REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DE BOUIRA

FACULTE DES SCIENCES ET SCIENCES APPLIQUEES
DEPARTEMENT DE PHYSIQUE

MEMOIRE PRESENTÉ POUR L'OBTENTION DU DIPLÔME

DE MASTER 2 EN PHYSIQUE
OPTION

Physique Théorique

Généralisation de la transformation spatio-temporelle de Duru-Kleinert pour le calcul du propagateur de Feynman

Présenté par : **Sadouni Sarra**

Soutenu le…../..../....

Devant le jury :

Président	:	**ZERIRGUI Djamel**	**M.C.B. Univ. Bouira**
Rapporteur	:	**BOUCHEMLA Nedjma**	**M.A.A. Univ. Bouira**
Examinateurs	:	**SADOUN Mohamed Ameziane**	**M.C.B. Univ. Bouira**
		BENAICHE Salim	**M.A.A. Univ. Bouira**

ANNEE UNIVERSITAIRE 2017/2018

Dédicaces

Je dédie ce travail, à mon père et ma mère, mon oncle Abd Allatif, Mes grand mères, grand-père, mon frère, mes tantes et mes oncles, Merci de me pousser et m'encourager d'aller loin.

Je tiens à remercier toutes les personnes qui m'ont un jour aidé, par un mot, un geste, un encouragement ou une critique

Je souhaite remercier mes copines Aicha et Samah , sans oublier Imane, Houda, Houria et Karima,

Je tiens à remercier aussi mes copines de chambre ,mes soeurs on à passé des bons moments, merci de toute ce que vous avez fait pour moi, Lwiza, Houda, Karima, Amel, Messouda, Sara, wassila, Rabiaa, Zinna,……

Sarra Sadouni

Remerciements

Mes premiers remerciements s'adressent à **Mme Bouchemla Nedjma**, D'abord pour m'avoir accepté sous sa supervision du master II et ensuite pour la thèse. Grace à vous j'ai appris beaucoup de choses qu'un chercheur a besoin de savoir, qu'il doit tomber pour se remettre debout et qu'il doit faire des erreurs pour avancer.

Je remercie **Mr Zerirgui Djamel** qui m’a fait l’honneur d’être président de Jury, et je remercie très sincèrement **Mr Benaiche Salim** et **Mr Sadoun Mohamed Ameziane** d’être Examinateurs, et pour avoir lu le manuscrit et de m’avoir questionné sur son contenu, ainsi que pour les suggestions qui m’ont permis d’améliorer la forme.

Table des matières

Introduction générale

Durant la siècle passé, la mécanique quantique joue un rôle fondamental pour la description et la compréhension des phénomènes naturels, peut être formulée à partir de deux concepts fondamentalement diffèrents qui se révèlent équivalents d'un point de vue mathématique. A l'origine Schrodinger a décrit des phénomènes microscopiques en termes d'équation differentielle partielle de la fonction d'onde[1]. Son approche permet de résoudre des problèmes importants de mécanique quantique, y compris l'atome d'hydrogène, en appliquant les techniques hautement développées de résolution d'équations aux dérivées partielles. D'autre part la connexion de son approche de la mécanique classique est pas simplement évident. De nombreuses années plus tard Feynman[2],[3] réussi à effectuer une différentes formulation globale de la mécanique quantique ebasée sur le propagateur. Cette approche a été inticé par Dirac et repose sur les notations et concepts fondamentaux de la mécanique classique, à savoir l'action et le lagrangien ainsi que le principe de Hamilton. Malgré l'élégance et les avantages de cette méthode d'un point de vue purement théorique, il n'est pas du tout trivial d'évaluer les intégrales de chemin émergentes pour le propagateur ou la fonction de Green dépendant de l'energie correspondant à de nombreux problèmes physiques. Au contraire, les difficultés mathématiques se sont avérées si difficiles qu'il était par exemple impossible de traiter l'atome d'hydrogène bien connu en utilisant la description originale de Feynman de la mécanique quantique. En effet, l'expression analytique exacte de la fonction de Green dépendante de l'energie ne pouvait être construite qu'en utilisant les valeurs propres et les fonctions propres de l'énergie connues par la solution de l'equation de Schrodinger.

En raison de ces difficultés stimulantes, Duru-Kleinert [4] ,en 1979 ;on découvert une technique fertile pour évaluer les propagateurs ou les fonctions de Green. ils ont constuit une méthode de transformation puissante qui permet de mapper le propagateur d'un système quantique donné en un nouveau en effectuent une reparametrisation des chemins avec un nouveau pseudo temps. En appliquant cette méthode au problème majeur de l'atome d'hydrogène, de cette manière, ils ont cartographié l'atome d'hydrogène sur l'oscillateur harmonique et ont réussi à calculer la fonction de Green exacte pour l'atome d'hydrogène.

Ce mémoire vise à présenter la methode des integrales de chemin dans l'espace a une dimension et une généralisation des transformations du propagateur de Duru-Kleinert en effectuant une transformation spatiale dependante du temps et en introduisant systématiquement une transformation supplémentaire de la fonction d'onde. cette généralisation étend la classe des transformations de propagateurs entre differents systèmes de mécanique quantique, En de hors des transformations du propagateur de Duru-Kleinert, nous obtenons la representation de la particule libre dans l'oscillateur harmonique entant que cas spécial, ainsi un résultat qui à été initialement trouvé par Inomata[5], mais qui est exclue par les transformations du propagateur de Duru-Kleinert.

Le présent mémoire comporte trois parties, Dans la première partie nous avons fait une présentation générale du formalisme des intégrales de chemin, puis on à considérer la méthode de Duru-Kleinert appliqué sur un système de masse constante, dont l'action contient un potentiel compliqué d'ou une évaluation directe de l'intégrale de chemin ne soit pas possible. L'intégration des fonctions régulatrices entraine une reparamétrisation de temps, suivi par une transformation de coordonnée, suite à ces transformation il faut tenir compte des corrections apportés par la discrétisation qui se traduisent au niveau de l'action comme un potentiel supplémentaire en $\hbar^2$ de nature purement quantique. D'ou la fonction de Green construite sera exprimé en fonction de pseudo temps et la nouvelle coordonnée. La deuxième et la troisième partie sont organisé comme suit : Nous examions quelques faits de base concernant le lient entre la description de la mécanique quantique, Nous definissons la notation utilisée et résumer les formules importantes, et nous developpoons pas à pas la transformation voulue du propagateur dans la représentation intégrale du chemin lagrangien, la transformation est basée sur le fait que chaque grandeur physique qui apparait dans l'équation de Schrodinger peut être modifiée en appliquant une cartographie individuelle appropriée, cette observation conduit à trois cartographie bient séparées,c'est-a-dire du temps,de l'espace et de la fonction d'onde,chacune de ces trois mappages independants ajoute une fonction inconnue qui est à notre disposition, comme nous le montrerons en detail, il devient essentiel de relier ces trois fonctions par deux condition afin de découvrir l'intégrale du chemin lagrangien d'un nouveau système de mécanique quantique apprés la suite des trois cartographyies individuelles, a la fin précisement dans le chapitre trois, traite de deux applications, premierement les transformations de propagateur de Duru-Kleinert sont recouvertes comme un cas particulier, deuxiement la transformation de la particule libre en oscillateur harmonique est reconsidérée de notre point de vue.

Chapitre 1

Intégrale de chemin pour une particule non relativiste de masse constante à une dimension

1.1 Introduction

La formulation de la mécanique basée sur la méthode des intégrale de chemin [3] qui est un outil trés puissant pour l'étude de la mécanique quantique, et établit un lient trés explicite entre la mécanique classique et la mécanique quantique, elle est bien adaptée à l'étude de systémes à un grand nombre de degrés de liberté où un formalisme de type équation de schrodinger est beaucoup moins utile, le coeur de cette formulation est le propagateur qui contient toutes les informations du système physique.

1.2 Le propagateur

Chaque trajectoire d'une particule est associée une constribution spécifique , l'amplitude totale de la probabilité de transition du point A au point B est appelée propagateur $K(B,A)$, c'est la somme de toutes les amplitudes partielles associées aux différents chemins, ou c'est la somme des contributions de chaque chemin.

$$K(B,A)=\sum_{C}\Theta_{C}\left[x(t)\right]. \tag{1.1}$$

La contribution de chaque chemin possède une phase proportionnelle à l'action :

$$\Theta_{C}\left[x(t)\right]=N\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{C}\left[x(t)\right]\right] \tag{1.2}$$

où N est une constante de normalisation, et S_C est l'action associée au chemin C.

Nous avons vu que les chemins sont très proches les uns des autres,alors que la somme peut être remplacée par une intégrale, nous obtenons l'expression du propagateur

$$K(B,A)=\int_{x(t_A)}^{x(t_B)}Dx(t)\exp\left[\frac{i}{\hbar}S_{C}\left[x(t)\right]\right], \tag{1.3}$$

où $Dx(t)$ représente la mesure.

1.2.1 Forme discrète du propagateur

Le mouvement d'une particule de masse m entre les points $A(x_A, t_A)$ et $B(x_B, t_B)$ qui est décrit par le propagateur à ètè definit par Feynman sous la forme [3]

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int Dx(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}\int_0^T L(x, \dot{x}, t)dt\right], \tag{1.4}$$

où $T = t_B - t_A$ et le Lagrangien L est donné par

$$L(x, \dot{x}, t) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x), \tag{1.5}$$

En subdivisant l'intervalle de temps T en $(N+1)$ intervalles élémentaires égaux tel que

$$T = (t_n - t_{n-1})(N+1) = \varepsilon(N+1), \tag{1.6}$$

et en utilisans les habituelles

$$\Delta x_n = x_n - x_{n-1}, x_B = x(t_{N+1}) et x_A = x(t_0).$$

le propagateur exprimer dans (1.4) prend la forme suivante

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N+1} \sqrt{\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon}} \prod_{n=1}^{N} \left[\int dx_n\right] \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1} A_N\right], \tag{1.7}$$

avec l'action

$$A_N = \left[\frac{m}{2\varepsilon}\Delta x_n^2 - \varepsilon V(x_n)\right], \tag{1.8}$$

1.2.2 Propagateur dans l'espace des pahses

L'évolution d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$ allant de la position x_A a l'instant t_A pour arrivé a x_B a l'instant t_B ,peut être décrite en définissont le proprgateur comme étant l'amplitude de transition exprimée à l'aide de l'opérateur d'évolution [6]

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \Theta(t_B - t_A) \langle x_B| \, \hat{U}(t_B - t_A) \, |x_A\rangle \ \ , \tag{1.9}$$

avec $\Theta(t_B - t_A)$ est la fonction de Heaviside définie par

$$\Theta\left(t_B - t_A\right) = \begin{cases} 1 \quad \text{pour} \ \ t_B > \ t_A \\ 0 \quad \text{pour} \ \ \ t_B < \ t_A \end{cases} . \tag{1.10}$$

En subdivisant l'intervalle de temps $T = t_B - t_A$ en $(N+1)$ intervalles infinitésimaux égaux

$$T = \varepsilon(N+1). \tag{1.10}$$

On peut décomposer l'opérateur d'évolution en $(N+1)$ opérateurs élémentaires

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \langle x_B| \, \hat{U}(t_{N+1} - t_N)\hat{U}(t_N - t_{N-1})...\hat{U}(t_n - t_{n-1})...\hat{U}(t_1 - t_0) \, |x_A\rangle \, , \tag{1.11}$$

où $t_{N+1} = t_B$, $t_0 = t_A$, et Insérer N relation de fermeture entre les opérateurs d'évolution infinitésimaux

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \, |x_n\rangle \, \langle x_n| = 1 \quad , \qquad\qquad n = 1, 2, 3... \tag{1.12}$$

le propagateur peut être écrit sous la forme d'un produit de $(N+1)$ propagateurs élémentaires

$$\begin{aligned} K(x_B, t_B; x_A, t_A) &= \lim_{N \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n| \, \hat{U}(t_n - t_{n-1}) \, |x_{n-1}\rangle \\ &= \lim_{N \longrightarrow \infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \langle x_n| \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{H}\right) |x_{n-1}\rangle \, , \end{aligned} \tag{1.13}$$

où $\hat{H}$ represente l'opérateur hamiltonien de la particule et est donné par

$$\hat{H}(x,p,t) = \hat{T}(p,t) + \hat{V}(x,t), \tag{1.14}$$

où $\hat{T}(p,t)$ est l'opérateur énergie cinétique et $\hat{V}(x,t)$ l'opérateur énergie potentielle.

