



REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BOUIRA



FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PREPARE POUR L'OBTENTION DU DIPLOME
DE MASTER EN PHYSIQUE

OPTION

Physique Théorique des Hautes Energies

THEME

*Estimation d'une Intégrale Gaussienne par la
Méthode du Col*

Présenté par : **BELKACEMI Faiza.**

Soutenu le.../.../....

Devant le jury :

Président : ZERIRGUI Djamel MCB UNIV-BOUIRA

Examineurs : BOUCHEMLA Nedjma MAA UNIV-BOUIRA

DEMMOUCHE Nacer MAA UNIVBOUIRA

Rapporteurs: SADOUN Mohamed Améziane MCB UNIV-BOUIRA

BEDDEK Said MAA UNIV-BOUIRA

Invité : BOUDREF Mohamed Ahmed Docteur UNIV-BOUIRA

ANNEE UNIVERSITAIRE 2015/2016

DEDICACES

Je remercie le Dieu pour m'avoir donné la force d'accomplir ce travail pour aller plus loin In Chaa Allah.

Je dédie ce modeste travail à celle qui m'a donné la vie, le symbole de tendresse, qui s'est sacrifiée pour mon bonheur et ma réussite, à ma mère.....

A mon père, écolé de mon enfance, qui a été mon ombre durant toutes les années des études, et qui a veillé tout au long de ma vie à m'encourager, à me donner l'aide et à me protéger

Que dieu les gardes et les protéger

A mon frère Rachid

A mes adorables sœurs Hayat, Chaima, Selma

A ma cousine Hanane

A mes amies Amina, Meriem, Faroudja, Naïma, Khadra, Sihem, Hadjer, Selma, Nassira ,Sonia .

Je vous remercie de votre patience, vous m'aviez aidée toujours à avancer, vous êtes tous des grandes amis si gentils, merci d'être toujours près de moi, amis avec lesquelles je souris.

FAIZA

Remerciements

Remerciements

Je tiens vivement à remercier mes promoteurs Mr MA.SADOUN, et Mr S.BEDDEK pour les consignes et la grande volonté qu'ils n'ont pas cessé de me témoigner, pondant tout mon travail.

Qu'il me soit permit de remercier également :

A Mr DJ.ZERIRGUI ainsi que M^{me} N. BOUCHEMLA et Mr N. DEMMOUCHE d'avoir respectivement accepté de présider le jury et examiner ce travail, ainsi que Mr MA .BOUDREF d'avoir accepté l'invitation

Me sincère remerciement à tous les enseignants de département de physique de l'UAMO

Me remerciement s'adressent à tous ceux et à celles qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce travail.

Table des matières

| | |
|---|-----------|
| Introduction générale | 3 |
| 1 Intégrales de chemins et les intégrales gaussiennes | 5 |
| 1.1 Introduction | 5 |
| 1.2 Quelques préliminaires mathématiques | 6 |
| 1.2.1 Intégrales gaussiennes | 6 |
| 1.3 Intégrale de chemin | 7 |
| 1.3.1 Le propagateur : | 8 |
| 1.4 Exemple | 13 |
| 2 Méthode du Col | 15 |
| 2.1 Introduction | 15 |
| 2.2 Intégrale simple | 16 |
| 2.3 Contexte d'application et essence de la méthode | 16 |
| 2.4 Formule du col | 17 |
| 2.5 Caractère asymptotique de la formule du col | 19 |
| 2.5.1 Contribution des termes non-quadratiques au voisinage du pic. . . | 19 |
| 2.5.2 Contribution de pics secondaires | 20 |
| 2.5.3 Contribution des bords et formule asymptotique | 20 |
| 2.5.4 Cas d'un paramètre de contrôle multiplicatif. | 20 |
| 2.5.5 Extension au cas d'une pure phase | 21 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.6 | Intégrale sur un chemin du plan complexe | 22 |
| 2.6.1 | Démonstration de la formule du col | 23 |
| 2.7 | Cas d'une intégrale multiple | 28 |
| 2.7.1 | Nombre fini de variables | 28 |
| 2.7.2 | Nombre infini de variables et passage à l'intégrale fonctionnelle . . | 31 |
| 2.8 | Conclusion : | 34 |
| 3 | Applications : | 35 |
| 3.1 | Introduction : | 35 |
| 3.2 | Application 1 : | 35 |
| 3.2.1 | Par la méthode de Gauss | 35 |
| 3.2.2 | Par la méthode du Col | 37 |
| 3.3 | Application 2 : Calcul de propagateur d'une particule libre à une dimension : | 39 |
| 3.3.1 | Par la méthode de Gauss | 40 |
| 3.3.2 | Par la méthode du Col | 40 |
| | Conclusion générale | 42 |
| | Bibliographie | 43 |

Introduction générale

La modélisation est l'outil le mieux adapté à l'étude des phénomènes naturels en général et ceux liés aux processus physiques en particulier. Elle consiste à traduire ces différents processus en des équations mathématiques dont la résolution permet de décrire l'évolution du système. Cette résolution fait appel à des techniques et méthodes du calcul et d'estimation souvent complexes et qui nous conduisent dans la plupart des cas à l'évaluation d'une intégrale. Ces intégrales apparaissent par exemple dans l'étude du mouvement d'une particule dont la position au temps initial t est q et la position au temps final t' est q' . Ainsi si on considère l'opérateur d'évolution $e^{-i(t'-t)H}$ dans lequel l'Hamiltonien H ne dépend pas du temps et en posant $\hbar = 1$ par commodité alors la valeur moyenne de cet opérateur d'évolution pris entre l'état initial $|q, t\rangle$ et l'état final $|q', t'\rangle$ est $\langle q', t' | e^{-i(t'-t)H} | q, t \rangle$ et sera noté de façon abrégée $\langle q', t' | q, t \rangle$ tel que

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \int dq_n \dots dq_1 \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \times \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle$$

en considérant bien sur la discrétisation du temps en $[n + 1]$ intervalles élémentaires pour $j = 0, 1, \dots, n + 1$ et $t = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = t'$.

Ce propagateur est souvent difficile à évaluer par les méthodes du calcul classiques basées sur les primitives. Ces méthodes sont inappropriées dans la plupart des cas. C'est un problème crucial qui a plus retenu l'attention des chercheurs dans la plupart des domaines liés aux mathématiques appliquées. Les techniques d'estimation s'avèrent, dans ce contexte, la principale alternative. Plusieurs approches ont été ainsi développées dans la littérature dont la méthode du col, Monté-Carlo...etc.

Le principal objectif de ce travail est d'introduire la méthode du col pour l'estimation d'une intégrale. Une attention particulière a été accordée dans ce contexte à la notion des intégrales de chemins qui conduisent généralement à l'évaluation d'une intégrale gaus-

sienne. Pour cela nous avons structuré notre travail en trois parties principales. Le premier chapitre est une introduction aux intégrales de chemins dans lequel nous avons fixé le cadre général de cette approche. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la méthode du col. Les fondements théoriques et l'algorithme d'application de cette technique ont été ainsi exposés. Enfin, dans le troisième chapitre et afin d'étayer les différents aspects théoriques abordés dans les précédents chapitres, deux applications pratiques ont été étudiées.

Ce mémoire se termine par une conclusion générale et quelques propositions d'axes de recherches sur le problème d'estimation d'une intégrale notamment en physique théorique.

Chapitre 1

Intégrales de chemins et les intégrales gaussiennes

1.1 Introduction

L'objectif principal de ce chapitre est de se familiariser avec l'approche des intégrales de chemin qui offre un point de vue alternatif aux méthodes standard de Schrödinger et d'Heisenberg. C'est une approche qui est devenue essentielle à une compréhension profonde de la théorie quantique des champs et de ses applications qui vont de la physique des interactions fondamentales à la mécanique statistique des transitions de phase ou aux propriétés des gaz quantiques. L'intégrale de chemin est un outil très puissant pour l'étude des problèmes de la mécanique quantique. Elle établit un lien très explicite entre la mécanique classique et la mécanique quantique. La formulation de la mécanique quantique basée sur l'intégrale de chemin peut paraître plus compliquée du point de vue mathématique, mais elle est bien adaptée à l'étude des systèmes à un grand nombre de degrés de liberté où un formalisme du type équation de Schrödinger est beaucoup moins utile. Dans ce qui suit nous allons donner un rappel succinct de quelques notions mathématiques relatives aux intégrales.

1.2 Quelques préliminaires mathématiques

1.2.1 Intégrales gaussiennes

La valeur gaussienne joue un rôle essentiel dans des domaines variés : la théorie des probabilités à cause du théorème de la limite centrale, la mécanique quantique comme nous allons le montrer, et donc la théorie quantique des champs et la mécanique statistique des transitions de phase [1] .

