid b_1 \mid^2 = 1 \tag{3.15}$$

le produit tensoriel$\mid \varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$ est donné

$$\mid \varphi_A \otimes \varphi_B\rangle = a_0 b_0 \mid 0_A \otimes 0_B\rangle + a_0 b_1 \mid 0_A \otimes 1_B\rangle + a_1 b_0 \mid 1_A \otimes 0_B\rangle + a_1 b_1 \mid 1_A \otimes 1_B\rangle \tag{3.16}$$

le vecteur arbitraire $\mid \Psi\rangle$ de H est

$$\mid \Psi\rangle = \alpha \mid 0_A \otimes 0_B\rangle + \beta \mid 0_A \otimes 1_B\rangle + \gamma \mid 1_A \otimes 0_B\rangle + \delta \mid 1_A \otimes 1_B\rangle \tag{3.17}$$

on note que $\mid \Psi\rangle$ soit de la forme $\mid \varphi_A \otimes \varphi_B\rangle$,une condition néccessaire suffisante est que

$$\alpha = a_0 b_{0,} \beta = a_0 b_1 \tag{3.18}$$

$$\gamma = a_1 b_0, \delta = a_1 b_1 \Longrightarrow \alpha\delta = \beta\gamma \tag{3.19}$$

Dans le cas d'état intriqué(entageled) $\mid \Psi\rangle$ prend la forme suivante

$$|\quad \Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 0_A \otimes 1_B\rangle + \mid 1_A \otimes 0_B\rangle) \tag{3.20}$$

$$\alpha = 0, \beta = \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \delta = 0 \Longrightarrow \alpha\delta + \beta\gamma \tag{3.21}$$

L'intrication des états est une distinction de la théorie quantique. Il est cependant important de souligner que comme un système composé de nombreux quantums est difficile à isoler de l'environnement, ses constituants ont une probabilité bien plus grande de s'intriquer avec des particules non vérifiées de l'environnement, ce qui détruit leurs interconnexions originelles. Autrement , dans les termes adjoints à décrire la décohérence, trop d'informations s'échappent du système dans l'environnement, ce qui confère au système un comportement classique, non quantique. On comprend donc que lorsqu'on cherche à exploiter l'intrication, par exemple pour construire des ordinateurs quantiques, le principal défi est la difficulté de préserver l'intrication.

L'état intriqué $\mid \Psi\rangle$ n'est pas propre. En effet, $\mid \Psi^{+}\rangle$ a une importance en information quantique. C'est l'un des quatre états de Bell, donc on parle sur les énigalités de Bell

3.2.2 les états de Bell

En mécanique quantique, les inégalités de Bell (du nom de leur auteur : John Stewart Bell) sont les relations qui doivent respecter les mesures sur des états intriqués .

En site les quatres états de bell :

$$\mid \Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 01\rangle - \mid 10\rangle) \tag{3.22}$$

$$\mid \Psi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 01\rangle + \mid 10\rangle) \tag{3.23}$$

$$\mid \Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 00\rangle - \mid 11\rangle) \tag{3.24}$$

$$\mid \Phi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 00\rangle - \mid 11\rangle)$$

Ces états forment une base orthonormée de$H$. , pour tout :

$$\begin{aligned}
\mid \quad & \Psi\rangle = \alpha \mid 00\rangle + \beta \mid 01\rangle + \gamma \mid 10\rangle + \delta \mid 11\rangle \epsilon H^2 \\
\mid \quad & \Psi\rangle = \mid \Phi^+\rangle\langle\Phi^+ \mid \Psi\rangle + \mid \Phi^-\rangle\langle\Phi^- \mid \Psi\rangle + \mid \Psi^+\rangle\langle\Psi^+ \mid \Psi\rangle + \mid \Psi^-\rangle\langle\Psi^- \mid \Psi\rangle \\
= \quad & \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(\alpha+\delta) \mid \Phi^+\rangle + (\alpha-\delta) \mid \Phi^-\rangle + (\beta+\gamma) \mid \Psi^+\rangle + (\beta-\gamma) \mid \Psi^-\rangle\right]
\end{aligned}$$

