République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université Akli Mohand Oulhadj- Bouira
Faculté des Sciences et Sciences Appliquées
Département de Physique

Mémoire

Présenté par: Mlle BOUROUISSA Meriem

En vue de l'obtention du diplôme de Master en physique

Option : Physique Théorique des hautes énergies

Thème

Cosmologie avec couplage dérivatif non minimal

Soutenu publiquement le 03/07/2016 devant le jury suivant:

Mr SADOUN Mohamed Amezian	*Président*	*MCB*	*Université de Bouira*
Mr BOUKHALFA Soufiane	*Examinateur*	*MAA*	*Université de Bouira*
Mr BENAICHE Salim	*Examinateur*	*MAA*	*Université de Bouira*
Mme BOULKROUNE Nassima	*Rapporteur*	*MMA*	*Université de Bouira*

Université Akli Mohand Oulhadj de Bouira, Juillet 2016

Table des matières

Introduction générale

La cosmologie est l'étude de l'univers dans son ensemble à très grande échelle, de son évolution dans le temps et de ses propriétés globales. Nous possédons de précieuses informations sur notre univers. Il est plat et il est constitué de 70 % de forme d'énergie dite énergie sombre, elle est responsable de l'accélération récente de l'expansion de l'univers. Dans les équations d'Einstein, qui relient la géométrie de l'univers à son contenu énergétique, elle apparaît sous la forme de la constante cosmologique. Du point de vue théorique, la cosmologie s'appuie principalement sur la relativité générale et la physique des particules. Du point de vue observationnel, elle repose sur plusieurs piliers importants [1–3]:

– L'expansion de l'univers constaté en particulier grâce au décalage vers le rouge de la lumière nous provenant des astres lointaines,

– L'abondance des noyaux légers[1], qui s'explique par la nucléosynthèse primordiale[2],

– Le fond de rayonnement diffus cosmologique[3],

– La formation des grandes structures.

Le modèle cosmologique standard, dit du Big-Bang, permet de rendre compte de façon précise de ces phénomènes, Néanmoins il a quelques limites : le problème de l'horizon, le problème de la platitude. Comme le stipule le principe cosmologique, l'univers est homogène à grande échelle. C'est d'ailleurs ce qu'indiquent toutes les observations. Les galaxies sont réparties de façon homogène à grande échelle.

Les problèmes du Big-Bang ont donné naissance à la cosmologie moins standard, en citant la cosmologie inflationnaire, le couplage non minimal de la gravitation avec les autres

1. La composition de l'univers s'avère dominée par les éléments chimiques les plus légers et les plus simples. L'hydrogène et l'hélium constituent ainsi 98% de notre Soleil.

2. la nucléosynthèse primordiale s'est manifestée à l'échelle de l'univers tout entier, durant les premières dizaines de minutes suivant le Big-Bang. Elle est résponsable de la formation des noyaux légers.

3. Le fond diffus cosmologique est le nom donné au rayonnement électromagnétique issu de l'époque dense et chaude qu'a connue l'Univers par le passé.

champs physiques et la cosmologie quantique. Dans ce mémoire, on a étudie la cosmologie inflationnaire en introduisant deux termes de couplage dérivatif non minimal du champ scalaire et la courbure de l'espace-temps. Les terme de couplage sont de type $k_1 R\phi_\mu\phi^\mu$ et $k_2 R_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$ où k_1 et k_2 sont des paramètre de couplage de dimension d'un carré d'une longueur et on a déduit les solutions cosmologique de cette théorie [4–8].

Ce mémoire est organisé comme suit

- Le premier chapitre est un rappel de quelques éléments d'analyse tensoriel, qui est le cadre mathématique de la relativité générale et éventuellement de la cosmologie.
- Le deuxième chapitre est une présentations de certaines notions de cosmologie standard.
- Le troisième chapitre est l'étude de la cosmologie, dite inflationnaire, avec couplage dérivatif non minimal de type $k_1 R\phi_\mu\phi^\mu$ et $k_2 R_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$.

CHAPITRE 1

Éléments d'analyse tensorielle

Dans ce chapitre, on fait quelques rappels sur l'analyse tensorielle utilisés pour décrire la cosmologie en particulier la cosmologie avec couplage dérivatif nonminimal. À savoir la notion du tenseur, dérivée covarante, des opérateurs différentiels et le comportement du tenseur de courbure [1, 9–11].

1.1 Introduction à la notion du tenseur

1.1.1 Composantes contravariantes et covariantes d'un vecteur

Soit une base quelconque $(\overrightarrow{e}_\mu)$ d'un espace vectoriel euclidien E_n de dimension n. On appelle composantes contravariantes d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ de E_n, les quantités $\{A^\mu\}$ tel que

$$\overrightarrow{A} = A^\mu \overrightarrow{e}_\mu \tag{1.1}$$

et composantes covariantes les quantités $\{A_\mu\}$ tel que

$$A_\mu = \overrightarrow{A}.\overrightarrow{e}_\mu \tag{1.2}$$

ces composantes sont des projections du vecteur $\overrightarrow{A}$ sur les axes portant les vecteurs de base $\overrightarrow{e}_\mu$.

1.1.2 Coordonnées curvilignes

On considère un point M d'un espace vectoriel euclidien et un système de coordonnées $\{x_\mu\}$. On associe à M un repère naturel en admettant M pour origine et $\{\overrightarrow{e}_\mu\}$ pour base

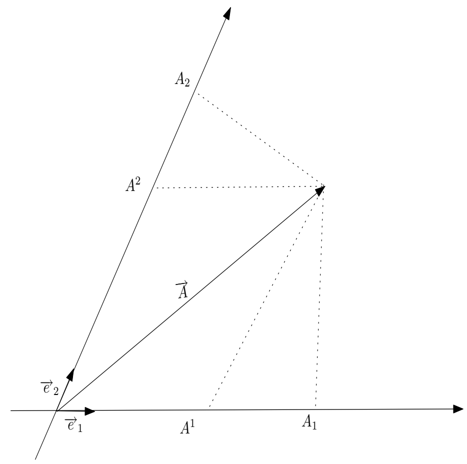

Fig. 1.1 – Coordonnées covaraintes et contravariantes d'un vecteur dans un repère bidimensionnel.

tel que

$$\overrightarrow{OM} = x^\mu \overrightarrow{e}_\mu \tag{1.3}$$

$$\text{et} \quad d\overrightarrow{OM} = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^\mu} dx^\mu \tag{1.4}$$

$$\text{or} \quad d\overrightarrow{OM} = dx^\mu \overrightarrow{e}_\mu \tag{1.5}$$

$$\text{alors} \quad \overrightarrow{e}_\mu = \frac{\partial \overrightarrow{OM}}{\partial x^\mu} \tag{1.6}$$

Soient $\{x^\mu\}$ et $\{x'^\mu\}$ deux systèmes de coordonnées reliés par

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu) \quad 1 \leqslant \mu \leqslant n \tag{1.7}$$

$$\text{et} \quad x^\mu = x^\mu(x'^\nu) \quad 1 \leqslant \nu \leqslant n \tag{1.8}$$

On a d'une part

$$dx^\mu = \delta^\mu_\rho \; dx^\rho \tag{1.9}$$

$$dx'^\mu = \delta^\mu_\rho \; dx'^\rho \tag{1.10}$$

d'autre part d'après (1.7) et (1.8)

$$dx^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} dx'^\nu \tag{1.11}$$

$$= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} dx^\rho \tag{1.12}$$

on déduit

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\rho} = \delta^\mu_\rho \tag{1.14}$$

Si on associe les repères $(M, \overrightarrow{e}_\mu)$ et $(M, \overrightarrow{e}'_\mu)$ aux systèmes de coordonnées $\{x^\mu\}$ et $\{x'^\mu\}$ respectivement, alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{e}'_\nu &= \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x'^\nu} = \frac{\partial\overrightarrow{OM}}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\overrightarrow{e}_\mu \end{aligned} \tag{1.15}$$

de même
$$\overrightarrow{e}_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\overrightarrow{e}'_\nu \tag{1.16}$$

alors pour un vecteur $\overrightarrow{A}$

$$\overrightarrow{A} = A^\mu\overrightarrow{e}_\mu = A'^\nu\overrightarrow{e}'_\nu = A'^\nu\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}\overrightarrow{e}_\mu \tag{1.17}$$

$$\overrightarrow{A} = A'^\nu\overrightarrow{e}'_\nu = A^\mu\overrightarrow{e}_\mu = A^\mu\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}\overrightarrow{e}'_\nu \tag{1.18}$$

on aura les relations de transformation des coordonnées contravariantes du vecteur $\overrightarrow{A}$ lors d'un changement de système de coordonnées

$$A^\mu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu}A'^\nu \tag{1.19}$$

$$A'^\nu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}A^\mu \tag{1.20}$$

Quant aux coordonnées covariantes, en tenant compte des relations (1.2) et (1.16), on aura

$$A_\mu = \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\mu}A'_\nu \tag{1.21}$$

$$A'_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}A_\nu \tag{1.22}$$

1.1.3 Définition d'un tenseur

Un scalaire est un tenseur d'ordre zéro. Un vecteur est un tenseur d'ordre un. On appelle composantes p fois contravariantes et q fois covariantes d'un tenseur mixte d'ordre $p+q$ toute quantité $A^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1,\dots,\mu_q}$ se transforment comme le produit de p composantes contravariantes et q composantes covarainte d'un vecteteur lors d'un changement de coordonnées $x'^\mu \longrightarrow x'^\mu = x'^\mu(x^\nu)$, autrement dit

$$A'^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1,\dots,\mu_q} = \frac{\partial x'^{\nu_1}}{\partial x^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\nu_p}}{\partial x^{\rho_p}}\frac{\partial x^{\lambda_1}}{\partial x'^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x^{\lambda_q}}{\partial x'^{\mu_q}}A^{\rho_1,\dots,rho_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_q} \tag{1.23}$$

$$A^{\nu_1,\dots,\nu_p}_{\mu_1,\dots,\mu_q} = \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x'^{\rho_1}}\cdots\frac{\partial x^{\nu_p}}{\partial x'^{\rho_p}}\frac{\partial x'^{\lambda_1}}{\partial x^{\mu_1}}\cdots\frac{\partial x'^{\lambda_q}}{\partial x^{\mu_q}}A'^{\rho_1,\dots,\rho_p}_{\lambda_1,\dots,\lambda_q}. \tag{1.24}$$

Un tenseur d'ordre $p+q$ dans un espace à n dimension a n^{p+q} composantes.