Considérons maintenant une intégrale gaussienne générale

$$f(A) = \int d^n x \exp \left(- \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j \right) \quad (1.1)$$

Nous partons de l'intégrale simple ($a > 0$)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp(-ax^2 + bx) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (1.2)$$

Pour calculer $f(A, b)$, on cherche le minimum de la forme quadratique

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} x_i A_{ij} x_j - \sum_{i=1}^n b_i x_i \right) = \sum_{j=1}^n b_{kj} x_j - b_k = 0 \quad (1.3)$$

En terme de la matrice inverse de A

$$\Delta = A^{-1} \quad (1.4)$$

la solution peut s'écrire

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} b_j \quad (1.5)$$

Après le changement de variables $x_i \rightarrow y_i$

$$x_i = \sum_{j=1}^n \Delta_{ij} b_j + y_i$$

l'intégrale devient

$$f(A, b) = \exp \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \int d^n y \exp - \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} y_i A_{ij} y_j \right] \quad (1.6)$$

Ce changement de variables réduit le calcul à l'intégrale (1.1). On en déduit

$$f(A, b) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} (\det A)^{-\frac{1}{2}} \exp \left[\sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} b_i \Delta_{ij} b_j \right] \quad (1.7)$$

Remarque : L'intégrale gaussienne a une propriété remarquable : si l'on intègre l'exponentielle d'une forme quadratique sur un sous ensemble de variables, le résultat est encore l'exponentielle d'une forme quadratique.

1.3 Intégrale de chemin

En 1933, Dirac a observé que l'action joue un rôle central dans la mécanique classique (il considère que la formulation lagrangienne de la mécanique classique est plus fondamentale que la formulation hamiltonienne), mais qu'il ne semblait avoir aucun rôle important dans la mécanique quantique. Il a ensuite avancé que cette situation pourrait être corrigée si le propagateur de la mécanique quantique "correspondait à" $\exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right]$ où S est l'action classique évaluée le long du chemin classique.

En 1948, Feynman a développé la suggestion de Dirac, et a réussi à dériver une troisième formulation de la mécanique quantique, basée sur le fait que le propagateur peut être écrit comme une somme sur tous les chemins possibles (pas seulement les classiques) reliant le point initial et le point final du mouvement d'une particule. Ainsi, alors que Dirac n'a considéré que le chemin classique, Feynman a montré que tous les chemins contribuent [2] .

1.3.1 Le propagateur :

Définition :

Considérons une particule, à une dimension, en mouvement sous l'action d'un potentiel $V(x, t)$ allant du point $A(x_A, t_A)$ au point $B(x_B, t_B)$. Le chemin de la particule est représenté par une fonction du temps $x(t)$ avec $x(t_A) = x_A$ et $x(t_B) = x_B$.

Le mouvement de la particule est régi par le Lagrangien

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - V(x, t) \quad (1.8)$$

Avec T : énergie cinétique et $V(x)$: énergie potentielle.

Le chemin classique noté par $\tilde{x}(t)$ est celui pour lequel l'action de la particule donnée par

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L(x, \dot{x}, t) dt \quad (1.9)$$

Au lieu de considérer seulement la trajectoire classique, nous allons maintenant considérer tous les chemins possibles que peut prendre la particule pour aller du point A ($A = x_0$) au point B ($B = x_f$).

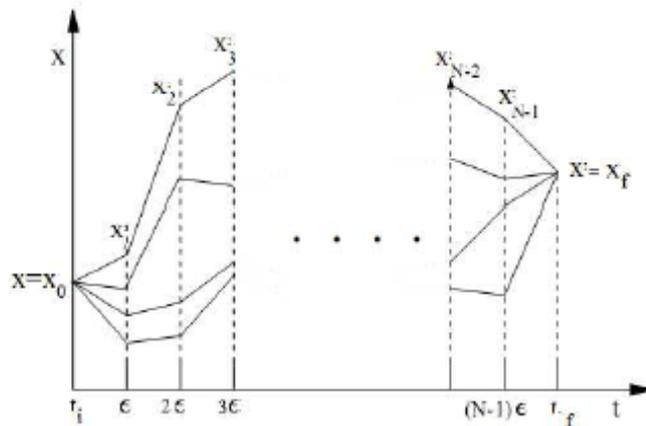


FIG.1.1—L'amplitude comme somme sur tous les chemins N -segmentés.

On associe à chacun de ces chemins une amplitude de probabilité partielle $\psi[x(t)]$ donnée par

$$\psi[x(t)] = N \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right] \quad (1.10)$$

où N est une constante de normalisation et S est l'action associée au chemin $x(t)$. Par définition la probabilité de transition du point x_A à t_A au point x_B à t_B est

$$P(B; A) = |K(B, A)|^2 \quad (1.11)$$

où $K(b, a)$ est l'amplitude de transition ou propagateur [3, 4, 5] d'aller de A à B . Cette amplitude est la somme des contributions $\psi[x(t)]$ de chaque chemin

$$K(B; A) = \sum_{x(t)} \psi[x(t)]. \quad (1.12)$$

Comme les chemins sont très proches les uns des autres, la somme peut être remplacée par une intégrale. Ainsi, nous obtenons l'expression du propagateur

$$\begin{aligned} K(B; A) &= \int_{x(t_A)}^{x(t_B)} D_{x(t)} \psi[x(t)] \\ &= \int_{x(t_A)}^{x(t_B)} D_{x(t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[x(t)] \right] \end{aligned} \quad (1.13)$$

où $D_{x(t)}$ est une mesure.

Forme discrète du propagateur

Le propagateur qui gouverne l'évolution d'une particule de masse m du point x_A à l'instant t_A au point x_B au temps t_B a été défini par Feynman [6, 7] de la façon suivante

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int D_{x(t)} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^T L(x, \dot{x}, t) dt \right] \quad (1.14)$$

Avec $T = t_A - t_B$. En subdivisant l'intervalle de temps T en N intervalles de longueur $\varepsilon = t_n - t_{n-1} = \frac{T}{N}$ et $\Delta(x_n) = x_n - x_{n-1}$ l'expression du propagateur (1.2) prend la forme suivante :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=1}^N \left[\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon} \right]^{\frac{1}{2}} \times \prod_{n=1}^{N-1} \left[\int dx_n \right] \exp \left[\frac{i}{\hbar} S \right] \quad (1.15)$$

Avec l'action totale

$$S = \sum_{n=1}^N \left[\frac{m}{2\varepsilon} \Delta(x_n)^2 - \varepsilon V(x_n) \right] = \int_0^T \left[\frac{m}{2} \dot{x}^2 - V(x) \right] dt \quad (1.16)$$

Intégrale de chemin dans l'espace des phases

Peut être décrite en définissant le propagateur [2] comme étant l'amplitude de probabilité de transition définie à l'aide de l'opérateur d'évolution par :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \langle x_B | U(t_B - t_A) | x_A \rangle \quad (1.17)$$

En divisant l'intervalle de temps $T = (t_B - t_A)$ en N intervalles de longueur ε tels que :

$$\varepsilon = t_n - t_{n-1} \text{ et } T = N\varepsilon$$

En insérant $(N - 1)$ relations de fermeture de la forme

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = 1; \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (1.18)$$

Entre les opérateurs d'évolution, le propagateur peut se mettre sous la forme :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{N-1} \int dx_n \right] \prod_{n=1}^N \left\langle x_n \left| \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varepsilon (T + V) \right] \right| x_{n-1} \right\rangle \quad (1.19)$$

avec $x_A = x_0$ et $x_B = x_n$.

Pour ε très petit, on peut appliquer la formule de Baker-Hausdorff [8] :

$$e^{(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon(\hat{T}+\hat{V}))} = e^{(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{T})}e^{(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V})}e^{(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^2\hat{X})} \quad (1.20)$$

$\hat{T}(p, t)$ est l'opérateur énergie cinétique et $\hat{V}(x, t)$ l'opérateur énergie potentielle. où l'opérateur \hat{X} représente le développement

$$\hat{X} = \frac{1}{2} [\hat{V}, \hat{T}] - \frac{\varepsilon}{\hbar} \left(\frac{1}{6} [\hat{V}, [\hat{V}, \hat{T}]] - \frac{1}{3} ([\hat{V}, \hat{T}], \hat{T}) \right) + \dots \quad (1.21)$$

Si nous négligeons tous les termes d'ordre supérieur ou égal à ε^2 puisque l'action élémentaire est par définition d'ordre ε , le propagateur devient alors :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{N-1} \int dx_n \right] \prod_{n=1}^N \left\langle x_n \left| \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{T} \right] \right| x \right\rangle \left\langle x \left| \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{V} \right] \right| x_{n-1} \right\rangle \quad (1.22)$$

Si nous insérons N relations de fermeture suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n |x_n\rangle \langle x_n| = 1 \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} dp_n |p_n\rangle \langle p_n| = 1 \quad (1.23)$$

