

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE AKLI MOAND OULHADJE-BOUIRA



Faculté des Sciences et des Sciences Appliquées
Département GENIE CIVIL

Mémoire de fin d'étude

Présenté par :
Dadi Meriem
Mezine Ouarda

En vue de l'obtention du diplôme de **Master 02** en :

Filière : HYDRAULIQUE

Option : Ressources Hydriques.

Thème :

Simulation numérique du phénomène de coup de bélier par MATLAB

Devant le jury composé de :

Meridja Madani	MCB	UAMOB	Président
Kara Benyekhlef	MAA	UAMOB	Encadreur
Abed Mourad	MAA	UAMOB	Examinateur
Khaldi Ramzi	MAA	UAMOB	Examinateur

Année Universitaire 2017/2018

Remerciement

Tout d'abord nous remercions le bon Dieu pour sa bénédiction.

Nos remerciements vont également :

En premier lieu à notre promoteur « M^r Kara Benyekhlef » pour la confiance et l'attention qu'il nous a accordées tout au long de cette étude.

Tous les professeurs qui ont donné de leur savoir.

Mes parents, mes frères et sœurs, mes amis pour leurs soutient et leur conseils.

Enfin, toutes les personnes qui nous a aidées et qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.

M.Ouarda, D.Meriem

Dédicace

Nous dédions ce modeste travail en signe de respect et de reconnaissance à :

- ◆ *Nos très chers parents .*
- ◆ *Nos frères et sœurs.*
- ◆ *Tout ceux qui ont a aidé de près ou de loin dans notre travail.*
- ◆ *Tous nos amis de la specialite ressources hydrauliques.*

Liste des figures :

Figure I.1:	Ondes de translation dues à une variation brusque de débit, ΔQ	5
Figure I.2 :	Décomposition du coup de bélier d'ondes due à la fermeture d'une vanne.....	7
Figure I.3 :	La surpression due à la fermeture de la vanne.....	9
Figure I.4 :	Influence de la vitesse de l'écoulement v_1 sur la surpression dans un tube en.....	11
Figure I.5 :	la vitesse de propagation, ou célérité de l'onde « a » est donné par la formule «D'ALLIEVI ».	13
Figure I.6 :	Les soupapes de décharge.....	16
Figure I.7 :	Cheminée d'équilibre	17
Figure I.8 :	Réservoir d'air	18
Figure II.1:	Bilan de masse dans un tronçon de conduite.....	20
Figure II.2:	Contrainte latérale dans une conduite a parois mince.....	21
Figure II.3:	Bilan des forces exercées sur un tronçon de conduite.....	22
Figure III.1:	Lignes caractéristiques dans le plan (x, t).....	32
Figure III.2:	Intégration numérique des équations sur le plan (x, t).....	33
Figure III.3:	Réseau des caractéristiques pour le calcul du régime transitoire.....	36
Figure III.4:	Interpolation des variables H et Q aux pieds des caractéristiques (Larock et al., 2000).....	37
Figure III.5:	Droites caractéristiques aux limites du domaine (Wylie et Streeter, 1978).....	38
Figure IV.1:	interface Matlab.....	41
Figure IV.2:	Schéma d'utilisation du programme.....	42
Figure IV.3:	Le système étudié.....	43
Figure IV.4:	La programmation de coups de bélier sur Matlab.....	44
Figure V.1 :	Le système étudié.....	46
Figure V.2 :	Le modèle.....	47
Figure V.3 :	Evolution de la charge de pression (en m) à $x=0$ m.....	48
Figure V.4 :	Evolution de la charge de pression (en m) à $x=100$ m.....	49
Figure V.5 :	Evolution de la charge de pression (en m) à $x=200$ m.....	49

Figure V.6 :	Evolution de la charge de pression (en m) à $x=300\text{m}$	50
Figure V.7 :	Evolution de la charge de pression (en m) à $x=400\text{ m}$	50
Figure V.8 :	Evolution de la charge de pression (en m) à $x=500\text{ m}$	51
Figure V.9 :	Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 0.5\text{ s}$	51
Figure V.10:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 1\text{ s}$	52
Figure V.11:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 2.1\text{ s}$	52
Figure V.12:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 3\text{ s}$	53
Figure V.13:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 4\text{ s}$	53
Figure V.14:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 10\text{ s}$	54
Figure V.15:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon_{ps} = 0.006$	54
Figure V.16:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon_{ps} = 0.1$	55
Figure V.17:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon_{ps} = 0.4$	56
Figure V.18:	Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon_{ps} = 1$	56

Liste des symboles :

A : Section horizontale du plan d'eau.

a : est la vitesse de propagation de l'onde (m/s).

B : représente l'impédance de la conduite.

C : est la vitesse de propagation de l'onde de pression (m/s).

C^+ et C^- : Caractéristique positive et négative.

CP et CM : sont des constantes connues.

C_d : Coefficient de débit.

C_r : Nombre de Courant.

d : Diamètre de la conduite (m).

E : Module d'élasticité du matériau.

e : Épaisseur de la paroi.

eps : est la rugosité.

f : Fonction scalaire ou vectorielle quelconque.

g : est l'accélération de la pesanteur (9,81 m/s²).

H : La charge d'écoulement (m).

H_0 : Charge initiale.

H_r : Charge piézométrique de la surface libre de réservoir.

h : Profondeur.

i : la pente.

i : Indice de maillage suivant x .

j : Perte de charge unitaire.

K : Coefficient de compression de l'eau.

L : est la longueur du tube (m).

m et b : sont des coefficients empiriques

N : Nombre de tronçons.

ν : viscosité dynamique.

P : est la Pression (Pa).

Δp : est la surpression due au coup de bélier (Pa).

Q : est le débit (m^3/s).

Re : Nombre de Reynolds.

S : la section mouillée (m^2).

T_{max} : dure de simulation.

t : Le temps (s)

t^* : est le temps de réaction de la vanne (s).

t_c : Le temps de fermeture de la vanne (s).

U : est vitesse de l'eau (m/s).

V : est la vitesse de l'eau au moment de la fermeture (m/s).

V_0 : vitesse de l'écoulement (m/s).

x : l'espace, coordonnée spatiale.

Δx : le pas de distance.

λ : est le coefficient de perte de charge.

σ : est la contrainte longitudinale.

Table des matières

Introduction generale	1
Chapitre I : Généralités sur les écoulements transitoires	
I.1 Introduction :.....	3
I.2 Catégorie des écoulements :.....	3
I.2.1 Les écoulements laminaires :.....	3
I.2.2 Les écoulements turbulents :	3
I. 2.3 L'écoulement permanent :.....	4
I. 2.3.1 Régime permanent :.....	4
I. 3.2 L'écoulement non permanent :.....	4
I. 3.3.1 Les écoulements non permanents rapidement variés :	4
I. 3.3.2 Régime transitoire.....	6
I.4 Phénomène du coup de bélier :	6
I.4.1 Définition :	6
I.4.2 Présentation du phénomène du coup de bélier :.....	7
I.4. 3 Causes fréquentes du coup de bélier :	13
I.4.4 Pourquoi les coups de bélier sont-ils dangereux ?	14
I.4.5 La protection contre le coup de bélier :.....	15
I.4.5.1 vanne a fermeture lente :.....	15
I.4.5.2 Les soupapes de décharge :	15
I.4. 5.3 Cheminée d'équilibre :	16
I.4.5.4 le volant d'inertie :.....	17
I.4.5.5 Réservoir d'air :	17
I.6 Conclusion :.....	18

Chapitre II : Equations gouvernant le phénomène du coup de bélier et méthodes de résolution

II.1 Introduction	19
II.2 Equation de continuité :	19
II.3 Equation de dynamique :	22
II.4 Discussion des équations de base :	23
II.5 Intégration du système différentiel :	25
II.5. Solution générale	26
II.6 Les méthodes de résolution :	26
II.6.1 Méthode des caractéristiques :	26
II.6 .2 Méthode volumes finis :	26
II.6.3 Méthode des éléments finis :	27
II.6.4 Méthode de Louis Bergeron :	27
II .7 Conclusion :	28

Chapitre III : La méthode des caractéristiques

III.1 Introduction	29
III.2 Modèle mathématique :	29
III.3 Méthode des caractéristiques :	29
III.3.1 Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques :	29
III.3.3. Solution numérique du système différentiel	32
III.3.4. Conditions aux limites	38
III.4 Conclusion :	39

Chapitre IV : Généralités sur Matlab

IV.1. Introduction	40
IV.2. – Historique:	40

IV.3.Les quatre blocs du Matlab :	41
IV.4.Méthode de travail sur Matlab:	42
IV.5.La manipulation des données :	42
IV.5.1.Matrices	42
IV.5.2.Autres structures de données :	42
IV.5.3.Types numériques de Matlab :	43
IV.6.Exemple :	43
IV.6.1 L'influence de temps de fermeture de la vanne tc sur H_V :	44
IV.6.2. L'fluence de la rugosité eps sur H_V :	45
IV.7.Conclusion:	45

Chapitre V : Applications numériques sur un système Réservoir-conduite-valve

V.1 Introduction :	46
V.2 Position du problème	46
V.3 Le modèle :	46
V.4 Définition des conditions initiales (régime permanent) :	47
V.5 Définition des conditions aux limites	47
V.6. Simulation du coup de bélier le long de la conduite :	48
V.6.1 Discussion des résultats obtenus :	51
V.7. Influence du temps de fermeture sur le coup de bélier	52
V.7.1 Discussion des résultats obtenues	54
V.8. Influence de la rugosité sur le coup de bélier :	55
V.8.1 Discussion des résultats obtenues	57
V.9 Conclusion :	57
Conclusion générale :	58

Introduction générale

L'importance de l'étude du coup de bélier est extrêmement grande. L'amplitude et la soudaineté des surpressions et dépressions qui sont mises en jeu peuvent détériorer la conduite ou les organes qui y sont branchée. Il est nécessaire par conséquent d'empêcher la production de telles perturbations ou du moins de les atténuer.

En général, on peut considérer les fluides comme incompressibles. Toutefois les milieux réelles présentent une certaines compressibilités dont il faut tenir compte s'il s'y produit de rapide variation de pression : ce sont les phénomènes de compressibilité qui permettent d'expliquer la propagation des ondes élastiques dans les milieux matériels.

Quand un milieu matériel est affecté localement par des variations de pression d'origine quelconque, la perturbation qui en résulte se propage dans toutes les directions. Cette vitesse de propagation n'est pas infinie, mais si les variations de pression sont lentes on peut admettre qu'elles se distribuent immédiatement dans tout le milieu si au contraire les variations de pression sont rapides, la répartition de la pression dans le milieu ne peut pas être considéré comme instantanée.

Comme pour tout problème de la mécanique des fluides, et de physique en général, ce problème obéit à des concepts mécanistes est décrit en conséquence par un modèle mathématique bien définit. Ce dernier étant obtenu par l'application des lois de conservation de la masse et de la quantité de mouvement dans le milieu fluide étudié L'une des techniques de calcul numérique les plus utilisée et répandue actuellement dans le domaine de la mécanique des fluides et l'hydraulique est bien la méthode des caractéristiques, qui est devenue un meilleur choix, grâce à sa précision et la possibilité d'intégrer des conditions aux limites très complexes.