Notes

1. La somme de deux tenseurs contravariants a pour composantes les sommes de leurs composantes de mêmes indices, de même pour les composantes covariantes et mixtes des tenseurs.
2. Le produit d'un tenseur par un scalaire est un tenseur dont les composantes sont égales au produit de ses composantes par ce scalaire, ainsi munis des lois d'addition et de multiplication par un scalaire, les tenseurs d'un type donné forment un espace vectoriel.
3. Le produit tensoriel d'un tenseur par un autre permet de former de nouveaux tenseurs. Soit $T_1^{\mu\nu}$ et $T_2^{\lambda\rho}$ les composantes contravariantes respectives des tenseurs T_1 et T_2. La multiplication des composantes entre elles donne les quantités

$$\widetilde{T}^{\mu\nu\lambda\rho} = T_1^{\mu\nu} \; T_2^{\lambda\rho}$$

qui sont les composantes contravariantes d'un nouveau tenseur $\widetilde{T}$.

1.1.4 Contraction des indices

L'opération de contraction des indices consiste, aprés avoir choisi deux indices l'un convariant et l'autre contravariant, à les égaler et sommer par rapport à cet indice deux fois répété.

Le produit scalaire est un cas particulier d'une opération de contraction des indices. On considère deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ de composantes respectives A^μ et B_μ.

On forme le produit tensoriel de ces deux vecteurs, on obtient le tenseur $T^\mu_\nu = A^\mu \; B_\nu$. l'application de la règle de contraction des indices, en donnant les mêmes valeurs aux indices μ et ν, puis on effecte la sommation par rapport à μ, on obtient

$$T^\mu_\mu = A^\mu \; B_\mu = \overrightarrow{A} \; . \; \overrightarrow{B}$$

c'est l'expression du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$, qui est une grandeur invariante par changement de base.

1.1.5 Tenseur métrique

On considère un système cartésien orthonormé $\{x^{(0)\mu}\}$ et un système curviligne $\{x^\mu\}$. Soient $\left(A^{(0)\mu}, B^{(0)\mu}\right)$ les composantes contravariantes dans $\{x^{(0)\mu}\}$ de deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et

$\overrightarrow{B}$ respectivement et $\left(A^{\mu}, B^{\mu}\right)$ leur composantes contravariantes dans $\{x^{\mu}\}$ respectivement. D'après (1.19)

$$\begin{aligned} A^{(0)\lambda} &= \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^{\mu}}\, A^{\mu} && (1.25) \\ B^{(0)\lambda} &= \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^{\mu}}\, B^{\mu} && (1.26) \end{aligned}$$

comme $\{x^{(0)\mu}\}$ est un système orthonormée, alors la relation d'orthonormalisation s'écrit

$$\overrightarrow{e}^{(0)}_{\lambda}\ .\ \overrightarrow{e}^{(0)}_{\rho} = \delta_{\lambda\rho} \tag{1.27}$$

le produit scalaire des deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$ est

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B} &= A^{(0)\lambda}\ B^{(0)\rho}\ \overrightarrow{e}^{(0)}_{\lambda}\ .\ \overrightarrow{e}^{(0)}_{\rho} \\ &= A^{(0)\lambda}\ B^{(0)\rho}\ \delta_{\lambda\rho} \\ &= \delta_{\lambda\rho}\ \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^{\mu}}\ A^{\mu}\ \frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^{\nu}}\ B^{\nu} \end{aligned}$$

On introduit la quantité

$$g_{\mu\nu} = \delta_{\lambda\rho}\ \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^{\mu}}\ \frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^{\nu}} \tag{1.28}$$

alors

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B} &= g_{\mu\nu}\ A^{\mu}\ B^{\nu} && (1.29) \\ \text{comme}\ \overrightarrow{A}\ .\ \overrightarrow{B} &= A^{\mu}\ B^{\nu}\ \overrightarrow{e}_{\mu}\ .\ \overrightarrow{e}_{\nu} \\ \text{alors}\ g_{\mu\nu} &= \overrightarrow{e}_{\mu}\ .\ \overrightarrow{e}_{\nu} && (1.30) \end{aligned}$$

$g_{\mu\nu}$ forme les composantes d'un tenseur d'ordre deux, appelé **tenseur métrique**[1].
Un espace est dit "a une métrique" si on possède un moyen de mesurer l'intervalle séparant deux points infiniment voisins. On appelle le vecteur ds un segment de droite orienté séparant deux points sinfiniment voisins

$$ds = dx^{\mu}\overrightarrow{e}_{\mu} \tag{1.31}$$

or

$$\begin{aligned} ds &= \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} && (1.32) \\ \text{alors}\ \overrightarrow{e}_{\mu} &= \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} = \partial_{\mu} s && (1.33) \end{aligned}$$

1. Par analogie, le tenseur métrique associé à une base orthonormée est $\delta_{\mu\nu}$, le symbole de Kroneker. Le tenseur métrique est symétrique, $g_{\mu\nu} = g_{\nu\mu}$, du fait que le produit scalaire de deux vecteurs est commutatif.

1.1.5.1 La forme quadratique fondamentale

L'intervalle qui sépare deux point infiniment voisins dans la base cartésienne $\{x^{(0)\mu}\}$ noté, ds^2, et tel que

$$ds^2 = ds \ . \ ds = g_{\mu\nu} \ dx^\mu \ dx^\nu . \tag{1.34}$$

En effet

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^{(0)1})^2 + (dx^{(0)2})^2 + \cdots + (dx^{(0)n})^2 \\ &= \delta_{\lambda\rho} \ dx^{(0)\lambda} \ dx^{(0)\rho} \\ &= \delta_{\lambda\rho} \ \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^\mu} \ dx^\mu \ \frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^\nu} \ dx^\nu \\ &= \delta_{\lambda\rho} \ \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^\mu} \ \frac{\partial x^{(0)\rho}}{\partial x^\nu} \ dx^\mu \ dx^\nu \\ &= g_{\mu\nu} \ dx^\mu \ dx^\nu \end{aligned}$$

1.1.5.2 Passage entre composantes covariantes et contravariantes

On constate, en tenant compte des relations (1.2), (1.1) et (1.30), que le passage de composantes covaraites aux composantes contravariantes d'un vecteur est donné par

$$A_\mu = g_{\mu\nu} \ A^\nu \tag{1.35}$$

On note G la matrice a composantes les composantes du tenseur métrique, $G = (g_{\mu\nu})$. On défini $g^{\mu\nu}$ les éléments de la matrice inverse, $G^{-1} = (g^{\mu\nu})$, alors $g_{\mu\lambda} \ g^{\lambda\nu} = \delta^\nu_\mu$. De (1.35)

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} \ A_\mu &= g^{\rho\mu} \ g_{\mu\nu} \ A^\nu = \delta^\rho_\nu \ A^\nu = A^\rho \\ A^\rho &= g^{\rho\mu} \ A_\mu \end{aligned} \tag{1.36}$$

On généralise les relations (1.35) et (1.36), on écrit

$$A^{\mu_1 \ldots \mu_p} = g^{\mu_1\nu_1} \cdots g^{\mu_p\nu_p} \ A_{\nu_1 \ldots \nu_p} \tag{1.37}$$

$$A_{\mu_1 \ldots \mu_p} = g_{\mu_1\nu_1} \cdots g_{\mu_p\nu_p} \ A^{\nu_1 \ldots \nu_p} \tag{1.38}$$

1.1.6 Tenseurs particuliers

Mis à part les scalaires, il existe trois tenseurs remarquables

1.1.6.1 Tenseur nul

Un tenseur est dit nul si toutes ses composantes sont nulles.

1.1.6.2 Tenseur de Minkowski

Le tenseur de Minkowski, noté $\eta_{\mu\nu}$ avec $\mu = \overline{0,3}$, $\nu = \overline{0,3}$, est le tenseur métrique d'un espace quadridiemnsionnel décrivant l'espace-temps plat. Il est donné par

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = \begin{cases} -1 \quad \text{si} \quad \mu = \nu = 0 \ , \\ 1 \quad \text{si} \quad \mu = \nu \neq 0 \ , \\ 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq \beta, \end{cases}$$

l'intervalle ds^2 s'écrit alors

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dx^i dx^i \tag{1.39}$$

1.1.6.3 Tenseur de Levi-civita

c'est un tenseur de rang N dans un espace à N dimensions,complètement antisymétrique et qui change de signe pour une permutation de deux indices.
Les composantes covariantes dans un espace à quatre dimensions par exemple sont définies par:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = \epsilon(e_\alpha \ e_\beta \ e_\gamma \ e_\delta) = \begin{cases} 1 \ \ \text{pour une permutation paire de 0.1.2.3,} \\ -1 \ \ \text{pour une permutation impaire de 0.1.2.3,} \\ 0 \ \ \text{autrement.} \end{cases}$$

La composante covariante du tenseur de Levi-civita est de signe opposé à la composante contravariante:

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} \tag{1.40}$$

1.2 Les symbôles de Christoffel

Soient M et M' deux points infiniment voisin qu'on associe les deux repères naturels $(M, \overrightarrow{e}_\mu)$ et $(M', \overrightarrow{e}'_\mu)$.
On écrit

$$\overrightarrow{OM'} = \overline{OM} + d\overline{OM} \tag{1.41}$$

$$(M', \overrightarrow{e}'_\mu) = (M', \overrightarrow{e}_\mu + d\overrightarrow{e}_\mu) \tag{1.42}$$

$$d\overrightarrow{e}_\mu = \frac{\partial \overrightarrow{e}_\mu}{\partial x^\rho} dx^\rho \equiv \partial_\rho \overrightarrow{e}_\mu \ dx^\rho = \Gamma^\nu_{\mu\rho} \ dx^\rho \ \overrightarrow{e}_\nu \tag{1.43}$$

de (1.30) on constate que les symbôles de Christoffel[2] s'écrivent en fonction du tenseur métrique comme suit

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\rho\sigma} \Big(\partial_\mu g_{\sigma\nu} + \partial_\nu g_{\mu\sigma} - \partial_\sigma g_{\mu\nu} \Big) \tag{1.44}$$

En fonction des coordonnées, ils s'écrivent[3]

$$\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{(0)\lambda}} \frac{\partial x^{(0)\lambda}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \tag{1.45}$$

1.3 La dérivée covariante

Soit un tenseur défini en tout point d'un espace à N dimension muni d'une base $\{\overrightarrow{e}_\mu\}$. Si l'espace est plat, la direction des vecteurs de base est toujours la même et l'opération de dérivation n'affecte pas la direction de ces vecteurs. Par contre si l'espace est courbe, la direction des vecteurs $\overrightarrow{e}_\mu$ change quand on passe d'un point x^μ à un point infiniment voisin $x^\mu + dx^\mu$, une telle dérivation dite dérivation covariante. Donc la dérivation d'un tenseur affecte la direction des vecteurs de base et fait que la dérivée d'un vecteur n'est plus un vecteur.