Les états coherent sont les états qui sont beaucoup utilise dans le cadre de l'information quantique,pour transférer l'intrication et pour effectué une téléportation,dans se cas la l'étude basé sur d'autres états qui sont les états chat de shrodinger cette catégorie des états pour téléporté un qubit,généralement les états cohérents intriqué proposé comme des cannaux quantique pour téléporté etat inconnu,l'état intriqué prend la forme suivant

$$\mid \alpha\rangle_{ab} = \frac{(\mid \alpha, \alpha\rangle + \mid -\alpha, -\alpha\rangle)}{N_{ab}}$$

cette état utilisé par Enk et Hirota pour la téléportation d'un état chat,Wang utilisé cette état intriqué

$$\begin{aligned}
\mid \quad \Phi\rangle_\alpha^\pm &= N_\alpha^\pm \left(\mid \sqrt{2\alpha}, \alpha, \alpha\rangle_{abc} \pm \mid \sqrt{2\alpha}, \alpha, \alpha\rangle_{abc}\right) \\
N_\alpha^\pm &= \left[2\left(1 \pm e^{-8|\alpha|^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow \text{facteur de normalisation}
\end{aligned}$$

3.2.3 Téléportation quantique

La possibilité de transporter instantanément un objet d'un endroit a un autre, rêvée par la science fiction est aujourd'hui réalité pour les particules lumineuse, bien que la téléportation de gros objets ou d'une personnes reste qu'un rêve, au laboratoire est une réalité pour les photon, dans les scenario des sciences fiction la téléportation est synonyme de déplacement instantané ce qui viol la limite de vitesse imposée par la théorie de la relativité Albert Einstein, rien ne peut voyager plus vite que la lumière (principe de relativité restreinte).

3.2.4 Principe

Un dispositif scanne l'objet initial, et un transmetteur envoi l'information a la station de réception qui l'utilise pour réaliser une copie conforme de l'original, dans certain cas la matière qui compose l'original est également transportée jusqu'a a la station de réception sous forme d'énergie, a priori la mécanique quantique interdit un tel système de téléportation, le principe d'incertitude d'Heisenberg énonce qu'on ne peut connaitre la position d'un objet et sa quantité de mouvement en même temps, par conséquent en ne peut pas avoir la description parfait de l'objet a téléporté, il est donc impossible de mesures avec certitude l'état quantique total d'un objet c'est pour cette raison on a utilisée l'intrication pour téléporté des objet quantique.

La téléportation d'un état quantique est l'une des plus importantes applications de l'information quantique, est une technique de communication qui permet de transférée l'état quantique, dans un protocole de téléportation un état quantique inconnu $\mid \varphi\rangle$ est transmis d'une personne qu'on l'appel (Alice) à une autre personne qui s'appel (Bob), et l'espion on l'appel (Eve). Pour assurer cette transmission, il suffit d'une paire de particules dans un état intriqué qui représente le canal quantique entre Alice e Bob (un canal de communication classique), une mesure de Bell, et des opérations unitaires. Où le premier protocole de téléportation a été proposé pour les états discrets dans l'espace de Hilbert à dimension finie. La téléportation des états continus, état d'un espace de Hilbert de dimension infinie à été ensuite proposée. Examinons maintenant les différents étapes du protocole de téléportation.

1-1 Téléportation idéale des qubits On suppose qu'Alice veut envoyer a Bob un état quantique inconnu$\mid \varphi\rangle_C$

$$\mid \Phi\rangle_C = a \mid 0\rangle_C + b \mid 1\rangle_C \tag{3.25}$$

via un canal quantique n'est autre qu'une paire de particules dans un état intriqué :

$$\mid \Phi_{+}\rangle_{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 0\rangle_A \mid 0\rangle_B + \mid 1\rangle_A \mid 1\rangle_B) \tag{3.26}$$