Utilisant la formule de Baker-Campbell-Hausdorff [7]

$$e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}} = e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}} e^{-\frac{i}{\hbar}\hat{T}} e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon^2\hat{X}}, \tag{1.15}$$

où l'opérateur $\hat{X}$ représente le développement suivant

$$\hat{X} = \frac{1}{2}\left[\hat{V},\hat{T}\right] - \frac{\varepsilon}{\hbar}\left(\frac{1}{6}\left[\hat{V},\left[\hat{V},\hat{T}\right]\right] - \frac{1}{3}\left[\left[\hat{V},\hat{T}\right],\hat{T}\right]\right) + ..., \tag{1.16}$$

Si on néglige tous les termes d'ordre supérieur ou égal à ε^2 et on insère les deux relations de fermeture suivantes

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \left|x_n\right\rangle \left\langle x_n\right| = 1 \quad , \tag{1.17}$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dp_n \left|p_n\right\rangle \left\langle p_n\right| = 1 \tag{1.18}$$

nous obtenons pour l'opérateur d'évolution infinitésimale dans (1.13)

$$\left\langle x_n \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{H}(t_n)} \right| x_{n-1} \right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \left\langle x_n\right| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}(x,t_n)} \left|x_{n-1}\right\rangle \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\left[p_n(x-x_{n-1})-\varepsilon T(\hat{p},t_n)\right]}, \tag{1.19}$$

et en tenant compte de l'élément de matrice

$$\left\langle x_n\right| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon\hat{V}(x,t_n)} \left|x\right\rangle = \delta(x_n - x) e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon V(x_n,t_n)}, \tag{1.20}$$

On aura

$$\left\langle x_n \left| e^{-\frac{i}{\hbar}\varepsilon \hat{H}(t_n)} \right| x_{n-1} \right\rangle = \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left[\frac{i}{\hbar}\sum_{n=1}^{N+1} p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon\left(T(p_n,t_n) + V(x_n,t_n)\right)\right], \tag{1.21}$$

la substitution de (1.21) dans l'expression du propagateur (1.13) donne la forme finale du propagateur

$$K(x_B,t_B;x_A,t_A) = \lim_{N\longrightarrow\infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int_{+\infty}^{-\infty} \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\frac{i}{\hbar}A_N, \tag{1.22}$$

où A_N est l'action exprimée sous forme discrète par :

$$A_N = \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon\left(T(p_n,t_n) + V(x_n,t_n)\right)\right], \tag{1.23}$$

et en définissant la fonction de Green via la transformation de Fourier

$$G(x_B,x_A,E) = \int_0^{+\infty} dT \exp\left[\frac{i}{\hbar}ET\right] K(x_B,t_B;x_A,t_A) \tag{1.24}$$

nous obtenons

$$G(x_B,x_A,E) = \int_0^{+\infty} dT \lim_{N\to\infty} \prod_{n=1}^{N} \int dx_n \prod_{n=1}^{N+1} \int \frac{dp_n}{2\pi\hbar} \exp\left(\frac{i}{\hbar}A_N^E\right), \tag{1.25}$$

avec l'action

$$A_N^E = \sum_{n=1}^{N+1} \left[p_n(x_n - x_{n-1}) - \varepsilon(T(p_n,t_n) + V(x_n,t_n) - E)\right]. \tag{1.26}$$

1.3 Procédure de la méthode de Duru-Kleinert

L'origine de compilcations physiques et mathématiques est l'évaluation du propagateur, qui est souvent confronté au probléme de s'ingularité au niveau du potentiel. où ce probléme à été surmonté par l'introduction de la technique des transformations spatio-temporelles de Duru-Kleinert [4], cette derniér est une combinaison d'une Reparamétrisation des trajectoires et d'une transformation spatiale, où nous devons tenir compte des corrections apportées, qui se traduisent au niveau le l'action par un potentiel dit effectif.

La transformation de coordonnée $x \to y$ représentée par $x = g(y)$ est accompagnée d'une transformation temporelle $t \to s$ definit par $dt = f(x)\, ds$

Considérons une particule, non relativiste, repérée par la position initiale x_A a l'instant t_A et finale x_B a l'instant t_B, l'intégrale de chemin de *Feynman* décrivant l'évolution de ce système dans le potentiel $V(x)$ est donné par (1.22) ou encore en forme continue

$$K(x_B, t_B; x_A, t_A) = \int Dx\,(t) \int Dp\,(t) \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\,(p\dot{x} - H)\, dt\right\}, \tag{1.28}$$

où

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(x). \tag{1.27}$$

Pour mettre en oeuvre une telle transformation spatio-temporelle, on commence par écrire l'opérateur résolvante $\hat{R}$

$$\hat{R} = f_r \frac{i\hbar}{f_l\,(E - H)\, f_r} f_l, \tag{1.28}$$

où f_l et f_r sont des fonctions régulatrices ,definit par Kleinert comme suit :

$$f_l(x)\, f_r(x) = f(x).$$

En expriment l'opérateur R dans la représentation de Schwinger[8], un élément de matrice appeler Amplitude de transition pour une énergie fixée ou fonction de Green s'écrit

$$
\begin{aligned}
G\left(x_B, x_A ; E\right) &= \left\langle x_B\right| \hat{R}\left|x_A\right\rangle=\left\langle x_B\right| f_r \frac{i \hbar}{f_l(E-H) f_r} f_l\left|x_A\right\rangle \\
&= f_l\left(x_A\right) f_r\left(x_B\right) \int_0^{\infty} d S\left\langle x_B\right| e^{-\frac{i}{\hbar} f_l(x)(H-E) f_r(x)}\left|x_A\right\rangle, \qquad (1.29)
\end{aligned}
$$

ensuite, en subdivise l'intervalle de temps en $(N+1)$ intervalles infinitésimaux tel que $S=S_B-S_A=(N+1)\varepsilon_s$ et en insérant N relations de fermeture $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_n\left|x_n\right\rangle\left\langle x_n\right|=1$ et $\int_{-\infty}^{+\infty} dp_n\left|p_n\right\rangle\left\langle p_n\right|=1$,pour arriver à la représentation intégrale

$$
G\left(x_B, x_A ; E\right) \approx (N+1) f_l\left(x_A\right) f_r\left(x_B\right) \int_0^{\infty} d S\left\langle x_B\right| e^{-\frac{i}{\hbar} f_l(x)(H-E) f_r(x)}\left|x_A\right\rangle,
$$

Pendant ce temps en effectuant l'intégration sur les variables p_n suite au remplacemant de l'expression de l'opérateur Hamiltonien nous obtenons la forme finale de la fonction de Green calculable suite au choix des fonctions $f_l(x)$ et $f_r(x)$

$$
\begin{aligned}
G\left(x_B, x_A ; E\right) = {} & \left[f_l\left(x_A\right) f_r\left(x_B\right)\right]^{\frac{1}{4}} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} d S \prod_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m}{2 i \pi \hbar \varepsilon_s}\right]^{\frac{1}{2}} \\
& \times \prod_{n=1}^{N}\left[\frac{d x_n}{\sqrt{f\left(x_n\right)}}\right] \exp \left\{\frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1}\left[\frac{m \Delta x_n^2}{2 \varepsilon_s \sqrt{f\left(x_n\right) f\left(x_{n-1}\right)}}\right.\right. \\
& \left.\left.-\varepsilon_s(V(x)-E) \sqrt{f\left(x_n\right) f\left(x_{n-1}\right)}\right]\right\}. \qquad (1.30)
\end{aligned}
$$

avec $f_l\left(x_A\right)=f_r\left(x_B\right)=f^{\frac{1}{2}}(x)$

1.3.1 Transformation ponctuelle

La transformation ponctuelle $x \rightarrow F(y)$ et le choix approprier des fonctions $f_l(x)$ et $f_r(x)$ effectuer, donne des corrections au niveau des termes de G ou elle comporte trois termes, la mesure, l'action et le pré-facteur.

Dans le cas générale, $f_l(x)$ et $f_r(x)$ ont la forme la plus générale $f_l(x) = f^{1-\lambda}(x)$ et $f_r(x) = f^{\lambda}(x)$ où λ est un parramètre arbitraire, et on à considérant les notations suivantes

$$e_1 = F' = \frac{1}{\bar{e}} \quad , e_2 = F'' \quad , e_3 = F'''..., \tag{1.31}$$

1.3.2 corrections quantique

Avec l'annonce de développement de Taylor, en développant ces derniers au tour du poste point nous obtenons des corrections quantiques associées à chaque terme, qui se rassemble en une seule correction totale C_T

Les corrections en questions se déduisent aisément en prenant en considération l'ordre du développement de Taylor effectué

1.correction dûe à la mesure :

Avec le développement

$$\Delta x_n \approx e_1 \Delta y - \frac{1}{2} e_2 \Delta y^2 + \frac{1}{6} e_3 \Delta y^3 + ..., \tag{1.32}$$

et puisque il existe un Jacobien dũ à la transformation

$$J = e_1 \left\{ 1 - \bar{e} e_2 \Delta y + \frac{1}{2} \bar{e} e_3 \ \Delta y^2 + ... \right\}, \tag{1.33}$$

nous pouvons déduire la correction comme suit :

$$C_{mesure} = -\bar{e} e_2 \ \Delta y + \frac{1}{2} \bar{e} e_3 \ \Delta y^2 + ... \tag{1.34}$$

2.correction dûe à l'action :

Avec

$$\left(\Delta x_n\right)^2 \approx e_1^2 \Delta y^2 \left\{ 1 - \left(\overline{e}e_2\right) \Delta y + \left[\frac{1}{3} \left(\overline{e}e_3\right) + \frac{1}{4} \left(\overline{e}e_2\right)^2 \right] \Delta y^2 + ... \right\}, \tag{1.35}$$

et plusieurs dévelopement de la forme $f_r\left(x_{n-1}\right)$, $\frac{1}{f_r\left(x_{n-1}\right)}$..

nous aurons la correction sur l'action ainsi

$$\begin{aligned} C_{action} &= \frac{iM}{\hbar} \frac{\left(\Delta y\right)^2}{2\varepsilon_s} \left\{ - \left(\left(\overline{e}e_2\right) - \lambda \frac{f'}{f} \right) \Delta y + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1}{3} \left(\overline{e}e_3\right) + \frac{1}{4} \left(\overline{e}e_2\right)^2 + \frac{1}{2} \left(-\lambda \frac{f\,''}{f} + \lambda \left(\lambda + 1\right) \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \right) - \lambda \overline{e}e_2 \frac{f'}{f} \right] \left(\Delta y\right)^2 \right\} \\ &- \frac{iM^2}{2\hbar^2} \frac{\left(\Delta y\right)^4}{4\varepsilon_s^2} \left(\left(\overline{e}e_2\right) - \lambda \frac{f'}{f} \right)^2 \Delta y^2 + ..., \end{aligned} \tag{1.36}$$

3.correction dûe au préfacteur :

Avec l'ordre deux de développement de Taylor de la fonction f_{n-1} ,on à calculer

$$\frac{f_{n-1}}{f_n} \approx \left\{ \left(\frac{e_1}{f_n} \right) \frac{\partial f\left(x_n\right)}{\partial x_n} \Delta q + \left[\frac{1}{2} \left(\frac{e_2}{f_n} \right) \frac{\partial f\left(x_n\right)}{\partial x_n} + \frac{1}{2} \left(\frac{e_1^2}{f_n} \right) \frac{\partial^2 f\left(x_n\right)}{\partial^2 x_n} \right] \Delta q^2 + ... \right\}. \tag{1.37}$$

D'après un simple calcul et tenons compte de développement de la forme $\left(1+x\right)^n$, on à arriver à la correction

$$C_f = \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda \right) \left(-\frac{f'}{f} \Delta y + \frac{1}{2} \frac{f''}{f} \Delta y^2 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\lambda \right) \left(\frac{3}{4} + \frac{3}{2}\lambda \right) \left(\frac{f'}{f} \right)^2 \Delta y^2 + ... \tag{1.38}$$