La dérivée covariante d'un vecteur contravariant A^μ est donnée par

$$\begin{aligned} DA^\mu &= D_\nu \; A^\mu \; dx^\nu \\ &\equiv A^\mu_{\;;\nu} \; dx^\nu \\ &= (\partial_\nu A^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \; A^\rho) \; dx^\nu \\ DA^\mu &= (A^\mu_{\;,\nu} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \; A^\rho) \; dx^\nu \end{aligned} \tag{1.46}$$

La dérivée covariante d'un vecteur covariant A_μ est donnée par

$$\begin{aligned} DA_\mu &= D_\nu \; A_\mu \; dx^\nu \\ &= (\partial_\nu A_\mu - \Gamma^\rho_{\nu\mu} \; A_\rho) \; dx^\nu \end{aligned} \tag{1.47}$$

La dérivée covariante d'un tenseur cotravariant $T^{\mu\nu}$ est donnée par

$$\begin{aligned} DT^{\mu\nu} &= D_\rho \; T^{\mu\nu} \; dx^\rho \\ &= (\partial_\rho T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} \; T^{\lambda\nu} + \Gamma^\nu_{\rho\lambda} \; T^{\nu\lambda}) \; dx^\rho \end{aligned} \tag{1.48}$$

2. Les symbôles de Christoffel ne sont pas des tenseurs car ils n'obéissent pas à la loi de transformation tensorielle, mais on définit les symbôles de Christoffel de 1[ère] espèce ,$\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$ tel que $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = g^{\rho\sigma}\Gamma_{\mu\nu,\sigma}$.

3. Les symbôles de Christoffel sont symétriques par rapport aux indices du bas,$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$.

La dérivée covariante d'un tenseur covariant $T_{\mu\nu}$ est donnée par

$$\begin{aligned} DT_{\mu\nu} &= D_\rho \, T_{\mu\nu} \, dx^\rho \\ &= (\partial_\rho T_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \, T_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\rho\nu} \, T_{\mu\lambda}) \, dx^\rho \end{aligned} \tag{1.49}$$

La dérivée covariante d'un tenseur mixte T^ν_μ est donnée par

$$\begin{aligned} DT^\nu_\mu &= D_\rho \, T^\nu_\mu \, dx^\rho \\ &= (\partial_\rho T^\nu_\mu + \Gamma^\nu_{\rho\lambda} \, T^\lambda_\mu - \Gamma^\lambda_{\rho\mu} \, T^\nu_\lambda) \, dx^\rho \end{aligned} \tag{1.50}$$

L'application de la dérivée covarainte au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ donne le théorème de Ricci

$$D_\rho \, g_{\mu\nu} = 0 \tag{1.51}$$

$$D_\rho \, g^{\mu\nu} = 0 \tag{1.52}$$

1.4 Opérateurs différentiels

1.4.1 Le gradiant

Le gradiant, ∇_μ, d'un scalaire S est un vecteur donné par

$$\nabla_\mu S = S_{\,;\,\mu} = \partial_\mu \, S = S_{\,,\,\mu} \tag{1.53}$$

1.4.2 Le rotationnel

Le rotationnel d'un vecteur est un tenseur donné par

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{rot} V)_{\mu\nu} &= \nabla_\mu V_\nu - \nabla_\nu V_\mu \\ &= V_{\nu\,;\,\mu} - V_{\mu\,;\,\nu} \\ &= \partial_\mu V_\nu - \partial_\nu V_\mu \end{aligned} \tag{1.54}$$

1.4.3 La divergence

1.4.3.1 La divergence d'un vecteur contravariant $\nabla_\mu V^\mu$

La divergence est l'application du gradiant au vecteur, à savoir

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\, V^\mu &= V^\mu{}_{;\,\mu} = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\nu}\, V^\nu \\ &= \partial_\mu V^\mu + \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\mu}\Big)\, V^\mu \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial}{\partial x^\mu}\,(\sqrt{g}\; V^\mu) = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu\,(\sqrt{g}\; V^\mu)\end{aligned} \tag{1.55}$$

1.4.3.2 La divergence d'un vecteur covariant $\nabla_\mu\, V_\mu$

De même

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\, V_\mu &= V_{\mu\,;\,\mu} = \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\mu} - \Gamma^\mu_{\mu\nu}\, V_\nu \\ &= \partial_\mu V_\mu - \Big(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\mu}\Big)\, V_\mu\end{aligned} \tag{1.56}$$

1.4.3.3 La divergence d'un tenseur

De façon analogue

$$\begin{aligned}\nabla_\mu\, T^{\mu\nu} &= T^{\mu\nu}_{\;;\mu} = \frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial x^\mu} + \Gamma^\mu_{\mu\rho}\, T^{\rho\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\, T^{\mu\rho} \\ &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + (\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}\sqrt{g})\; T^{\mu\nu} + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\, T^{\mu\rho} \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu(\sqrt{g}\; T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\mu\rho}\, T^{\mu\rho}\end{aligned} \tag{1.57}$$

Du fait que les symbôles de Christoffel sont symétriques, on écrit

$$\nabla_\mu\, T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu\Big(\sqrt{g}\; T^{\mu\nu}\Big) + \frac{1}{2}\Gamma^\nu_{\rho\lambda}\,(T^{\rho\lambda} + T^{\lambda\rho}) \tag{1.58}$$

Pour un tenseur antisymétrique, $A^{\mu\nu} = -A^{\nu\mu}$, le dernier terme s'annule, on écrit

$$\nabla_\mu\, A^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu\Big(\sqrt{g}\; A^{\mu\nu}\Big) \tag{1.59}$$

Pour un tenseur mixte T^μ_ν

$$\nabla_\mu\, T^\mu_\nu = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_\mu\Big(\sqrt{g}\; T^\mu_\nu\Big) - T^\mu_\lambda\Gamma^\lambda_\mu \tag{1.60}$$

1.4.4 D'alembertien

Si la composante A_μ d'un tenseur est la dérivée d'une fonction ϕ scalaire

$$A_\mu = \partial_\mu \phi \tag{1.61}$$

L'action du tenseur métrique donne sa composante contravariante

$$A^\nu = g^{\mu\nu}\ A_\mu = g^{\mu\nu}\ \partial_\mu \phi = \partial^\nu \phi \tag{1.62}$$

On définit le D'Alembertien par

$$\nabla_\mu\ \nabla^\mu \phi = \nabla_\mu\ \partial^\mu \phi \tag{1.63}$$

car $\nabla^\mu \phi = \partial^\mu \phi$

$$\nabla_\mu\ \nabla^\mu \phi = \nabla_\mu\ \partial^\mu \phi = \frac{1}{\sqrt{g}}\ \partial_\mu(\sqrt{g}\ g^{\mu\nu}\ \partial_\nu \phi) = \Box\ \phi \tag{1.64}$$

Une fonction ϕ est dit harmonique si $\Box \phi = 0$.

1.5 Tenseur de courbure

1.5.1 Tenseur de Riemann-Christoffel

Il est définit par

$$R_{\mu\ \ \rho\lambda}^{\ \nu} A_\nu = \nabla_\lambda \nabla_\rho A_\mu - \nabla_\rho \nabla_\lambda A_\mu \tag{1.65}$$

ce qui donné l'expression suivante

$$R_{\rho\ \ \sigma\lambda}^{\ \mu} = \partial_\lambda \Gamma^\mu_{\rho\sigma} - \partial_\sigma \Gamma^\mu_{\rho\lambda} + \Gamma^\tau_{\rho\sigma}\Gamma^\mu_{\tau\lambda} - \Gamma^\tau_{\rho\lambda}\Gamma^\mu_{\tau\sigma} \tag{1.66}$$

On définit les composantes covaraintes $R_{\rho\mu\ \ \sigma\lambda} = g_{\tau\mu} R_{\rho\ \ \lambda\sigma}^{\ \tau}$

Propriétés du tenseur de courbure

1. Symétrique: $R_{\rho\mu\ \ \lambda\sigma} = R_{\lambda\sigma\ \ \rho\mu}$
2. Antisymétrique: $R_{\rho\mu\ \ \lambda\sigma} = -R_{\mu\rho\ \ \lambda\sigma} = -R_{\rho\mu\ \ \sigma\lambda} = R_{\mu\rho\ \ \sigma\lambda}$
3. Cyclicité: $R_{\rho\mu\ \ \lambda\sigma} + R_{\rho\sigma\ \ \mu\lambda}^{\ \ \mu} + R_{\rho\lambda\ \ \sigma\mu} = 0$

1.5.2 Tenseur de Ricci et courbure riemanienne scalaire

Tenseur de Ricci

C'est un tenseur symétrique donné par

$$R_{\mu\nu} = R_{\mu\ \ \rho\nu}^{\rho} = \partial_\rho \Gamma^\rho_{\mu\nu} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\rho_{\tau\rho}\Gamma^\tau_{\mu\nu} - \Gamma^\tau_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\tau\nu} \tag{1.67}$$

La courbure riemanienne scalaire est

$$R = R_\mu^{\ \mu} = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} \tag{1.68}$$

CHAPITRE 2

Quelques notions de cosmologie

Dans ce chapitre, on introduit brièvement quelques relations utiles pour l'étude de l'expansion de l'Univers, et plus généralement en cosmologie [1–3].

2.1 Le modèle standard cosmologique

Le modèle standard de la cosmologie, dit aussi modèle standard de Friedmann-Robertson-Welker (FRW) ou modèle du Big-Bang utliise **le Principe Cosmologique** qui stipule que l'Univers doit être isotrope (identique suivant n'importe quelle direction) et homogène (la densité moyenne est la même en tous points de l'espace). Il est basé sur l'utilisation des équations d'Einstein avec une constante cosmologique Λ nulle. Il décrit l'Univers comme un fluide parfait [1] constituant un Univers homogène et isotrope dans un système de coor-

1. Le fluide cosmique peut être assimilié par analogie à la thermodynamique à un fluide parfait, décrit entièrement par sa densité ρ et sa pression p.
L'hypothèse du fluide parfait sur le contenu matériel de l'Univers est dû pratiquement à ce que les dimensions des particules qui le constituent (les galaxies, amas de galaxies, ...) sont négligeables devant les distances qui séparent ces particules.

données comobiles[2].

L'évolution de l'Univers est décrite par les équations de Friedmann. La solution de ces dernières suggère que l'Univers a commencé par un état très chaud et très dense qui n'a cessé de s'expandre depuis le big bang.