Dans l'expression (1.13), nous obtenons

$$K(B, A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{N-1} \int dx_n \right] \left[\prod_{n=1}^N \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \times \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \left[p_n (x_n - x_{n-1}) - \varepsilon \left(\hat{T}(p_n, t_n) + \hat{V}(x_n, t_n) \right) \right] \right\} \quad (1.24)$$

où

$$\langle p_n | x_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_n x_n\right) \quad \text{et} \quad \langle p_n | x_{n-1} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p_n x_{n-1}\right) \quad (1.25)$$

$$K(B, A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{N-1} \int dx_n \right] \left[\prod_{n=1}^N \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \right] \times \left\{ \begin{array}{l} \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \left(p_n (x_n - x_{n-1}) - \varepsilon \frac{p_n^2}{2m}\right)\right] \\ \times \exp\left[-\frac{i}{\hbar} \varepsilon \hat{V}(x_{n-1})\right] \end{array} \right\} \quad (1.26)$$

On intègre sur les P_n . En utilisant (1, 2) on obtient

$$a = \frac{i\varepsilon}{\hbar 2m}, \quad b = \frac{i}{\hbar} (x_n - x_{n-1})$$

L'intégrale sur les P_n le propagateur devient :

$$K(B; A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{N-1} \int dx_n \right] \left[\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \times \exp\left[\frac{i}{\hbar} \left[\frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 - \varepsilon V(x_{n-1})\right]\right] \quad (1.27)$$

Propriétés du propagateur

Dans la représentation de Schrodinger [8], l'évolution dans le temps des états est gouvernée par l'équation :

$$i\hbar \frac{d}{dt} | \psi(t) \rangle = \hat{H} | \psi(t) \rangle \quad (1.28)$$

Le propagateur est la solution de l'équation de Schrodinger

$$i\hbar \frac{d}{dt_B} k(B, A) = \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_B + V(x) \right] K(B, A) \quad (1.29)$$

$$\Delta_B = \frac{\partial^2}{\partial x_B^2}$$

- Considérons les états propres du Hamiltonien : $\hat{H} |n\rangle = E_n |n\rangle$

On peut injecter la relation de fermeture $\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$ sur ces états

$$\begin{aligned} K(x_B, t_B; x_A, t_A) &= \sum_n \langle x_B | n \rangle \langle n | \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \hat{H} (t_B - t_A) \right] | x_A \rangle \\ &= \sum_n \psi_n(x_B) \psi_n^*(x_A) \times \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n (t_B - t_A) \right] \end{aligned} \quad (1.30)$$

Ce qui permet de trouver les fonctions d'onde et les états d'énergies correspondants.

1.4 Exemple

Considérons le problème d'une particule de masse m et d'énergie E soumise en potentiel de l'oscillateur harmonique

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (1.31)$$

On a montré que le propagateur de l'oscillateur harmonique libre [2] est de la forme

$$\langle b, t_b | a, t_a \rangle = \sqrt{\frac{\omega}{2i\pi \sin(\omega t)}} e^{\frac{i}{\hbar} S_{cl}} \quad (1.32)$$

En se souvenant qu'on définit $y(t)$ comme les variations quelconques autour de la solution classique, on obtient l'action quadratique en $y(t)$.

$$I = \int D_y \exp \left(\frac{i}{\hbar} \int_0^T \left(\frac{1}{2} \dot{y}^2 - \frac{1}{2} \omega^2 y^2 \right) dt \right), \quad (1.33)$$

avec les conditions limites $y(0) = 0$ et $y(T) = 0$

On sait qu'il faut trouver le déterminant de la forme quadratique associée à $y(t)$. Pour obtenir une diagonalisation directe il faut prendre les modes propres de cette forme quadratique. On développe $y(t)$ sur les modes propres

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \sin \left(\frac{n\pi t}{T} \right) \quad (1.34)$$

On sait que les modes sont orthogonaux entre eux, ce qui implique que les indices de $y_n(t)$ seront égaux entre eux, lorsque que l'on injecte (1, 34) dans $(\frac{1}{2}\dot{y}^2 - \frac{1}{2}\omega^2 y^2)$

$$S_{quad} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int_0^T \left(y_n^2 \left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 \cos^2 \left(\frac{n\pi t}{T} \right) - y_n^2 \omega^2 \sin^2 \left(\frac{n\pi t}{T} \right) \right) dt = \frac{T}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] y_n^2 \quad (1.35)$$

On a évidemment linéarisé le carré des fonctions cosinus et sinus pour faire apparaître le facteur $\frac{T}{2}$. On constate que dans (1.35) les y_n sont découplées du coefficient, il s'agit donc bien d'une diagonalisation.

$$\begin{aligned} I &= \int dy_n \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{T}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] y_n^2 \right] \\ &= \int dy_n \prod \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{T}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right] y_n^2 \right] \end{aligned} \quad (1.36)$$

L'équation (1, 36) sous forme intégrale gaussienne e^{-ax^2} et

$$\alpha = \frac{i}{\hbar} \frac{T}{4} \left[\left(\frac{n\pi}{T} \right)^2 - \omega^2 \right]$$

On peut utilisé la méthode du col pour calculé l'intégrale (1.36).

Chapitre 2

Méthode du Col

2.1 Introduction

Souvent, nous devons déterminer les quantités physiques et souvent exprimé une intégrale nous allons offrir une méthode générale appelée la méthode du col qui permet d'estimer ces intégrales dans certaines limites asymptotiques leur point commun est l'apparition d'un maximum très marqué de l'intégrand de manière schématique, la méthode du col consiste alors à remplacer l'intégrand par sa forme asymptotique au voisinage de son maximum. L'intégrale prend ainsi une forme gaussienne qui incorpore la contribution dominante ainsi que celle de la région proche du col .

La méthode du col fournit ainsi un cadre unificateur, qui met en rapport des mécanismes physiques a priori très différents. Un autre atout majeur de cette méthode est la prise en compte systématique des contributions de la région proche du col, qui ne sont pas toujours aisément accessibles par d'autres approches.

les contextes d'application de la méthode du col mettent en jeu tout type d'intégrale [1, 4, 9, 10] .

2.2 Intégrale simple

nous considérons l'intégrale simple

$$I(\lambda) = \int_D dx e^{-f(x,\lambda)} \quad (2.1)$$

sur un domaine $D \subset R$, avec une fonction $f(x; \lambda)$ à valeurs réelles. Nous précisons d'abord les hypothèses préalables à l'application de la méthode du col lorsque le paramètre de contrôle $\lambda \rightarrow \infty$.

Celle-ci est ensuite mise en œuvre à travers l'établissement de la formule dite du col. Nous discutons ensuite le caractère asymptotique de la forme approchée ainsi obtenue. Nous terminons cette section par l'extension de la méthode au cas où la fonction $f(x; \lambda)$ est à valeurs imaginaires pures.

2.3 Contexte d'application et essence de la méthode

Supposons que la fonction $f(x; \lambda)$ admette un minimum dans le domaine d'intégration D en $x = x_c(\lambda)$, et qu'elle devienne de plus en plus étroite autour de celui-ci, quand $\lambda \rightarrow \infty$. En conséquence, pour λ suffisamment grand, l'intégrant $e^{-f(x;\lambda)}$ présente un pic très prononcé en $x = x_c(\lambda)$ et de faible largeur. Cette situation est illustrée dans la figure (2.1), où sont dessinées plusieurs courbes représentant l'intégrant $e^{-f(x;\lambda)}$ avec des valeurs croissantes de λ , pour un exemple typique de fonction $f(x; \lambda)$. Elle sera précisée quantitativement par la suite. Afin d'estimer $I(\lambda)$ dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$, remarquons simplement que les contributions dominantes devraient provenir de la région où x reste proche de $x_c(\lambda)$. En suivant cette idée, il semble alors légitime de remplacer $f(x; \lambda)$ par son développement de Taylor au second ordre en $(x - x_c(\lambda))$. Ceci constitue l'essence de la méthode du col.