Ce mémoire est composé de plusieurs chapitres qui sont décrits dans les paragraphes suivants. Avant d'entrer directement dans la description mathématique, le premier chapitre est consacré à l'analyse théorique puis physique du phénomène de coups de bélier ainsi les moyens utiliser pour limiter ses dégâts.

Le deuxième chapitre s'intéresse aux deux équations de base présentant ce phénomène ainsi les différentes méthodes de son résolution.

Le chapitre suivant est dédié à la présentation de la méthode de caractéristique. Cette méthode qui est la plus connue pour la résolution des équations du phénomène du coup de bélier.

Le quatrième chapitre expose une introduction à Matlab, le logiciel qu'on a adopté pour la simulation et l'analyse numérique.

Un dernier chapitre qui sert à l'étude des différents paramètres influencent sur le comportement du phénomène du coup de bélier.

Chapitre I : Généralités sur les écoulements transitoires

I.1 Introduction :

L'objet de ce chapitre porte sur l'analyse théorique puis physique du phénomène de coups de bélier.

De part sa définition qui signifie que le couple vitesse et pression est variable dans le temps et dans l'espace, le régime transitoire est considéré comme étant la conséquence directe de la perturbation des conditions permanentes d'écoulement.

I.2 Catégorie des écoulements :

Les changements du régime d'écoulement d'un fluide contenu à l'intérieur d'une conduite entraînent souvent de brusques variations de pression. Ces écarts seront plus importants si le fluide est un liquide et si la modification du débit a été brutale. Par rapport au régime permanent, les pressions peuvent atteindre des valeurs excessives.

A part le critère physique qui distingue les écoulements compressibles et incompressibles, ainsi que les écoulements visqueux et non visqueux, il existe d'autres critères qui distinguent les écoulements de fluide [1].

I.2.1 Les écoulements laminaires :

Décrits comme un ensemble des lames de fluide qui glissent les unes sur les autres, en exerçant sur leur surface de contact un effort de frottement dû à la viscosité. Cet aspect a déjà été évoqué à propos de l'écoulement de Couette [2].

I.2.2 Les écoulements turbulents :

Est caractérisé par son irrégularité temporelle et spatiale plus la viscosité d'un fluide est grande, plus le régime turbulent s'établit difficilement. Le passage de l'écoulement laminaire à l'écoulement turbulent se fait à partir d'une certaine valeur de la vitesse moyenne. Le diamètre du tube dans lequel se produit l'écoulement joue également un rôle dans la transition de l'état laminaire à l'état turbulent. L'influence de ces trois grandeurs est décrites par un nombre, sans dimension physique, appelé nombre de Reynolds Re , une valeur du nombre de Reynolds caractérise le type de l'écoulement [2].

On admet que:

- Si $Re < 2000$, l'écoulement est laminaire.
- Si $2000 < Re < 4000$, on a un écoulement de transition.

I. 2.3 L'écoulement permanent :

I. 2.3.1 Régime permanent :

En régime permanent le chenal véhicule un débit Q constant dans le temps.

Le tirant d'eau y en un point donné est donc aussi constant en pratique, on peut calculer en régime permanent des canaux d'irrigation, des écoulements en rivière à l'étiage ou en régime moyen, mais le calcul d'un écoulement en crue rapide ne peut pas être abordé par le régime permanent.

Permanent : Q indépendant de $t \rightarrow y$ indépendant de t

I. 3.1 L'écoulement non permanent :

Qui varie dans le temps et dans l'espace, comme schématiquement illustré dans la Figure 1.

Le but est de déterminer les caractéristiques de l'écoulement (débit Q , profondeur h , vitesse U) en fonction des coordonnées spatiale (x) et temporelle (t). On distingue les écoulements non permanents graduellement variés (ondes de crue) et les écoulements non permanents rapidement variés (ondes de translation).

- **Equation de continuité :** (conservation de la masse)

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial X} = 0 \quad (\text{I.1})$$

- **Equation de l'énergie :** (bilan de l'énergie)

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{U}{g} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = J_f - J_e \quad (\text{I.2})$$

- **Loi de frottement :** (Chézy mais similaire avec Manning Strickler)

$$J_f = \frac{8g}{c^2} \frac{l}{4R_h} \frac{U^2}{2g} \quad (\text{I.3})$$

Ces équations sont limitées aux écoulements graduellement variés. Elles enveloppent les équations pour les écoulements permanents ($\partial/\partial t = 0$) uniformes et non-uniformes une bonne connaissance de ces écoulements uniformes et non-uniformes est nécessaire pour la compréhension des écoulements non permanents [4].

I. 3.3.1 Les écoulements non permanents rapidement variés :

Les équations de Saint-Venant ne sont plus valables pour les écoulements non permanents rapidement variés. Due à la courbure des lignes de courants, la pression ne reste plus hydrostatique, ce qui était une hypothèse clé pour la dérivation de l'équation de l'énergie.

Les ondes de translation sont dues aux variations brusques de débit, engendrant des variations brusques de la profondeur d'eau. Des ondes de translation peuvent être provoquées

par la régulation du débit par une vanne, la manœuvre des écluses, l'exploitation des centrales hydroélectriques, des tremblements de terre ou des glissements de terrain, la rupture des digues ou barrages, etc.

On distingue quatre types d'onde de translation:

Si l'intumescence est provoquée à l'amont/aval, on parle d'une onde d'amont/aval ; s'il y a une augmentation/diminution du débit, on parle d'une onde positive/négative.

L'étude des ondes de translations exploite deux principes, qui s'écrivent pour les canaux rectangulaires comme :

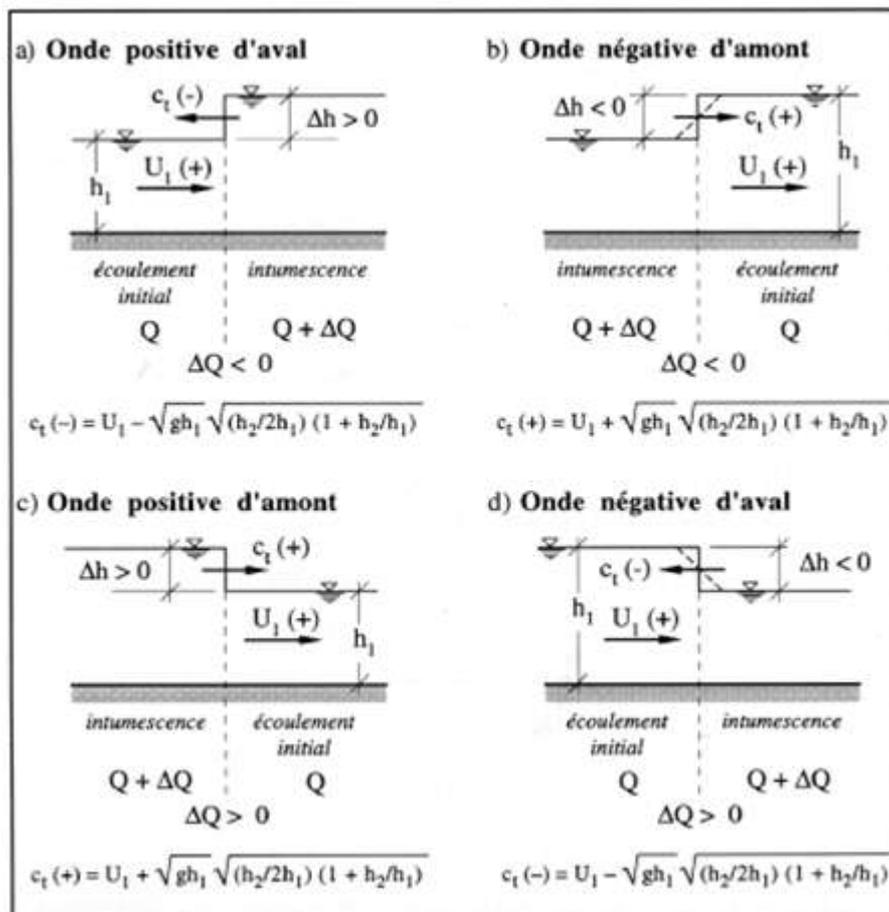


Figure I.1 : Ondes de translation dues à une variation brusque de débit, ΔQ

➤ **La conservation de la masse :**

$$c_t = \frac{\Delta Q}{\Delta S} = \frac{\Delta q}{\Delta h} = \frac{q_2 - q_1}{h_2 - h_1} \quad (I.4)$$

➤ **Le théorème de quantité de mouvement :**

$$c_t = U_1 \pm \sqrt{g} h_1 \left(\frac{h_2}{2h_1} \right) \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right) \quad (I.5)$$

Notons que la première équation pour la célérité est identique à celle pour les ondes cinématique et diffusive. La deuxième peut être exprimée comme :

$$c_t = U_l \pm c(h_2/h_1)(1 + h_2/h_1)$$

Avec c la célérité des ondes de gravité, montrant que la célérité des ondes de translation est supérieure à celle des ondes de gravité, comme attendu pour $h_2/h_1 \rightarrow 1$, l'onde de translation se réduit à une onde de gravité [4].

I. 3.3.2 Régime transitoire

En régime transitoire, le débit varie en fonction de temps, et il en va donc de même du tirant d'eau en chaque point du cours d'eau [4].

I.4 Phénomène du coup de bélier :

I.4.1 Définition :

Le coup de bélier étant un cas particulier du régime transitoire; c'est un phénomène oscillatoire qui se manifeste dans les conduites en charge à écoulement gravitaire ou par refoulement. Il est caractérisé par une onde de pression, positive (surpression) ou négative (supspression), provoquée par une variation du régime hydraulique, et se propageant dans le milieu constitué par l'eau et par la conduite qui la contient. Cette onde est caractérisée par une vitesse de propagation ou célérité, qui ne dépend pas en première approximation de l'amplitude de l'onde lorsque celle-ci est faible. Elle se réfléchit sur les obstacles, et en particulier sur les extrémités de la conduite, en changeant de signe ou non suivant les conditions physiques qui y sont rencontrées [5].

I.4.2 Présentation du phénomène du coup de bélier :

Le coup de bélier peut se produire, par exemple, dans le cas de la fermeture brutale d'une vanne.