A l'aide de l'éxprèssion standard des moyennes suivante :

$$\left\langle (\Delta q)^{2n} \right\rangle = \left(\frac{i\hbar\varepsilon}{M} \right)^{n} (2n-1)!!, \tag{1.39}$$

et le remplacement des correction donne le résultat final de la correction C_T :

$$C_T = -\frac{\varepsilon\hbar}{m} \left(\frac{1}{4} \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{8} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \right). \tag{1.40}$$

1.3.3 Potentiel effectif

La présence de la correction total C_T donne naissance à un potentiel effectif en $\hbar^2$, qui est de nature purement quantique, et qui s'obtient en combinant les trois corrections qui se manifeste au niveau de l'action.

le potentiel prend la forme :

$$V_{eff} = -\frac{\hbar^2}{m} \left(\frac{1}{4} \frac{F'''}{F'} - \frac{3}{8} \left(\frac{F''}{F'} \right)^2 \right), \tag{1.41}$$

Marquant la fin de l'expression de la fonction de Green par

$$\begin{aligned} G\left(x_B, x_A; E\right) &= \left[f_l\left(x_A\right) f_r\left(x_B\right) \right]^{\frac{1}{4}} \lim_{n\to\infty} \int_0^{\infty} dS \prod_{n=1}^{N+1} \left[\frac{m}{2i\pi\hbar\varepsilon_s} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \prod_{n=1}^{N} \int dq_n \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \sum_{n=1}^{N+1} \left[\frac{\Delta q_n^2}{2\varepsilon_s} - \varepsilon_s \left(V\left(F\left(y\right)\right) + V_{eff} - E \right) \right] \right\} \end{aligned} \tag{1.42}$$

1.4 Conclusion

Dans le but d'exposer la formulation integrale de chemin de Feynman, nous avons commencé par un rappel sur le propagateur et sa forme discrète, puis nous avons fait un calcule explicite de l'intégrale de chemin dans l'espace des phases qui décrit l'évolution d'une particule soumise à un potentiel $V(x)$

Nous avons exposer la méthode des transformations spatio-temporelle de Duru-Kleinert appliquée sur une fonction de Green dont l'action contient un potentiel qui pose un probléme de singularité ou de divergence, par la suite nous avons montrer comment introduire les fonctions régulatrices et la transformation de coordonnée qui doit être effectué afin de régler le probléme de la masse variable apparante au niveau du terme cinétique, au voisinage du post-point les corrections obtenues suite au développement de Taylor des trois termes construisant la fonction de Green se combinent en une seule correction totale qui se traduit au niveau de l'action par un potentiel effectif de nature purement quantique.

Chapitre 2

Géneralisation de la méthode Duru-Kleinert

2.1 Introduction

Dans le but de présenter une Généralisation des transformations du propagateur de Duru-Kleinert[9], et en utilisant les concepts de Schrodinger et de Feynman, nous effectuons une transformation entre différentes classes de systèmes de mécanique quantique. Une succession soigneusement élaborée de trois applications distinctes, concernant le temps, l'espace et la fonction d'onde, conduit à une relation entre les potentiels correspondant aux systèmes de mécanique quantique et leurs propagateur associés.

2.2 La fonction de Green

Considérons une particule de masse m se deplacant dans un potentiel $V = V(x)$.

on à

$$\hat{H} = H(\hat{p}, \hat{x}) = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}). \tag{2.1}$$

oŭ

$$\hat{U}(t, t_0) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}(t - t_0)\right\}. \tag{2.2}$$

A partir de la théorie de schrodinger on obtient la fonction d'onde habituelle

$$\langle x \mid \Psi\rangle_t = \int dx_0 \left\langle x \mid \hat{U}(t, t_0) \mid x_0\right\rangle \langle x_0 \mid \Psi\rangle. \tag{2.3}$$

La quantité fondamentale qui marque le point de départ de la reformulation de Feynman de la mécanique quantique est le propagateur :

$$G(x, t; x_0, t_0) = \left\langle x \mid \hat{U}(t, t_0) \mid x_0\right\rangle, \tag{2.4}$$

si l'on veut garantir la causalité dans le temps t le propagateur causal G_c, au lieu de propagateur G

$$G_c(x, t; x_0, t_0) = \Theta(t - t_0)\, G(x, t; x_0, t_0), \tag{2.5}$$

oŭ la fonction de Heaviside

$$\Theta\left(t-t_0\right)=\begin{cases} 1 \quad \text{pour} \quad t> \ t_0 \\ 0 \quad \text{pour} \quad t< \ t_0 \end{cases} . \tag{2.6}$$

d'ou

$$G_c\left(x,t;x_0,t_0\right)=\Theta\left(t-t_0\right)\langle x|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}\left(t-t_0\right)\right\}|x_0\rangle\,, \tag{2.7}$$

et sous forme continue, elle s'écrit

$$G_c\left(x,t;x_0,t_0\right)=\Theta\left(t-t_0\right)\int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)=x}\acute{D}x\left(\tau\right)\int D\left(\frac{p}{2\pi\hbar}\right)[\tau]\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\right\}, \tag{2.8}$$

oû S represente l'action classique

$$S=\int_{t_0}^{t}d\tau\left\{p\left(\tau\right)\dot{x}\left(\tau\right)-H\left(p\left(\tau\right),x\left(\tau\right)\right)\right\}. \tag{2.9}$$

En subdivisant l'intervalle de temps $[t,t_0]$ en N intervalles $[t_n,t_{n+1}]$, de même longueur ε où

$$t-t_0=\varepsilon N \tag{2.10}$$

et $t_{n=0}=t_0$, $t_{n=N}=t$.

donc la version discrète s'ecrit comme

$$G_c\left(x,t;x_0,t_0\right)=\Theta\left(t-t_0\right)\lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dx_n\right\}\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\right\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S^{(N)}\right\},$$

avec

$$S^{(N)}=\varepsilon\sum_{n=0}^{N-1}\left\{p_n\frac{x_{n+1}-x_n}{\varepsilon}-H\left(p_n,x_n\right)\right\}. \tag{2.11}$$

L'asymetrie de lintégration sur les moments et les coordonnées apparaissant dans la version discrète est reflétée dans la version continue par le nombre premier dans l'integration fonctionnelle sur les coordonnées

L'équation derniér peuvent également étre interprétées de la même maniére que le propagateur à long durée $G_c(x,t;x_0,t_0)$ est constuit à partir de propagateurs à court durée$G(x_{n+1},t_{n+1};x_n,t_n)$

$$G_c(x,t;x_0,t_0)=\Theta(t-t_0).\lim_{\varepsilon}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dx_n\right\}\left\{\prod_{n=0}^{N-1}G(x_{n+1},t_{n+1};x_n,t_n)\right\}. \tag{2.12}$$

où

$$G(x_{n+1},t_{n+1};x_n,t_n)=\prod_{n=0}^{N-1}\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[p_n(x_{n+1}-x_n)-\varepsilon H(p_n,x_n)\right]\right\}. \tag{2.13}$$

A partir de la représentation lagrangienne de l'integrale de chemin, son propagateur à court durée est construit a partir de la représentation Hamiltonienne. En integrant sur les moment p_n et en utilisant la forme explicite de l'Hamiltonienne $\hat{H}$ et aprés un simple calcul en trouve

$$G(x_{n+1},t_{n+1};x_n,t_n)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon}}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{\varepsilon}\right)^2-V(x_n)\right]\right\}, \tag{2.14}$$

et finalement nous obtenons

$$G_c(x,t;x_0,t_0)=\Theta(t-t_0)\int_{x(t_0)=x_0}^{x(t)=x}Dx(\tau)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S\right\}, \tag{2.15}$$

où

$$S=\int_{t_0}^{t}d\tau\left\{\frac{m}{2}\dot{x}^2(\tau)-V(x(\tau))\right\}. \tag{2.16}$$

L'introduction du propagateurs de courte durée offre des grands avantages dans le traitement des intégrales de chemin. La raison en est que, en raison de la procédure limitative, les propagateurs de courte durée doivent étre connus jusqu'à l'ordre t, En outre, l'équation différentielle à long durée peut etre immédiatement établie à partir de la connaissance de propagateur à court durée jusqu'à cet ordre.

2.2.1 Régularisation temporelle

En mécanique quantique, le temps est géneralement considéré comme une quantité physique donnée. Ici nous considérons le temps physique t comme un degré de liberté supplémentaire, qui est à notre disposition similaire au degré de liberté de l'espace. Cela peut étre réaliser par une reparamétrisation du système spatio-temporel étendu avec les pseudo-temps s. L'élaboration de cette idée aboutit finalement à une cartographie intéressante du temps physique t aux pseudo-temps s.

Extension de l'espace de Hilbert

Pour exprimer explicitement la similarité de la position x et du temps t dans notre notation, nous considérons l'espace de Hilbert H étendu qui est construit comme la somme direct des espaces de Hilbert H_1et H_2. une base pour H est alors donnée par :

$$|x, t\rangle = |x\rangle . |t\rangle , \tag{2.17}$$

si les états du systéme sont décrits par les vecteurs d'état $|\Psi\rangle_s$ dans l'espace de Hilbert étendu H,il devient possible d'introduire une nouvelle quantité s, appelée pseudo-temps, pour leur paramétrisation. Alors la représentation spatio-temporelle du vecteur d'état $|\Psi\rangle_s$ correspondant à la base (2.17) est :

$$\langle x, t \mid \Psi\rangle_s = \Psi(x, t, s) . \tag{2.18}$$

Nous souhaitons réfléchir à la réalisation et les conséquences pour le propagateur causal $G_c(x,t;x_0,t_0)$ dues à cette extension de l'espace fonctionnel sous-jacent.

Conséquences pour le propagateur causal

Comme nous le verrons, il devient possible de déduire le propagateur causal G_c lié à H_1, d'un propagateur causal plus générale $G_C^{(1)}$, qui correspond à l'espace de Hilpert érendu H . Ceci peut etre réalisé par l'application successive des identités simples. Dans un premier temps, nous appliquons une fonction delta selon :

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \int_0^{+\infty} ds G_c^{(1)}(x,t;x_0,t_0) .\delta(t-t_0-s). \tag{2.19}$$

où

$$\delta(t-t_0-s) = \langle t| \exp\left\{\frac{+i}{\hbar}\hat{E}s\right\} |t_0\rangle . \tag{2.20}$$

Nous avons la représentation du temps

$$\langle t| E\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}Et\right\}. \tag{2.21}$$

De ce qui précède on peut écrir

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds\Theta(s) . \langle x,t| \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\left(\hat{H}-\hat{E}\right)s\right\} |x_0,t_0\rangle . \tag{2.22}$$

L'equation (2.22) peut étre formellement intégré :

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \langle x,t| \hat{R} |x_0,t_0\rangle . \tag{2.23}$$

L'opérateur résolvante $\hat{R}$ doit etre compris dans le sens

$$\hat{R} = \frac{i\hbar}{\hat{H}-\hat{E}-i0^+}, \tag{2.24}$$

où la quantité positive et réelle introduite 0^{+} exprime la causalité dans le domaine pseudo-temporel.