2.4 Formule du col

Comme $x_c(\lambda)$ est un minimum de $f(x; \lambda)$, nous avons nécessairement

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_c(\lambda); \lambda) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) \succ 0$$

Posons alors :

$$F_c(\lambda) = f(x_c(\lambda); \lambda) \quad \text{et} \quad C(\lambda) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) \right]$$

Le développement de Taylor de $f(x; \lambda)$ au voisinage du minimum $x_c(\lambda)$ s'écrit

$$f(x; \lambda) = F_c(\lambda) + \frac{C(\lambda)}{2}(x - x_c(\lambda))^2 + O((x - x_c(\lambda))^3) \quad (2.2)$$

avec les hypothèses de différentiabilité habituelles. En reportant ce développement tronqué au second ordre dans l'intégrant $e^{-f(x; \lambda)}$, nous obtenons une expression approchée de $I(\lambda)$ qui s'écrit

$$e^{-F_c(\lambda)} \int_D dx \exp \left[-\frac{C(\lambda)}{2}(x - x_c(\lambda))^2 \right] \quad (2.3)$$

Souvent, le domaine $D \subset R$. Comme l'intégrant s'annule autour de $x_c(\lambda)$ sur une échelle $\sigma(\lambda) = 1/\sqrt{C(\lambda)}$, on peut étendre le domaine d'intégration à tout R , pourvu que le pic tout entier soit inclus dans D . Dans le cas typique $D = [L_1, L_2]$, ceci ne sera justifié qu'à la condition nécessaire que les distances $|L_i - x_c(\lambda)|$ du minimum aux bords, soient très grandes devant la largeur $\sigma(\lambda)$ du pic. La valeur approchée (2.1) est alors remplacée par

$$e^{-F_c(\lambda)} \int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[-\frac{(x - x_c(\lambda))^2}{2(\sigma(\lambda))^2} \right]$$

Un calcul élémentaire de l'intégrale gaussienne complète sur R conduit finalement à la formule dite du col :

$$I_{col}(\lambda) = \sqrt{2\pi}\sigma(\lambda) e^{-F_c(\lambda)} \quad (2.4)$$

$$F_c(\lambda) = f(x_c(\lambda); \lambda) \quad \text{et} \quad \sigma(\lambda) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (2.5)$$

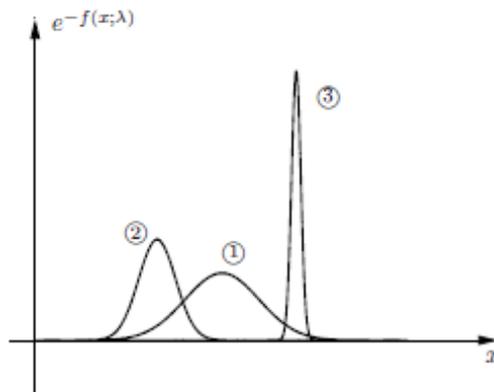


FIG.2.1-Cette figure illustre le caractère de plus en plus piqué de l'intégrant $e^{-f(x;\lambda)}$ lorsque $\lambda \rightarrow \infty$.

Les courbes 1 , 2 et 3 , correspondent respectivement à $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.

2.5 Caractère asymptotique de la formule du col

L'expression (2.4) ne constitue la forme asymptotique de $I(\lambda)$ quand $\lambda \rightarrow \infty$ que si les contributions négligées a priori sont effectivement petites par rapport à $I_{col}(\lambda)$. Les corrections correspondantes proviennent du caractère non-strictement gaussien de l'intégrant au voisinage de $x_c(\lambda)$, de l'existence éventuelle d'autres pics, et enfin des effets de bord.

2.5.1 Contribution des termes non-quadratiques au voisinage du pic.

Estimons la contribution des termes d'ordre $n \succ 2$ dans le développement de Taylor de f au voisinage de $x_c(\lambda)$. Pour cela, nous posons

$$f(x; \lambda) = F_c(\lambda) + \frac{C(\lambda)}{2}(x - x_c(\lambda))^2 + R(x, \lambda) \quad (2.6)$$

où le reste $R(x; \lambda)$ est donné par la série

$$R(x, \lambda) = \sum \frac{\partial^p f}{\partial x_p}(x_c(\lambda), \lambda) \frac{(x - x_c(\lambda))^p}{p!} \quad (2.7)$$

Nous obtenons ainsi la représentation perturbative de la contribution totale du pic,

$$\sqrt{2\pi}\sigma(\lambda) e^{-F_c(\lambda)} \left[1 + \sum_{p=2}^{\infty} c_p(\lambda) (\sigma(\lambda))^{2p} \right] \quad (2.8)$$

Pour que la forme approchée (2.4) soit exacte asymptotiquement, il est nécessaire que chaque correction d'ordre p dans la série perturbative (2.8) tende vers zéro quand $\lambda \rightarrow \infty$. Vu la structure des coefficients $c_p(\lambda)$, ces conditions impliquent

$$\forall q \geq 3 ; [\sigma(\lambda)]^q \frac{\partial^q f}{\partial x^q}(x_c(\lambda), \lambda) \rightarrow 0 \text{ quand } \lambda \rightarrow \infty \quad (2.9)$$

2.5.2 Contribution de pics secondaires

La fonction $f(x; \lambda)$ peut admettre d'autres minima locaux en des points $x_i(\lambda)$ appartenant au domaine D , avec $f(x_i(\lambda); \lambda) > F_c(\lambda)$. Alors l'intégrant $e^{-f(x; \lambda)}$ présente, en plus du pic principal en $x_c(\lambda)$, des pics secondaires en $x_i(\lambda)$, qu'on supposera également très étroits. Si les pics sont bien séparés et présentent un faible recouvrement, alors la contribution de chaque pic peut être déterminée indépendamment des autres. Admettons que, pour chacun d'entre eux, la forme col correspondante

$$\sqrt{2\pi} \sigma_i(\lambda) e^{-F_i(\lambda)} \quad (2.10)$$

Soit asymptotiquement valable $\lambda \rightarrow \infty$, Alors, la contribution dominante à l'intégrale $I(\lambda)$ est la plus grande des expressions (2.4) et (2.10).

2.5.3 Contribution des bords et formule asymptotique

Considérons le cas se réduit à un segment $[L_1, L_2]$ et supposons un seul pice en $x_c(\lambda)$ et que sa contribution soit bien donnée asymptotiquement par la forme col (2.4) alors la contribution de chaque bord L_1 et L_2 donné par $(L_2 - L_1)e^{-f(L_1; \lambda)}$ et $(L_2 - L_1)e^{-f(L_2; \lambda)}$

2.5.4 Cas d'un paramètre de contrôle multiplicatif.

Souvent que le paramètre de contrôle λ intervienne de manière multiplicative dans la fonction f , alors $f(x; \lambda) = \lambda g(x)$. et $x_0 \subset D$ et la position $x_c(\lambda)$ du pic principal est indépendante de λ , alors

$$I(\lambda) = \int_D dx e^{-\lambda g(x)} \quad \text{et} \quad I_{\text{col}}(\lambda) = \sqrt{\frac{2\pi}{\lambda g''(x_0)}} e^{-\lambda g(x_0)} \quad (2.11)$$

x_0 : Minimum absolu de $g(x)$.

2.5.5 Extension au cas d'une pure phase

Considérons une fonction $f(x; \lambda)$ qui soit une pure phase $f(x; \lambda) = i\varphi(x; \lambda)$ avec φ réelle. L'intégrale $I(\lambda)$ est maintenant du type

$$I(\lambda) = \int_D dx e^{-i\varphi(x; \lambda)} \quad (2.12)$$

Interférences destructives au voisinage d'un point arbitraire.

Considérons un point arbitraire x_a strictement à l'intérieur du domaine D . Développons la phase $\varphi(x; \lambda)$ au voisinage du point x_a en série de Taylor,

$$\varphi(x; \lambda) = \varphi(x_a; \lambda) + k_a(\lambda)(x - x_a) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_a; \lambda)(x - x_a)^2 + \dots \quad (2.13)$$

avec $k_a(\lambda) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_a, \lambda)$. Le nombre d'onde local k_a contrôle la longueur d'onde des oscillations au voisinage de x_a .

Supposons que k_a diverge quand $\lambda \rightarrow \infty$. À mesure que λ augmente, $e^{-i\varphi(x; \lambda)}$ oscille de plus en plus rapidement au voisinage de x_a . Dans l'intégration de ce facteur de phase sur un tel voisinage, il apparaît des interférences destructives, dont il résulte une contribution qui tend vers zéro dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$. Ainsi, le voisinage considéré devrait peu apporter à l'intégrale $I(\lambda)$.

Contribution du voisinage d'un extremum de la phase.

$x_a = x_c(\lambda)$, k_a s'annule. La phase φ est alors stationnaire dans un voisinage de $x_c(\lambda)$.

Pour estimer la contribution correspondante du voisinage de $x_c(\lambda)$, nous remplaçons $\varphi(x; \lambda)$ par sa forme quadratique locale

$$\varphi(x_c(\lambda), \lambda) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_c(\lambda), \lambda) (x - x_c(\lambda))^2 \quad (2.14)$$

Ceci conduit à la formule dite de la phase stationnaire pour la contribution du voisinage de l'extremum considéré à $I(\lambda)$:

$$I_{sta} = \sqrt{2\pi} \left[i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_c(\lambda), \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-i\varphi(x_c(\lambda), \lambda)} \quad (2.15)$$

$$x_c(\lambda) \text{ tel que : } \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_c(\lambda), \lambda) = 0$$

Dans ce cadre unifié, on retrouve la formule de la phase stationnaire (2.15). Elle donne bien le comportement asymptotique de $I(\lambda)$ aux grands λ , sous des conditions d'application finalement analogues à celles de la formule du col (2.4).

2.6 Intégrale sur un chemin du plan complexe

Les méthodes du col réel et de la phase stationnaire sont des cas particuliers d'une méthode plus générale pour des intégrales dans le plan complexe, de la forme

$$I(\lambda) = \int_{\gamma} dz e^{-f(z, \lambda)} \quad (2.16)$$

γ : est un chemin de complexe reliant deux points.