2.1.1 La métrique de Friedmann-Robertson-Walker

Le principe cosmologique permet d'introduire une métrique découlant de la relativité générale, la métrique de FRW

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\Big[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\ d\varphi^2)\Big] \tag{2.2}$$

k est un entier , dit paramètre de courbure de l'Univers, exprimant la courbure spatiale avec

- k= +1 correspond au modèle isotrope fermé décrivant un espace courbe fermé de géométrie sphérique et de volume fini.
- k= 0 correspond au modèle isotrope euclidien décrivant un espace plat infini.
- k= -1 correspond au modèle isotrope ouvert décrivant un espace courbe ouvert de géométrie hyperbolique et de volume infini.

2.1.2 Les équations de Friedmann

La métrique de Friedmann-Robertson-Walker décrit la géométrie la plus simple qui soit compatible avec un Univers homogène et isotrope. L'évolution temporelle de l'espace est décrite par un paramètre unique $a(t)$, dit facteur d'échelle, qui varie au cours du temps

2. La matière emplissant l'Univers sert souvent en cosmologie de système de référence. En effet, pour étudier la métrique spatio-temporelle isotrope, nous allons nous placer dans un système de référence qui, en chaque point de l'espace, se meut avec la matière. Ce système de référence est dit comobile. Dans ce système, la matière est immobile et la distance comobile entre deux galaxies quelconques est donc constante.
On relie la coordonnée radiale comobile r à la coordonnée radiale physique ρ

$$\rho = ar \tag{2.1}$$

selon les équations de Friedmann qui s'écrivent sous la forme

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G\rho_m}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.3}$$

où G désigne la constante de la gravitation universelle, ρ_m la densité de masse moyenne dans l'Univers et Λ la constante cosmologique.
On peut réécrire l'équation (2.3) en utilisant le paramètre de Hubble H, tel que $H = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)$

$$H^2 = \frac{8\pi G\rho_m}{3} - \frac{k}{a^2} + \frac{\Lambda}{3} \tag{2.4}$$

Cette équation joue un rôle très important en cosmologie. Elle permet de déterminer l'âge et la taille de l'Univers si l'on connait les paramètres qui interviennent dans l'équation. En divisant les deux membres par H^2, on trouve

$$1 = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2} - \frac{k}{a^2H^2} + \frac{\Lambda}{3H^2} \tag{2.5}$$

Les termes de droite ont une signéfication précise en cosmologie. On note

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m}{3H^2} \quad \text{densité de masse} \tag{2.6}$$

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2H^2} \quad \text{courbure} \tag{2.7}$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{\Lambda}{3H^2} \quad \text{densité d'énergie du vide} \tag{2.8}$$

2.1.3 Équation de conservation de l'énergie

L'hypothèse d'homogénéité et d'isotropie de l'Univers restreint le contenu du tenseur énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$ à sa forme diagonale:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

ε est la densité d'énergie[3] de l'Univers et p est la densité de pression associée. À partir les lois de la thermodynamique, l'équation de conservation de l'énergie de l'Univers s'écrit

$$\dot{\varepsilon} = -3\frac{\dot{a}}{a}(\varepsilon + p) \tag{2.10}$$

3. La densité d'énergie $\varepsilon = c^2\rho_m$, où ρ_m est la densité de matière.

2.1.4 Équation d'état

Pour résoudre les équations (2.3) et (2.10), il manque un paramètre qui est la pression p. Ce paramètre est fourni par l'équation d'état $p = p(\varepsilon)$ de la matière. Considérons séparément trois cas:

1. L'Univers est constitué de matière classique, pour laquelle $\frac{1}{2}mv^2 \ll mc^2$. Alors

$$p = 0 \tag{2.11}$$

2. L'Univers est constitué de matière relativiste, pour laquelle v est proche de c. Alors

$$p = \frac{1}{3}\varepsilon \tag{2.12}$$

3. L'Univers est dominé par une sorte d'énergie du vide, pour laquelle

$$p = -\varepsilon \tag{2.13}$$

2.1.5 Densité d'énergie

La densité d'énergie dans l'Univers est une combinaison de ces trois composantes:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{matière cl}} + \varepsilon_{\text{matière rel}} + \varepsilon_{\text{vide}} \tag{2.14}$$

Ces dernières interviennent différemment dans la densité d'érengie totale, avec une importance fonction du temps. Le tableau suivant reprend les caractéristiques fondamentales de la dynamique de l'Univers plan lorsque celui-ci est dominé par une des trois composantes d'énergie.

ε	$\dot{a}$	$\ddot{a}$	$H = \frac{\dot{a}}{a}$	Conclusion
$\varepsilon_{\text{matière cl}}$	> 0	< 0	> 0	Expansion avec décélération
$\varepsilon_{\text{matière rel}}$	> 0	< 0	> 0	Expansion avec décélération
$\varepsilon_{\text{matière vide}}$	> 0	> 0	> 0	Expansion avec accélération

2.1.6 Densité critique

Comme vu précédement, la dynamique de l'Univers est régie par sa courbure, et onc par la variable discrète k. Il est également possible de décrire l'Univers en terme de sa densité, en introduisant un nouveau paramètre.

La densité critique est définie comme la densité d'un Univers isotrope euclidien. Celle-ci est directement donnée par l'équation de Friedmann-Lemaître (2.3)

$$\varepsilon_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \tag{2.15}$$

Ce rapport appelé paramètre de densité, qui est utilisé

$$\Omega(\tau) \equiv \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \tag{2.16}$$

Il est possible de réécrire l'équation (2.3) sous une forme où la relation entre densité et courbure est évidente

$$\Omega - 1 = \frac{k}{a^2 H^2} \tag{2.17}$$

- Le modèle isotrope fermé ($k > 0$) >correspond à un Univers où $\Omega > 1$.
- Le modèle isotrope ouvert ($k < 0$) >correspond à un Univers où $\Omega < 1$.
- Le modèle isotrope euclidien ($k = 0$) >correspond à un Univers où $\Omega = 1$.

Alors ce paramètre Ω et la courbure détermine l'évolution future de l'Univers.

2.2 L'Univers inflationnaire

2.2.1 Problèmes avec le Big Bang

Dans les année 1980, le modèle du Big Bang était devenu le modèle favori pour décrire l'Univers. Toutefois, il y avait au moins trois difficultés que ce modèle ne pouvait pas expliquer:

1. La platitude de l'Univers: D'après la théorie de la relativité générale, l'espace-temps doit être courbé par la masse qu'il contient. Dans les années 1980, il est apparu que la densité de l'Univers était très proche de la valeur critique, pour laquelle on a un Univers plat.
2. Problème de l'horizon: Si l'Univers est agé de 13,7 milliards d'années, alors dans des directions opposées on observe des régions qui sont séparées de 27 milliards année-lumière[4]. Comment ces régions peuvent-elles avoir des rayonnements de fond aussi similaires? La température de l'Univers correspond à un rayonnement de fond de

4. L'année lumière est la distance parcourue par la lumière dans le vide en une année julienne de 365,25 jours (31 557 600 secondes), à la vitesse de 299 792 458 m/s, en dehors de tout champ gravitationnel ou magnétique, $1\,al = 9,460730472580800.10^{15}\,m$

$3K$, dans toutes les directions que l'on observe. Comment deux régions peuven-elles se trouver à $10^{19}\,m$ l'une de l'autre, incapables de communiquer l'une avec l'autre, et avoir des températures si similaires?

3. Pourquoi n'a-t-on pas détecté de monopôles magnétiques? Ces monopôles rendent les équations de l'électomagnétisme de Maxwelle plus symétriques et ils interviennent naturellement dans plusieurs autres théories physiques.

2.2.2 L'inflation

Ces diffécultés ont été considérablement allégées en 1981, lorsqu'Alan Guth suggéra une variaton du modèle standard du Big Bang. Il proposa que pendant une periode comprise entre $10^{-35}\,s$ et $10^{-31}\,s$, la taille de l'Univers a subitement augmenté d'un facteur 10^{50}. Cette période est appelée l'époque de **l'inflation**. Elle pourrait être due à la séparation des forces nucléaires et électrofaibles. Après la période inflationnaire, l'Univers a repris son évolution selon le modèle standard du Big Bang.

2.3 Couplage non minimal

2.3.1 Principe de covariance

En n'importe quel point d'espace-temps dans un champ graviationnel, il est possible de choisir un système de référence inertiel localement plat.

Pour d'écrire l'effet de la gravitation en un point de l'espace-temps, on commence donc par définir un système localement plat en ce point. On exprime les lois de la physique sous forme tensorielle et on utilise le principe de correspondance, en relativité générale, on l'appelle **principe de covariance**, qui consiste à remplacer la métrique de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$ par la métrique riemannienne $g_{\mu\nu}$ et toutes les dérivées ordinaires ∂_μ par les dérivée covariantes ∇_μ et le lagrangien L par la densité lagrangienne $\mathcal{L} = \sqrt{|g|}L$.

2.3.2 champs scalaire

Les champs scalaires sont devenus des objets importants dans la cosmologie spéculative. Pour l'Univers primordial, les champs scalaires sont supposés dominer l'Univers pendant l'époque inflationnaire.

2.3.3 Couplage minimal

Lorsque l'effet du champ gravitationnel est obtenu par la simple application du principe de covariance, on dit qu'on utilise le **couplage minimal** du champ gravitationnel avec le champ considéré.

2.3.3.1 Exemple

Soit un champ scalaire réel $\phi(x)$ de masse m décrit par une densité lagrangienne

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\left[\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - (m^2 + \xi R)\phi^2\right] \tag{2.18}$$

Cette dernière est la densité scalaire habituelle d'un champ scalaire de masse m avec un terme cinétique $\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi$ et un terme potentiel $m^2\phi$. L'insertion du champ gravitationnel est fait par le principe de covariance.

Le couplage entre le champ scalaire ϕ et le champ gravitationnel, présenté par le tenseur $g^{\mu\nu}$ et le tenseur de courbure de l'espace-temps via la courbure scalaire R, est représenté explicitement par le terme $\xi R\phi^2$.

Le équation du champ scalaire est obtenue par variation de l'action hamiltonienne $S = \int \mathcal{L}(x)d^4x$ par rapport au champ ϕ. elle s'écrit

$$(\Box + m^2 + \xi R)\phi = 0 \tag{2.19}$$

L'équation (2.20) pour $\xi = 0$ conduit à l'équation de Klein-Gordon,

$$(\Box + m^2)\phi = 0, \tag{2.20}$$

d'un champ scalaire de masse m.

2.3.4 Couplage non minimal

Le couplage non minimal du champ scalaire avec le champ gravitationel est obtenu du coupalge minimal en ajoutant à la densité lagrangienne du champ gravitationnel une densité lagrangienne dépendante du champ scalaire et de la courbure de l'espace-temps.

CHAPITRE 3

La cosmologie avec couplage dérivatif non minimal

Dans ce chapitre, on se propose de faire une application du couplage dérivatif non-minimal du champ scalair ϕ et la courbure de l'espace-temps R du type $k_1 R\phi_\mu\phi^\mu$ et $k_2 R_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$ avec k_1 et k_2 sont deux paramètres de couplage de dimension d'une longueur au carré.