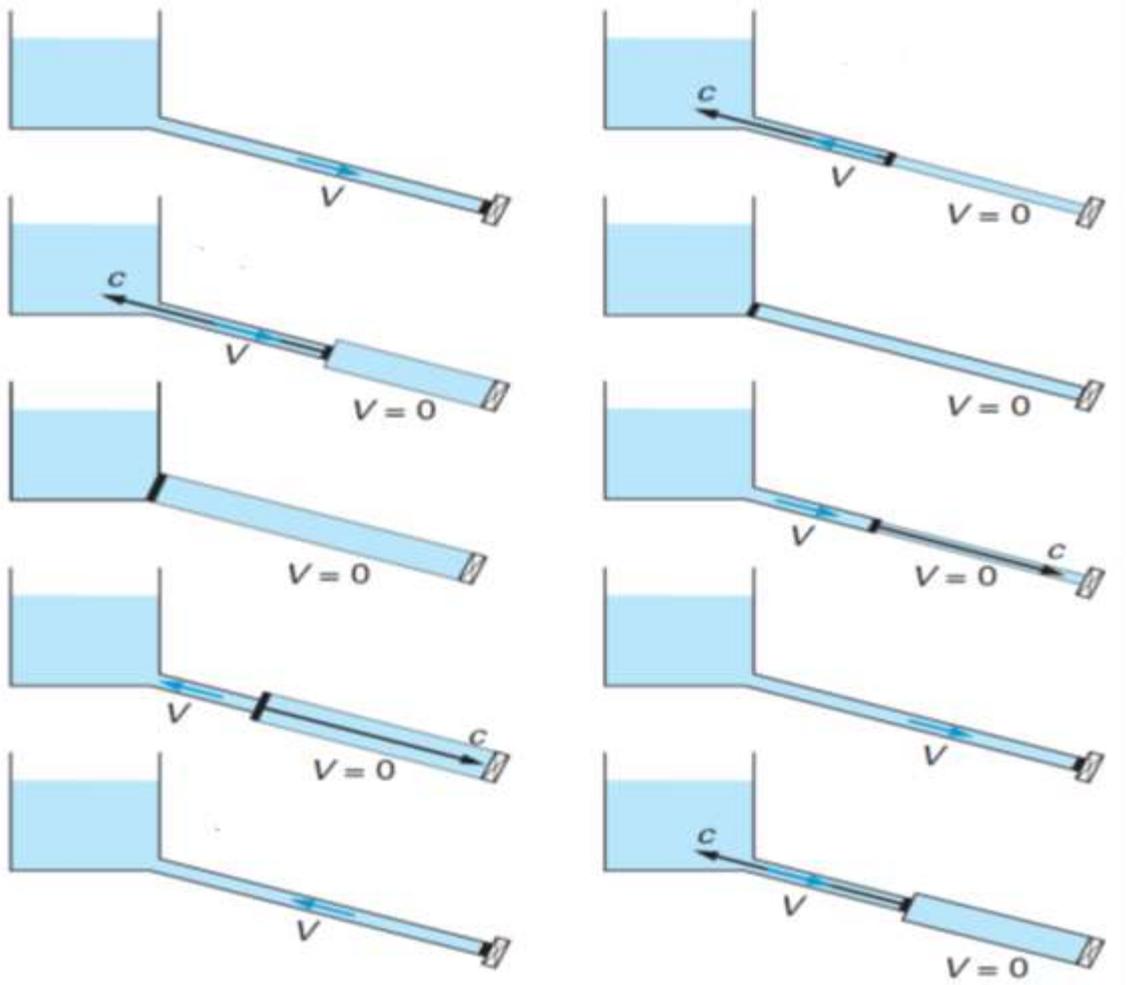


Figure I.2. Décomposition du coup de bélier d'ondes due à la fermeture d'une vanne.

Considérons, dans un premier temps, un réservoir se vidageant par une vanne en position ouverte. La vitesse dans la canalisation est U_0 .

- A un instant donné, la fermeture brutale de la vanne stoppe instantanément le fluide au voisinage de celle-ci. Compte tenu de son inertie, l'eau pousse fortement sur la vanne. Une surpression importante se crée dans la zone où la vitesse s'annule.

- A l'amont de la vanne, l'eau se comprime faiblement et la canalisation gonfle. Tranche par tranche les particules liquides transforment la vitesse en surpression. On observe ainsi la formation et la progression d'une onde de choc. Celle-ci remonte de la vanne où elle a pris naissance vers le réservoir. La vitesse de l'onde peut avoisiner les 1000 m/s en fonction du type du matériau de la conduite.
- L'onde de choc atteint le réservoir. La conduite entière est en surpression et la vitesse de l'eau est nulle. Le réservoir est à niveau d'eau constant. Sa pression ne pouvant quasiment varier, le réservoir impose donc la pression à l'entrée de la conduite.
- La pression dans le réservoir étant beaucoup plus faible que la surpression dans la conduite, la canalisation, au voisinage du réservoir, va retrouver sa forme initiale.
- La diminution du diamètre de la conduite va chasser l'eau vers le réservoir à la vitesse U_0 .
- De proche en proche ce phénomène se produit et crée ainsi une onde de choc se déplace cette fois-ci vers la vanne.
- Dès que l'onde atteint la vanne, la conduite entière retrouve quasiment sa pression d'origine et sa vitesse initiale inversée. La vanne étant toujours fermée, la vitesse de l'eau à son voisinage est nulle.
- Compte tenu de son inertie, l'eau au voisinage de la vanne entre en dépression et la conduite diminue son diamètre. Une onde de choc en dépression se crée et se déplace vers le réservoir.
- Comme précédemment, le réservoir impose la pression au niveau de l'entrée de la conduite. La conduite retrouve alors sa forme initiale. Le volume d'eau manquant est pris dans le réservoir et la conduite retrouve sa vitesse initiale U_0 .
- L'onde arrive au niveau de la vanne et on retrouve la configuration initiale [6].

La formule pour calculer la surpression lors d'un coup de bélier est :

$$\Delta_P = \rho * g * \frac{2VL}{t} \quad (I.6)$$

Où :

Δ_P : est la surpression due au coup de bélier (Pa)

V : est la vitesse de l'eau au moment de la fermeture (m/s)

L : est la longueur du tube (m)

g : est l'accélération de la pesanteur (9,81 m/s²)

t : est le temps de fermeture de la vanne (s)

La Formule précédente valable si $t > t^*$

Si l'on veut définir simplement le "temps de fermeture on peut utiliser la formule suivante:

$$t^* = \frac{2L}{a} \quad (I.7)$$

Où

t^* : est le temps de réaction de la vanne (s)

L : est la longueur du tube (m)

a : est la vitesse de propagation de l'onde (m/s) (en fonction du type de fluide, des matériaux, du diamètre interne et externe de la canalisation).

Pour les systèmes mécaniques tels que mitigeurs, électrovannes, vannes à sphère etc. tous les temps de fermeture $t \leq t^*$ sont définis comme "manœuvres brusques", car ils provoquent dans le tube un coup de bélier avec une surpression d'intensité maximum. Au contraire, un temps de fermeture $t > t^*$ sera défini comme "manœuvre lente" et provoque un coup de bélier avec une surpression d'une intensité moins dangereuse.

On utilise dans la formule (I.6) un temps $t = t^*$ pour obtenir une valeur de surpression p maximum pour le coup de bélier. Le graphique ci-dessous permet de visualiser le phénomène [7].

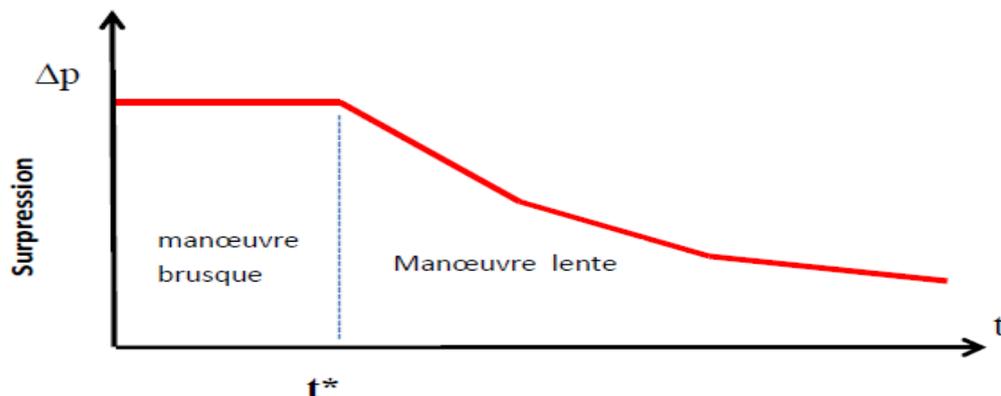


Figure I.3 : La surpression due à la fermeture de la vanne

Exemple :

Pour une longueur des tubes 10 m, diamètre équivalent à 1/2", tubes en acier, cuivre et PE-X

avec vitesse de l'eau $v_l = 2$ m/s. On reporte les valeurs de la vitesse de propagation de l'onde C_m , des temps de manoeuvres "brusque" t^* (temps de réaction) et de la surpression Δ_p extrait de la formule.

	L (m)	v_l (m/s)	C_m (m/s)	t^* (ms)	Δ_p (bar)
Acier	10	2	1411	14,2	28,8
Cuivre	10	2	1400	14,3	28,5
PE-X	10	2	885	22,6	18

Tableau. I.1 : la valeur Δ_p en fonction du type du matériau.

A cause de la plus grande rigidité du tube métallique, la vitesse de l'onde C_m , est plus élevée que dans le tube en matière plastique et plus proche de la vitesse dans l'eau (1420 m/s à 7°C). D'après les résultats obtenus, on peut remarquer que le tube en matière plastique pour usage sanitaire peut absorber plus facilement un coup de bélier, il montre un temps de réaction t^* plus lent que dans un tube en métal. Cela se traduit, dans la pratique, à la nécessité d'un temps de manoeuvre de fermeture encore plus lent que sur un tube métal. Les tubes en matière plastique présentent des valeurs de surpression Δ_p inférieur à celle du métal (étant moins rigide, ils "amortissent" partiellement le coup de bélier), mais de telles surpressions pourraient engendrer des sollicitations dépassant la limite de résistance de ce même tube. En outre dans les installations encastrées, la présence d'une gaine annelée ou d'une isolation influence les caractéristiques de rigidité du tube en matière plastique, rendant encore plus complexe le calcul du coup de bélier.

Dans cet exemple, on comprend alors que l'installation d'un anti-bélier, déjà utile avec un tube métallique est encore plus indispensable que dans une installation sanitaire avec tubes en matière plastique.

Le graphe en bas de la page représente l'influence des différents paramètres sur la surpression dans un tube cuivre au moment de la fermeture. Les trois courbes sont calculées avec un temps de fermeture t égal au temps de réaction t^* pour un tube de 100 m de dimension 20x1[7].