$f(z; \lambda)$: est analytique par rapport à la variable complexe z dans une région incluant le contour d'intégration

2.6.1 Démonstration de la formule du col

Déformation du chemin γ originel.

Imaginons que la fonction f à intégrer ait un tel point col z_c mais que z_c ne soit pas sur le chemin d'intégration γ . Supposons alors que le domaine d'analyticité de f soit suffisamment vaste, de sorte à inclure non seulement le chemin γ , mais également le point z_c . Alors, l'application du théorème de Cauchy permet de réécrire exactement $I(\lambda)$ comme

$$I(\lambda) = \int_{\gamma_c} dz e^{-f(z, \lambda)} \quad (2.17)$$

où γ_c est un chemin, déformé à partir de γ et passant par le point z_c considéré

Point selle

appelons $P(x, y; \lambda)$ et $Q(x, y; \lambda)$ les parties réelle et imaginaire respectives de $f(z; \lambda)$, i.e. :

$$f(z; \lambda) = P(x, y; \lambda) + iQ(x, y; \lambda) \quad \text{avec } z = x + iy. \quad (2.18)$$

il semblerait naturel de dire que l'analogie de x_c est un point $z_c = x_c + iy_c$ où P est minimale tandis que Q est extrémale. Cela nécessite en particulier que les dérivées premières partielles de ces fonctions soient nulles, et donc que

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_c, \lambda) = 0$$

la fonction P n'a pas de minimum local, comme le montre la nullité de son Laplacien

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = 0 \quad (2.19)$$

Chemin de descente la plus raide

À ce niveau du raisonnement, une idée naturelle est alors de faire en sorte que le chemin déformé γ_c corresponde, au voisinage de z_c , au chemin de descente la plus raide sur la selle de cheval correspondant à e^{-P}

Le chemin de descente la plus raide correspond en fait à un des deux chemins où la partie imaginaire Q varie le moins au voisinage de z_c !

Pour se convaincre de cette propriété, prenons pour le chemin γ_c au voisinage de z_c la droite d'équation

$$z - z_c = \pm \rho e^{i\alpha} \quad (2.20)$$

α :est l'angle de cette droite avec l'axe des x et où les deux signes correspondent aux deux parties du chemin de part et d'autre de z_c . écrivons aussi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c; \lambda) = \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c; \lambda) \right| e^{i\theta} \quad (2.21)$$

Comme la dérivée première de f s'annule en z_c , nous avons, au voisinage de z_c :

$$f(z; \lambda) - f(z_c; \lambda) \simeq \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c; \lambda) (z - z_c)^2 \quad (2.22)$$

dans la limite $\lambda \rightarrow \infty$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c; \lambda)$ est supposée être grand ,Le développement (2.22) de f et la paramétrisation (2.20) donnent pour P et Q :

$$P(x, y; \lambda) - P(x_c, y_c; \lambda) \simeq \frac{1}{2} \rho^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c; \lambda) \right| \cos(\theta + 2\alpha) \quad (2.23)$$

$$Q(x, y; \lambda) - Q(x_c, y_c; \lambda) \simeq \frac{1}{2} \rho^2 \left| \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c; \lambda) \right| \sin(\theta + 2\alpha) \quad (2.24)$$

Le chemin de descente la plus raide correspond à prendre

$$\cos(\theta + 2\alpha) \succ 0 \text{ soit } \theta + 2\alpha = 2\pi n, n : \text{entier}$$

Mais dans ce cas, $\sin(\theta + 2\alpha)$ s'annule, et l'équation (2.24) montre alors que les variations de la partie imaginaire Q de f autour de z_c sont très faibles, de l'ordre de $O(\rho^3)$.

En résumé, le chemin de descente la plus raide correspond à

$$\alpha = -\frac{\theta}{2} + n\pi \quad (2.25)$$

ou encore à $e^{i\alpha} = \pm e^{-i\frac{\theta}{2}}$.

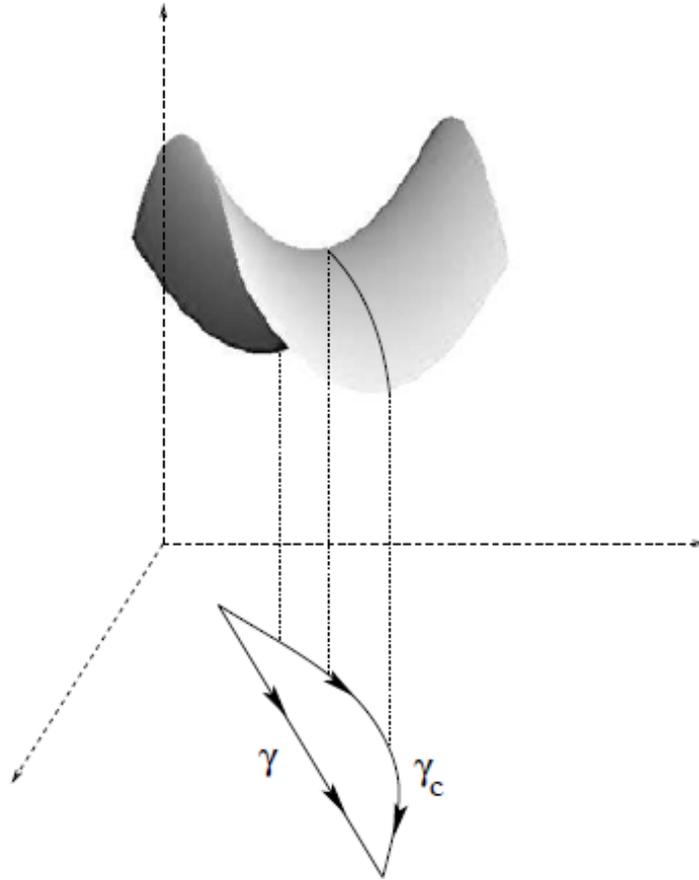


FIG.2.2- Représentation de la fonction $\exp[-P(x, y; \lambda)]$ en fonction de x et y .
 Au voisinage de z_c , le chemin γ_c correspond au chemin de descente la plus raide.

Formule du col complexe.

comme

$$dz = d\rho e^{i\alpha} = \pm d\rho e^{-i\frac{\theta}{2}} \quad (2.26)$$

on obtient

$$I_{col}(\lambda) = \sqrt{2\pi} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(z_c(\lambda), \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-f(z_c(\lambda), \lambda)} \quad (2.27)$$

$$z_c(\lambda) \text{ tel que : } \frac{\partial f}{\partial x}(z_c(\lambda), \lambda) = 0$$

Validité de la formule asymptotique.

L'estimation des corrections à la formule du col (2.27) peut être menée en étendant l'analyse introduite dans la section précédente pour l'intégrale réelle (2.1)

$$\forall p \geq 3 ; \quad \frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z_c(\lambda), \lambda) \left[\frac{\partial^p f}{\partial z^p}(z_c(\lambda), \lambda) \right]^{-\frac{p}{2}} \rightarrow 0 \quad \text{quand } \lambda \rightarrow \infty \quad (2.28)$$

Utilisation pratique et extension

Dans la pratique, la formule du col complexe s'utilise en quelque sorte de manière analogue au théorème des résidus avec la différence suivante. Pour le théorème des résidus, le chemin originel γ est déformé pour contourner un pôle simple. Dans le cas de la formule du col complexe, le chemin γ est déformé pour passer par le point selle en évitant toute singularité! Concrètement, il suffit donc de s'assurer que cette déformation du chemin γ est bien possible, puis d'appliquer simplement la formule

La formule du point selle s'étend aux intégrales de la forme

$$I(\lambda) = \int_{\gamma} dz \ell(z) e^{-f(z,\lambda)} \quad (2.29)$$

où $\ell(z)$ est une fonction variant lentement. Dans ce cas, sous les hypothèses, nous avons

$$I_{col}(\lambda) \simeq \ell(z_c) \sqrt{2\pi} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(z_c(\lambda), \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}} e^{-f(z_c(\lambda)\lambda)} \quad (2.30)$$

2.7 Cas d'une intégrale multiple

Dans cette section, nous considérons d'abord une intégrale sur d variables réelles, le domaine d'intégration D étant inclus dans \mathbb{R}^d . Nous passons ensuite au cas d'une intégrale fonctionnelle portant sur un nombre infini de variables d'intégration. Pour ces deux situations, nous montrons que la formule du col, établie pour une intégrale simple, est aisément généralisable, tout du moins sur un plan formel. En effet, sa mise en œuvre devient plus difficile que dans la cas unidimensionnel, car elle requiert des diagonalisations de matrice $d \times d$ en dimension finie, ou la détermination du spectre d'un opérateur pour une intégrale fonctionnelle. Similairement, l'examen de son caractère asymptotique devient beaucoup plus difficile encore et nous n'entrerons pas dans une discussion générale de cette problématique.