Etape 1 : état initail

l'état quantique de départ de trois qubits est

$$\mid \Phi\rangle_C \otimes \mid \Phi_{+}\rangle_{AB} = (a \mid 0\rangle_C + b \mid 1\rangle_C) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 0\rangle_A \mid 0\rangle_B + \mid 1\rangle_A \mid 1\rangle_B) \tag{3.27}$$

$$(3).... = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} a \mid 0\rangle_C \mid 0\rangle_A \mid 0\rangle_B + a \mid 0\rangle_C \mid 1\rangle_A \mid 1\rangle_B \\ +b \mid 1\rangle_C \mid 0\rangle_A \mid 0\rangle_B + b \mid 1\rangle_C \mid 1\rangle_A \mid 1\rangle_B \end{pmatrix} \tag{3.28}$$

En utilisant les étas d bell l'état (3) devient :

$$\mid \Phi\rangle_C \otimes \mid \Phi_{+}\rangle_{AB} = \frac{1}{2} \mid \Phi_{+}\rangle_{CA} \otimes \mid \Phi\rangle_B + \frac{1}{2} \mid \Psi_{+}\rangle_{CA} \otimes (\sigma_x \mid \Phi\rangle_B) \tag{3.29}$$

$$+\frac{1}{2} \mid \Psi_{-}\rangle_{CA} \otimes (-i\sigma_y \mid \Phi\rangle_B) + \frac{1}{2} \mid \Phi_{-}\rangle_{CA} \otimes (\sigma_z \mid \Phi\rangle_B)$$

ou $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont les matrice de pauli

Etape 2 : Mesure de Bell :

Alice effectue une mesure conjointe sur ses deux qubits C et A ,dans la base de

Bell$\{\mid \Phi_{\pm}\rangle_{CA}, \mid \Psi_{\pm}\rangle_{CA}\}$ .le systéme des trois qubits sera l'un des quares états :

$$\mid \Phi_{+}\rangle_{CA} \otimes \mid \Phi\rangle_B, \mid \Psi_{+}\rangle_{CA} \otimes (\sigma_x \mid \Phi\rangle_B), \mid \Psi_{-}\rangle_{CA} \otimes (-i\sigma_y \mid \Phi\rangle_B, \mid \Phi_{-}\rangle_{CA} \otimes \sigma_z \mid \Phi\rangle_B) \tag{3.30}$$

si l'état final d'Alic est $\mid \Phi_{+}\rangle_{CA}$, le résultat de Bob sera le qubit $\mid \Phi\rangle_B$ qu'Alice souhaite téléporté.Pour les trois autre résultats l'état de Bob sera le qubit $\mid \Phi\rangle_B$ multiplié par l'un des opérateur de pauli.

Etape 3 : Communication classique

Alice informe Bob via un canal classique de son résultat de mesure

Etape4 : Opération unittaire

Selon le resultat de mesure d'Alic,Bob effectue l'un de quatres opération unitaires suivantes :

$$\mid \Phi_{+}\rangle_{CA} : I \mid \Phi\rangle_B = \mid \Phi\rangle_B \tag{3.31}$$

$$\mid \Psi_{+}\rangle_{CA} : \sigma_x \left(\sigma_x \mid \Phi\rangle_B\right) = \mid \Phi\rangle_B \tag{3.32}$$

$$\mid \Psi_{-}\rangle_{CA} : i\sigma_y \left(-i\sigma_y \mid \Phi\rangle_B\right) = \mid \Phi\rangle_B \tag{3.33}$$

$$\mid \Phi_{-}\rangle_{CA} : \sigma_z \left(\sigma_z \mid \Phi\rangle_B\right) = \mid \Phi\rangle_B \tag{3.34}$$

Pour récupérer l'état inconnu$\mid \Phi\rangle$

3.2.5 Téléportation via les états cohérents

Supposons qu'Alice veut téléporter a Bob un qubit dans un état cohérent

$$\mid \Phi\rangle_C = \frac{\mu \mid \alpha\rangle_C + \nu \mid -\alpha\rangle_C}{\sqrt{1 + e^{-2\alpha}\left(\mu\nu^* + \mu^*\nu\right)}} = A \mid \alpha\rangle_C + B \mid -\alpha\rangle_C \tag{3.35}$$