En général, Les équations du champ de cette théorie contiennent des dérivées troisième du champ gravitationnel $g_{\mu\nu}$ et du champ scalaire ϕ. Cependant, dans le cas $-2k_1 = k_2 \equiv k$ les termes de couplage se réduisent au terme $kG_{\mu\nu}\phi^\mu\phi^\nu$, avec $G_{\mu\nu}$ est le tenseur d'Einstein, et les équations des champs deviennent quadratiques. On étudie ici le modèle plat de Friedmann-Robertson-walker avec le facteur d'échelle $a(t)$ et puis on dérive les solutions cosmologiques. Tout d'abord en dérive les équations d'Einstein [4–8, 11–14].

3.1 Les équations d'Einstein

Les équations d'Einstein s'obtiennet par l'application du principe de moindre action[1] à l'action d'Hilbert-Einstein, en dérivant par rapport au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$. Elles

1. Le principe de moindre action s'énonce ainsi: "Parmi toutes les trajectoires admissibles faisant passer le système d'une position P_1 à l'instant t_1 à une position P_2 à l'instant t_2, une trajectoire naturelle correspond à une valeur stationnaaire de l'action". Cela se traduit mathématiquement comme suit

$$\delta S = 0$$

s'écrivent

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\ R = 0 \tag{3.1}$$

à savoir l'action d'Hilbert-Einstien est [2]

$$S_g = \frac{1}{2k} \int d^4x\ \sqrt{|g|}\ R \tag{3.2}$$

d'où

$$\frac{\delta S_g}{\delta g_{\mu\nu}} = G_{\mu\nu} = 0 \tag{3.3}$$

$R_{\mu\nu}$ est le tenseur de Ricci et R est La courbure scalaire [3].

En effet la variation de S_g est

$$\delta S_g = \frac{1}{2k} \int d^4x \left[(\delta\sqrt{|g|})\ R + \sqrt{|g|}\ (\delta R) \right] \tag{3.10}$$

On calcul les variations qui apparaissent dans le second membre séparément.

1. La variation de $\sqrt{|g|}$

$$\delta\sqrt{|g|} \quad = \quad \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\delta|g|$$

Si on ajoute au lagrangien du système un terme sous forme d'une divergence totale ou si on la multiplie par une constante, les équations de mouvement ne changent pas.

2. Lors du passage à la limite du champ faible, la constante k vaut en unités naturelles, $c = \hbar = 1$, $8\pi G$ et $g = det(g_{\mu\nu})$.

3.

L'élément de volume quadri-dimensionnel $\quad d^4x = dtdxdydz \quad$ (3.4)

représentant l'espace-temps (3.5)

La courbure scalaire $\quad R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta} \quad$ (3.6)

Tenseur de Ricci $\quad R_{\alpha\beta} = R^{\mu}_{\alpha\ \mu\beta} \quad$ (3.7)

Tenseur de Riemann-Christoffel $\quad R^{\nu}_{\mu\ \alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\nu_{\mu\beta} - \partial_\beta\Gamma^\nu_{\mu\alpha} + \Gamma^\nu_{\lambda\alpha}\Gamma^\lambda_{\mu\beta} - \Gamma^\nu_{\lambda\beta}\Gamma^\lambda_{\mu\alpha} \quad$ (3.8)

Symbôles de Christoffel $\quad \Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta}(\partial_\mu g_{\beta\nu} + \partial_\nu g_{\mu\beta} - \partial_\beta g_{\mu\nu}) \quad$ (3.9)

On a pour n'importe qu'elle matrice M qu'on applique pour la matrice $g_{\mu\nu}$

$$\begin{aligned}
\delta(\ln|detM|) &= Tr(M^{-1}\delta M) \\
\delta(\ln|g|) &= \frac{1}{|g|}\delta|g| \\
\delta(\ln|g|) &= Tr(g^{\mu\nu}\delta g_{\nu\lambda}) = g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
\delta|g| &= |g|g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
\delta\sqrt{|g|} &= \frac{1}{2\sqrt{|g|}}|g|g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Or, du fait que $g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$, alors

$$\begin{aligned}
\delta g^{\mu\lambda}g_{\lambda\nu} + g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= 0 \\
g^{\mu\lambda}\delta g_{\lambda\nu} &= -g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} \\
g^{\mu\lambda}g_{\mu\rho}\delta g_{\lambda\nu} &= -g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} \\
\delta g_{\rho\nu} &= -g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}\delta g^{\mu\lambda} \\
\delta g_{\mu\nu} &= -g_{\mu\rho}g_{\lambda\nu}\delta g^{\lambda\rho}
\end{aligned} \tag{3.12}$$

Donc

$$\delta\sqrt{|g|} = -\frac{1}{2}\sqrt{|g|}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \tag{3.13}$$

2. La variation de R

$$\begin{aligned}
\delta R &= \delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}) \\
&= (\delta g^{\mu\nu})R_{\mu\nu} + g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})
\end{aligned} \tag{3.14}$$

À partir de (3.7) et (3.8), on aura

$$\delta R_{\mu\nu} = \partial_\rho\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} - \partial_\nu\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} + (\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\rho})\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\sigma\rho}(\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\nu}) - (\delta\Gamma^{\sigma}_{\mu\rho})\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu} - \Gamma^{\sigma}_{\mu\rho}(\delta\Gamma^{\rho}_{\sigma\nu}) \tag{3.15}$$

Puisque les $\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ sont des éléments d'un tenseur, contrairement aux $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, on peut alors calculer leurs dérivées covariantes

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} &= \partial_\rho\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\nu} + \Gamma^{\rho}_{\rho\eta}\delta\Gamma^{\eta}_{\mu\nu} - \Gamma^{\eta}_{\rho\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\eta\nu} - \Gamma^{\eta}_{\rho\nu}\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\eta} \\
\nabla_\nu\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} &= \partial_\nu\delta\Gamma^{\rho}_{\mu\rho} - \Gamma^{\eta}_{\nu\mu}\delta\Gamma^{\rho}_{\eta\rho}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

d'où on déduit

$$\begin{aligned}
\partial_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} &= \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\rho\eta}\delta\Gamma^\eta_{\mu\nu} + \Gamma^\eta_{\rho\mu}\delta\Gamma^\rho_{\eta\nu} + \Gamma^\eta_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\eta} && (3.17)\\
\partial_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} &= \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} + \Gamma^\eta_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho_{\eta\rho}. && (3.18)
\end{aligned}$$

En portant (3.17) et (3.18) dans (3.15), on obtient

$$\begin{aligned}
\delta R_{\mu\nu} &= \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\rho\eta}\delta\Gamma^\eta_{\mu\nu} + \Gamma^\eta_{\rho\mu}\delta\Gamma^\rho_{\eta\nu} + \Gamma^\eta_{\rho\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\eta} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho} - \Gamma^\eta_{\nu\mu}\delta\Gamma^\rho_{\eta\rho} + \delta\Gamma^\rho_{\sigma\rho}\Gamma^\sigma_{\mu\nu}\\
&+ \Gamma^\rho_{\sigma\rho}\delta\Gamma^\sigma_{\mu\nu} - \delta\Gamma^\sigma_{\mu\rho}\Gamma^\rho_{\sigma\nu} - \Gamma^\sigma_{\mu\rho}\delta\Gamma^\rho_{\sigma\nu}.
\end{aligned}$$

Après simplification, on a

$$\delta R_{\mu\nu} = \nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}. \tag{3.19}$$

En tenant compte aussi de ces deux relations

$$\begin{aligned}
\nabla_\rho (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) &= g^{\mu\nu}\nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} && (3.20)\\
\nabla_\nu (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}) &= g^{\mu\nu}\nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})d^4x &= \int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\Big[\nabla_\rho \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu} - \nabla_\nu \delta\Gamma^\rho_{\mu\rho}\Big]d^4x\\
&= \int \Big[\sqrt{|g|}\nabla_\rho (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \sqrt{|g|}\nabla_\nu (g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})\Big]d^4x && (3.21)
\end{aligned}$$

Comme chaque divergence d'un quadrivecteur s'écrit aussi

$$\nabla_\mu A^\mu = \frac{1}{\sqrt{|g|}}\partial_\mu(\sqrt{|g|}A^\mu) \tag{3.22}$$

alors l'équation (3.21) s'annule car les dérivées de $\Gamma^\rho_{\mu\rho}$ sont nulles sur la frontière

$$\int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})d^4x = \int \Big[\partial_\rho(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}) - \partial_\nu(\sqrt{|g|}g^{\mu\nu}\delta\Gamma^\rho_{\mu\rho})\Big]d^4x = 0$$

on aura

$$\int \sqrt{|g|}g^{\mu\nu}(\delta R_{\mu\nu})d^4x = 0 \tag{3.23}$$

On tient compte des équations (3.13), (3.14) et (3.23), l'équation (3.10) devient

$$\delta S_g = \frac{1}{2k}\int d^4x\ \sqrt{|g|}\ [-\frac{1}{2}\ g_{\mu\nu}\ R + R_{\mu\nu}]\ \delta g^{\mu\nu} \tag{3.24}$$

Comme les $\delta g^{\mu\nu}$ sont indépendants, on déduit les équations d'Einstein données par l'équation (3.1).

3.2 Couplage dérivatif non minimal

On ajouter le terme cinétique du champ scalaire et des termes de couplage entre le champ scalaire ϕ, la courbure scalaire R et le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu}$ de type $k_1\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}R$ et $k_2R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}$ dans l'action d'Hilbert-d'Einstein.

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|}\ \Big[\frac{1}{2k}\ R + \phi^{,\ \mu}\phi_{,\ \mu} + k_1\ \phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu}\ R + k_2\ R_{\mu\nu}\ \phi^{,\ \mu}\ \phi^{,\ \nu}\Big] \tag{3.25}$$

telque k_1 et k_2 sont deux paramètres de cuplage avec $[k_1] = [k_2] = L^2 = cst$.

3.2.1 Equation du champ gravitationnel

La variation de l'action donnée dans l'équation (3.82) par rapport au tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ donne l'équation du champ gravitationnel, on note

$$\delta S = \delta\Big[\int d^4x \sqrt{|g|}\ \Big(\frac{1}{2k}\ R + \phi^{,\ \mu}\phi_{,\ \mu}k_1\ \phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu}\ R + k_2\ R_{\mu\nu}\ \phi^{,\ \mu}\ \phi^{,\ \nu}\Big)\Big] \tag{3.26}$$

$$\delta S = \delta S_g + \delta S_\phi + \delta S_{k_1} + \delta S_{k_2} \tag{3.27}$$

Le terme δS_g donne le tenseur d'Einstein $G_{\mu\nu}$.