2.7.1 Nombre fini de variables

Soit d variables réelles, notées collectivement $x = (x_1, \dots, x_d)$, et $f(x; \lambda)$ une fonction réelle de ces variables et d'un paramètre de contrôle λ . Nous considérons l'intégrale

$$I(\lambda) = \int_D dx e^{-f(x;\lambda)} \quad (2.31)$$

avec la notation $dx = \prod_{i=1}^d dx_i$. Supposons que $f(x; \lambda)$ ait un minimum absolu au point col $x = x_c(\lambda)$ situé à l'intérieur du domaine D . Si ce minimum devient de plus en plus étroit et marqué quand $\lambda \rightarrow \infty$, alors il est raisonnable de remplacer l'intégrant $e^{-f(x; \lambda)}$ par sa forme gaussienne locale au voisinage du point col $x_c(\lambda)$, tout en étendant le domaine d'intégration à tout l'espace \mathbb{R}^d . Cette approximation est l'extension évidente, à d dimensions, de la méthode du col pour une intégrale simple. Sa forme spécifique est établie ci-dessous.

Approximation gaussienne locale.

Procédons au développement de Taylor de $f(x; \lambda)$ au voisinage de $x_c(\lambda)$. Il vient

$$f(x; \lambda) = f(x_c(\lambda); \lambda) + \frac{1}{2}(x - x_c(\lambda))^T \cdot C(\lambda) \cdot (x - x_c(\lambda)) + \dots \quad (2.32)$$

où $C(\lambda)$ est la matrice symétrique $d \times d$ ayant pour éléments $C_{ij}(\lambda) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_c(\lambda); \lambda)$.

Dans l'expression(2, 32) , nous avons utilisé la notation générique

$$u^T \cdot M \cdot v = \sum_{ij} u_i M_{ij} v_j \quad (2.33)$$

pour deux vecteurs u et v de \mathbb{R}^d , M étant une matrice $d \times d$ et A^T désignant la transposée de la matrice A . En ne conservant que les termes quadratiques dans la série de Taylor et en remplaçant D par \mathbb{R}^d , nous obtenons, pour l'intégrale $I(\lambda)$, la forme gaussienne

$$I_{col}(\lambda) = e^{-F_c(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^d} dx \exp \left[-\frac{1}{2}(x - x_c(\lambda))^T \cdot C(\lambda) \cdot (x - x_c(\lambda)) \right] \quad (2.34)$$

Avec $F_c(\lambda) = f(x_c(\lambda), \lambda)$

Notons que $DetC(\lambda) > 0$. En effet, ces d valeurs propres $\mu_1(\lambda), \dots, \mu_d(\lambda)$ sont nécessairement réelles, et strictement positives car $C(\lambda)$ est une matrice symétrique réelle et $x_c(\lambda)$ est un minimum de f . Nous avons donc le résultat :

$$I_{col}(\lambda) = e^{-F_c(\lambda)} \sqrt{\frac{(2\pi)^d}{\text{Det}(C(\lambda))}} \quad (2.35)$$

$$F_c(\lambda) = f(x_c(\lambda), \lambda) \quad , \quad C_{ij}(\lambda) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_c(\lambda), \lambda).$$

Commentaire :

1. Indiquons cependant brièvement ici que l'apparition du déterminant de $C(\lambda)$ se comprend bien dans le cas où la matrice $C(\lambda)$ est diagonale,

$$C(\lambda) = \begin{pmatrix} \mu_1(\lambda) & & \\ & \mu_2(\lambda) & \\ & & \mu_d(\lambda) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

Dans ce cas, l'intégrale multiple se factorise. L'intégrale sur la composante x_i de x donne $\sqrt{2\pi/\mu_i(\lambda)}$.

2. En ce qui concerne le caractère asymptotique de la formule (2.35), il faut vérifier que les termes d'ordre supérieur à deux dans la série de Taylor (2.32) donnent une contribution qui tend vers 0 pour $\lambda \rightarrow \infty$. Similairement au cas d'une seule variable réelle, cette condition est réalisée si

$$\forall q \geq 3 \text{ avec } q = \sum_{i=1}^p q_i,$$

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_{i_1}^{q_1}(\lambda) \dots \mu_{i_p}^{q_p}(\lambda)}} \frac{\partial^q f}{x_{i_1}^{q_1}(\lambda) \dots x_{i_p}^{q_p}(\lambda)}(x_c(\lambda); \lambda) \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

Dans cette condition, $\mu_{i_1}(\lambda), \dots, \mu_{i_p}(\lambda)$ correspond à une sélection arbitraire de p valeurs propres de la matrice $C(\lambda)$. Elle est analogue à la condition (2.9), Comme dans le cas d'une intégrale simple, la condition (2.37) est automatiquement vérifiée pour f de la forme $f(x; \lambda) = \lambda g(x)$.

2.7.2 Nombre infini de variables et passage à l'intégrale fonctionnelle

Dans certaines conditions, lorsque le nombre de variables d'intégration devient infini, l'intégrale multiple devient une intégrale fonctionnelle. Dans un premier temps, nous décrivons, succinctement, comment cette intégrale est construite à partir d'un processus de limite adéquat. Puis, nous établissons la formule du col correspondante.

Construction de l'intégrale fonctionnelle.

Le processus de limite en jeu prend la forme générique suivante. Partons d'une intégrale multiple de la forme (2.32), dans un espace à $d = N$ dimensions. Notons dorénavant φ_i la i ème variable avec $i = 1, \dots, N$, φ_i étant supposée réelle pour fixer les idées. Généralement, dans la plupart des situations physiques rencontrées, à l'indice i est associé un paramètre noté $\zeta(i, N)$ qui dépend aussi du nombre total de variables N .

À ce niveau, la variable φ_i peut être vue comme un champ $\varphi(\zeta)$ dépendant du paramètre ζ qui prend des valeurs discrètes pour N fini.

Si l'ensemble des valeurs $\zeta(i, N)$ devient dense dans un certain domaine Ω quand $N \rightarrow \infty$, alors une configuration $\{\varphi_i, i = 1, \dots, N\}$ engendre un champ continu noté $\varphi(\cdot) = \varphi(\zeta)$ où ζ parcourt Ω . Le volume élémentaire dans l'espace d'intégration initial à N fini, définit alors la mesure $d[\varphi(\cdot)]$ d'une intégrale fonctionnelle sur l'espace des champs $\varphi(\cdot)$, i.e

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^N d\varphi_i = d[\varphi(\cdot)] \quad (2.38)$$

Dans cette limite $N \rightarrow \infty$, la fonction des N variables $f(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N; \lambda)$ définit elle une fonctionnelle, souvent notée $S_\lambda[\varphi(\cdot)]$. Ce processus de limite à partir de l'intégrale multiple initiale, conduit donc à introduire l'intégrale fonctionnelle

$$I(\lambda) = \int d[\varphi(\cdot)] \exp[-S_\lambda \varphi(\cdot)] \quad (2.39)$$

Dans la présentation ci-dessus, nous avons délibérément omis toutes les difficultés mathématiques qui apparaissent dans le processus de limite $N \rightarrow \infty$. Dans certains cas, comme celui de la représentation de Feynman-Kac de la matrice densité en mécanique statistique, ce processus peut être contrôlé de manière rigoureuse. Dans la suite nous admettons que l'intégrale fonctionnelle (2.39) est bien définie

Formule du col fonctionnelle

Comme dans le cas discret, il peut apparaître un pic très étroit dans l'intégrand de (2.39) quand $\lambda \rightarrow \infty$. Ce pic est obtenu pour un champ $\varphi_c(\cdot)$ qui extrémalise $S_\lambda[\varphi(\cdot)]$, ce qui signifie que la dérivée fonctionnelle de $S_\lambda[\varphi(\cdot)]$ évaluée en $\varphi_c(\cdot)$ est nulle, c'est-à-dire

$$\frac{\delta S_\lambda[\varphi(\cdot)]}{\delta \varphi(\zeta)} [\varphi_c(\cdot)] = 0 \quad \forall \zeta \in \Omega \quad (2.40)$$

Il est alors légitime de développer $S_\lambda[\varphi(\cdot)]$ au second ordre en $(\varphi - \varphi_c)$, ce qui donne l'expression gaussienne approchée

$$I_{col}(\lambda) = e^{-S_\lambda[\varphi_c(\cdot)]} \int d[\varphi(\cdot)] \times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_{\Omega^2} d\zeta_1 d\zeta_2 [\varphi(\zeta_1) - \varphi_c(\zeta_1)] \times C_\lambda(\zeta_1, \zeta_2) [\varphi(\zeta_2) - \varphi_c(\zeta_2)] \right\} \quad (2.41)$$