Al'aide des états de type bell

Etape 1 :état initial

l'état quantique de départ des trois qubits est d' ignorant le facteur de normalisation

$$
\begin{aligned}
| \quad & \Phi\rangle_C \otimes \mid \Psi_-\rangle_{AB} = (A \mid \alpha\rangle_C + B \mid -\alpha\rangle_C \otimes \mid \alpha\rangle_A \mid \alpha\rangle_B - \mid -\alpha\rangle_A \mid -\alpha\rangle_B) \\
= \quad & A \mid \alpha\rangle_C \mid \alpha\rangle_A \mid \alpha\rangle_B - A \mid \alpha\rangle_C \mid -\alpha\rangle_A \mid -\alpha\rangle_B \\
+B \quad | \quad & -\alpha\rangle_C \mid \alpha\rangle_A \mid \alpha\rangle_B - B \mid -\alpha\rangle_C \mid -\alpha\rangle_A \mid -\alpha\rangle_B
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

Etape 2 :Mesure de Bell

Mélange séparateur de faisceau

En utilisant un séparateur de faisceau 50/50,Alice mélange l'un de deux modes de l'état de Bell avec le qubit $\mid \Phi\rangle_C$:$\mid \Phi\rangle_C$ mélange avec $\mid \alpha\rangle_A$ donne le résultat

$$
\begin{aligned}
| \quad & \Phi\rangle_{CA} = A \mid 0\rangle_A \mid \sqrt{2\alpha}\rangle_C + B \mid 0\rangle_C \mid -\sqrt{2\alpha}\rangle_A \\
| \quad & \Phi\rangle_{CA} = A \mid 0\rangle_C \mid \sqrt{2\alpha}\rangle_A + B \mid 0\rangle_A \mid -2\sqrt{2\alpha}\rangle_C \\
\text{avec} \quad | \quad & -\alpha\rangle_A \text{ l'état des trois modes aprés le séparateur de faisceau}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

s'écrit comme

$$
\begin{aligned}
| \quad & \Phi\rangle_{CAB} = \Big(A \mid 0\rangle_A \mid \sqrt{2\alpha}\rangle_C + B \mid 0\rangle_C \mid -\sqrt{2\alpha}\rangle_A\Big) \mid \alpha\rangle_B \\
-(A \quad | \quad & 0\rangle_C \mid \sqrt{2\alpha}\rangle_A + B \mid 0\rangle_A \mid -\sqrt{2\alpha}\rangle_C) \mid -\alpha\rangle_B
\end{aligned}
\tag{3.38}
$$

-Mesure nombre de photon

Alice effectue une mesure du nombre de photon a des modes C et A :

$$
{}_{CA}\langle n_1 \mid n_2\rangle \mid \Phi\rangle_{CAB} = \left\{ \begin{array}{c} \exp\left(- \mid \alpha \mid^2\right)_{CA}\langle n_1 \mid n_2\rangle A \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\left(\sqrt{2}\alpha\right)^l}{\sqrt{l!}} \mid l\rangle_C \mid 0\rangle_A \\ +B \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(\sqrt{2}\alpha)^m}{\sqrt{m!}} \mid 0\rangle_C \mid m\rangle_A - \\ \exp\left(- \mid \alpha \mid^2\right)_{CA}\langle n_1 \mid n_2\rangle \left(\begin{array}{c} A \mid 0\rangle_C \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2}\alpha)^m}{\sqrt{m!}} \mid m\rangle_A \\ +B \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{\left(\sqrt{2}\alpha\right)^l}{\sqrt{l!}} \mid l\rangle_c \mid 0\rangle_A \end{array} \right) \end{array} \right\} \tag{3.39}
$$

$$
CA\langle n|0\rangle|\varphi\rangle_{CAB} = \exp(-|\alpha|^2)\frac{(\sqrt{2}\alpha)^{n1}}{\sqrt{n_1!}}(A|\alpha\rangle_B - (-1)^{n_1}|-\alpha\rangle_B) \tag{3.40}
$$

De cette expression,on conclut que si n_1 est impair,l'état final de Bob est similire a l'état initial d'Alice.Dans ce cas le processus de téléportation marche parfaitement. Cependant,si n_1 est pair, nous devons effectuer la transformation

$$
\begin{aligned} - \mid -\alpha\rangle_B &\to \mid -\alpha\rangle_B \\ \mid \alpha\rangle_B &\to \mid \alpha\rangle_B \end{aligned}
$$