Point de vue général de l'extension

Nous permet de réécrire l'opérateur $\hat{R}$ comme suit :

$$\hat{R} = \hat{f}_r . \frac{i\hbar}{\hat{f}_l \left(\hat{H} - \hat{E} \right) \hat{f}_r} . \hat{f}_l, \tag{2.25}$$

où $\hat{f}_l$ et $\hat{f}_r$ sont des fonctions régulatrices, on suppose que sons des opérateurs inversible, definit par *Kleinert* [4] comme suit :

$$f_l(x) f_r(x) = f(x).$$

Si l'on considére $\hat{f}_l$ et $\hat{f}_r$ comme fonctions de l'opérateur de possition $\hat{x}$ et de l'opérateur de temps $\hat{t}$,

$$\hat{f}_r = f_r \left(\hat{x}, \hat{t} \right) \quad \text{et} \quad \hat{f}_l = f_l \left(\hat{x}, \hat{t} \right), \tag{2.26}$$

on aura

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = f_r \left(\hat{x}, \hat{t} \right) f_l \left(\hat{x}, \hat{t} \right) \int_0^{+\infty} ds G_c^{(1)}(x,t,s;x_0,t_0,0), \tag{2.27}$$

représente une relation entre le propagateur causal $G_c(x,t;x_0,t_0)$ dans l'espace de Hilbert d'origine H_1 et un nouveau propagateur causal $G_c^{(1)}(x,t,s;x_0,t_0,0)$ dans l'espace de Hilbert étendu H,ou

$$G_c^{(1)}(x,t,s;x_0,t_0,0) = \Theta(s) . \langle x,t| \exp \left\{ -\frac{i}{\hbar} \hat{f}_l \left(\hat{H} - \hat{E} \right) \hat{f}_r s \right\} |x_0,t_0\rangle . \tag{2.28}$$

Dans H la représentation spatio-temporelle de l'état initial $\left|\Psi^{(1)}\right\rangle_0$ à la représentation spatio-temporelle de la solution $\left|\Psi^{(1)}\right\rangle_s$:

$$\langle x,t\left|\Psi^{(1)}\right\rangle_s=\int dx_0\int dt_0 G_c^{(1)}\left(x,t,s;x_0,t_0,0\right).\langle x_0,t_0|\,\Psi^{(1)}\rangle_0. \tag{2.29}$$

Représentation intégrale du chemin discret du propagateur causal

Nous allons dériver une représentation intégrale du chemin pour le propagateur causal $G_c^{(1)}\left(x,t,s;x_0,t_0,0\right)$. Si nous subdivisons l'axe s par analogie avec (2.10) en N morceaux de longueur égale ε_s , le propagateur causal à longue durée $G_c^{(1)}\left(x,t,s;x_0,t_0,0\right)$peut être construit à partir de propagateurs à court durée de type $G^{(1)}\left(x_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;x_n,t_n,0\right)$:

$$G_c^{(1)}\left(x,t,s;x_0,t_0,0\right)=\Theta\left(s\right)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dx_n\int dt_n\right\}\left\{\prod_{n=0}^{N-1}G^{(1)}\left(x_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;x_n,t_n,0\right)\right\}. \tag{2.30}$$

Conformément à (2.30) le propagateur de courte durée est alors donné par

$$G^{(1)}\left(x_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;x_n,t_n,0\right)=\langle x_{n+1},t_{n+1}|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}.\hat{f}_l\left(\hat{H}-\hat{E}\right)\hat{f}_r\varepsilon_s\right\}|x_n,t_n\rangle\,. \tag{2.31}$$

Une évaluation supplémentaire du propagateur à court durée $G^{(1)}\left(x_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;x_n,t_n,0\right)$ devient possible pour la raison suivante.A cause de la procédure de limitation dans tous les propagateurs de court durée qui sont égaux au premier ordre dans ε_s conduisent au même propagateur à long durée $G_c^{(1)}\left(x,t,s;x_0,t_0,0\right)$.L'utilisation de l'Hamiltonien $\hat{H}$,nous permet d'étendre l'éxponentielle dans (2.31) jusqu'à l'ordre ε_s , pour évaluer en partie les élèment de la matrice et réarranger le résultat en tant que produit des exponentielles,on obtient :

$$\begin{aligned}
G^{(1)}\left(x_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;x_n,t_n,0\right) &= \left\langle x_{n+1},t_{n+1}\right|\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}.f_l\left(x_{n+1},t_{n+1}\right)\frac{\hat{p}^2}{2m}f_r\left(x_n,t_n\right)\varepsilon_s\right\} \\
&\quad \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}.f_l\left(x_{n+1},t_{n+1}\right)V\left(x_n\right)f_r\left(x_n,t_n\right)\varepsilon_s\right\} \\
&\quad \exp\left\{+\frac{i}{\hbar}.f_l\left(x_{n+1},t_{n+1}\right)\hat{E}f_r\left(x_n,t_n\right)\varepsilon_s\right\}\left|x_n,t_n\right\rangle \qquad (2.32)
\end{aligned}$$

l'étape suivante consiste à remplacer les opérateurs restants par leurs valeurs propres.Une double application de la relation de fermeture représentée par

$$\int dp\int dE\left|p,E\right\rangle\left\langle p,E\right| = 1, \tag{2.33}$$

et la représentation l'espace-temps de la base des vecteurs $\left|p,E\right\rangle$

$$\left\langle x,t\mid p,E\right\rangle = \frac{1}{2\pi\hbar}\exp\left\{+\frac{i}{\hbar}\left(px-Et\right)\right\}, \tag{2.34}$$

d'aprés un simple calcul le propagateur à court durée prend la forme

$$\begin{aligned}
G^{(1)}\left(x_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;x_n,t_n,0\right) &= \delta\left(t_{n+1}-t_n-\varepsilon_s f_l\left(x_{n+1},t_{n+1}\right)f_r\left(x_n,t_n\right)\right)\int\frac{dp_n}{2\pi\hbar} \\
&\quad\times\exp\left\{\begin{array}{c}\frac{i}{\hbar}\left\{p_n\left(x_{n+1}-x_n\right)\right. \\ \left.-\varepsilon_s f_l\left(x_{n+1},t_{n+1}\right)H\left(p_n,x_n\right)f_r\left(x_n,t_n\right)\right\}\end{array}\right\}, \qquad (2.35)
\end{aligned}$$

donc le propagateur à long durée devient

$$\begin{aligned}
G_c^{(1)}\left(x,t,s;x_0,t_0,0\right) &= \Theta\left(s\right)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dx_n\int dt_n\right\}\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\frac{dp_n}{2\pi\hbar}\right\}\exp\left\{\frac{i}{\hbar}S^{(N)}\right\} \\
&\quad\times\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\delta\left(t_{n+1}-t_n-\varepsilon_s f_l\left(x_{n+1},t_{n+1}\right)f_r\left(x_n,t_n\right)\right)\right\}, \qquad (2.36)
\end{aligned}$$

où

$$S^{(N)} = \varepsilon_s \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{p_n (x_{n+1} - x_n)}{\varepsilon_s} - f_l (x_{n+1}, t_{n+1}) H (p_n, x_n) f_r (x_n, t_n) \right] . \tag{2.37}$$

ces résultats conduisent à un résultat important, les N fonctions delta dans le temps assure la relation

$$\varepsilon = \varepsilon_s . f_l (x_{n+1}, t_{n+1}) f_r (x_n, t_n) \ , \quad n = 0, 1, ..., N-1 \tag{2.38}$$

Dans la version continue, ou le nombre d'intervalles va à l'infini, cette équation de différence conduit à l'équation différentielle correspondante

$$\frac{d}{ds} t (s) = f_l (x (s) , t (s)) . f_r (x (s) , t (s)) . \tag{2.39}$$

Elle définit une transformation temporelle locale de t à s. Alors que dans le domaine du temps physique, chaque point d'espace est équipé de la meme échelle de temps par rapport aux pseudo-temps s devient dépendante de l'espace .

spécialisation supplémentaire

Notre but est de simplifier les calculs en suppossant que

$$f_l (x, t) = f (x, t) \quad et \quad f_r (x, t) = 1. \tag{2.40}$$

pour résumer nos résultats temporaires.

Le subdivision de l'axe s à ensuite donné une intégrale de chemin pour $G_c^{(1)} (x, t, s; x_0, t_0, 0)$, nous obtenons aprés une integration sur les moments la représentation lagrangienne :

$$
\begin{aligned}
G_c^{(1)}(x,t,s;x_0,t_0,0) &= \Theta(s)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dx_n\int dt_n\right\} \\
&\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s f(x_{n+1},t_{n+1})}}\delta\left(t_{n+1}-t_n-\varepsilon_s f(x_{n+1},t_{n+1})\right)\right\} \\
&\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1} f(x_{n+1},t_{n+1})\varepsilon_s\left[\frac{m}{2}\left(\frac{x_{n+1}-x_n}{f(x_{n+1},t_{n+1})\varepsilon_s}\right)^2-V(x_n)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.41}
$$

2.2.2 Transformation ponctuelle

Notre objectif est de mettre en oeuvre de manière ponctuelle le passage de la coordonnée originale x à la nouvelle coordonnée q . Dans la forme Lagrangienne de l'integrale de chemin, ceci est réalisé par une transformation de point explicitement dépendant du temps dans l'espace de configuration.

$$
x = h(q,t), \tag{2.42}
$$

avec h désigne une fonction inversible arbitraire.

conséquences pour le propagateur causal

En inserant (2.42) dans (2.41) on aura

$$
\begin{aligned}
G_c^{(1)}(x,t,s;x_0,t_0,0) &= \frac{\Theta(s)}{h'\left(h^{-1}(x_0,t_0),t_0\right)} \lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dx_n \int dt_n\right\} \\
&\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}.\frac{h'(q_{n+1},t_{n+1})}{\sqrt{f\left(h(q_{n+1},t_{n+1}),t_{n+1}\right)}}\right. \\
&\left.\delta\left(t_{n+1}-t_n-f\left(h(q_{n+1},t_{n+1}),t_{n+1}\right)\varepsilon_s\right).\frac{h'(q_n,t_n)}{h'(q_{n+1},t_{n+1})}\right\} \\
&\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1} f\left(h(q_{n+1},t_{n+1}),t_{n+1}\right)\right. \\
&\left.\varepsilon_s\left[\frac{m}{2}\left(\frac{h(q_{n+1},t_{n+1})-h(q_n,t_n)}{f\left(h(q_{n+1},t_{n+1}),t_{n+1}\right)\varepsilon_s}\right)^2-V\left(h(q_n,t_n)\right)\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

ou h' : la derivée partielle de h par rapport à la premiére variable q_n et h^{-1} et l'inverse de la transformation ponctuelle $x = h(q,t)$ selon $q = h^{-1}(x,t)$ .l'inverse de $h'\left(h^{-1}(x_0,t_0),t_0\right)$ apparait devant la procédure de limitation, cette disposition des facteurs permet de combiner la transformation ponctuelle avec le propagateur causal précédent $G_c^{(1)}$à un nouveau propagateur causal $G_c^{(2)}$

$$
G_c^{(1)}(x,t,s;x_0,t_0,0) = \frac{1}{h'\left(h^{-1}(x_0,t_0),t_0\right)} G_c^{(2)}\left(h^{-1}(x,t),t,s;h^{-1}(x_0,t_0),t_0,0\right) , \tag{2.44}
$$

de ce qui précède, il est évident que le nouveau propagateur causal $G_c^{(2)}$peut être reconstitué à partit de propagateur à courte durée

$$
G_c^{(2)}(q,t,s;q_0,t_0,0) = \Theta(s)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dq_n\int dt_n\right\}\left\{\prod_{n=0}^{N-1}G^{(2)}(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0)\right\}. \tag{2.45}
$$

A partir de (2.43),le nouveau propagateur de courte durée $G^{(2)}$

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}\left(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0\right) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}\delta\left(t_{n+1}-t_n-f\left(h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right),t_{n+1}\right)\varepsilon_s\right)\\
&\times\frac{h'\left(q_n,t_n\right)}{h'\left(q_{n+1},t_{n+1}\right)}\;\frac{h'\left(q_{n+1},t_{n+1}\right)}{\sqrt{f\left(h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right),t_{n+1}\right)}}\\
&\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\;f\left(h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right),t_{n+1}\right)\varepsilon_s\right.\\
&\left.\times\left[\frac{m}{2}\left(\frac{h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right)-h\left(q_n,t_n\right)}{f\left(h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right),t_{n+1}\right)\varepsilon_s}\right)^2-V\left(h\left(q_n,t_n\right)\right)\right]\right\} \quad (2.46)
\end{aligned}
$$

Extension du propagteur de courte durée

Dans une série d'étapes, nous avons l'intention de dériver une expression plus simple pour le propagateur de courte durée. Pour cela, nous rappelons que chaque propagateur à courte durée est lié à une équation différentielle partielle et vice versa. Pour préparer la technique qui nous peremet de passer du propagateur de court durée $G^{(2)}$ à son équation différentielle partielle correspondante, nous étendons $G^{(2)}$en puissances de ε_s jusqu'au premier ordre. Pour ce faire, nous devons tenir compte du fait que les différences dans la nouvelle coordonnée $(q_{n+1}-q_n)$ et le temps $(t_{n+1}-t_n)$ contribuent également à cette expansion selon les régles suivantes :

$$
\Delta t_n = t_{n+1}-t_n \sim \varepsilon_{s.} \quad , \qquad \Delta q_n = q_{n+1}-q_n \sim \varepsilon_s^{\frac{1}{2}} \tag{2.47}
$$