La variation du terme cinétique S_ϕ

La variation de ce terme par rapport au tenseur $g_{\mu\nu}$ sera

$$\begin{aligned}
\delta S_\phi &= \delta\Big[\int d^4x\ \sqrt{|g|}\ \phi_{,\ \mu}\ \phi_{,\ \nu}\ g^{\mu\nu}\Big] \\
&= \int d^4x\ \Big[\delta(\sqrt{|g|})\ \phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu} + \sqrt{|g|}\ \phi_{,\ \mu}\ \phi_{,\ \nu}\ \delta g^{\mu\nu}\Big] \\
&= \int d^4x \sqrt{|g|}\ \Big[-\frac{1}{2}\ \phi_{,\ \alpha}\ \phi^{,\ \alpha}g_{\mu\nu} + \phi_{,\ \mu}\ \phi_{,\ \nu}\Big]\ \delta g^{\mu\nu} \\
&= \int d^4x \sqrt{|g|}\ \Big[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} + \phi_{,\ \mu}\ \phi_{,\ \nu}\Big]\ \delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.28}$$

La variation du premier terme de couplage S_{k_1}

La variation du premier terme de couplage S_{k_1} sera

$$\begin{aligned}
\delta S_{k_1} &= k_1\ \delta\Big[\int d^4x\ \sqrt{|g|}\ \phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu}\ R\Big] \\
&= k_1 \int d^4x\ \Big[(\delta\sqrt{|g|})\ \phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu}R + \sqrt{|g|}\ \delta(\phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu})R + \sqrt{|g|}\ \phi_{,\ \mu}\ \phi^{,\ \mu}\delta R\Big]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

On calcule ces termes séparément

1.

$$\int d^4x(\delta\sqrt{|g|})\phi_{,\,\mu}\phi^{,\,\mu}R \;=\; -\frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu}R\delta g^{\mu\nu} \tag{3.30}$$

2.

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{|g|}\delta(\phi_{,\,\mu}\phi^{,\,\mu})R \;&=\; \int d^4x\sqrt{|g|}\delta(g^{\mu\nu}\phi_{,\,\mu}\phi_{,\,\nu})R\\ &=\; \int d^4x\sqrt{|g|}\phi_{,\,\mu}\phi_{,\,\nu}R\delta g^{\mu\nu}\end{aligned} \tag{3.31}$$

3.

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{|g|}\phi_{,\,\mu}\phi^{,\,\mu}\delta R \;&=\; \int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2\delta(g^{\mu\nu}R_{\mu\nu})\\ &=\; \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[(\nabla\phi)^2R_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu}+(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu}\Big]\end{aligned} \tag{3.32}$$

En tenant compte de la relation de $\delta R_{\mu\nu}$ avec le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$,

$$\delta R_{\mu\nu}=\frac{1}{2}g^{\lambda\beta}\left[\delta g_{\mu\lambda\,;\,\beta\nu}+\delta g_{\nu\lambda\,;\,\beta\mu}-\delta g_{\mu\nu\,;\,\lambda\beta}-\delta g_{\lambda\beta\,;\,\mu\nu}\right] \tag{3.33}$$

le deuxième termes de l'équation (3.32) sera

$$\begin{aligned}\int d^4x\,\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \;&=\; \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big[\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}+\delta g_{\nu\lambda;\beta\mu}\\ &\qquad -\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta}-\delta g_{\lambda\beta;\mu\nu}\Big]\\ &=\; \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}\Big((\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}\\ &\qquad +(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\nu\lambda;\beta\mu}\\ &\qquad -(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta}\\ &\qquad -(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\lambda\beta;\mu\nu}\Big)\end{aligned} \tag{3.34}$$

On change les indices muets de 2$^{\text{ème}}$ et 4$^{\text{ème}}$ termes, ($\nu \longleftrightarrow \mu$) et ($\mu\nu \longleftrightarrow \lambda\beta$) respectivement, alors

$$\begin{aligned}\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} \;&=\; \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}\Big((\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}+(\nabla\phi)^2g^{\nu\mu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}\\ &\qquad -(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta}-(\nabla\phi)^2g^{\lambda\beta}g^{\mu\nu}\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta}\Big)\\ &=\; \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}}_{(I)}\\ &\qquad -\underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta}}_{(II)}\end{aligned} \tag{3.35}$$

De même, on calcule ces deux termes séparément

1.

$$
\begin{aligned}
(I) &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\nabla_\nu\delta g_{\mu\lambda;\beta}\Big) \\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\delta g_{\mu\lambda;\beta} + \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta}\Big)}_{\int d^4x\partial_\nu\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta}\Big)=0} \\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\nabla_\beta\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\nabla_\beta\Big(\nabla_\nu((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta})\Big)\Big]\delta g_{\mu\lambda} - \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta\Big[\nabla_\nu\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\delta g_{\mu\lambda}\Big]}_{\int d^4x\partial_\beta\Big[\nabla_\nu\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\delta g_{\mu\lambda}\Big]=0} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\beta\nabla_\nu(\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}]\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\beta\nabla_\rho(\nabla\phi)^2 g^{\mu\rho}g^{\lambda\beta}]\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\beta\nabla_\rho(\nabla\phi)^2 g^{\mu\rho}g^{\nu\beta}]\delta g_{\mu\nu} \\
(I) &= -\int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2]\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.36}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
(II) &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu;\lambda}\Big)\\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\delta g_{\mu\nu;\lambda} + \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda}\Big)}_{\int d^4x\sqrt{|g|}\partial_\beta\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda}\Big)=0}\\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta\Big((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu}\\
&= \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda\Big[\Big(\nabla_\beta((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta})\Big)\delta g_{\mu\nu}\Big]}_{\int d^4x\sqrt{|g|}\partial_\lambda\Big[\Big(\nabla_\beta((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta})\Big)\delta g_{\mu\nu}\Big]=0} - \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda\Big(\nabla_\beta((\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\delta g_{\mu\nu}\\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda\Big(g^{\lambda\beta}\nabla_\beta(\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}\Big)\delta g_{\mu\nu}\\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\Big(\nabla_\lambda\nabla^\lambda(\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}\Big)\delta g_{\mu\nu}\\
(II) &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big(\Box(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu}\Big)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.37}
$$

l'équation (3.35) devient en tenant compte des résultats (3.36) et (3.37)

$$
\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2 g^{\mu\nu}\delta R_{\mu\nu} = \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\Box(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - \Big(\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big)\Big]\delta g^{\mu\nu}
\tag{3.38}
$$

d'où, l'équation (3.32) s'écrira

$$
\int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla\phi)^2\delta R = \int d^4x\ \sqrt{|g|}\Big[(\nabla\phi)^2 R_{\mu\nu} + \Box(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - \Big(\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big)\Big]\delta g^{\mu\nu}
\tag{3.39}
$$

donc δS_{k_1}, en tenant compte de (3.30), (3.31) et (3.39), sera

$$
\begin{aligned}
\delta S_{k_1} &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[-\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu}R + \phi,_\mu\phi,_\nu R\\
&\quad +(\nabla\phi)^2 R_{\mu\nu} + \Box(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - \Big(\nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big)\Big]\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned}
\tag{3.40}
$$

Or

$$
\delta S_{k_1} = \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \phi,_\mu\phi,_\nu R + \Box(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big]\delta g^{\mu\nu}
\tag{3.41}
$$

La variation du deuxième terme de couplage S_{k_2}

La variation du premier terme de couplage S_{k_2} sera

$$\begin{aligned} \delta S_{k_2} &= k_2 \delta\Big[\int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\Big] \\ &= k_2\int d^4x\Big[(\delta\sqrt{|g|})R_{\mu\nu}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu} + \sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\delta(\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}) + \sqrt{|g|}(\delta R_{\mu\nu})\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\Big] \end{aligned} \quad (3.42)$$

On calcule les deux derniers termes séparément

1.

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\delta(\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}) &= \int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\delta(g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}) \\ &= \int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\Big[(\delta g^{\mu\alpha})g^{\nu\beta}\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta} + g^{\mu\alpha}(\delta g^{\nu\beta})\phi_{,\alpha}\phi_{,\beta}\Big] \\ &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R_{\mu\nu}\phi_{,\alpha}\phi^{;\nu}\delta g^{\mu\alpha} + R_{\mu\nu}\phi^{;\mu}\phi_{,\beta}\delta g^{\nu\beta}\Big] \\ &= \int d^4x\sqrt{-g}\Big[R_{\mu\sigma}\phi_{,\nu}\phi^{;\sigma}\delta g^{\mu\nu} + R_{\sigma\mu}\phi^{;\sigma}\phi_{,\nu}\delta g^{\nu\mu}\Big] \\ &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R_{\mu\sigma}\phi_{,\nu}\phi^{;\sigma} + R_{\sigma\nu}\phi^{;\sigma}\phi_{,\mu}\Big]\delta g^{\mu\nu} \\ &= 2\int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\sigma}\phi_{,\nu}\phi^{;\sigma}\delta g^{\mu\nu} \\ \int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\delta(\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}) &= 2\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\alpha}_{\mu}\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha}\delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.43)$$

2.

$$\int d^4x\sqrt{|g|}\delta(R_{\mu\nu})\phi^{;\mu}\phi^{;\nu} = \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}g^{\lambda\beta}[\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu} + \delta g_{\nu\lambda;\beta\mu} - \delta g_{\mu\nu;\lambda\beta} - \delta g_{\lambda\beta;\mu\nu}]$$