Si $n_1 = 0$ et $n_2 \neq 0$ cela donne

$$
{}_{CA}\langle 0 \mid n_2\rangle \mid \Phi\rangle_{CAB} = \frac{(\sqrt{2}\alpha)^{n_2}}{\sqrt{n_2!}} \exp\left(- \mid \alpha \mid^2\right) \left((-1)^{n_2} B \mid \alpha\rangle_B - A \mid -\alpha\rangle_B\right) \tag{3.41}
$$

dans ce cas,nous obtenons les deux cas suivants
si n_2 est pair,nous devons effectuer la transformation

$$
\mid -\alpha\rangle_B \to - \mid \alpha\rangle_B ; \mid \alpha\rangle_B \to \mid -\alpha\rangle_B
$$

pour obtenir l'état initial,si n_2 est impair, nous devons effectuer la transformation

$$| -\alpha\rangle_B \rightarrow | \alpha\rangle_B \; | \alpha\rangle_B \rightarrow | -\alpha\rangle_B$$

3.3 Téléportation via les états cohérents de modèle de Morse :

3.3.1 Les états chat de Shrödinger pour Morse :

Introduction

La superposition quantique de deux états cohérents évoluerait dans différentes régions de l'espace de phase est considéré comme une réalisation d'un chat de Schrödinger [27]. Spécialement les superpositions suivantes :

$$| \alpha\rangle_{\pm} = N_{\alpha} \left[| \alpha\rangle \pm | -\alpha\rangle \right] \tag{3.42}$$

La combinaison symétrique $| \Psi_{+}\rangle$ et antisymétrique $| \Psi_{-}\rangle$ des états chat de Schrödinger, proposé par Dodonov 1974.

$$| \Psi_{\pm}\rangle = N_{\pm} \left(| \alpha\rangle \pm | -\alpha\rangle \right) \tag{3.43}$$

les états chat de Schrödinger pour le model de Morse sont

Type oscillateur harmonique :

$$|\quad \Psi_{\pm}\rangle = N_{\pm}\left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\right)^{\frac{-1}{2}}\left[\begin{array}{c}\sum_{n=0}^{n\max-1}\frac{1}{\sqrt{n}}\alpha^{n}e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\mid\Psi_n^{\nu}(x)\rangle\\ \pm\sum_{n=0}^{n\max-1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\alpha^{n}e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\mid\Psi_n^{\nu}(x)\rangle\end{array}\right] \quad (3.44)$$

$$N_{\pm} = \left[2\left(1\pm c_0^2\sum_{n=0}^{n\max-1}(-1)^n\frac{2|\alpha|^{2n}}{n!}\right)\right] \quad (3.45)$$

$$c_0 = \left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\right)^{\frac{-1}{2}}$$

Type Energétique

$$|\quad \Psi_{\pm}\rangle = N_{\pm}\left\{\begin{array}{c}\left(\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)\right)\\ \left[\begin{array}{c}\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\sqrt{\frac{\Gamma(\nu-n-1)}{n!}}\alpha^{n}e^{\frac{-iE_n}{\hbar}t}|\psi_n^{\nu}\rangle\\ \pm\ \sum_{n=0}^{n_{\max}-1}(-1)^n\sqrt{\frac{\Gamma(\nu-n-1)}{n!}}\alpha^{n}e^{\frac{-iE_n}{\hbar}t}|\psi_n^{\nu}\rangle\end{array}\right]\end{array}\right\} \quad (3.46)$$

$$N_{\pm} = \left[2\left(1\pm c_0^2\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}(-1)^n\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)\right)\right] \quad (3.47)$$

$$c_0^2 = \frac{1}{\Gamma(\nu-1)}\sum_{n=0}^{n_{\max}-1}\frac{|\alpha|^{2n}}{n!}\Gamma(\nu-n-1)$$

Contrairement aux états cohérents les états chat de Schrödinger sont orthonormés.