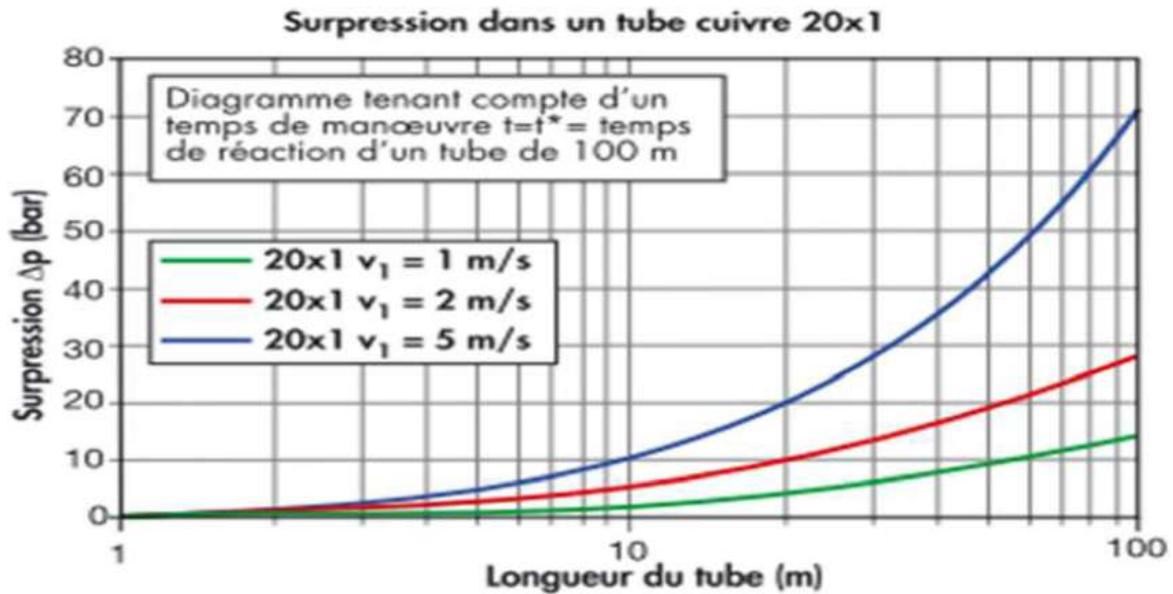


Figure I.4 : Influence de la vitesse de l'écoulement v_1 sur la surpression dans un tube en cuivre.

Tube cuivre	C_m (m/s)	t^* (ms) tube
20x1	1393	143,5

On peut alors tirer les conclusions suivantes :

Plus le tube est long, plus le temps de réaction est long t^* , donc il faut toujours manœuvrer lentement pour éviter le risque de coup de bélier.

À égalité de temps de manœuvre t et de vitesse du fluide v_1 , plus long est le tube, plus grand est la Δ_p provoqué par la manœuvre même.

À égalité de vitesse du fluide v_1 et de longueur du tube, à diamètre plus grand correspond une Δ_p légèrement diminué.

À égalité de longueur du tube et du temps de manœuvre t , la vitesse du fluide augmente v_1 la Δ_p augmente généré par la manœuvre.

Concéderons donc un système, analogue à une situation de refoulement, ou l'eau coule à une vitesse V_0 pour alimenter un réservoir dont le niveau est gardé constant. Le phénomène, peut être décrit en quatre phases :

1) Au temps $t = 0$, la vanne située à l'aval du système est fermée, immédiatement et à

proximité de la vanne, la vitesse d'écoulement s'annule, donc l'énergie cinétique fait le même et doit être composée par gain d'énergie potentielle sous forme d'une dépression puisque le mouvement initial de l'eau a tendance à tirer sur la partie de colonne d'eau qui est immobile. Cette déformation qui tend à réduire le diamètre de la conduite, ce phénomène se poursuit jusqu'à ce que toute la conduite soit mise en compression, ce qui rend un temps égal au rapport de la longueur ' L ' sur la célérité de l'onde de la déformation ' C '.

2) Lorsque l'onde de dépression atteint le réservoir, celle-ci se dissipe puisqu'il règne à cet endroit une pression constante, à ce moment précis, plus rien ne retient la mise en compression de la conduite et elle commence à prendre sa forme à proximité du réservoir, l'augmentation du volume ainsi créée, entraîne le remplissage de la conduite à une vitesse équivalente à la vitesse initiale du fluide puisque la déformation initiale de la conduite est directement liée à cette dernière, ce phénomène a la même durée que celle de l'étape précédente.

3) Au moment où toute la conduite a repris sa forme, la vitesse de l'eau doit s'annuler en frappant la vanne fermée, encore une fois, on doit avoir transformation de l'énergie cinétique en énergie potentielle par contre cette fois, l'énergie de pression est positive ; cette surpression met en tension la Conduite qui se dilate, la vitesse de l'onde de déformation « C » étant Constante, la durée de cette étape est identique à celle des précédentes.

4) Le surplus d'eau dû à l'augmentation du volume de la conduite commence à s'évacuer près du réservoir à une vitesse « V_0 » de façon à ce que la conduite reprenne son diamètre initial; à la fin de cette étape, toute la conduite aura retrouvé les conditions initiales et l'étape 1 pourra recommencer. La période complète à durer $4L/C_f$ et l'oscillation continue identiquement D'après ce qui vient d'être dit, l'onde de pression devrait subsister indéfiniment et sans déformation, mais réellement les frottements d'eau sur elle-même et sur la paroi de la conduite interviennent et provoquent une déformation et un amortissement de l'onde, de sorte que les courbes relevées expérimentalement ont des formes analogues à celle de la figure, qui représente la surpression en un point de l'extrémité aval de la conduite ce sont approximativement, d'oscillation [7].

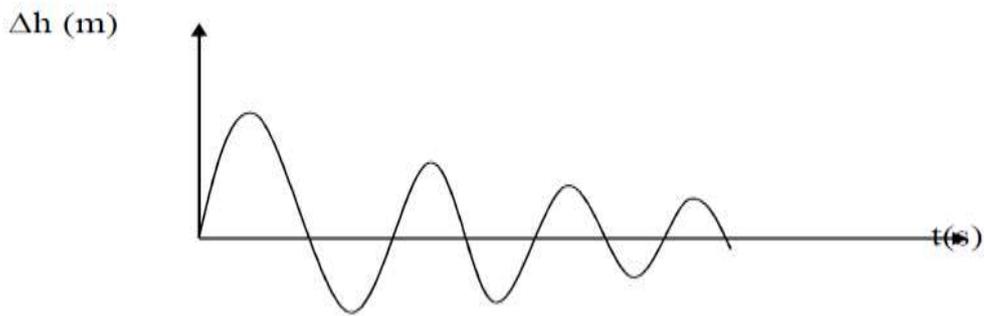


Figure I.5: la vitesse de propagation, ou célérité de l'onde « a » est donné par la formule « D'ALLIEVI ».

$$a^2 = \frac{1}{\left(\frac{1}{K} + \frac{d}{E.e}\right)} \quad (I.7)$$

Avec :

K : coefficient de compression de l'eau.

E : module d'élasticité du matériau.

d : diamètre de la conduite.

e : épaisseur de la paroi.

Quand la valeur maximale de la surpression du coup de bélier, elle est donnée par la formule de JOUKOVSKY :

$$\Delta h = \frac{aV_0}{g} \quad (I.8)$$

Avec :

V_0 : vitesse de l'écoulement

On aura :

$$\Delta p = a \cdot \rho \cdot V_0 \quad (I.9)$$

I.4. 3 Causes fréquentes du coup de bélier :

En ingénierie d'hydraulique, les causes fréquentes occasionnant des coups de bélier sont:

- l'ouverture ou la fermeture des vannes dans les conduites gravitaires en charge
- la mise en marche ou l'arrêt des pompes sur des conduites de refoulement,
- vidange ou remplissage inadéquat de la conduite en charge.
- implosion des poches d'air suite à une cavitation.
- modification de la vitesse angulaire d'une pompe.

- coupure électrique inopinée dans une station de pompage qui est la cause la plus fréquente du coup de bélier en hydraulique urbaine.
- la mise en marche ou la modification de l'opération d'une turbine.
- variation d'un plan d'eau relié à un réseau en charge.
- vibration des accessoires de contrôle comme les vannes.

Cette liste est loin d'être exhaustive, et beaucoup d'autres situations complexes engendrent ce phénomène.

Il est donc capital de prévoir et d'étudier ces phénomènes transitoires afin de réduire leurs effets par l'utilisation de dispositifs spéciaux et le dimensionnement correct des différents composants d'une installation.

Bien que son application reste limitée, cet article traitera d'abord de la théorie très simple du coup de bélier de masse qu'on peut parfois utiliser dans certaines installations hydrauliques.

Les propriétés des ondes de pression dans les canalisations déformables seront développées. Les phénomènes instationnaires, pour lesquels l'étude de la propagation des ondes de pression est indispensable, sont souvent désignés par coups de bélier d'ondes par opposition aux coups de bélier de masse. Dans le langage courant on parle tout simplement de coups de bélier [8].

I.4.4 Pourquoi les coups de bélier sont-ils dangereux ?

Les risques dus aux coups de bélier sont de plusieurs ordres :

- **Risque de forte pression** : les coups de bélier provoquent des surpressions qui s'ajoutent à la pression initiale. Si la somme (pression initiale) plus (surpression) est supérieure à la pression maximale admissible des tuyaux, il y a des risques de rupture des tuyaux et de déboîtement des joints.
- **Risque de pression négative** : une autre conséquence des coups de bélier peut être l'apparition d'une pression relative négative. Si cette pression devient inférieure à -10mCE , il se produit une poche de cavitation. Si le profil en long de la canalisation est défavorable, c'est à dire si la poche de vapeur peut se former sur une grande distance, la canalisation peut être aplatie par implosion et les joints peuvent être aspirés.

Une autre conséquence de la cavitation est la détérioration de l'enduit intérieur du tuyau, mais le risque le plus grave est celui d'éclatement de la conduite lors du retour à des pressions positives: les pressions obtenues à ce moment sont en effet souvent très

importantes.

- **Fatigue du tuyau** : comme autre conséquence des coups de bélier, on peut citer la fatigue qu'entraîne pour le matériau une alternance rapide de fortes et de faibles pressions même si chaque onde de surpression n'est pas suffisante en elle-même pour créer la rupture [8], [9].

I.4.5 Moyen de protection contre le coup de bélier :

Les moyens et les équipements de protection contre le coup de bélier sont très variés. Ils sont choisis en fonction de la disposition de l'installation et des caractères géométriques de cette dernière.

Ces moyens peuvent protéger la conduite, des dépressions et des surpressions maximales, que nous citerons quelques-uns :

I.4.5.1 Vanne à fermeture lente :

Cette solution ne permet de protéger que les adductions gravitaires, car elle ne remédie en aucun cas, à l'arrêt intempestif d'une pompe. Il s'agit en fait davantage, de limiter l'intensité du coup de bélier qui se produira [5].

I.4.5.2 Soupape de décharge :

La soupape de décharge est définie comme étant un appareil anti-bélier qui écrête les surpressions en dérivant un certain débit à l'extérieur de la conduite dès que la pression dépasse une certaine valeur de réglage, estimée généralement à 1,04/1,1 de la pression maximale admissible. Ces appareils font intervenir un organe mécanique, un ressort à boudin généralement, qui par sa compression obture en exploitation normale, un orifice placé sur la conduite au point à protéger, c'est à dire où la compression à craindre est maximale.

L'ouverture doit pouvoir s'effectuer très rapidement pour que l'opération soit efficace. Il importe donc de réduire à l'extrême l'inertie de ces appareils et c'est sur ce point que les efforts de constructeurs ont particulièrement porté [5].



Figure I.6 : Montage d'une soupape

I.4.5.3 Cheminée d'équilibre :

La cheminée d'équilibre est une réserve d'eau en contact permanent avec la conduite et dont la surface libre traduit exactement les variations de pression du fluide.