Il s'avére que l'expansion en puissances de $\varepsilon_{s.}$devient un calcul long mais simple. Par conséquent, nous ne présenterons que le résultat final. Pour garantir une présentation concise, nous choisissons des abréviations supplémentaires pour les dérivées partielles de la fonction h par rapport à chaque variable :

$$
h' = \frac{\partial}{\partial q_{n+1}}h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right) \qquad et \qquad \dot{h} = \frac{\partial}{\partial t_{n+1}}h\left(q_{n+1},t_{n+1}\right), \tag{2.48}
$$

alors l'expression se lit :

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}\left(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0\right) \;=\;& \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}\delta\left(\Delta t_n - f\left(h,t_{n+1}\right)\varepsilon_s\right) \\
& \times\frac{h'}{\sqrt{f\left(h,t_{n+1}\right)}}\left\{1-\frac{h''}{h'}\Delta q_n+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}\Delta q_n^2-\frac{\dot{h}'}{h'}\Delta t_n\right\} \\
& \times\exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}.\frac{h'^2}{f\left(h,t_{n+1}\right)}\left[\Delta q_n^2-\frac{h''}{h'}\Delta q_n^3\right.\right. \\
& +\left(\frac{1}{3}\frac{h'''}{h'}+\frac{1}{4}\frac{h''^2}{h'^2}\right)\Delta q_n^4+2\frac{\dot{h}}{h'}\Delta q_n\Delta t_n-2\frac{\dot{h}'}{h'}\Delta q_n^2\Delta t_n \\
& \left.\left.-\frac{\dot{h}h''}{h'^2}\Delta q_n^2\Delta t_n+\frac{\dot{h}^2}{h'^2}\Delta t_n^2\right]-\frac{i}{\hbar}f\left(h,t_{n+1}\right)\varepsilon_s V\left(h\right)\right\}
\end{aligned}
\tag{2.49}
$$

La premier condition

jusqu'à présent, les fonctions f et h ont été considérées comme des fonctions inversibles mais arbitraires de $(x\ ,\ t)$ et (q,t) . Nous observons cependant que (2.49) peut etre considérablement simplifie sur deux aspecs différents en imposant ce que nous appelons la première condition :

$$
f\left(h\left(q,t\right),t\right)=h'\left(q,t\right)^2 . \tag{2.50}
$$

Appliquer cette relation entre la coordonnée et la transformation temporelle dans l'expression (2.49) pour le propagateur à court durée et substituer $\Delta t_n=\varepsilon_s h'^2$ selon la prescription de la fonction delta que nous trouvons :

$$
\begin{aligned}
G^{(2)}\left(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0\right) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}\delta\left(\Delta t_n-\varepsilon_s h'^2\right)\left\{1-\frac{h''}{h'}\Delta q_n+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}\Delta q_n^2-\dot{h}'h'\varepsilon_s\right\} \\
& \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\left[\Delta q_n^2-\frac{h''}{h'}\Delta q_n^3+\left(\frac{1}{3}\frac{h'''}{h'}+\frac{1}{4}\frac{h''^2}{h'^2}\right).\Delta q_n^4\right.\right. \\
& \left.+2\dot{h}h'\Delta q_n\varepsilon_s-2\dot{h}'h'\Delta q_n^2\varepsilon_s-\dot{h}h''.\Delta q_n^2\varepsilon_s+\dot{h}^2h'^2\varepsilon_s^2\right] \\
& -\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s h'^2 V\left(h\right). \qquad (2.51)
\end{aligned}
$$

En effet, l'essence de la premier condition (2.50) consiste dans le fait que nous récupérons dans le premier terme de l'exponentielle dans (2.51), l'expression de la particule libre dans la nouvelle coordonnée q . Nous considérons cela comme une premier étape essentielle pour trouver l'integrale de la trajectoire Lagrangienne d'un système de mécanique quantique habituel. De plus, le terme dans l'expression ci-dessue correspondant à la particule libre nous permet dans la suite de donner les intégrales de Fresnel(2.66)comme nous allons le voir, cela valide la règle d'expansion(2.47) .

Le propagateur à long durée causal $G_c^{(2)}$peut maintenant etre dérivé des équations(2.45) et (2.61) :

$$
\begin{aligned}
G_c^{(2)}\left(q,t,s;q_0,t_0,0\right) &= \Theta\left(s\right)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dq_n\int dt_n\right\} \\
& \prod_{n=1}^{N-1}\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}\delta\left(\Delta t_n-\varepsilon_s h'^2\right) \\
& \times\left\{1-\frac{h''}{h'}\Delta q_n+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}\Delta q_n^2-\dot{h}'h'\varepsilon_s\right\} \\
& \times\exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\left[\Delta q_n^2-\frac{h''}{h'}\Delta q_n^3+\left(\frac{1}{3}\frac{h'''}{h'}+\frac{1}{4}\frac{h''^2}{h'^2}\right).\Delta q_n^4\right.\right. \\
& \left.+2\dot{h}h'\Delta q_n\varepsilon_s-2\dot{h}'h'\Delta q_n^2\varepsilon_s-\dot{h}h''.\Delta q_n^2\varepsilon_s+\dot{h}^2h'^2\varepsilon_s^2\right] \\
& \left.-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s h'^2V\left(h\right)\right\} \qquad (2.52)
\end{aligned}
$$

$G_c^{(2)}$est le propagateur de la fonction d'onde

$$\left\langle q,t \mid \Psi^{(2)} \right\rangle_s = \Psi^{(2)}\left(q,t,s\right) \tag{2.53}$$

et se transforme en analogie complète (2.29) entre les états ayant des valeurs successives du pseudo-temps s

$$\Psi^{(2)}\left(q,t,s\right) = \int dq_0 \int dt_0 G_c^{(2)}\left(q,t,s;q_0,t_0,0\right).\Psi^{(2)}\left(q_0,t_0,0\right). \tag{2.54}$$

2.2.3 Transformation de la fonction d'onde

Si nous devions calculer l'équation différentielle partielle correspondante au propagateur à court durée (2.51), nous rencontrerions deux problémes :

1.En raison de la transformation du temps, le nouveau Hamiltonien n'a plus besoin d'etre hermitien.

2.Le nouveau Hamiltonien peut contenir une dérivée partielle du premier ordre par rapport à la nouvelle coordonnée q

Afin de retirer au moins l'un de ces problèmes de nous présenter une nouvelle et arbitraire fonction complexe $g = g\left(q,t\right).$

Introduction d'une nouvelle fonction

Nous considérons une transformation linéaire de la fonction d'onde $\Psi^{(2)}$ de (2.53) en une nouvelle dénotée par $\Psi^{(3)}$:

$$\Psi^{(2)}\left(q,t,s\right) = g\left(q,t\right).\Psi^{(3)}\left(q,t,s\right). \tag{2.55}$$

Si on insère(2.55) dans l'évolution temporelle (2.54) de $\Psi^{(2)}$on obtient l'évolution temporelle de $\Psi^{(3)}$:

$$\Psi^{(3)}(q,t,s)=\int dq_0\int dt_0\left\{\frac{g(q_0,t_0)}{g(q,t)}.G_c^{(2)}(q,t,s;q_0,t_0,0)\right\}.\Psi^{(3)}(q_0,t_0,0)\,. \tag{2.56}$$

La transformation lineaire de la fonction d'onde dans (2.55) à évidemment des conséquences pour les propagateurs. Le propagateur causal $G_c^{(2)}$est mappé sur un nouveau que nous notons $G_c^{(3)}$

$$G_c^{(3)}(q,t,s;q_0,t_0,0)=\frac{g(q_0,t_0)}{g(q,t)}.G_c^{(2)}(q,t,s;q_0,t_0,0)\,. \tag{2.57}$$

2.2.4 Evaluation du propagateur de courte durée

Utiliser l'identité évidente

$$1=\frac{g(q_0,t_0)}{g(q,t)}.\left\{\prod_{n=0}^{N-1}\frac{g(q_n,t_n)}{g(q_{n+1},t_{n+1})}\right\} \tag{2.58}$$

en (2.52)et en comparant le résultat avec la relation (2.57)de la causalité long durée propagateurs $G_c^{(2)}$ et $G_c^{(3)}$, nous deduirons une relation similaires pour les propagateurs correspondant à court durée $G^{(2)}$ et $G^{(3)}$:

$$G^{(3)}(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0)=\frac{g(q_n,t_n)}{g(q_{n+1},t_{n+1})}\;.\;G^{(2)}(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0)\quad. \tag{2.59}$$

Conformément à la précédente considerations ,nous sommes intéressés au propagateur à courte durée $G^{(3)}$à une précision de l'ordre ε_s ,nous suffit de traiter avec le quotient $\frac{g(q_n,t_n)}{g(q_{n+1},t_{n+1})}$,parceque $G^{(2)}$ a été traitée dans (2.51).En appliquant à nouveau les deux régles (2.47), nous obtenons une abréviation analogue à(2.48)

$$\frac{g(q_n,t_n)}{g(q_{n+1},t_{n+1})}=1-\frac{g'}{g}.\Delta q_n+\frac{1}{2}\frac{g''}{g}.\Delta q_n^2-\frac{\dot{g}}{g}.h'^2\varepsilon_s\ . \tag{2.60}$$

Une combinaison de (2.51) , (2.59) et (2.60) mène directement au propagateur à court durée $G^{(3)}$:

$$\begin{aligned} G^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0\right) &= \sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}\delta\left(\Delta t_n-\varepsilon_s h'^2\right)\left\{1-\frac{g'}{g}.\Delta q_n+\frac{1}{2}\frac{g''}{g}.\Delta q_n^2-\frac{\dot{g}}{g}.h'^2\varepsilon_s\right\} \\ & \times\left\{1-\frac{h''}{h'}\Delta q_n+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}\Delta q_n^2-\dot{h}'h'\varepsilon_s\right\} \\ & \exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\left[\Delta q_n^2-\frac{h''}{h'}\Delta q_n^3+\left(\frac{1}{3}\frac{h'''}{h'}+\frac{1}{4}\frac{h''^2}{h'^2}\right)\Delta q_n^4\right.\right. \\ & \left.+2\dot{h}h'\Delta q_n\varepsilon_s-2\dot{h}'h'\Delta q_n^2\varepsilon_s-\dot{h}h''.\Delta q_n^2\varepsilon_s+\dot{h}^2h'^2\varepsilon_s^2\right] \\ & \left.-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s h'^2V\left(h\right)\right\}. \end{aligned} \tag{2.61}$$

Détermination de l'équation différentielle partielle

Nous en déduisons maintenant l'équation differentielle partielle pour la nouvelle fonction d'onde $\Psi^{(3)}$qui correspond au propagateur à courte durée $G^{(3)}$. Nous notons que la dérivée partielle de la fonction d'onde $\Psi^{(3)}$par rapport au pseudo-temps s peut etre écrite comme limite

$$\frac{\partial}{\partial s}\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right)=\lim_{\varepsilon_s\rightarrow 0}\frac{\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s+\varepsilon_s\right)-\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right)}{\varepsilon_s}. \tag{2.62}$$

Pour évaluer (2.62), nous tenons compte du fait que les deux fonctions d'onde $\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right)$ et $\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s+\varepsilon_s\right)$ sont liées l'une à l'autre par l'évolution à courte durée

$$\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s+\varepsilon_s\right)=\int dq_n\int dt_n G^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},\varepsilon_s;q_n,t_n,0\right)\Psi^{(3)}\left(q_n,t_n,s\right). \tag{2.63}$$

Nous insérons le propagateur à courte durée $G^{(3)}$de (2.61)dans(2.63)et nous substituons les variables d'intégration :

$$\xi_n\left(q_n\right)=q_n-q_{n+1}=-\Delta q_n \qquad et \qquad \tau_n\left(t_n\right)=t_n-t_{n+1}=-\Delta t_n. \tag{2.64}$$