On change les indices muets du deuxième terme

$$\begin{aligned} \int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\delta(R_{\mu\nu}) &= \frac{1}{2}\int d^4x\sqrt{|g|}g^{\lambda\beta}\Big[\underbrace{\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu} + \phi^{;\nu}\phi^{;\mu}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}}_{\text{Ils sont identiques}} \\ &\quad -\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta} - \phi^{;\mu}\phi^{;\nu}\delta g_{\lambda\beta;\mu\nu}\Big] \\ &= \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta\nu}}_{(I)} - \frac{1}{2}\underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda\beta}}_{(II)} \\ &\quad -\frac{1}{2}\underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{;\mu}\phi^{;\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\lambda\beta;\mu\nu}}_{(III)} \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\begin{aligned}
(I) &= \int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\nabla_\nu\delta g_{\mu\lambda;\beta} \\
&= \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta})}_{\int d^4x\partial_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda;\beta})=0} - \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\mu\lambda;\beta} \\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\Big]\nabla_\beta\delta g_{\mu\lambda} \\
&= -\underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta\Big[\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda})\Big]}_{\int d^4x\partial_\beta\Big[\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\lambda})\Big]=0} + \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\nabla_\beta\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\Big]\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big(\nabla_\beta\nabla_\nu\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\Big)\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big(\nabla_\rho\nabla_\alpha\phi^{,\mu}\phi^{,\alpha}g^{\lambda\rho}\Big)\delta g_{\mu\lambda} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big(\nabla_\rho\nabla_\alpha\phi^{,\mu}\phi^{,\alpha}g^{\nu\rho}\Big)\delta g_{\mu\nu} \\
(I) &= -\int d^4x\sqrt{|g|}\Big(\nabla_\nu\nabla_\alpha\phi_{,\mu}\phi^{,\alpha}\Big)\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.45}$$

$$\begin{aligned}
(II) &= \int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\nabla_\beta\delta g_{\mu\nu;\lambda} \\
&= \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda})}_{\int d^4x\partial_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\mu\nu;\lambda})=0} - \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\mu\nu;\lambda} \\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\nabla_\lambda\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda[\nabla_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\mu\nu}]}_{\int d^4x\partial_\lambda[\nabla_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\mu\nu}]=0} + \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\lambda[\nabla_\beta(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})]\delta g_{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla_\lambda\nabla_\beta\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\mu\nu} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}(\nabla_\lambda\nabla^\lambda\phi^{,\mu}\phi^{,\nu})\delta g_{\mu\nu} \\
(II) &= -\int d^4x\sqrt{-g}(\Box\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})\delta g^{\mu\nu}
\end{aligned} \tag{3.46}$$

$$
\begin{aligned}
(III) &= \int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\nabla_\nu\delta g_{\lambda\beta;\mu} \\
&= \underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\lambda\beta;\mu})}_{\int d^4x\partial_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta}\delta g_{\lambda\beta;\mu})=0} - \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\lambda\beta;\mu}] \\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\nabla_\mu\delta g_{\lambda\beta} \\
&= -\underbrace{\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu[\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\lambda\beta}]}_{\int d^4x\partial_\mu[\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})\delta g_{\lambda\beta}]=0} + \int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu[\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})]\delta g_{\lambda\beta} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\mu\nabla_\nu(\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}g^{\lambda\beta})]\delta g_{\lambda\beta} \\
&= \int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g^{\mu\nu})]\delta g_{\mu\nu} \\
&= -\int d^4x\sqrt{|g|}[\nabla_\alpha\nabla_\beta(\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g_{\mu\nu})]\delta g^{\mu\nu} \qquad (3.47)
\end{aligned}
$$

donc δS_{k_2}, on tenant compte des équations (3.43), (3.44), (3.45), (3.46) et (3.47), sera

$$
\begin{aligned}
\delta S_{k_2} &= k_2\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + 2R^\alpha_\mu\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha} - \nabla_\nu\nabla_\alpha(\phi^{,\mu}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{2}\Box(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) \\
&\quad +\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g_{\mu\nu})\Big]\delta g^{\mu\nu} \qquad (3.48)
\end{aligned}
$$

L'équation (3.27) devient, en tenant compte des équations (3.24), (3.28), (3.41) et (3.57)

$$
\begin{aligned}
\delta S &= \int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\frac{1}{16\pi G}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 + \phi_{,\,\mu}\phi_{,\,\nu} \\
&\quad +k_1\Big((\nabla\phi)^2G_{\mu\nu} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu}R + \Box(\nabla\phi)^2g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big) \\
&\quad +k_2\Big(-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + 2R^\alpha_\mu\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha} - \nabla^\nu\nabla_\alpha(\phi^{,\mu}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{2}\Box(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) \\
&\quad +\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g_{\mu\nu})\Big)\Big]\delta g^{\mu\nu} \qquad (3.49)
\end{aligned}
$$

d'où l'équation du champ gravitationnel est

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{16\pi G}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 + \phi_{,\,\mu}\phi_{,\,\nu} \\
&+k_1\Big[(\nabla\phi)^2G_{\mu\nu} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu}R + \Box(\nabla\phi)^2g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big] \\
&+k_2\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + 2R^\alpha_\mu\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha} - \nabla^\nu\nabla_\alpha(\phi^{,\mu}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{2}\Box(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) \\
&+\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g_{\mu\nu})\Big] = 0 \qquad (3.50)
\end{aligned}
$$

3.2.2 Equation du champ scalaire

L'équation du champ scalaire s'obtient par variation de l'action S par rapport au champ scalaire ϕ

$$\begin{aligned}\delta S &= \delta\Big[\int d^4x\sqrt{|g|}[R+\phi^{,\,\mu}\phi_{,\,\mu}+k_1\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}R+k_2,R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}\Big] \\ &= \int d^4x[\delta S_g+\delta S_\phi+\delta S_{k_1}+\delta S_{k_2}] \end{aligned} \tag{3.51}$$

La variation du premier terme de S, δS_g, est nulle car il ne dépend pas du ϕ, on écrit

$$\delta S_g = 0 \tag{3.52}$$

La variation du terme cinétique par rapport au champ ϕ

$$\begin{aligned}\delta S_\phi &= \delta\Big[\int d^4x\ \sqrt{|g|}\ \phi_{,\,\mu}\ \phi^{,\,\mu}\ \Big] \\ &= 2\int d^4x\sqrt{|g|}\phi^{,\,\mu}\delta\phi_{,\,\mu} \\ &= 2\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla^\mu\phi\delta\nabla_\mu\phi \\ &= 2\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla^\mu\phi\nabla_\mu\delta\phi \\ &= 2\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\nabla_\mu(\nabla^\mu\phi\delta\phi)-\Box\phi\delta\phi\Big] \\ &= -2\int d^4x\sqrt{|g|}\Box\phi\delta\phi \end{aligned} \tag{3.53}$$

La variation du premier terme de couplage S_{k_1} par rapport au champ scalaire donne

$$\delta S_{k_1} = -2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R_{,\mu}\phi^{,\mu}+R\Box\phi\Big]\delta\phi \tag{3.54}$$

En effet

$$\begin{aligned}
\delta S_{k_1} &= \delta\Big[\int d^4x\sqrt{|g|}\phi_{,\mu}\phi^{,\mu}R\Big] \qquad (3.55)\\
&= k_1\int d^4x\sqrt{|g|}R\Big[g^{\mu\nu}(\delta\phi_{,\mu})\phi_{,\nu}+g^{\mu\nu}(\delta\phi_{,\nu})\phi_{,\mu}\Big]\\
&= 2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}Rg^{\mu\nu}\phi_{,\nu}\delta\phi_{,\mu}\\
&= 2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}Rg^{\mu\nu}\phi_{,\nu}\nabla_\mu\delta\phi\\
&= \underbrace{2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu(Rg^{\mu\nu}\phi_{,\nu}\delta\phi)}_{\int d^4x\partial_\mu(Rg^{\mu\nu}\phi_{,\nu}\delta\phi)=0}-2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu(Rg^{\mu\nu}\phi_{,\nu})\delta\phi\\
&= -2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\mu(R\phi^{,\mu})\delta\phi\\
&= -2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R_{,\mu}\phi^{,\mu}+R\nabla_\mu\phi^{,\mu}\Big]\delta\phi\\
\delta S_{k_1} &= -2k_1\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R_{,\mu}\phi^{,\mu}+R\Box\phi\Big]\delta\phi
\end{aligned}$$

La variation du deuxième terme de couplage S_{k_2} par rapport au champ scalaire donne

$$\delta S_{k_2} = -2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R^{\mu\nu}{}_{;\nu}\phi_{,\mu}+R^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu}\Big]\delta\phi \qquad (3.56)$$

En effet

$$\begin{aligned}
\delta S_{k_2} &= k_2\delta\Big[\int d^4x\sqrt{|g|}R_{\mu\nu}\phi^{,\mu}\phi^{,\nu}\Big]=k_2\delta\Big[\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}\Big] \qquad (3.57)\\
&= k_2\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}\delta(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu})\\
&= k_2\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}\Big[\delta(\phi_{,\mu})\phi_{,\nu}+\phi_{,\mu}(\delta\phi_{,\nu})\Big]\\
&= 2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\delta\phi_{,\nu}\\
&= 2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\delta\nabla_\nu\phi\\
&= 2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}R^{\mu\nu}\phi_{,\mu}\nabla_\nu\delta\phi
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta S_{k_2} &= \underbrace{2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}\nabla_\nu(R^{\mu\nu}\phi_\mu\delta\phi)}_{2k_2\int d^4x\partial_\nu(R^{\mu\nu}\phi_\mu\delta\phi)=0}-\sqrt{|g|}\nabla_\nu(R^{\mu\nu}\phi_{,\mu})\delta\phi\\
&= -2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[(\nabla_\nu R^{\mu\nu})\phi_{,\mu}+R^{\mu\nu}\nabla_\nu\phi_{,\mu}]\delta\phi\\
\delta S_{k_2} &= -2k_2\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[R^{\mu\nu}{}_{;\nu}\phi_{,\mu}+R^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu}\Big]\delta\phi
\end{aligned}$$

On porte les équations (3.52), (3.53), (3.54) et (3.56) dans (3.51), on aura

$$\delta S = -2\int d^4x\sqrt{|g|}\Big[\Box\phi + k_1(R_{,\mu}\phi^{,\mu} + R\Box\phi) + k_2(R^{\mu\nu}{}_{;\nu}\phi_{,\mu} + R^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu})\Big]\delta\phi = 0 \quad (3.58)$$

L'équation du champ scalaire s'écrit alors

$$\Box\phi + k_1(R_{,\mu}\phi^{,\mu} + R\Box\phi) + k_2(R^{\mu\nu}{}_{;\nu}\phi_{,\mu} + R^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu}) = 0 \quad (3.59)$$

En général, l'équation du champ gravitationnel contient des dérivées troisième du champ scalair, tandis que l'équation du chmap scalair contient des dérivées troisième du champ métrique. Cependant, une caractéristique importante de cette théorie est que l'ordre de dérivation dans les équations peut se réduire pour un choix spécifique de k_1 et de k_2, à savoir

$$-2k_1 = k_2 = k \quad (3.60)$$

3.3 Le modèle cosmologique

On considère le modèle cosmologique plat décrit par la métrique la métrique de Friedman-Robertson-Walker

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2)] \quad (3.61)$$

où $a(t) = \exp(2\alpha(t))$, or sous forme matricielle, le tenseur métrique s'écrit ainsi

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a^2(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2(t)\ r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a^2(t)\ r^2 sin^2\theta \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

dans ce cas les équations du champ gravitationnel et du champ scalaire se réduisent aux équations suivantes

$$3\dot{\alpha}^2 = 4\pi\dot{\phi}^2(1 - 9k\dot{\alpha})^2 \quad (3.63)$$

$$-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 = 4\pi\dot{\phi}^2\Big[1 + k\Big(2\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 + 4\dot{\alpha}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-1}\Big)\Big] \quad (3.64)$$

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} - 3k\Big[\dot{\alpha}^2\ddot{\phi} + 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\dot{\phi} + 3\dot{\alpha}^3\dot{\phi}\Big] = 0 \quad (3.65)$$

Premièrement, on déscute le cas simple $k = 0$ qui correspond à l'absence du couplage dérivatif, alors les solutions des équations précidentes s'écrivent

$$\alpha(t) = \alpha_0 + \frac{1}{3}\ln(t - t_0) \tag{3.66}$$

$$\phi(t) = \phi_0 + \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\ln(t - t_0) \tag{3.67}$$

où α_0, ϕ_0 et t_0 sont des contantes d'intégration. On peut poser $\alpha_0 = 0$ et $\phi_0 = 0$, la métrique (3.83) associée est

$$ds^2 = -dt^2 + (t - t_0)^{2/3}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2)] \tag{3.68}$$

L'espace-temps de métrique (3.68) a une singularité initiale à $t = t_0$.