3.3.2 Le Qubit :

On va construire un qubit à l'aide des états chat de Schrödinger pour le modèl de Morse.

Comme le qubit est l'état d'un système quantique à 2 niveaux $\{|\ 0\ \rangle, |\ 1\ \rangle\}$, appartenant à l'espace de Hilbert. Plus généralement, le qubit est défini par un états de superposition deux états orthonormé $\{|\ 0\ \rangle, |\ 1\ \rangle\}$:

$$|\psi\rangle = \lambda\mid 0\ \rangle + \rho\mid 1\ \rangle \quad \text{avec} \quad |\lambda|^2 + |\rho|^2 = 1$$

Cependant l'état cohérent est un outil très utile dans les optiques quantiques, quand va l'utiliser pour définir le bit-quantique (qubit). Nous identifions les deux états cohérents de $|\Psi_{\pm}\rangle$ comme une base déclare pour un qubit logique comme $\Psi_{+} \rightarrow 0_L$ et $\Psi_{-} \rightarrow 1_L$, afin qu'un état du qubit soit représenté par :

$$|\psi\rangle = \lambda \mid 0_L \ \rangle + \rho \mid 1_L \ \rangle \quad \text{avec} \quad |\lambda|^2 + |\rho|^2 = 1$$

3.3.3 les états de Bell

La base de Bell est à la base d'une part de deux particules état enchevêtré

• La base Bell compte quatre vecteurs de base possibles

$$| \quad \Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ 01\rangle- \mid 10\rangle) \tag{3.48}$$

$$| \quad \Psi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ 01\rangle+ \mid 10\rangle) \tag{3.49}$$

$$| \quad \Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ 00\rangle- \mid 11\rangle) \tag{3.50}$$

$$| \quad \Phi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \mid 00\rangle+ \mid 11\rangle \tag{3.51}$$

dans le cas de potentiel de Morse le canal quantique s'écrive se la forme suivante

$$| \quad \Psi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ \Psi_{+}\Psi_{-}\rangle- \mid \Psi_{-}\Psi_{+}\rangle\rangle) \tag{3.52}$$

$$| \quad \Psi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ \Psi_{+}\Psi_{-}\rangle+ \mid \Psi_{-}\Psi_{+}\rangle) \tag{3.53}$$

$$| \quad \Phi^{-}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ \Psi_{+}\Psi_{+}\rangle- \mid \Psi_{-}\Psi_{-}\rangle) \tag{3.54}$$

$$| \quad \Phi^{+}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(| \ \Psi_{+}\Psi_{+}\rangle+ \mid \Psi_{-}\Psi_{-}\rangle) \tag{3.55}$$

3.3.4 Qubit

En informatique quantique, un qubit ou qu-bit (quantum + bit), parfois écrit qbit, est l'état quantique qui représente la plus petite unité de stockage d'information quantique. C'est l'analogue quantique du bit.

l'expression de qubit est donnée par

$$\mid \Psi\rangle = \alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle$$

$$\begin{aligned} \mid \quad 0\rangle &= A \mid \Psi_{+}\rangle + B \mid \Psi_{-}\rangle \\ \mid \quad 1\rangle &= A \mid \Psi_{+}\rangle - B \mid \Psi_{-}\rangle \end{aligned}$$

ou

$$\mid \Psi_{\pm}\rangle = N_{\pm} \left(\mid \alpha\rangle \pm \mid -\alpha\rangle\right)$$

3.3.5 Téléportation

Le protocole de téléportation est suivant :

$$\begin{aligned} & qubit(1)Alice \\ \Phi &= \alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle \text{ la mesure qubit dans la base de Bell} \\ & \text{qubit (2)} \\ & \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mid 00\rangle + \mid 11\rangle\right) \\ & \text{qubit (3) Bob Signal classique} \\ & \text{Quantum operateur sur les 3 qubits} \end{aligned}$$

il faut que le resultat final ne donne la valeur Φ Mettre le problème dans la base de Bell