En appliquant les régles données dans(2.47), nous étendons l'intégrale complète en puissances de ε_s, en gardant le facteur qui décrit la contribution de la particule libre. Nous effectuons en outre l'intégration au cours du temps τ_n pour obtenir le résultat provisoire

$$\begin{aligned}
\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s+\varepsilon_s\right) &= \int d\xi\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}}\exp\left\{-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\xi^2\right\} \\
&\times\left[1-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\left\{\frac{h''}{h'}\xi^3+\left(\frac{1}{3}\frac{h'''}{h'}+\frac{5}{4}\frac{h''^2}{h'^2}\right)\xi^4\right.\right. \\
&\left.-2\dot{h}h'\xi\varepsilon_s-2\dot{h}'h'\xi^2\varepsilon_s-3\dot{h}h''\xi^2\varepsilon_s+\dot{h}^2h'^2\varepsilon_s^2\right\} \\
&+\frac{1}{2}\left(\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\right)^2\left\{\frac{h''^2}{h'^2}\xi^6-4\dot{h}h''\xi^4\varepsilon_s+4\dot{h}^2h'^2\xi^2\varepsilon_s^2\right\} \\
&-\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s h'^2V\left(h\right)+1+\frac{g'}{g}\xi+\left(\frac{1}{2}\frac{g''}{g}+\frac{g'}{g}\frac{h''}{h'}\right)\xi^2 \\
&-\frac{\dot{g}}{g}h'^2\varepsilon_s-\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}\left\{\frac{g'}{g}\frac{h''}{h'}\xi^4-2\frac{g'}{g}\dot{h}h'\xi^2\varepsilon_s\right\} \\
&\left.+\frac{h''}{h'}\xi+\frac{1}{2}\frac{h'''}{h'}\xi^2-\dot{h}'h'\varepsilon_s\right]\left\{1+\xi.\frac{\partial}{\partial q_{n+1}}\right. \\
&\left.+\frac{1}{2}\xi^2.\frac{\partial^2}{\partial q_{n+1}^2}-h'^2\varepsilon_s.\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\right\}.\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right).
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Les intégrales de Fresnel restantes conduisent à

$$\left\langle\Delta\xi^{2n}\right\rangle=\int d\xi\xi^{2n}.\exp\left\{-\lambda\xi^2\right\}=\frac{1.3.......(2n-1)}{(2\lambda)^n}\text{ avec }\ \lambda=\frac{m}{2i\hbar\varepsilon_s}. \tag{2.66}$$

Par ailleurs, la formule d'intégration (2.66) justifie la règle d'extension mentionnée précédemment (2.47) ,en utilisant (2.66),(2.65)et(2.62), nous pouvons déterminer l'équation différentielle partielle de la fonction d'onde$\Psi^{(3)}$

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right) = \left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_{n+1}^2}-\frac{\hbar^2}{m}\left[\frac{g'}{g}-\frac{1}{2}\frac{h''}{h'}-\frac{im}{\hbar}\dot{h}h'\right].\frac{\partial}{\partial q_{n+1}} +V^{(3)}-i\hbar h'^2\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\right\}\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right), \tag{2.67}$$

où

$$V^{(3)}=h'^2V\left(h\right)-i\hbar\frac{\dot{g}}{g}h'^2-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\frac{g''}{g}-\frac{g'}{g}\left[\frac{h''}{h'}+\frac{2im}{\hbar}h'\dot{h}\right]\right\}. \tag{2.68}$$

La deuxième condition

Jusqu'à présent, nous n'avons pas spécifié la fonction complexe g . pour obtenir de manière concluante une nouvelle équation de schrodinger formelle pour la fonction d'onde, il est toutefois indispensable que la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la nouvelle coordonnée q_{n+1}dans (2.67)disparaisse. pour simplifier (2.67) dans ce sens, nous imposons la deuxième condition :

$$\frac{g'}{g}=\frac{1}{2}\frac{h''}{h'}+\frac{im}{\hbar}\dot{h}h'. \tag{2.69}$$

L'integration produit une relation entre la transformation des coordonnées et la fonction d'onde

$$g\left(q,t\right)=\sqrt{h'\left(q,t\right)}\exp\left\{\frac{im}{\hbar}\int^{q}\dot{h}\left(\tilde{q},t\right)h'\left(\tilde{q},t\right)d\tilde{q}\right\}. \tag{2.70}$$

En utilisant (2.70)le différentiel partiel(2.67)et le potentiel(2.68)sont convertis en

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial s}\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right)=\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial q_{n+1}^2}+V^{(3)}-i\hbar h'^2\frac{\partial}{\partial t_{n+1}}\right\}\Psi^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1},s\right), \tag{2.71}$$

$$V^{(3)} = h'^2 \int h' \left\{ m\dot{h} + \frac{\partial V(h)}{\partial h} \right\} dq_{n+1} - i\hbar \dot{h}' h' + \frac{\hbar^2}{m} \left\{ \frac{3}{8} \frac{h''^2}{h'^2} - \frac{1}{4} \frac{h'''}{h'} \right\}. \tag{2.72}$$

Formule de transformation du propagateur

Nous revenons du niveau de l'equation aux dérivées partielles aux intégrales de chemin associées et obtenons pour le propagateur causal $G_c^{(3)}$

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}(q,t,s;q_0,t_0,0) &= \Theta(s) \lim_{\varepsilon_s} \left\{ \prod_{n=1}^{N-1} \int dq_n \int dt_n \right\} \\ &\times \left\{ \prod_{n=0}^{N-1} \delta\left(t_{n+1} - t_n - \varepsilon_s h'(q_{n+1}, t_{n+1})^2\right) \sqrt{\frac{m}{2\pi i \hbar \varepsilon_s}} \right\} \\ &\times \exp\left\{ \frac{i}{\hbar} \varepsilon_s \sum_{n=0}^{N-1} \left[\frac{m}{2} \left(\frac{q_{n+1} - q_n}{\varepsilon_s} \right)^2 - V^{(3)}(q_{n+1}, t_{n+1}) \right] \right\} \end{aligned} \tag{2.73}$$

Jusqu'à présent, nous avons utilisé tous les avantages proposé par le prolongement de l'espace de Hilbert original, donc nous avons l'intention de supprimer cette extension à ce stade par l'évaluation de toutes les intégrales sur le temps dans(2.73) .

Tout d'abord, nous notons que les N fonctions delta sécurisé un ensemble de la différence des équations qui sont compatibles avec (2.38), sa spécialisation $f_l = f$,$f_r = 1$dans (2.40) et la première condition (2.50) :

$$t_{n+1} - t_n = \varepsilon_s . h'(q_{n+1}, t_{n+1})^2 \qquad pour \quad n = 0, 1....., N-1. \tag{2.74}$$

En commencant par l'indice de $n = N - 1$et en cessant avec n=0 ,les équations différentielles peuvent etre considérées comme un processus d'itération qui détermine successivement les valeurs de t_n,en terme de ε_s, et l'heure finale t :

$$t_n = t_n(\varepsilon_s, t) \qquad pour \quad n = 0, 1....., N-1. \tag{2.75}$$

La solution de la procédure d'itération (2.75) donne

$$t-t_n=\sum_{m=n}^{N-1}\varepsilon_s.h'\left(q_{m+1},t_{m+1}\right)^2 \qquad pour \quad n=0,1.....,N-1. \tag{2.76}$$

Dans (2.73), le nombre de fonctions delta dépasse le nombre d'intégrales temporelles d'un terme, Cela à pour conséquence qu'une fonction delta survivra éventuellement si nous évaluons les integration de Fourier pour la fonction delta restante,on obtient de (2.73) :

$$\begin{aligned} G_c^{(3)}\left(q,t,s;q_0,t_0,0\right) &= \Theta\left(s\right)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E\left(t-t_0\right)\right\} \\ & \lim_{\varepsilon_s}\left\{\prod_{n=1}^{N-1}\int dq_n\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}\right)^{\frac{N}{2}} \\ & \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon_s}\right)^2\right.\right. \\ & \left.\left.-V^{(3)}\left(q_{n+1},t_{n+1}\right)+E.h'^2\left(q_{n+1},t_{n+1}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{2.77}$$

ou t_n est déterminé à partir de (2.76) .

Si nous combinons les transformations successives du propagateur(2.44),(2.27)et (2.57)avec (2.77), nous pouvons écrire notre résultat final sous la forme d'une formulation de transformation du propagateur : nous avons une forme du propagateur de causalité original $G_c$par rapport aux coordonnées q et aux pseudo temps s :

$$G_c\left(x,t;x_0,t_0\right)=F\left(x,t;x_0,t_0\right).\int_0^{+\infty}dS\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E\left(t-t_0\right)\right\}G_{c,E}^{(4)}\left(h^{-1}\left(x,t\right),s;h^{-1}\left(x_0,t_0\right),\right. \tag{2.78}$$

par comparaison avec (2.70) le préfacteur F est donnée par

$$F(x,t;x_0,t_0) = \sqrt{h'\left(h^{-1}(x,t),t\right).h'\left(h^{-1}(x_0,t_0),t_0\right)} \exp\left\{\frac{im}{\hbar}.\left[\int^{h^{-1}(x,t)} \dot{h}(q,t)\,h'(q,t)\,dq - \int^{h^{-1}(x_0,t_0)} \dot{h}(q,t_0)\,h'(q,t_0)\,dq\right]\right\} \quad (2.79)$$

nous obtenons la forme du potentiel $V_E^{(4)}$ sous forme discrets

$$V_E^{(4)} = h'^2\left[\int h'\left\{m\ddot{h} + \frac{\partial V(h)}{\partial h}\right\} dq_{n+1} - E\right] - i\hbar\dot{h}'h' + \frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''^2}{h'^2} - \frac{1}{4}\frac{h'''}{h'}\right\}, \quad (2.80)$$

ou nous avons utilisé l'abréviation introduit dans (2.48), ou t_n est donnée par (2.76)

La relation (2.81) entre l'original potentiel V et le nouveau potentiel $V_E^{(4)}$peut être considérée comme une expansion dans les pouvoirs de la constate de Planck $h = 2\pi\hbar$, qui s'arrete exactement aprés deuxième ordre.Cela semble etre cohérent avec le fait que l'équation de schrodinger elle même ne comprend que des termes jusqu'au deuxième ordre de la constante de Planck,

Nous voulons insister sur la forme étonnante du terme d'ordre $\hbar^0$qui suggère la validité de l'équation classique de Newton pour la fonction arbitraire h. La signification physique précise de ce terme reste encore incertainne.

Comme Cela a été montré lors de la dérivation de ce résultat,il a était possible de se débarrasser de la deuxième condition (2.70) élimine la dérivée partielle du premier ordre par rapport à la nouvelle coordonnée dans le hamiltonien correspondant.L'inconvénient de cette approche est manifeste sous la forme de l'expression (2.81) pour le potentiel $V_E^{(4)}$ en raison de la partie imaginaire possible du potentiel $V_E^{(4)}$,Nous devons traiter un hamiltonien transformé qui est en général non hermitien.

2.2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenter une genéralisation des transformations du propagateur de Duru-Kleinert, Notre généralisation étend la classe des transformations de propagateurs entre differents systèmes de mécanique quantique, on à fait une construction de la fonction de Green avec une régularisation temporelle (on à parlé sur l'extension de l'espace de Hilbert,conséquences pour le propagateur causal, sans oublier le point de vue général de l'extension et la representation discrèt du propagateur causal avec une spécialisation supplémentaire), transformation ponctuelle en outre la transformation de la fonction d'onde, en plus on à effectué une évaluation du propagateur de courte durée. Notre résultat contient les transformations du propagateur Duru-Kleinert comme un cas particulier.