La cheminée doit donc avoir une section assez large pour combler la dépression sans se vider complètement et doit être assez haute pour ne pas déborder lorsqu'une surpression fait monter son niveau. La présence d'une cheminée modifie le mouvement transitoire engendré par une disjonction. Au lieu d'un mouvement oscillatoire de période caractéristique du coup de bélier d'onde, s'instaure un mouvement oscillatoire de période $\frac{4L}{a}$ plus grande, l'oscillation en masse. On place la cheminée d'équilibre dans une galerie d'amenée en charge et dans une conduite forcée afin de [5] :

- Réduire la valeur des surpressions produites par le coup de bélier dans la conduite forcée.
- Diminuer les surpressions dues au coup de bélier dans la galerie d'amenée.
- Amortir les oscillations importantes.
- Assurer l'alimentation de la veine liquide, en diminuant les dépressions engendrées par l'arrêt du moteur actionnant la pompe.

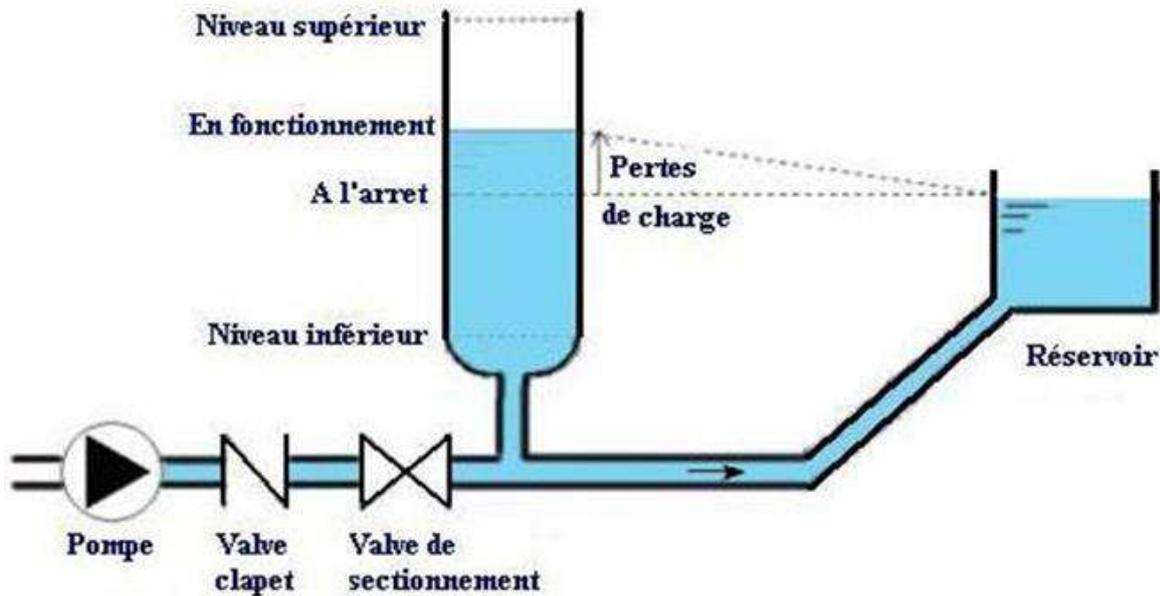


Figure I.7 : Cheminée d'équilibre

I.4.5.4 Volant d'inertie :

Le volant d'inertie est un dispositif qui contient une masse tournante liée à l'arbre de la pompe ; c'est un moyen d'augmenter le temps de ralentissement de la pompe, grâce à l'énergie cinétique accumulée.

Lorsque la pompe cesse d'être alimentée en énergie, elle continue à fonctionner par l'énergie cinétique de sa roue (généralement très faible) et de celle de l'eau, qui le plus souvent ne suffit pas pour assurer l'écoulement pendant un temps suffisant.

Le volant d'inertie est donc un moyen de mettre progressivement en réserve, lors du démarrage de l'installation, une quantité d'énergie supplémentaire, sous forme cinétique, celle-ci est ensuite rendue à l'eau à travers la pompe au ralentissement progressif du volant et de celle-ci.

le volant d'inertie ne peut guère être utilisé économiquement que pour des pompes de puissance faible et pour des temps d'arrêt admissible assez faible, c'est-à-dire en fait pour des conduites d'adduction assez courte [5].

I.4.5.5 Réservoir d'air :

Le réservoir d'air est fréquemment utilisé si la topographie des lieux, combinée à une grande hauteur géométrique, et qui interdit l'implantation près de la pompe d'une cheminée, comportant un niveau libre à la pression atmosphérique. C'est un moyen permettant de protéger la conduite contre les dépressions et les surpressions [5].

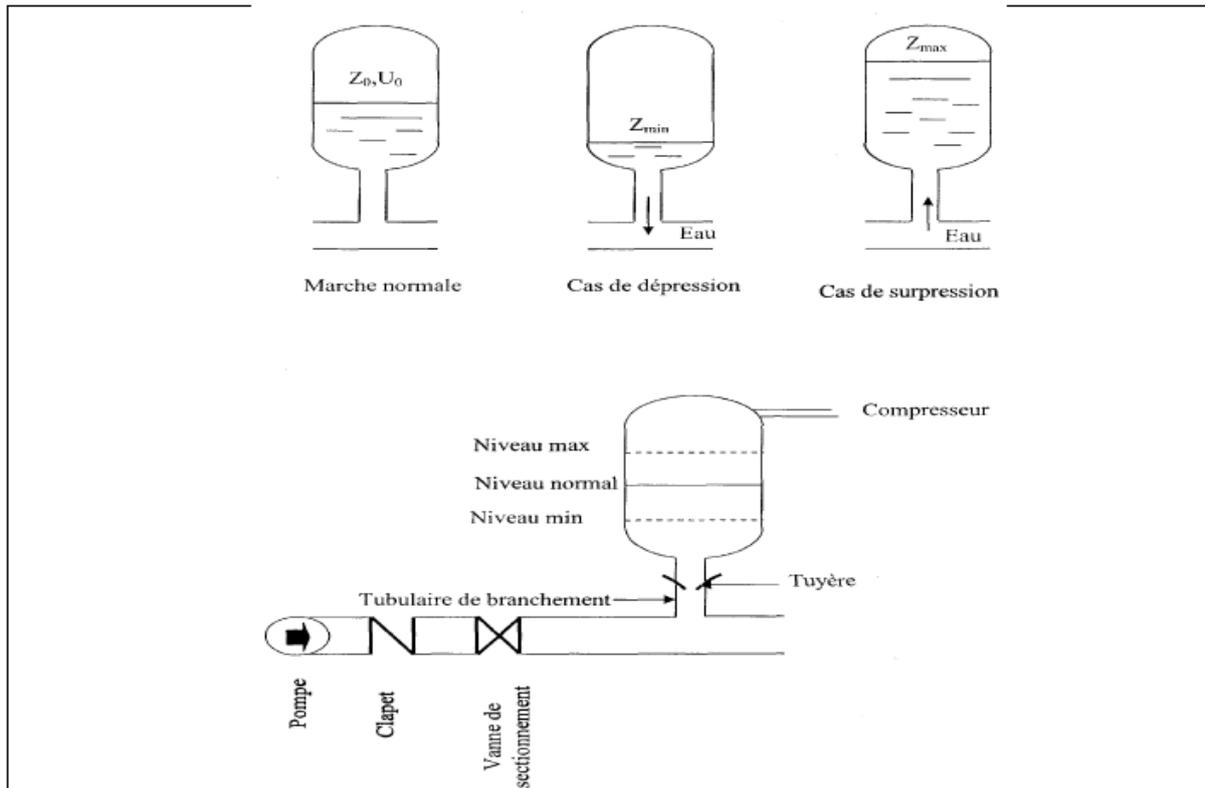


Figure I.8 : Principe de fonctionnement d'un réservoir d'air

I.6 Conclusion :

A travers ce chapitre, nous avons pu établir une analyse riche sur les types des écoulements ainsi que la description physique du phénomène du coup de bélier.

Les effets néfastes que provoque le coup de bélier on oblige à attacher une grande importance à sa quantification, et enfin la détermination des causes qui produit ce type du problème.

Chapitre II : Equations gouvernant le phénomène du coup de bélier et méthodes de résolution

II.1 Introduction

On a établi dans ce chapitre les deux équations présentant le phénomène de coups de bélier qui connues sous le nom d'équations de SAINT-VENANT à partir des équations générales que sont l'équation de continuité et l'équation dynamique.

Aussi on a essayé de présenter les méthodes de résolution de ce type des phénomènes ainsi les auteurs qui les utilisent.

II.2 Equation de continuité :

En considérant un volume de fluide et en se référant à la figure on peut dire que la continuité s'exprime par l'égalité de la différence des masses entrantes et sortantes, et de la variation dans le volume de contrôle [8].

$$\frac{\partial(\rho A dx)}{\partial t} = \rho AV - \left(\rho AV + \frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} dx \right) \quad (\text{II.1})$$

Supposant que l'élément de la conduite ne subis pas de variation de longueur

$$(dx/dt = 0) \quad (\text{II.2})$$

Peut s'écrire :

$$\frac{\partial(\rho A)}{\partial t} = - \left(\frac{\partial(\rho AV)}{\partial x} dx \right) \quad (\text{II.3})$$

En explicitant le dérivé partiel spatial et temporel, ainsi qu'en regrimpant les termes on obtient :

$$\frac{1}{v\rho} \left(V \frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) + \frac{1}{v\rho} \left(V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) + \frac{1}{v\rho} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.4})$$

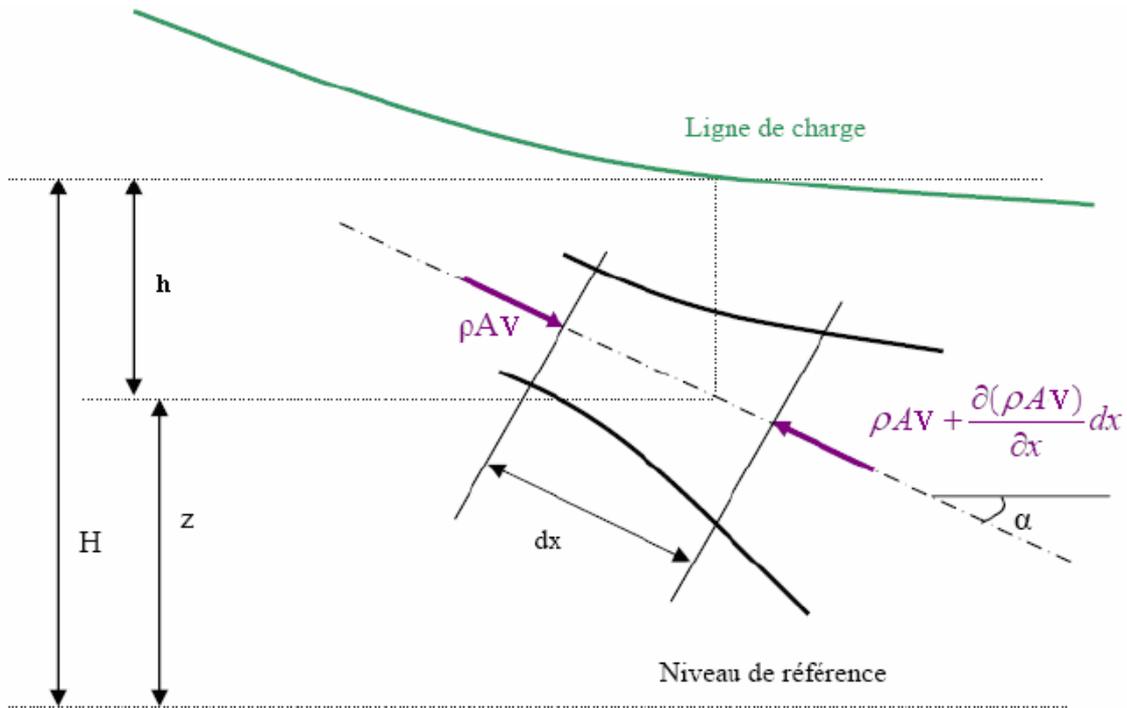


Figure II.1:Bilan de masse dans un tronçon de conduite

Et comme

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} = \frac{1}{\rho} \left(V \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) \text{ et } \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{1}{A} \left(V \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) \quad (\text{II.5})$$