Dans l'intégrale fonctionnelle gaussienne (2.41), la covariance $C_\lambda(\zeta_1, \zeta_2)$ est définie par

$$C_\lambda(\zeta_1, \zeta_2) = \frac{\delta^2 S_\lambda}{\delta \varphi(\zeta_1) \delta \varphi(\zeta_2)} [\varphi_c(\cdot)] \quad (2.42)$$

cette intégrale gaussienne s'exprime en termes des valeurs propres $\mu_\lambda(\nu)$ de l'opérateur C_λ où ν est un paramètre spectral qui caractérise la valeur propre considérée. Ces

valeurs propres sont réelles par suite du caractère hermitien de C_λ . De plus, la condition de minimum de S au col implique qu'elles sont aussi toutes positives. En introduisant la densité de fonctions propres $g_\lambda(\nu)$,

pour une intégrale gaussienne multiple, la forme col de $I(\lambda)$ se réduit alors à :

$$I_{col}(\lambda) = e^{-S_\lambda[\varphi_c(\cdot)]} \exp \left\{ \frac{1}{2} \int d\nu g_\lambda(\nu) \ln [2\pi/\mu_\lambda(\nu)] \right\} \quad (2.43)$$

Commentaires :

1. Le paramètre spectral ν permet d'indexer les valeurs propres dans la partie continue du spectre d'un opérateur donné. En quelque sorte, il est l'équivalent de l'indice i pour les valeurs propres discrètes μ_i de la matrice $C(\lambda)$ en dimension finie d . Par exemple, les valeurs propres de l'opérateur $-\lambda\Delta$ dans un segment de longueur L avec des conditions de Dirichlet homogènes, sont de la forme $\mu_\lambda(k) = \lambda k^2$, avec $k = p\pi/L$ et $p > 0$. Dans la limite $L \rightarrow \infty$, le nombre d'onde k peut être vu comme un paramètre spectral prenant des valeurs continues réelles et positives. En posant ici $\nu = k$, la densité de fonctions propres correspondante devient $g_\lambda(\nu) = (L/\pi)$, et le domaine d'intégration sur ν est $[0, +\infty]$

2. Similairement au cas d'une intégrale simple ou multiple, dans la forme col (2.43), la contribution du col lui-même $\exp(-S_\lambda[\varphi_c(\cdot)])$ est multipliée par la contribution de la région proche de celui-ci. Dans la pratique, la détermination des valeurs propres $\mu_\lambda(\nu)$ est naturellement un problème très difficile en général, de sorte que l'expression (2.43) reste souvent d'exploitation peu aisée. Dans certains cas, les valeurs propres sont calculables simplement, ou bien leur produit s'exprime, de manière compacte et tractable, en termes de quantités spécifiques au champ col φ_c . L'analyse des corrections à l'approximation du col est tout aussi complexe. Dans cet esprit, notons que l'immense étendue du domaine d'intégration, typiquement l'ensemble de toutes les fonctions continues $\varphi(\zeta)$, induit bien sûr une grande richesse dans le paysage représentant $\exp(-S_\lambda[\varphi(\cdot)])$. En particulier, de nombreux autres minima locaux peuvent exister, et il faut aussi contrôler leurs contributions quand λ tend vers l'infini.

2.8 Conclusion :

Ce chapitre est consacré à l'introduction de la méthode du col. Nous avons présenté son contexte d'application ainsi que sa formule pour une intégrale simple et une intégrale de chemin. Ses propriétés asymptotiques ont été aussi étudiées. Des résultats élémentaires trouvées dans la littérature ont été aussi exposés.

Chapitre 3

Applications :

3.1 Introduction :

Nous présentons dans ce chapitre les applications réelles réalisées pour étayer les différents aspects théoriques abordés dans les chapitres précédents et évaluer ainsi l'efficacité et les performances de la méthode du col pour l'estimation d'une intégrale gaussienne.

3.2 Application 1 :

Nous traitons d'abord le cas d'une intégrale simple de la forme

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2}$$

3.2.1 Par la méthode de Gauss

On montrera que le calcul des intégrales gaussiennes qui apparaissent souvent en physique conduit au résultat suivant [10]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}. \quad (3.1)$$

Transformée de Fourier d'une gaussienne réelle :

L'exemple correspond à la transformée de Fourier d'une fonction gaussienne réelle. Ce type d'intégrale apparaît, par exemple, dans le calcul des fonctions de Green pour l'équation de diffusion. Pour calculer des intégrales du type

$$I_{\sigma}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikx - \sigma k^2)$$

Nous commençons par la réécrire comme :

$$I_{\sigma}(x) = \exp\left[\frac{-x^2}{4\sigma}\right] \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp\{-\sigma [k - (ix/(2\sigma))]^2\}$$

Remarquons ensuite que l'intégrale :

$$\oint_{c_R} dz \exp(-\sigma [z - (ix/(2\sigma))]^2) \quad (3.2)$$

Définie sur le contour C_R du plan complexe donné par l'équation(3.1) est nulle du fait que l'intégrant est analytique à l'intérieur du contour.

Prenons la limite : $R \rightarrow \infty$

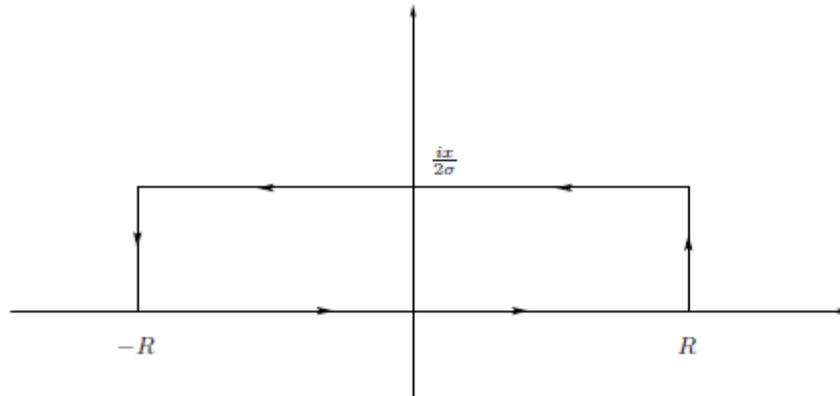


FIG.3.1 -contour C_R utilisé pour le calcul de l'intégrale (3.2)

-On peut montrer très facilement que la contribution des segments verticaux du contour tend vers zéro

- Celle de l'axe réel nous donne l'intégrale $I_\sigma(x)$ que nous voulons calculer

- Finalement celle du segment horizontal avec $Imz = \sqrt{x/(2\sigma)}$ est tout simplement l'intégrale d'une gaussienne qui vaut $-\sqrt{(\pi/\sigma)}$

Le résultat final est donc :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp(ikx - \sigma k^2) = \sqrt{\frac{\pi}{\sigma}} \exp[-x^2/(4\sigma)] \quad (3.3)$$

3.2.2 Par la méthode du Col

Suite à (3,1) on obtient $f(x, \lambda) = \lambda x^2$

$$x_c(\lambda) : \text{est un minimum de } f(x, \lambda) \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) \succ 0$$

ou la fonction $f(x)$ est une fonction réelle, analytique dans un voisinage du segment (a, b) , et λ un parametre positif.

$$F_c(\lambda) = f(x_c(\lambda); \lambda) \quad \text{et} \quad \sigma(\lambda) = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) \right]^{-\frac{1}{2}}$$

Le minimum de $f(x)$ correspond a un bord du domaine d'integration. On developpe alors $f(x)$ au voisinage du minimum et on integre. Ce n'est pas le cas qui nous interesse ici.

La fonction $f(x)$ a un ou plusieurs minima sur l'intervalle (a, b) . Les minima correspondent a des points x_c caracterises par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_c(\lambda); \lambda) = 0$$

ou generiquement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) \succ 0$$

Si nous negligions des corrections d'ordre $\exp[-const \times \lambda]$, nous pouvons restreindre l'integration à un voisinage fini $(x_c + \varepsilon, x_c - \varepsilon)$ de x_c , mais avec ε arbitrairement petit. En effet, les contributions hors de cet intervalle sont bornees par :

$$(b - a) \int_a^b dx e^{-\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c) \cdot \lambda \cdot \varepsilon^2 / 2}$$

ou nous avons utilise la propriete $\varepsilon \lll 1$ de sorte que

$$f(x) - f(x_c) \sim \frac{1}{2} f''(x_c) (x - x_c)^2$$

Le developpement de Taylor de la fonction f s'ecrit alors

$$f(x; \lambda) = F_c(\lambda) + \frac{f''(\lambda)}{2} (x - x_c(\lambda))^2 + \frac{f'''(\lambda)}{6} (x - x_c(\lambda))^3 + \frac{f''''(\lambda)}{24} (x - x_c(\lambda))^4 + O((x - x_c(\lambda))^3)$$

On voit qu'à l'ordre dominant il suffit de garder le terme quadratique. a cause du caractere negligeeable des contributions loin du col,on peut alors integrer sur $[-\infty, +\infty]$.
On est ramene a une integrale gaussienne

$$I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2}$$

on à (2,3) : $\sigma(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} = (2\lambda)^{-\frac{1}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_c(\lambda); \lambda) = 2\lambda x = 0 \Rightarrow x_c = 0$$

en remplace dans (2,4) on obtenu

$$I_{\text{col}}(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \tag{3.4}$$

3.3 Application 2 :Calcul de propagateur d'une particule libre à une dimension :

Dans ce cas l'Hamiltonien de système s'écrit sous la forme :

$$H = \frac{P^2}{2m}, \text{ où } V(X) = 0 \tag{3.5}$$

Suite à (1,27) le propagateur devient

$$K(B; A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\prod_{n=1}^{N-1} \int dx_n \right] \left[\prod_{n=1}^N \sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^N \frac{m}{2\varepsilon} (x_n - x_{n-1})^2 \right] \tag{3.6}$$

Pour effectuer l'ntégration sur les x_n ,on essaye de s'implifier l'intégrale en prenant seulement la variable x_1 puis on généralisé sur tous les x_n .