On considère maintenant le cas générale $k \neq 0$. De l'équation (3.83), on peut écrire

$$\dot{\phi}^2 = \frac{3\dot{\alpha}^2}{4\pi(1 - 9k\dot{\alpha}^2)} \quad \text{or} \quad \dot{\alpha}^2 = \frac{4\pi\dot{\phi}^2}{3(1 + 12\pi k\dot{\phi}^2)} \tag{3.69}$$

ce qui impose des conditions sur $\dot{\alpha}$ et $\dot{\phi}$ suivantes

$$1 - 9k\dot{\alpha}^2 > 0 \tag{3.70}$$

$$1 + 12\pi k\dot{\phi}^2 > 0 \tag{3.71}$$

Pour séparer les équations pour α et ϕ, on résoud les équations (3.84) et (3.85) en tenant compte de $\ddot{\alpha}$ et $\ddot{\phi}$ en éliminant $\dot{\phi}$ et $\dot{\alpha}$, on obtient

$$\ddot{\alpha} = -\frac{3\dot{\alpha}^2(1 - 3k\dot{\alpha}^2)(1 - 9k\dot{\alpha}^2)}{1 - 9k\dot{\alpha}^2 + 54k^2\dot{\alpha}^4} \tag{3.72}$$

$$\ddot{\phi} = -\frac{2\sqrt{3\pi}\dot{\phi}^2(1 + 8\pi k\dot{\phi}^2)(1 + 12\pi k\dot{\phi}^2)^{1/2}}{1 + 12\pi k\dot{\phi}^2 + 96\pi^2k^2\dot{\phi}^4} \tag{3.73}$$

Pour $k > 0$ la limite de $t \longrightarrow \infty$, α et ϕ soient égales à

$$\alpha_{t\longrightarrow\infty} = \alpha_\infty + \frac{1}{3}\ln(t - t_\infty) \tag{3.74}$$

$$\phi_{t\longrightarrow\infty} = \phi_\infty + \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\ln(t - t_\infty) \tag{3.75}$$

où α_∞ et ϕ_∞ sont des contantes d'intégration. Ces deux solutions ne dépendent pas du paramètre k et elles coinsident avec les solutions obtenues pour $k = 0$.

À la limite de $t \longrightarrow t_i$ α et ϕ soient égales à

$$\alpha_{t\longrightarrow t_i} = \alpha_i + \frac{2}{3}\ln(t - t_i) \tag{3.76}$$

$$\phi_{t\longrightarrow t_i} = \phi_i + \frac{t}{2\sqrt{3\pi|k|}} \tag{3.77}$$

où α_i, ϕ_i et t_i sont des contantes d'intégration. la métrique (3.83) associée est

$$ds^2 = -dt^2 + e^{2\alpha_i}(t - t_i)^{4/3}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2)] \tag{3.78}$$

L'espace-temps de métrique (3.78) a une singulatité à $t = t_i$.

Pour $k < 0$ à la limite $t \longrightarrow -\infty$, les solutions sont données par

$$\phi_{t\longrightarrow-\infty} = \phi_2 + Ce^{-t/\sqrt{k}} \tag{3.79}$$

$$\alpha_{t\longrightarrow-\infty} = \frac{t}{3\sqrt{k}} \tag{3.80}$$

où ϕ_2 et C sont des contantes d'intégration. la métrique (3.83) associée prend la forme asymtôtique de de Sitter

$$ds^2_{t\longrightarrow-\infty} = -dt^2 + e^{2Ht}(t - t_i)^{4/3}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta\ d\varphi^2)] \tag{3.81}$$

avec $H = (3\sqrt{k})^{-1}$

Conclusion générale

Dans ce mémoire nous avons traité la cosmologie avec couplage dérivatif non minimal, à savoir, nous avons montionné quelques notions générales sur la cosmologie et éventuellement des éléments d'analyse tensorielle.

Les champs scalaire joue un rôle fondamentale en cosmologie. En effet, leur dynamique permet d'étudier en détail l'une des phases les plus importante de l'univers primordial: la phase d'exponsion accélérée connue sous le nom d'inflation.

Danc ce mémoire, on a étudié le champ scalaire couplé avec la courbure de l'espace-temps donné par l'ction d'Hilert-Einstein

$$S = \int d^4x \sqrt{|g|} \; \big[\frac{1}{2k} \; R + \phi^{,\,\mu}\phi_{,\,\mu} + k_1 \; \phi_{,\,\mu} \; \phi^{,\,\mu} \; R + k_2 \; R_{\mu\nu} \; \phi^{,\,\mu} \; \phi^{,\,\nu}\big] \tag{3.82}$$

où k_1 et k_2 sont des paramètres de cuplage avec $[k_1] = [k_2] = L^2 = cst$. Puis on a les équations du champ gravitationnel

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{16\pi G}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}(\nabla\phi)^2 + \phi_{,\,\mu}\phi_{,\,\nu} \\
&+k_1\Big[(\nabla\phi)^2 G_{\mu\nu} + \phi_{,\mu}\phi_{,\nu}R + \Box(\nabla\phi)^2 g_{\mu\nu} - \nabla_\mu\nabla_\nu(\nabla\phi)^2\Big] \\
&+k_2\Big[-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R_{\alpha\beta}\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta} + 2R^{\alpha}_{\mu}\phi_{,\nu}\phi_{,\alpha} - \nabla^\nu\nabla_\alpha(\phi^{,\mu}\phi^{,\alpha}) + \frac{1}{2}\Box(\phi_{,\mu}\phi_{,\nu}) \\
&+\frac{1}{2}\nabla_\alpha\nabla_\beta(\phi^{,\alpha}\phi^{,\beta}g_{\mu\nu})\Big] = 0
\end{aligned}$$

et du du champ scalaire

$$\Box\phi + k_1(R_{,\mu}\phi^{,\mu} + R\Box\phi) + k_2(R^{\mu\nu}{}_{;\nu}\phi_{,\mu} + R^{\mu\nu}\phi_{;\mu\nu}) = 0.$$

Dans le modèle cosmologique plat décrit par la métrique la métrique de Friedman-Robertson-Walker

$$ds^2 \;\; = \;\; -dt^2 + a^2(t)[dr^2 + r^2(d\theta^2 + sin^2\theta \; d\varphi^2)]$$

où $a(t) = \exp(2\alpha(t))$.

Les équations du champ gravitationnel et du champ scalaire se réduisent aux équations suivantes

$$3\dot{\alpha}^2 = 4\pi\dot{\phi}^2(1 - 9k\dot{\alpha})^2 \tag{3.83}$$

$$-2\ddot{\alpha} - 3\dot{\alpha}^2 = 4\pi\dot{\phi}^2\Big[1 + k\Big(2\ddot{\alpha} + 3\dot{\alpha}^2 + 4\dot{\alpha}\ddot{\phi}\dot{\phi}^{-1}\Big)\Big] \tag{3.84}$$

$$\ddot{\phi} + 3\dot{\alpha}\dot{\phi} - 3k\Big[\dot{\alpha}^2\ddot{\phi} + 2\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\dot{\phi} + 3\dot{\alpha}^3\dot{\phi}\Big] = 0 \tag{3.85}$$

Les solutions de ces équations sont: pour $k = 0$ (absence du couplage dérivatif)

$$\alpha(t) = \frac{1}{3}\ln(t - t_0) \tag{3.86}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\ln(t - t_0) \tag{3.87}$$

Pour $k > 0$, les solutions α et ϕ sont égales à

$$\alpha(t) = \frac{1}{3}\ln(t - t_\infty) \tag{3.88}$$

$$\phi(t) = \frac{1}{2\sqrt{3\pi}}\ln(t - t_\infty) \tag{3.89}$$

Ces deux solutions ne dépendent pas du paramètre k et elles coinsident avec les solutions obtenues pour $k = 0$.

Pour $k < 0$, les solutions sont données par

$$\phi(t) = e^{-t/\sqrt{k}} \tag{3.90}$$

$$\alpha(t) = \frac{t}{3\sqrt{k}} \tag{3.91}$$

Bibliographie

[1] E. Elbaz, M. Novello, *Cosmologie*, ellipses, (1992).

[2] S. Weinberg, *Gravitation and cosmology, principes and applications of the general theory of relativity*, John Wiley and Sons, (1972).

[3] Thornton, Rex, *Physique moderne*, De boeck, (2009).

[4] S. Capozziello, V. Faraoni, *Beyond Einstein Gravity, A Survey of Gravitational Theories for Cosmology and Astrophysics*, Fundamental Theories of Physics, Volum 170, (2010).

[5] L. Amendola, Phys. Lett. B301, 175 (1993), gr-qc/9302010.

[6] S. Capozziello, G. Lambiase, Gen. Rel. Grav.31, 1005 (1999), gr-qc/9901051.

[7] S. Capozziello, G. Lambiase, H-J. Schmidt, Annal en Phys. 9, 39 (2000), gr-qc/9906051.

[8] G. Gubitosi, E. V. Linder, *Purely kinetic coupled gravity*, Phys. Lett. B 703 (2011), 113- 118.

[9] J. C. Boudenot, *Électromagnétisme et gravitation relativistes*, ellipses, (1989).

[10] J. Haldik, *Introduction à la relativité générale*, ellipses, (2006).

[11] A. Barrau, J. Grain, *Relativité générale*, Dunod, (2011).

[12] A. Einstein, *La Relativité: La théorie de la relativité restreinte et générale, La relativité et le problème de l'espace* , Petite Bibliothèque Payot, (1956).

[13] R. M. Wald, *General relativity*, The University of Chicago Press, Chicago and London, (1984).

[14] S. Carroll, *Lecture Notes on General Relativity*, arXiv: gr-qc/9712019 v1.