$$\Phi \otimes \text{ les états intriqué=3 état de particule} \qquad (\alpha \mid 0\rangle + \beta \mid 1\rangle) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 00\rangle + \mid 11\rangle) \tag{3.56}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (\alpha \mid 000\rangle + \alpha \mid 011\rangle + \beta \mid 100\rangle + \beta \mid 111\rangle) \tag{3.57}$$

la base de bell

$$\begin{aligned}
\mid \Phi^{+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 00\rangle + \mid 11\rangle) \\
\mid \Phi^{-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 00\rangle - \mid 11\rangle) \\
\mid \Psi^{+}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 01\rangle + \mid 10\rangle) \\
\mid \Psi^{-}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (\mid 01\rangle - \mid 10\rangle)
\end{aligned}$$

on trouve

$$\mid 00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mid \Phi^{+}\rangle + \mid \Phi^{-}\rangle\right) \tag{3.58}$$

$$\mid 01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mid \Psi^{+}\rangle + \mid \Psi^{-\rangle}\right) \tag{3.59}$$

$$\mid 10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mid \Psi^{+}\rangle - \mid \Psi^{-}\rangle\right) \tag{3.60}$$

$$\mid 11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\mid \Phi^{+}\rangle + \mid \Phi^{-}\rangle\right) \tag{3.61}$$

Si Alice les mesures Bob's Qubit devient

L'état de 3 particules devient

$$\frac{1}{2}\left(\begin{array}{c} \mid \Phi^{+}\rangle\left(\alpha \mid 0\rangle+\beta \mid 1\rangle\right)+\mid \Phi^{-}\rangle\left(\alpha \mid 0\rangle-\beta \mid 1\rangle\right) \\ +\mid \Psi^{+}\rangle\left(\alpha \mid 1\rangle+\beta \mid 0\rangle\right)+\mid \Psi^{-}\rangle\left(\alpha \mid 1\rangle-\beta \mid 0\rangle\right) \end{array}\right) \tag{3.62}$$

Alice et Bob a neuveau

Qubit (1) Alice mesure $(\Psi^{+}, \Psi^{-}, \Phi^{+}, \Phi^{-}), \Phi=\alpha \mid 0\rangle+\beta \mid 1\rangle$

Qubit(2) $\frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 00\rangle+\mid 11\rangle)$

Qubit(3) Bob,qubit devient

$$\alpha \mid 0\rangle+\beta \mid 1\rangle \tag{3.63}$$

$$\alpha \mid 0\rangle+\beta \mid 1\rangle \tag{3.64}$$

$$\alpha \mid 1\rangle+\beta \mid 0\rangle \tag{3.65}$$

$$\alpha \mid 1\rangle+\beta \mid 0\rangle \tag{3.66}$$

le resultat final est toujour le Φ

3.3.6 Conclusion :

L'étude mathématique de la téléportation des états intriqué, définit à l'aide des états chat de Schrödinger cohérents d'un modèle réaliste, comme celui de Morse, ramène la réalisation des ordinateurs quantique plus proche qu'avant. En plus la réalisation de téléportation quantique pour l'échange d' informations d'un endroit à un autre instantanément plus sur et plus sécuriser.

Conclusion générale

Ce travail est consacré de l'utilisation des états cohérents en information quantique, et comme la théorie de l'information quantique est équivalente à la théorie de l'information classique lorsqu'on l'encode une information dans des états orthogonaux ici les états chat de Schrödinger, où les propriétés classique sont remplacées par les propriétés quantiques. Ensuite, n'oublions pas la notion d'intrication qui est une ressource quantique plus importante et appliquée en traitement de l'information quantique, où on a utilisé pour définir le canal dans la téléportation quantique. Toutes ces propriétés quantiques permettent d'élaborer et de réaliser des protocoles de téléportation quantique. Pour la réalisation de ce travail, on a construit les états cohérents pour un modèle plus réaliste que celui de l'oscillateur harmonique, qui est le modèle de Morse pour traiter la communication quantique en tant que notion dans le cadre de la théorie de l'information quantique avec une description de la téléportation des états cohérent intriqué.

Bibliographie

[1] R. P. Feynman. Simulating physics with computers. International Journal of Theoretical Physics, 21 :467-488, 1982.