Chapitre 3

Applications

La formule de transformation du propagateur G_c décrit toute une famille de correspondances entre des systèmes de mécanique quantique. pour chaque fonction $h = h(q,t)$, il est possible de transformer un systeme mécanique quantique donné avec le potentiel V en un nouveau systeme défini par $V_E^{(4)}$, en choisissant des fonctions spéciales $h = h(q,t)$, nous étudions deux situations interessantes qui peuvent être considérées comme doubles dans le sens formel suivant :

1. La fonction h ne depend pas explicitement du temps

$$h(q,t) = h(q) \tag{3.1}$$

et le coté droit des équations de différence(2.74) est strictement fonction de la nouvelle coordonnée q

$$t_{n+1} - t_n = \varepsilon_s . h'(q_{n+1})^2 \qquad pour \quad n = 0, 1....., N-1. \tag{3.2}$$

2. Si la fonction h est linéaire dans la nouvelle coordonnée q avec

$$h(q,t) = q.c(t), \tag{3.3}$$

le coté droit des équations de différence(2.74) est strictement fonction du temps t

$$t_{n+1}-t_n=\varepsilon_s.c\left(t_{n+1}\right)^2 \qquad pour \quad n=0,1.....,N-1 \tag{3.4}$$

En raison de la spécialisation (2.87) le potentiel transformée $V_E^{(4)}$dans (2.86) apparait à être indépendant de t_n ,il devient donc pas nécessaire pour insérer le explicite solution de la différence des équations(2.88) dans le potentiel $V_E^{(4)}$.en tenant compte des équations de (2.83)à(2.86),la spécialisation(2.87) conduit à une famille de transformations qui sont connu sous le nom Duru-Kleinert propagateur transformations :

$$\begin{aligned} G_c\left(x,t;x_0,t_0\right) &= \sqrt{h'h^{-1}\left(x\right).h'\left(h^{-1}\left(x_0\right)\right)}.\int_0^{+\infty}ds\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar} \\ &\times\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E\left(t-t_0\right)\right\}.G_{c,E}^{(4)}\left(h^{-1}\left(x\right),s;h^{-1}\left(x_0\right),0\right). \end{aligned} \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned} G_{c,E}^{(4)}\left(q,s;q_0,\right) &= \Phi\left(s\right)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\pi_{n=1}^{N-1}\int dq_n\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}\right)^{\frac{N}{2}} \\ &\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon_s}\right)^2-V_E^{(4)}\left(q_{n+1}\right)\right]\right\}, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$V_E^{(4)}\left(q_n\right)=h'\left(q\right)^2\left\{V\left(h\left(q\right)\right)-E\right\}+\frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''\left(q\right)^2}{h'\left(q\right)^2}-\frac{1}{4}\frac{h'''\left(q\right)}{h'\left(q\right)}\right\}. \tag{3.7}$$

C'est parceque nous récupérons les transformations du propagateur de Duru-Kleinert. comme un cas particulier,que nous choisissons d'appeler notre approche transformations généralisées du propagateur de Duru-Kleinert

3.1 Transformation de la particule libre

Avant de venir à notre deuxième cas spécial [9], nous discutons brièvement la question de savoir s'il est possible d'effectuer une transformation de propagateur Duru-Kleinert d'un système quantique donné en une particule libre. Cela signifie que nous recherchons une fonction $h(q)$ qui conduit à le nouveau potentiel

De ce qui précède on à la fonction :

$$\begin{aligned} G_c\left(x,t;x_0,t_0\right) &= F\left(x,t;x_0,t_0\right).\int_0^{+\infty} dS \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \\ &\times \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}E\left(t-t_0\right)\right\} G_{c,E}^{(4)}\left(h^{-1}\left(x\right),s;h^{-1}\left(x_0\right),0\right). \end{aligned} \tag{3.8}$$

ou

$$F\left(x,t;x_0,t_0\right) = \sqrt{h'\left(h^{-1}\left(x\right)\right).h'h^{-1}(x_0))} \tag{3.9}$$

avec

$$\begin{aligned} G_{c,E}^{(4)}\left(q,s;q_0,\right) &= \Phi\left(s\right)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\pi_{n=1}^{N-1}\int dq_n\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}\right)^{\frac{N}{2}} \\ &\times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s \sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon_s}\right)^2 - V_E^{(4)}\left(q_{n+1}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

et

$$V_E^{(4)}\left(q_n\right) = h'\left(q\right)^2\left\{V\left(h\left(q\right)\right)-E\right\} + \frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''\left(q\right)^2}{h'\left(q\right)^2} - \frac{1}{4}\frac{h'''\left(q\right)}{h'\left(q\right)}\right\} \tag{3.11}$$

Dans notre cas :

$$V_E^{(4)}\left(q\right) = 0 \tag{3.12}$$

alors que

$$h'(q)^2\left\{V(h(q))-E\right\}+\frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''(q)^2}{h'(q)^2}-\frac{1}{4}\frac{h'''(q)}{h'(q)}\right\}=0 \tag{3.13}$$

donc

$$h'(q)^2 V(h(q))+\frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''(q)^2}{h'(q)^2}-\frac{1}{4}\frac{h'''(q)}{h'(q)}\right\}=h'(q)^2 E \tag{3.14}$$

Nous obtenons une équation différentielle ordinaire non linéaire du troisième ordre pour la fonction $h=h(q)$:

$$\frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''(q)^2}{h'(q)^2}-\frac{1}{4}\frac{h'''(q)}{h'(q)}\right\}+h'(q)^2 .V(h(q))=h'(q)^2 .E. \tag{3.15}$$

Cette dernière ne dépend pas explicitement de la coordonnée q , alors qu'il est possible de réduire l'ordre de cette équation différentielle ordinaire. Nous choisissons comme nouvelle variable la fonction $h(q)$ elle meme :

$$p=h(q). \tag{3.16}$$

d'ou

$$\frac{\hbar^2}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''(q)^2}{h'(q)^2}-\frac{1}{4}\frac{h'''(q)}{h'(q)}\right\}+h'(q)^2 .V(p)=h'(q)^2 .E \tag{3.17}$$

Donc ,une nouvelle fonction $h_1=h_1(q)$ est identifiée avec la première dérivée de la fonction $h(q)$:

$$h_1(q)=h'(q). \tag{3.18}$$

Alors que l'equation différentielle ordinaire pour la fonction $h(q)$:

$$h_1(h(q))=h'(q). \tag{3.19}$$

On obtient la deuxième et la troisième dérivée de la fonction originale$h(q)$en fonction de la nouvelle fonction $h_1(p)$,si on choisit les abréviations

$$h_1'(p) = \frac{d}{dp}h_1(p) \qquad et \quad h'(q) = \frac{d}{dp}h(q), \tag{3.20}$$

nous avons

$$\frac{h''(q)}{h'(q)} = h_1'(p) \qquad et \qquad \frac{h'''(q)}{h'(q)} = h_1'(p)^2 + h_1(p)\,h_1''(p). \tag{3.21}$$

donc

$$\frac{3}{8}\frac{\hbar^2}{m}h_1'(p)^2 - \frac{1}{4}\frac{\hbar^2}{m}(h_1'(p)^2 + h_1(p)\,h_1''(p)) + h'(q)^2.V(p) = h'(q)^2.E \tag{3.22}$$

Finalement l'équation différentielle ordinaire non linéaire de deuxième ordre pour la nouvelle fonction est :

$$\frac{\hbar^2}{8m}.\frac{h_1'(p)^2}{h_1(p)^2} - \frac{\hbar^2}{4m}.\frac{h_1''(p)}{h_1(p)} + V(p) = E. \tag{3.23}$$

La substitution ultérieure

$$h_1(p) = h_2(p)^2 \tag{3.24}$$

transforme l'équation différentielle ordinaire en l'équation de schrodinger indépendante du temps du potentiel original V

$$-\frac{\hbar^2}{2m}.h_2''(p) + V(p)\,h_2(p) = E.h_2(p). \tag{3.25}$$

le propagateur causal prend la forme

$$G_{c,E}^{(4)}\left(q,s;q_{0},\right) = \Phi\left(s\right)\lim_{\varepsilon_{s}}\left\{\pi_{n=1}^{N-1}\int dq_{n}\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_{s}}\right)^{\frac{N}{2}} \times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_{s}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_{n}}{\varepsilon_{s}}\right)^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2m}.h_{2}''\left(p\right)+V\left(p\right)h_{2}\left(p\right)\right]\right\} \tag{3.26}$$

l'equation dernière nous conduit à

$$G_{c}\left(x,t;x_{0},t_{0}\right) = F\left(x,t;x_{0},t_{0}\right).\int_{0}^{+\infty}dS\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dE}{2\pi\hbar}\Phi\left(s\right)\lim_{\varepsilon_{s}}\left\{\pi_{n=1}^{N-1}\int dq_{n}\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_{s}}\right)^{\frac{N}{2}} .\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[E\left(t-t_{0}\right)+\varepsilon_{s}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_{n}}{\varepsilon_{s}}\right)^{2}+\frac{\hbar^{2}}{2m}.h_{2}''\left(p\right)+V\left(p\right)h_{2}\left(p\right)\right]\right]\right\} \tag{3.27}$$

Ce résultat signifie qu'il est inutile de demander une transformation du Duru-Kleinert qui change directement un système mécanique quantique donné au systéme de particules libres. Cependant, aidé par ces transformations généralisées du propagateur de Duru-Kleinert, nous démontrons comment un changement à la particule libre peut effectivement etre obtenu pour le cas particulier de l'oscillateur harmonique. Nous reproduisons ainsi un résultat obtenu par Inomata et al [**?**, **?**].

3.2 L'oscillateur harmonique

Notre deuxième cas particulier [9] est constitué par le système quantique bien connu de l'ocsillateur harmonique défini par le potentiel

$$V\left(x\right)=\frac{m}{2}\omega^{2}x^{2}. \tag{3.28}$$

alors que

$$V\left(h\right)=\frac{m}{2}\omega^{2}h^{2}\quad\text{et sa dérivée }\frac{\partial V\left(h\right)}{\partial h}=m\omega^{2}h \tag{3.29}$$

donc le potentiel transformé $V_{E}^{(4)}$prend la forme

$$V_{E}^{(4)}=h'^{2}\left[\int h'\left\{m\ddot{h}+m\omega^{2}h\right\}dq_{n+1}-E\right]-i\hbar\dot{h}'h'+\frac{\hbar^{2}}{m}\left\{\frac{3}{8}\frac{h''^{2}}{h'^{2}}-\frac{1}{4}\frac{h'''}{h'}\right\} \tag{3.30}$$

il semble approprié de fixer la fonction arbitraire h en demandant l'équation classique de Newton pour l'oscillateur harmonique :

$$m\frac{\partial^{2}}{\partial t^{2}}h\left(q,t\right)=-\frac{\partial}{\partial h\left(q,t\right)}V\left(h\left(q,t\right)\right). \tag{3.31}$$

Sa solution générale est donnée par (3.3),la fonction c est déterminée comme

$$c\left(t\right)=c_{1}.\cos\left(\omega t\right)+c_{2}\sin\left(\omega t\right), \tag{3.32}$$

ou c_1,c_2 sont des constantes arbitraires

Et cela nous amène à

$$q.c\left(t\right)=q(c_{1}.\cos\left(\omega t\right)+c_{2}\sin\left(\omega t\right)) \tag{3.33}$$

le choix de la fonction h à l'avantage que le potentiel transformé s'avére assez simple :

$$V_{E}^{(4)}\left(q_{n+1},t_{n+1}\right)=-i\hbar c\left(t_{n+1}\right)\dot{c}\left(t_{n+1}\right)-Ec\left(t_{n+1}\right)^{2}. \tag{3.34}$$

Le nouveau propagateur causal $G_{c,E}^{(4)}$:

$$G_{c,E}^{(4)}(q,s;q_0,0) = \Phi(s)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\pi_{n=1}^{N-1}\int dq_n\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s \sum_{n=0}^{N-1}\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon_s}\right)^2 + i\hbar c(t_{n+1})\dot{c}(t_{n+1}) - Ec(t_{n+1})^2\right\} \tag{3.35}$$

Il ne faut pas oublier que les grandeure t_n,qui dépendent de ε_s et du dernier temps t selon (2.75),sont déterminées par les équations différentielles (3.4)

$$G_{c,E}^{(4)}(q,s;q_0,0) = \Phi(s)\lim_{\varepsilon_s}\left\{\pi_{n=1}^{N-1}\int dq_n\right\}\left(\frac{m}{2\pi i\hbar\varepsilon_s}\right)^{\frac{N}{2}} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\varepsilon_s \sum_{n=0}^{N-1}\frac{m}{2}\left(\frac{q_{n+1}-q_n}{\varepsilon_s}\right)^2\right\} \cdot \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\sum_{n=0}^{N-1}\left[\left(i\hbar\frac{\dot{c}(t_{n+1})}{c(t_{n+1})} - E\right)\cdot(t_{n+1}-t_n)\right]\right\}. \tag{3.36}$$