L'expression (II.4) se simplifier pour donner :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{A} \frac{dA}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.6})$$

Exprimant ce qui se passe du point de vue de l'analyse des contraintes et déformation, le terme $\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt}$ prend en compte la compressibilité du fluide et $\frac{1}{A} \frac{dA}{dt}$ l'élasticité transversale de la conduite. On suppose que la conduite est construite avec des joints de dilatation ce qui permet une déformation libre longitudinale mathématiquement cette contrainte longitudinale s'écrit $\sigma = 0$. Si on suppose que les déformations sont petites et proportionnelles aux contraintes, on peut écrire selon la loi de Hooke :

On a $\rho = f(A, P)$ mais comme on suppose que les phénomènes thermiques liés à la dissipation mécanique ou aux échanges avec l'extérieur ($A = \text{cte}$) sont négligeables et que l'eau étant un fluide barotrope. On considère la définition suivante de son module d'élasticité E_{eau} :

$$d_p = E_{eau} \frac{d\rho}{\rho} \quad (\text{II.7})$$

Selon la théorie de résistance des matériaux la contrainte latérale pour une conduite hydraulique circulaire est l'équation de comportement suivante:

$$\sigma = \frac{\rho D}{2e} \quad (\text{II.8})$$

Cette équation est utilisée pour exprimer la contrainte σ pour un différence de pression entre l'intérieure et l'extérieure.

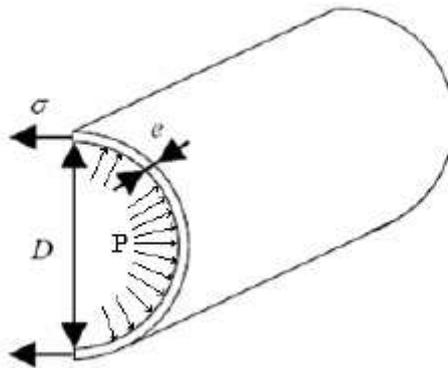


Figure II.2: Contrainte latérale dans une conduite a parois mince

En utilisant la définition de la déformation des matériaux à savoir :

$$d\mathcal{E} = E \frac{dR}{R} \quad (\text{II.9})$$

R : étant le rayon hydraulique de la conduite.

Et en introduisant le module d'élasticité E_c du matériau défini par :

$$\sigma = E_c \mathcal{E} \quad (\text{II.10})$$

Cette contrainte mécanique latérale s'explique comme :

$$d\sigma = E_c \frac{dR}{R} \quad (\text{II.11})$$

Cette contrainte mécanique latérale s'explique comme :

En combinant les expressions (II.8) et (II.11) sachant $dA = 2RdR$ et faisant l'hypothèse que l'épaisseur (e) de la paroi est constante pendant le processus de déformation de la conduite, on aboutit a :

$$\frac{1}{A} \frac{dA}{dt} = \frac{D}{eE_c} \frac{dp}{dt} \quad (\text{II.12})$$

Ainsi, en combinant l'équation (II.6), (II.7) et (II.12) on obtient l'expression suivante de l'équation de continuité :

$$\rho C^2 \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.13})$$

C est la vitesse de propagation de l'onde de pression, définie par Lorenzo Allievi comme étant égal a :

$$C = \sqrt{\frac{1}{\rho \left(\frac{1}{E_{eau}} + \frac{D}{eE_c} \right)}} \quad (\text{II.14})$$

II.3 Equation de dynamique :

Hypothèse

Les hypothèses admis dans ce cas sont les mêmes qu'au point précédent a l'exception de 3eme hypothèse **Figure** (II.3).

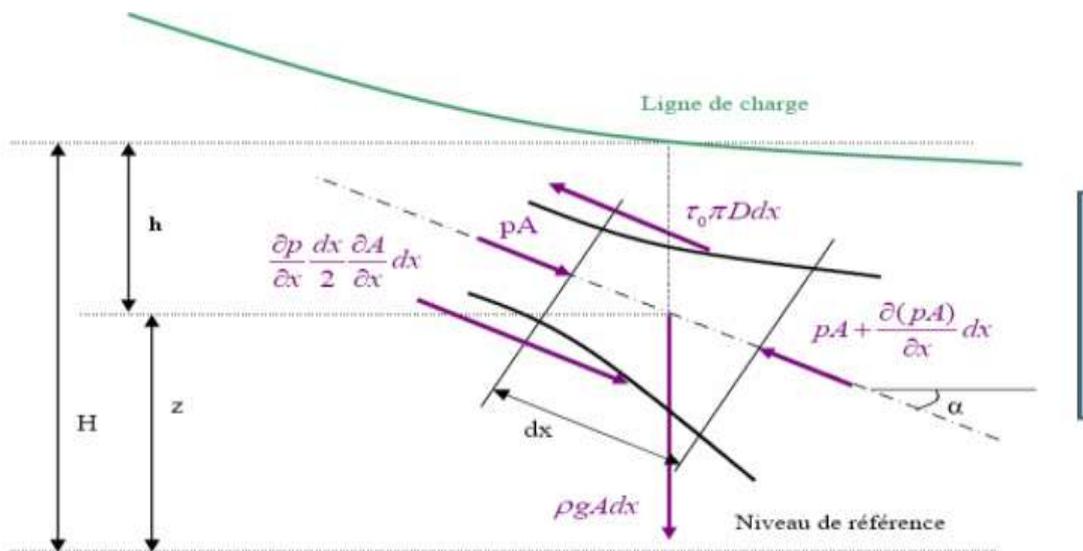


Figure II.3. Bilan des forces exercées sur un tronçon de conduite

Les forces prises en compte dans le bilan de quantité de mouvement sont :

- Les forces d'inertie.
- Les forces de pressions.
- Les forces de frottements visqueuses.
- La force de pesanteur.

L'équation fondamentale de la dynamique s'écrit alors :

$$pA - \left(pA + \frac{\partial(pA)}{\partial x} dx\right) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \frac{\partial A}{\partial x} dx - \tau_0 \pi D dx - g \rho A dx \sin(a) = \rho A dx \frac{dV}{dt} \quad (\text{II.15})$$

$$pA - \left(pA + \frac{\partial(pA)}{\partial x} dx\right) + \left(p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{dx}{2}\right) \frac{\partial A}{\partial x} dx : \text{Forces de pressions normales et latérales}$$

$$\tau_0 \pi D dx : \text{Force de frottement}$$

$$g \rho A dx \sin(a) : \text{Force de gravité}$$

En négligeant les termes de seconde ordre, on obtient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} A + \tau_0 \pi D + \rho g A \sin(a) + \rho A \frac{dV}{dt} = 0 \quad (\text{II.16})$$

Exprimant τ_0 en fonction d'un coefficient de perte de charge stationnaire λ par la définition de Darcy-Weisbach :

$$\tau_0 = \frac{\rho \lambda V^2}{8} \quad (\text{II.17})$$

L'hypothèse des pertes stationnaire peut ne plus être justifiée lorsque l'écoulement présente des fortes variations du volume du débit et lorsque l'interaction du fluide et de la structure jouent un rôle non négligeable [8].

La vitesse est une fonction dépendant de l'abscisse x et du temps : $V = V(x, t)$.

ce qui donne :

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial x} V + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{II.18})$$

En combinant l'équation (II.16), (II.17), (II.18) on obtient :

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} g \sin(a) + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (\text{II.19})$$

La valeur absolue garantit que le dernier terme est bien dissipatif et pour préciser que les forces de frottements sont opposées au sens de l'écoulement.

En regroupant les équations (II.13), (II.19) on obtient le système d'équation suivant :

$$\rho C^2 \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \quad (\text{II.20})$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + V \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} g \sin(a) + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (\text{II.21})$$

II.4 Discussion des équations de base :

Reprenons le système d'équations des écoulements instationnaires en charge :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} - V \sin \theta + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.22})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (\text{II.23})$$

L'équation de continuité (II.22) et celle de la dynamique (II.23) régissant la propagation des ondes élastiques dans les conduites en charge, constituent donc un système d'équations différentielles de premier ordre. Dans ce système, les variables indépendantes sont la coordonnée longitudinale x et le temps t , et les variables dépendantes sont la charge H et la vitesse d'écoulement V . Les autres variables, comme la célérité de l'onde a , et le diamètre D , ne changent pas dans le temps mais peuvent évidemment varier selon x . Le coefficient de frottement λ varie avec le nombre de Reynolds. Cependant, λ est considéré constant parce que les effets d'une telle variation sont négligeables en régime transitoire.

Dans la pratique des calculs du coup de bélier, le terme d'accélération convective $V (\partial V / \partial x)$ peut être négligé devant l'accélération pure $(\partial V / \partial t)$, ainsi que $V (\partial V / \partial x)$ comparé à $(\partial H / \partial t)$. En considérant aussi la conduite horizontale ou faiblement inclinée, le système différentiel simplifié s'écrit alors :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{a^2}{gS} \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \quad (\text{II.24})$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\lambda V |V|}{2D} = 0 \quad (\text{II.25})$$

En écoulement stationnaire ($\partial / \partial t = 0$), l'équation (II.24) indique que $(\partial V / \partial x) = 0$, ce qui correspond à un débit constant dans la conduite. L'équation (II.25) se simplifie en $(\partial H / \partial x) = -j$ et impose que la pente de la ligne de charge soit égale à la pente de frottement. Dans cette équation (II.24) le modèle de Darcy-Weisbach a été utilisé pour le calcul de la perte de charge. Si par contre un autre modèle, empirique par exemple, a été employé, le terme de frottement dans (II.25) redeviendrait $\lambda V |V|^m / D^b$ où m et b sont des coefficients empiriques dépendant de la formule ayant été utilisée [7].