L'ntégrale sur x_1 s'écrit

$$\int dx_1 \left[\sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \left[\sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \times \exp \left\{ \frac{i m}{\hbar 2\varepsilon} [(x_2 - x_1)^2 + (x_1 - x_0)^2] \right\} \quad (3.7)$$

On développe l'exposant :

$$\left[\sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \int dx_1 \left[\sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \exp \left[\left(\frac{i m}{\hbar \varepsilon} \right) x_1^2 - \left(\frac{i m}{\hbar \varepsilon} \right) (x_2 - x_0) x_1 \right] \times \exp \left[\left(\frac{i m}{\hbar 2\varepsilon} \right) (x_1^2 + x_0^2) \right] \quad (3.8)$$

Par identification avec (1, 2) on obtient :

$$a = -\frac{i m}{\hbar \varepsilon}, b = \left(\frac{i m}{\hbar \varepsilon} \right) (x_2 - x_0) \quad (3.9)$$

3.3.1 Par la méthode de Gauss

En remplace (3, 9) dans(1, 2) l'équation (3, 8) donne [11] :

$$\sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(2\varepsilon)}} \exp \left[\frac{i m (x_2 - x_0)^2}{\hbar 2 \quad 2\varepsilon} \right] \quad (3.10)$$

Et de la même manière on integre sur x_2, \dots, x_{n-1} , donc si on généralisé sur tout les intégrales dx_n , le propagateur d'une particule libre devient :

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_B - t_A)}} \exp \left[\frac{i m (x_B - x_A)^2}{\hbar 2 (t_B - t_A)} \right] \quad (3.11)$$

3.3.2 Par la méthode du Col

Par identification (2,1) et (3,1) on obient

$$f(x, \lambda) = f(x, a) = ax^2 - bx$$

Les minima correspondent à des points x_c caractérisés par

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_c(\lambda); \lambda) = 2ax - b = 0 \Rightarrow x_c = \frac{B}{2A} \quad (3.12)$$

$$x_c = \frac{\left(\frac{i}{\hbar} \frac{m}{\varepsilon}\right) (x_2 - x_0)}{2 \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m}{\varepsilon}\right)} \quad (3.13)$$

En calcul $f(x_c, a)$ on obtient

$$F_c(a) = f(x_c, a) = ax_c^2 - bx_c = \frac{i}{h} \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_0)^2}{2\varepsilon} \quad (3.14)$$

En calcul $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_c(\lambda); \lambda) = 2a = 2 \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m}{\varepsilon}\right) \quad (3.15)$$

en remplace dans (2, 4) on obtient

$$\begin{aligned} & \left[\sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \left[\sqrt{\frac{m}{2i\varepsilon\pi\hbar}} \right] \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2 \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{m}{\varepsilon}\right)}} e^{\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_0)^2}{2\varepsilon}} \\ & \sim \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(2\varepsilon)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_2 - x_0)^2}{2\varepsilon} \right] \end{aligned} \quad (3.16)$$

Donc et de la même manière on applique la même méthode sur x_2, \dots, x_{n-1} , donc si on généralisé sur tout les intégrales dx_n , le propagateur d'une particule libre devient :

$$I_{col}(a) \sim K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar(t_B - t_A)}} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \frac{m}{2} \frac{(x_B - x_A)^2}{(t_B - t_A)} \right] \quad (3.17)$$

Conclusion générale

Le cadre général de ce travail est la modélisation mathématique des processus physiques ainsi que la résolution des équations mathématiques qui régissent leurs évolutions. Notre attention s'est focalisé sur l'estimation des intégrales qui apparaissent dans la plupart de ces équations. Ainsi, nous nous sommes intéressés tout particulièrement à la méthode du col pour l'estimation d'une intégrale et qui s'avère une technique très efficace. Dans une première étape, nous avons fixé le cadre général de l'approche par les intégrales de chemins. Ceci est fait par la présentation d'un certain nombre de résultats classiques bien connus des spécialistes. Dans la deuxième partie, nous avons introduit la méthode du col pour l'estimation d'une intégrale, cette technique est basé sur la notion du développement limité et asymptotique d'une fonction. Quand au troisième et dernier chapitre, il a été consacré à l'évaluation des performances de notre méthode à travers la présentation de deux applications réelles. Les résultats obtenus indiquent que notre méthode est une très bonne alternative aux techniques de calcul classiques notamment dans le cas d'une intégrale gaussienne.

Le travail effectué dans le cadre de ce mémoire nous a permis de dégager plusieurs perspectives de recherches très intéressantes et qui reste d'actualité. En effet, il pourrait donner lieu à des prolongement notamment :

1. Il serait intéressant dans un travail futur de réaliser une étude comparative en effectuant des simulations sur d'autres formes d'intégrales et de fonctions et dans des dimensions plus élevées de l'espace (intégrales multiples).

2. Il serait intéressant aussi d'explorer d'autres approches et techniques comme l'approche stochastique avec les méthodes de Monté-Carlo basées sur le calcul de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.

3. Il Essayez de réaliser d'autres applications pratiques et réelles dans d'autres domaines de la physique..

Bibliographie

- [1] J.ZINN-JUSTIN : Intégrale de Chemin en Mécanique Quantique : Introduction, Dover Publication, 2005.
- [2] Nour-Eddine Fahssi :Introduction aux méthodes d'intégrale de chemin et applications ,arXiv :1303.2556v1 [physics.gen-ph] 6 Mar 2013
- [3] L.S Schulman : Techniques and Applications of Path Integration ,(Wiley, New York, 1981).
- [4] H. Kleinert, Path integrals in quantum mechanics, statistics polymer physics and financialmarkets (fourth ed., World Scientific, Singapore, 2006)
- [5] C.Grosche et F.Steiner : Handbook of Feynman Path Integrals,(Springer, Berlin, Heidelberg,1998).
- [6] Philippe A.Martin .Une initiation a L'intégrale Fonctionnelle en Physique Quantique et Statistique ,presses polytechniques et universitaires romondes-1015 lausanne.
- [7] M.Stone and K-S Park M.STONE and K-S PARK : The Semiclassical Propagator for Spin Coherent States, J.Math.Phys, Vol 41, No.12 ; 2000.
- [8] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys. 20 (1948) 367.
- [9] Alain Comtet : Introduction a l'intégrale de chemin et applications ,Université Paris-Sud, Orsay&Université Pierre et Marie Curie, Paris 27 mars 2012.
- [10] ANGEL ALASTUEY, MARC MAGRO and PIERRE PUJOL : Physique et Outils Mathématiques : Méthodes et Exemples. EDP Sciences CNRS ÉDITIONS, 2008.

- [11] H. Kleinert, Path integrals in quantum mechanics, statistics polymer physics and financialmarkets (fourth ed., World Scientific, Singapore, 2006).
- [12] Thomas Bernet et Jonathan Bertolaccini : L'Intégrale de Chemin ,31 mai 2011.

Abstract

The col method is the principal alternative for the estimate of an integral. This relies on its ease of interpretation and its good properties. In this work, we have introduced the general concepts of this method based on an asymptotic development. The path integrals approach was also presented. In order to evaluate the performances of our method, we have considered two practical applications. The results obtained show that this method has a better performance in particular with Gaussian integrals.

ملخص

طريقة كول هي البديل الرئيسي لحساب تكامل، و هذا لتفسيرها البسيط و خصائصها الجيدة، وفي هذا العمل قمنا بعرض المبادئ العامة لهذه الطريقة التي تقوم على النشر المتقارب للدالة، و لتقييم هذه الطريقة قمنا بتقديم عرض على تكامل المسارات. كما اعتبرنا اثنين من التطبيقات العملية، و أظهرت النتائج ان هذه الطريقة فعالة جدا و خاصة في حالة تكاملات غوص .

Résumé

La méthode du col est la principale alternative pour l'estimation d'une intégrale. Ceci est dû à son interprétation simple et ses bonnes propriétés. Dans ce travail, nous avons introduit les principes générales de cette méthode basée sur le développement asymptotique d'une fonction. Un exposé sur l'approche par les intégrales de chemins a été également présenté. Afin d'évaluer les performances de notre méthode, nous avons considéré deux applications pratiques. Les résultats obtenus montrent que cette méthode est très efficace notamment dans le cas des intégrales gaussiennes.