[2] C. H. Bennett and G. Brassard, in Proc. IEEE Int. Conf. on Computers, Systems, and Signal Processing, Bangalore, (IEEE, New York), pp. 175-179 (1984). C. H. Bennett and S. J. Wiesner, Phys. Rev. Lett. 69, 2881 (1992).

[3] P. W. Shor, Algorithms for quantum computation : discrete logarithms and factoring,

[4] Proceedings of the 35th Symposium on Foundations of Computer Science, 124 (1994)

[5] M. Le Bellac, A Short Introduction to Quantum Computation and Quantum Information, Cambridge University Press (2006).

[6] A. Einstein, B. Podolsky, N. Rosen, "Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete ?", Physical Review Letters, vol. 47, pp. 777-780, 1935.

[7] D. Bouwmeester, J.W. Pan, K. Mattel, M. Eibl, H. Weinfurter, A. Zeilinger, Nature 390 (1997) 575.

[8] S. J. Van Enk, Phys. Rev. A 72, 022308 (2005).

[9] E. Schrödinger, Die Naturwissenschaften 23, 807 (1935).

[10] S.L. Braunstein et H.J. Kimble, Dense coding for continuous variables, Phys. Rev. A
61, 042302 (2000).

[11] Glauber R J. The Quantum Theory of Optical Coherence. Physial Review, 130 (1963) 2529.

Glauber R J. Coherent and incoherent states of the radiation field. Physial Review, 131 (1963) 2766.

[12] Klauder, J. R. Continuous-representation theory. Journal of Mathematical Physics, 4 (1963) 1055 (Part I); 1058 (Part II). Klauder J R. The action option and a Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers. Annals of Physics, 11 (1960) 123.

Klauder J R and Skagerstam B S. Coherent States-Applications in Physics and Mathematical Physics (World Scienti_c, Singapore) (1985).

[13] Schrödinger E. Der stetige Übergang von der Mikrozur Makromechanik. Naturwissenschaften, 14 (1926) 664.

[14] Sanders B C. Review of entangled coherent states. Journal of Physics A, 45 (2012) 244002.

[15] Nieto M Mand Simmons L M 1978 Phys. Rev. Lett. 41 207

[16] S.H. Dong, R. Lemus, Int. J. Quantum Chem. 86 (2002) 265. S.H. Dong, Can. J. Phys. 80 (2002) 129 P.M. Morse, Phys. Rev. 34 (1929) 57.

[17] Shi-Hai Dong , Yu Tang, Guo-Hua Sun. On the controllability of a quantum system for the Morse potential with a compact group SU(2) Physics Letters A 320 (2003) 145–153

[18] L.D. Landau, E.M. Lifshitz, Quantum Mechanics, Non-Relativistic Theory, 3rd Edition, Pergamon, Oxford, 1976

[19] Kondo A E and Truax D R 1988 J. Math. Phys. 16 862

[20] Iachello F and Levine R D 1995 Algebraic Theory of Molecules (Oxford : Oxford University Press)

[21] Frank A, Lemus R, Bijker R, P´erez-Bernal F and Arias J M 1996 Ann. Phys. 252 211

[22] Angelova M, Hussin V. Generalized and Gaussian coherent states for the Morse potential. Journal of Physics A, 41 (2008) 30416.

Angelova M, Hertz A, Hussin V. Squeezed coherent states and the one dimensional Morse quantum system. Journal of Physics A, 45 (2012) 244007

[23] Fox R F and Choi M F 2001 Phys. Rev. A 64 042104

[24] Angelova M, Dobrev V K and Frank A 2004 Eur. Phys. J. D 31 27

[25] D. Gottesman et J. Preskill, Secure quantum key distribution using squeezed states. Phys. Rev. A 63, 022309 (2001).

[26] X. H. Cai and L. M. Kuang, Phys. Lett. A 300 103 (2002)

[27] Schrödinger E 1935 Naturwissenschaften 23 807

Schrödinger E 1935 Naturwissenschaften 23 823

Schrödinger E 1983 Quantum Theory of Measurement ed AWheeler and W H Zurek (Princeton, NJ : Princeton University Press) pp 152–87 (Engl. transl.)