Le système d'équations différentielles formulé ne fait intervenir qu'une combinaison linéaire des dérivées premières des variables d'état $H(x,t)$ et $V(x,t)$, mais ce système se constitue aussi de termes non linéaires, comme celui de frottement. Le système d'équations est dit alors « quasi-linéaire ». En réécrivant ces équations sous forme matricielle, on aura :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} = - [B(H, V)] \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} H \\ V \end{Bmatrix} - [G(H, V)] \quad (\text{II.26})$$

Dans lesquelles :

$$B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{a^2}{g} \\ g & 0 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\lambda V |V|}{2D} \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres λ de la matrice B permettent de déterminer le type d'équations aux dérivées partielles du système (II.23) et (II.24). L'équation caractéristique associée à la matrice B est :

$$\lambda - a^2 = 0$$

D'où

$$\lambda = \pm a^2$$

Sachant que a est réel, les deux racines de l'équation, en l'occurrence les valeurs propres de la matrice B , sont alors réelles et distincts, de ce fait le système (II.24) et (II.25) forme des équations aux dérivées partielles de type « hyperbolique » [7].

II.5 Intégration du système différentiel :

Il est bien connu que les équations complètes du régime transitoire sont insolubles analytiquement, et pour pouvoir intégrer ces équations différentielles, on doit passer par une cascade de simplifications.

Après avoir négligé les termes convectifs, le système d'équations est rendu sous une forme conservative en omettant le terme dissipatif correspondant aux pertes de charge. On parvient alors au système suivant :

Dérivons à présent le système précédent successivement par rapport à x et à t . On obtient ainsi, après quelques manipulations algébriques :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} \quad (\text{II.27})$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial H}{\partial x^2} \quad (\text{II.28})$$

On obtient donc les équations (II.27) et (II.28) dans lesquelles H et V sont liées aux variables x et t par une même équation différentielle qui est l'équation classique des « cordes vibrantes », bien connue aussi sous le nom de l'équation de d'Alembert, dont la solution générale de ce type d'équation a été donnée par ce dernier [7].

II.5. Solution générale

La solution générale de ces équations différentielles s'obtient après un changement de variables et s'écrit:

$$H = (x, t) = H_0 + F\left(t - \frac{x}{a}\right) + f\left(t + \frac{x}{a}\right) \quad (\text{II.29})$$

$$V = (x, t) = V_0 - \frac{g}{a} + \left[F\left(t - \frac{x}{a}\right) - f\left(t + \frac{x}{a}\right) \right] \quad (\text{II.30})$$

Où H et V représentent respectivement la pression et la vitesse d'écoulement avant la rupture du régime permanent, c'est-à-dire à $t = 0$ au point considéré de la conduite. Les deux équations sont celles trouvées par Lorenzo Allievi (1925), où les fonctions arbitraires F et f peuvent être absolument quelconques et leur détermination dépend des conditions aux limites. Et pour un intérêt pratique, les x sont comptés positivement à partir de l'aval de la conduite où se crée la perturbation [7].

II.6 Les méthodes de résolution :

L'histoire de l'analyse numérique de phénomène de coups de bélier est parsemée de controverses, aucun des modèles numériques proposés n'ayant reçu une approbation unanime. Toutefois plusieurs investigateurs ont utilisé des schémas basés sur les différences finies. Les principaux schémas numériques peuvent être regroupés en quatre grandes familles : la méthode des caractéristiques, les volumes finis et les éléments finis, de Louis Bergeron. Chacune des familles est sommairement présentée ci-après [9].

II.6.1 Méthode des caractéristiques :

Développée en 1789 par Monge, la méthode des caractéristiques permet l'intégration des équations différentielles partielles. Largement utilisée en hydraulique à surface libre pour l'analyse des phénomènes d'écoulements non permanents, elle apparaît aujourd'hui comme étant la méthode standard d'analyse des écoulements transitoires en conduites fermées. Par ailleurs, elle facilite la compréhension du phénomène de propagation et aide au développement des conditions frontière nécessaires à l'utilisation des méthodes basées sur les différences finies explicites. Son développement est largement documenté [9].

II.6.2 Méthode volumes finis :

En analyse numérique, la méthode des volumes finis est utilisée pour résoudre numériquement des partielles, elle utilise, comme la méthode d'éléments finis, des approximations d'intégrales. Toutefois, la méthode des éléments finis utilise une formulation variationnelle de l'équation à résoudre, tandis que la méthode de volumes finis est fondée directement sur la forme dite forte de l'équation. Les méthodes de volumes finis ont été mises au point initialement pour des lois de conservation, mais des développements récents permettent à présent de les utiliser pour des équations elliptiques et paraboliques. Ces équations aux dérivées partielles contiennent des termes de divergence. Les intégrales de volume d'un terme de divergence sont transformées en intégrales de surface en utilisant le théorème de flux-divergence. Ces termes de flux sont ensuite évalués aux interfaces entre les volumes finis. On utilise une fonction de flux numérique pour faire une approximation des flux à l'interface [10].

Léon et al en 2006 ont utilisé la méthode des volumes finis pour le développement d'un modèle de simulation en temps réel des écoulements transitoires dans les égouts pluviaux. La méthode proposée est basée sur la reformulation des équations différentielles partielles décrivant les écoulements unidimensionnels dans les canaux non prismatiques (continuité et quantité de mouvement) sous une forme intégrale à travers un volume de contrôle élémentaire. Les besoins de maillage du domaine d'étude ont conduit les auteurs à la discrétisation des domaines spatial et temporel en cellules de longueur x et de durée t respectivement. Chaque volume fini ou cellule élémentaire est centré sur le nœud i qui la représente et s'étend de $i-1/2$ à $i+1/2$. Les variables d'intérêt (section mouillée et débit) sont définies au centre i de chaque cellule [9].

II.6.3 Méthode des éléments finis :

La méthode des éléments finis est une alternative numérique robuste qui permet de résoudre, de manière discrète, les équations différentielles partielles complexes pour lesquelles une solution approchée « suffisamment » fiable est requise. C'est une technique nouvelle et son utilisation reste limitée en hydraulique urbaine. L'avantage principal de cette méthode tient à son habilité à s'ajuster à des conditions frontières irrégulières ainsi qu'à sa souplesse autorisant un raffinement des grilles de calculs là où cela s'avère nécessaire [9].

II.6.4 Méthode de Louis Bergeron :

La méthode de Louis Bergeron permet de déterminer dans les installations hydrauliques les variations de pression et de débit dues aux coups de bélier sans expliciter analytiquement la nature de l'onde. Initialement, c'était une méthode graphique ; elle est transposée aujourd'hui sur des logiciels [1].

Principe de la méthode :

Les concepteurs et utilisateurs d'installations hydrauliques préfèrent exprimer les pressions en hauteur de colonne de fluide et remplacer la vitesse moyenne d'écoulement par le débit volume. Notant également qu'ils comptabilisent généralement les pressions effectives, c'est-à-dire la pression absolue moins la pression atmosphérique [1]. Ce qui revient à poser :

$$H = \frac{p-p_{at}}{\rho g} = \frac{p-p_{at}}{\rho g} + z \quad (\text{II.31})$$

II.7 Conclusion :

Une revue détaillée sur la modélisation numérique du phénomène de coup de bélier a été présentée dans ce chapitre. Il en a résulté alors de l'application de deux équations de base celle de continuité et de quantité de mouvement un système aux dérivées partielles de type hyperbolique, qui n'est autre que celui décrivant la propagation des ondes planes dans les corps élastiques. Malgré la multitude des modèles numériques proposés au cours, Les équations différentielles auxquelles nous avons aboutis n'ont malheureusement pas de solution analytique connue, sauf cas hypothétiques simples, et cela paralyse souvent l'Ingénieur. Cette impasse se trouve alors écartée en se rejetant avec succès aux méthodes caractéristique dédiée à ces problèmes, ce qui fera l'objet des chapitres qui en suivront.

Chapitre III : La méthode des caractéristiques

III.1 Introduction

Nous exposons dans ce chapitre la méthode de caractéristique pour la résolution de phénomène du coup de bélier, Dans le but d'apporter à cette méthode une rapidité d'exécution et une précision dans le calcul en passant du domaine continu au domaine discontinu où les équations différentielles se trouvent converties en équations algébriques plus simples à résoudre.

III.2 Modèle mathématique :

Les équations gouvernant le phénomène du coup de bélier, en écoulement unidirectionnel, sont dérivées en appliquant le principe de conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour un volume de contrôle. Ces équations décrivent la variation temporelle et axiale des variables du champ d'écoulement en régime instationnaire Pour une section transversale de diamètre constant, ces équations s'écrivent comme suit

$$U = \begin{bmatrix} H \\ Q \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \frac{a^2 Q}{gS} \\ gSH \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 \\ RQ|Q| \end{bmatrix},$$

Le modèle mathématique régissant le problème du coup de bélier alors un système d'équation aux dérivés partielles hyperbolique à coefficient constant. En raison de la présence du temps source non linéaire, une solution générale est impossible. A cet effet, son intégration s'effectue par l'usage des méthodes numériques [10].

III.3 Méthode des caractéristiques :

La méthode des caractéristiques est une technique permettant de résoudre les équations aux dérivées partielles. Particulièrement adaptée aux problèmes de transport, elle est utilisée dans de nombreux domaines tels que la mécanique des fluides ou le transport de particules.

Dans certains cas particuliers, la méthode des caractéristiques peut permettre la résolution purement analytique de l'EDP. Dans les cas plus complexes la méthode des caractéristiques peut être utilisée comme une méthode de résolution numérique du problème. On est choisi de développer cette technique puisqu'elle sera largement utilisée dans la suite de notre étude.

III.3.1 Formulation mathématique du modèle aux caractéristiques :

Pour les écoulements instationnaires en charge les deux équations différentielles, de Saint Venant s'écrivent de la manière suivante : (III.1) et (III.2)

$$L_1 = \frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.1})$$

$$L_2 = \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} = 0 \quad (\text{III.2})$$

Pour que ce système dont les variables x est la coordonnée longitudinale, t est le temps H la charge et V la vitesse d'écoulement. a la célérité de l'onde, D est le diamètre, définisse de manière unique la solution, en combinant les équations (III.9) et (III.10) avec un multiplicateur λ inconnu (à priori), on obtient :

$$L_1 + \lambda L_2 = 0$$

λ (dit de Lagrange) permet de déterminer les deux racines réelles correspondant aux pentes des droites caractéristiques du système différentiel [8].