En notation continue,les valeurs t_n convertissent une fonction entière $t(\sigma)$ en fonction de s et t :

$$t(\sigma) = t(\sigma,s,t) \qquad \textit{pour} \quad \sigma \in [0,s]. \tag{3.37}$$

Le problème initial de la fonction $t(\sigma)$ est donné par

$$\frac{d}{d\sigma}t(\sigma) = c(t(\sigma))^2 \qquad \textit{pour} \quad \sigma \in [0,s] \quad \textit{et} \qquad t(s) = t, \tag{3.38}$$

ou la séparation des variables entraine

$$\int_{t(\sigma)}^{t}\frac{dt(\sigma)}{c(t(\sigma))^2} = \int_{\sigma}^{s}d\sigma \qquad \textit{pour} \quad \sigma \in [0,s]. \tag{3.39}$$

En utilisant l'expression concrète (3.32) pour la fonction c ,on obtient aprés l'intégration triviale une équation implicite pour la fonction $t(\sigma)$:

$$s-\sigma=\frac{\sin\left[\omega\left(t-t\left(\sigma\right)\right)\right]}{\omega}.\frac{1}{c\left(t\right)c\left(t\left(\sigma\right)\right)}\qquad\qquad pour\ \ \sigma\in\left[0,s\right].\tag{3.40}$$

La version continue de nouveau propagateur causal $G_{c,E}^{(4)}$ est de la forme suivante :

$$\begin{aligned}G_{c,E}^{(4)}\left(q,s;q_0,0\right) &= \Phi\left(s\right).\int_{q(0)=q_0}^{q(s)=q}\wp q\left(\sigma\right)\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_0^s\frac{m}{2}\dot{q}\left(\sigma\right)^2 d\sigma\right\}\\ &\quad\times\exp\left\{\frac{i}{\hbar}\int_{t_0(s)}^{t}\left[i\hbar\frac{\dot{c}\left(t\left(\sigma\right)\right)}{c\left(t\left(\sigma\right)\right)}-E\right]dt\left(\sigma\right)\right\},\end{aligned}\tag{3.41}$$

ou $t_0\left(s\right)$ signifie une abréviation pour $t\left(0,s,t\right)$de (3.37) et est implicitement définie dans (3.40) pour $\sigma=0$:

$$s=\frac{\sin\left[\omega\left(t-t_0\right)\right]}{\omega}.\frac{1}{c\left(t\right)c\left(t_0\left(s\right)\right)}.\tag{3.42}$$

En effectuant explicitement l'intégration sur $t\left(\sigma\right)$,le propagateur causal $G_{c,E}^{(4)}$ s'avère etre proportionnel au propagateur G_{FP} de la particule libre par rapport à la nouvelle coordonnée q et aux pseudo temps s :

$$G_{c,E}^{(4)}\left(q,s;q_0,0\right)=\Phi\left(s\right).\exp\left\{\frac{i}{\hbar}E\left(t-t_0\left(s\right)\right)\right\}.\frac{c\left(t_0\left(s\right)\right)}{c\left(t\right)}.G_{FP}\left(q,s;q_0,0\right).\tag{3.43}$$

On soppose que le propagateur G_{FP} de la particule libre est connu en évaluant par exemple la forme discrète de l'integrale de chemin correspondante :

$$G_{FP}\left(q,s;q_0,0\right)=\sqrt{\frac{m}{2\pi i\hbar s}}.\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}.\frac{\left(q-q_0\right)^2}{s}\right\}.\tag{3.44}$$

En insérant (3.29) dans la formule de transformation du propagateur (2.83) ,on mappe le propagateur de la particule libre au propagateur de l'oscillateur harmonique

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = F(x,t;x_0,t_0)\int_0^{+\infty} ds \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dE}{2\pi\hbar} \times \exp\left\{\frac{i}{\hbar}E(t-t_0(s))\right\}\Phi(s).\frac{c(t_0(s))}{c(t)}.G_{FP}(q,s;q_0,0), \tag{3.45}$$

ou le préfacteur F à partir de (2.84) dois etre spécialisée dans la correspondance de notre choix de la fonction h dans (3.03) :

$$F(x,t;x_0,t_0) = \sqrt{c(t)\,c(t_0)}.\exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\left[\frac{\dot{c}(t)}{c(t_0)}x_0^2\right]\right\}. \tag{3.46}$$

Dans (3.31) nous avons d'abord évaluer la partie intégrante de plus E et obtenir une delta fonction :

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = F(x,t;x_0,t_0).\frac{c(t_0)}{c(t)}\int_0^{+\infty} ds\delta(t_0 - t_0(s)).\Phi(s).G_{FP}\left(\frac{x}{c(t)}, s; \frac{x_0}{c(t_0)}, 0\right). \tag{3.47}$$

Pour le reste intégrante au cours des pseudo temps s nous effectuer une substitution de l'intégration variable de s à $t_0(s)$ en utilisant la relation (3.26) :

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \Phi(t-t_0).F(x,t;x_0,t_0).\frac{c(t_0)}{c(t)}\int_0^{+\infty} dt_0(s)\left(-\frac{ds}{dt_0(s)}\right).\delta(t_0 - t_0(s)) \tag{3.48}$$
$$G_{FP}\left(\frac{x}{c(t)}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}.\frac{1}{c(t)\,c(t_0(s))}; \frac{x_0}{c(t_0)}, 0\right).$$

Les dérivés de $t_0(s)$ en ce qui concerne s est obtenu à partir de (3.25) pour $\sigma = 0$:

$$\frac{dt_0(s)}{ds} = -c(t_0(s))^2. \tag{3.49}$$

Avec (3.35) le reste intégrante dans (3.34) plus $t_0(s)$ peut etre calculée :

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \Phi(t-t_0).F(x,t;x_0,t_0).\frac{1}{c(t)\,c(t_0)} \times G_{FP}\left(\frac{x}{c(t)}\frac{\sin[\omega(t-t_0)]}{\omega}.\frac{1}{c(t)\,c(t_0)};\frac{x_0}{c(t_0)},0\right). \tag{3.50}$$

Insertion de l'expression (3.30) pour le propagateur G_{FP} de la particule libre et (3.32) pour le préfacteur F dans (3.36),nous obtenez

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \Phi(t-t_0).\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin[\omega(t-t_0)]}}. \exp\left\{\frac{im}{2\hbar}\left[\frac{\dot{c}(t)}{c(t_0)}x_0^2-\frac{\dot{c}(t_0)}{c(t_0)}x_0^2+\frac{\omega}{\sin[\omega(t-t_0)]}.c(t)\,c(t_0)\left(\frac{x}{c(t)}-\frac{x_0}{c(t_0)}\right)^2\right]\right\}. \tag{3.51}$$

En utilisant la forme explicite (3.20) de la fonction c ,on dérive de (3.37) le propagateur bien connu de l'oscillateur harmonique . Evidemment les constantes arbitraires c_1, c_2 s'annulent et on obtient

$$G_c(x,t;x_0,t_0) = \Phi(t-t_0).\sqrt{\frac{m\omega}{2\pi i\hbar\sin[\omega(t-t_0)]}}. \exp\left\{\frac{im\omega}{2\hbar\sin[\omega(t-t_0)]}\left[\left(x_0^2+x^2\right)\cos[\omega(t-t_0)]-2x_0x\right]\right\}. \tag{3.52}$$

Conclusion générale

Dans ce travail nous avons traité certains problèmes de la mécanique quantique non relativiste au moyen de l'approche des integrales de chemins de Feynman, plus précisément l'utilisation de la méthode de Duru-Kleinert dite téchnique des transformations spatio-temporelles

Comme premier point, nous avons étudier les notions fondamentales du formalisme des intégrales de chemins, suivie par la méthode Duru-Kleinert appliquée sur une action d'une particule de masse constante soumise à un potentiel qui pose un problème de singularité, la méthode est exécuté par une introduction des fonctions régulatrices qui engendre une reparamétrisation de temps, suivie par une transformation ponctuelle, les corrections dues aux développements au post-point, se combinent pour donner une correction totale, qui se traduit au niveau de l'action comme un potentiel effectif en $\hbar^2$ de nature purement quantique. Nous avons examiné quelques faits de base concernant le lient entre la description de la mécanique quantique, Nous definissons notre notation et résumer les formules importantes, comme deuxième point, et en developpent la transformation voulue du propagateur dans la representation integrale du chemin lagrangien, la transformation est basée sur le fait que chaque grandeur physique qui apparait dans l'équation de Schrodinger peut être modifiée en appliquant une cartographie individuelle appropriée, cette observation conduit à trois cartographie bient séparées, c'est-a-dire du temps, de l'espace et de la fonction d'onde, chacune de ces trois mappages independants ajoute une fonction inconnue qui est à notre disposition, Le troisième point traite les deux point, premierement les transformations de propagateur de Duru-Kleinert sont recouvertes comme un cas particulier, deuxiement la transformation de la particule libre en oscillateur harmonique est reconsidérée de notre point de vue.

Bibliographie

[1] Schrodinger, E. : Ann. Phys 9 (Paris) 79, (1926) 361

[2] R. P. Feynman, Rev. Mod. Phys 20 (1948) 367.

[3] R. P. Feynman and A. Hibbs, "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hil, NewYork, (1965).

[4] H.kleinert, Path integrals in Quantum Mechanics Statistics and Polymer Physics, second edition, World scientific,singapore,new jersy,(1995).

[5] Cai, P.Y., Inomata, A., Wang, P. : Phys. Lett. 91, (1982) 331

[6] A. Messiah, Mecanique Quantique, Edition Dunod, Paris, (1964).
L. Landau et E. Lifchitz, Mecanique Quantique, Edition Mir, Moscou, (1967).

[7] R. M. Wilcox, J. Math. Phys. 8, (1967) 962–982 .

[8] J.Schwinger, phys. Rev. 82, (1951) 664.

[9] A. Pelster, A.Wunderlin, Z. Phys. B, Condensed Matter 89, (1992) 373-386.

ملخص:

في اطار ميكانيك الكم الغير نسبي تطرقنا الى طريقة تكامل المسارات في الفضاء الاحادي البعد اضافة الى تعميم تحويل "دورو- كلينارت" عن طريق ادخال تحويل مكاني متعلق بالزمن و تحويل اضافي على دالة الموجة.

هدا التعميم سمح بتوسيع مجال تحويل الناشر بين انضمة متعددة في الميكانيك الكمي و كتطبيق تمت مناقشته في هده المدكرة، تحصلنا على عبارة ناشر "دورو- كلينارت" للهزاز التوافقي بدلالة ناشر الجسيمة الحرة كحالة خاصة.

الكلمات المفتاحية:

تكامل المسارات، الناشر، الكمون الفعال، تحويل "دورو- كلينارت".

Abstrat

In the context of non-relativistic quantum mechanics, we have presented the path integrals method in one-dimensional space and a generalization of Duru-Kleinert propagator transformations by carrying out a time-dependent spatial transformation and systematically introducing a additional transformation of the wave function.

This generalization extends the class of propagator transformations between different systems of quantum mechanics, In out of Duru-Kleinert's propagator transformations, we obtain the representation of the free particle in the harmonic oscillator as a special case, Thus a result which was initially found by Inomata et al, but which is excluded by the Duru-Kleinert propagator transformations.

Keywords : **Path Integral, propagator, effectif potential, Duru-Kleinert space time transformations.**

Résumé

Dans le cadre de la mécanique quantique non relativiste, nous avons présenter la méthode des intégrales de chemin dans l'espace a une dimension et une généralisation des transformations du propagateur de Duru-Kleinert en effectuant une transformation spatiale dépendante du temps et en introduisant systématiquement une transformation supplémentaire de la fonction d'onde.

Cette généralisation étend la classe des transformations de propagateurs entre différents systèmes de mécanique quantique, En de hors des transformations du propagateur de Duru-Kleinert, nous obtenons la représentation de la particule libre dans l'oscillateur harmonique en tant que cas particulier, Ainsi un résultat qui à été initialement trouvé par Inomata et al, mais qui est exclue par les transformations du propagateur de Duru-Kleinert

Mots clés : **Intégrales de chemin, propagateur, potentiel effectif, transformation spatio-temporelles de Duru-Kleinert.**