D'où :

$$\left(\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial H}{\partial x} + g \cdot j \right) + \lambda \left(\frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) = 0 \quad (\text{III.3})$$

Ce qui donne :

$$\lambda \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{g}{\lambda} \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \left(\frac{\lambda a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.4})$$

Pour convertir les dérivées partielles en dérivées ordinaires, on associera à l'équation (III.4) les dérivées matérielles des variables $H(x,t)$ et $V(x,t)$, qui ne sont pas indépendantes, de la manière suivante :

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \quad (\text{III.5})$$

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \quad (\text{III.6})$$

Ce système définit également la solution de manière unique, donc ces équations sont aussi linéairement dépendantes:

$$\lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.7})$$

Soit :

$$\lambda \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial H}{\partial t} \right) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial t} \right) + g \cdot j = 0 \quad (\text{III.8})$$

En examinant les termes des équations (III.7) et (III.8), on peut noter que :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{g}{\lambda} = \frac{\lambda a^2}{g} \quad (\text{III.9})$$

La solution de l'équation (III.9) donne deux racines réelles distinctes, soit :

$$\lambda = \pm \frac{g}{a} \quad (\text{III.10})$$

En substituant la valeur de λ dans l'équation (III.10), la manière particulière dont x

et t sont liés est :

$$\frac{dx}{dt} = \pm a \quad (\text{III.12})$$

Ceci montre le changement de position de l'onde liée au changement du temps par la vitesse de propagation des ondes " a ". La substitution des valeurs de λ dans l'équation (III.12) conduit à deux paires d'équations, lesquelles sont regroupées et notées, équations C^+ et C^- :

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + g \cdot j &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= +a \end{aligned} \right\} C^+ \quad (\text{III.13})$$

$$(\text{III.14})$$

$$\left. \begin{aligned} \lambda \frac{dH}{dt} + \frac{dV}{dt} + g \cdot j &= 0 \\ \frac{dx}{dt} &= -a \end{aligned} \right\} C^- \quad (\text{III.15})$$

$$(\text{III.16})$$

Ainsi, les deux valeurs réelles de λ ont permis de transformer les équations aux dérivées partielles aux dérivées ordinaires où la variable indépendante est seul le temps t .

Les deux premières équations (III.13) et (III.15) du système sont dites "équations de compatibilités". Alors que les deux autres, c'est-à-dire celles donnant dx / dt sont appelées "équations des caractéristiques". Cependant, il est à noter que les équations (III.13) et (III.15) de compatibilité ne sont valides que le long des lignes caractéristiques $dx / dt = \pm a$ du système, alors que le système d'équations (III.1) et (III.2) est valable dans tout le plan x, t . La solution du système d'équations sera représentée donc, dans le domaine formé par les variables indépendantes, qui est le plan x, t . Et puisque la célérité des ondes a est généralement constante, les équations caractéristiques (III.15) et (III.17) représentent ainsi deux droites de pentes $\pm dx / dt$ (Figure (III.1)) [8].

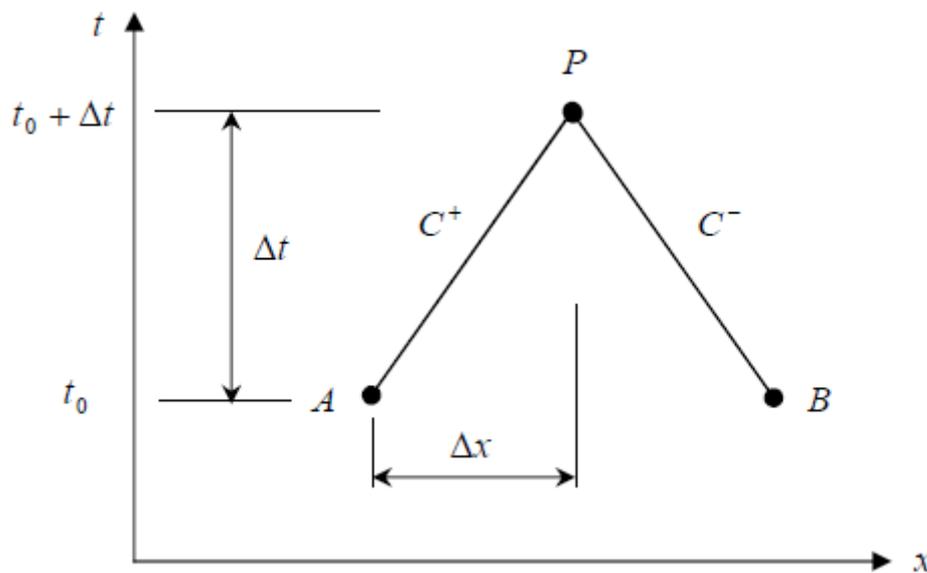


Figure (III.1) : Lignes caractéristiques dans le plan x, t

Avant d'aborder la solution numérique des équations différentielles obtenues, il est nécessaire de donner le concept physique que traduit cette méthode [8].

III.3.3. Solution numérique du système différentiel

Pour arriver à résoudre numériquement les équations précédentes, plusieurs schémas aux différences finies ont été proposés. Selon *Chaudhry*, *Wylie* et *Streeter* utilisent un schéma de premier ordre, *Evangelisti* suggère la technique prédicteur-correcteur et *Lister* emploie conjointement un schéma de premier et second ordre. Étant donné le pas temps de calcul généralement réduit dans les cas pratiques de calcul des régimes transitoires, *Chaudhry* propose l'usage d'un schéma de premier ordre lequel est suffisamment précis ; par conséquent, c'est ce type de schéma que nous adopterons dans notre travail.

Discretisons à présent la conduite en un certain nombre N de tronçons (biefs) égaux (Figure (III.4)). Les points de calcul engendrés par cette discrétisation sont supposés suffisamment proches pour pouvoir écrire la différence finie suivante :

$$df(x, t) = f_{(i+1)} - f_{(i)} \quad (III.17)$$

Avec $f(x, t)$ une fonction telle que la charge H ou le débit Q aux points de discrétisation. Le pas de temps de calcul est déterminé par l'équation caractéristique, $\Delta t = \Delta x/a$, ce qui satisfait l'équation (III.14) de pente positive caractérisée par la droite AP (Figure (III.4)). Si les variables dépendantes H et Q sont connues au point A , alors l'équation (III.13), laquelle est valide le long de la caractéristique C^+ , peut alors être intégrée entre les limites A et P et écrite de ce fait en terme des variables d'inconnues H et Q au point P .

D'autre part, l'équation de compatibilité (III.15) peut être intégrée aussi le long de la droite BP , sur laquelle elle est valide. Avec une condition initiale au point B connue, cela conduit à la seconde équation nécessaire à la détermination des variables inconnues H et Q au point P (Figure (III.2)).

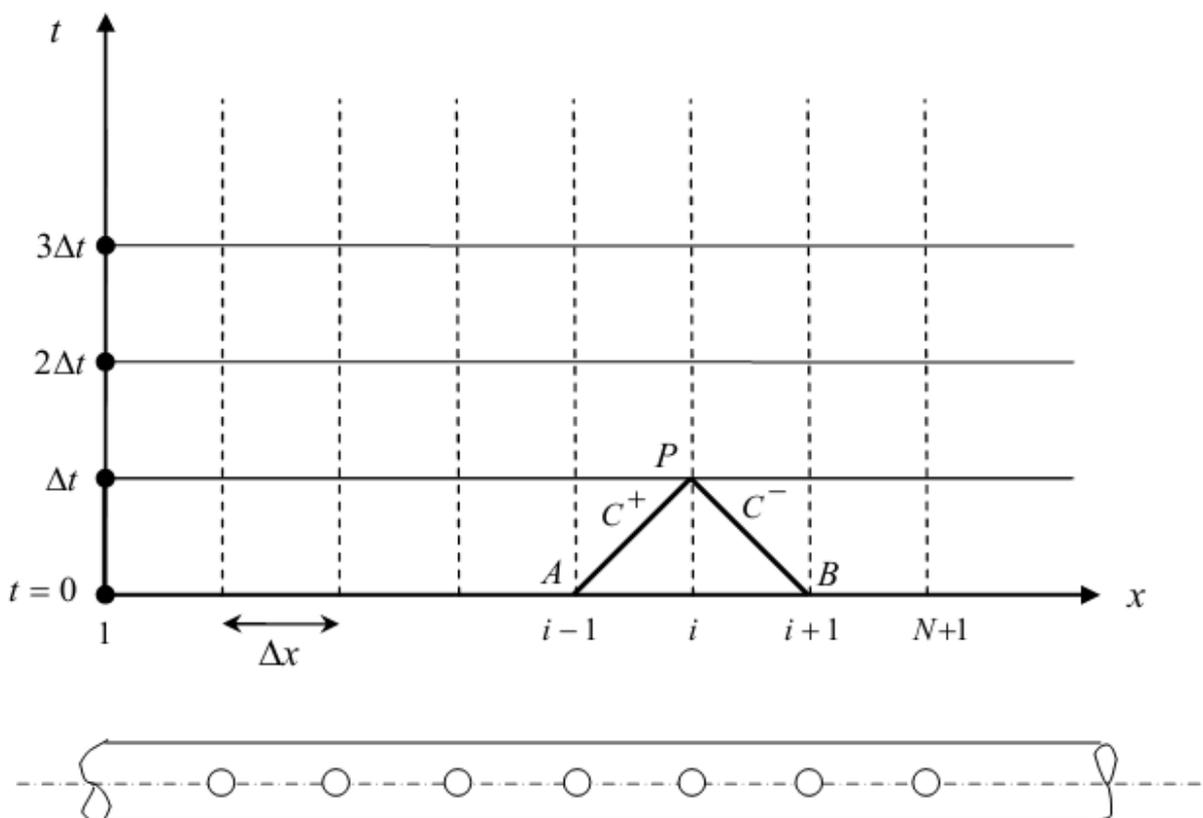


Figure (III.2): Intégration numérique des équations sur le plan (x, t)

En multipliant l'équation (III.13) et (III.14) par $a.dt/g = dx/g$, et en introduisant la section de la conduite pour écrire l'équation en fonction du débit au lieu de la vitesse, ces dernières peuvent s'écrire alors :

$$dH + \frac{a}{gS} dQ + j. dx = 0 \quad (\text{III.18})$$

$$-dH + \frac{a}{gS} dQ + j. dx = 0 \quad (\text{III.19})$$

On peut donc intégrer les équations (III.18) et (III.19) le long des caractéristiques C^+ et C^- entre l'instant $t_0 = 0$, où les variables H et Q sont connues le long de la conduite (régime permanent), et l'instant $t_0 + \Delta t$:

$$\int_{H_A}^{H_P} dH + \frac{a}{gS} \int_{Q_A}^{Q_P} dQ + I^+ = 0 \quad (\text{III.20})$$

$$-\int_{H_B}^{H_P} dH + \frac{a}{gA} \int_{Q_B}^{Q_P} dQ + I^- = 0 \quad (\text{III.21})$$

Le terme I^+ représente l'intégrale du terme de frottement le long du bief de la conduite.

Il s'écrit :

$$I^+ = \int_{A.B}^x \frac{\lambda Q|Q|}{2gDS^2} dx \quad (\text{III.22})$$

La variation du débit Q en fonction de x sous la dernière intégrale étant inconnue, différentes techniques peuvent être choisies pour l'évaluation numérique de l'intégrale de I^+ et I^- . Trois simples approches pour les problèmes pratiques se présentent qui, selon *De Almeida et Koelle* (1992), s'écrivent comme suit :

Schéma de premier ordre :

$$I^+ = R. Q_A |Q_A| \quad (\text{III.23})$$

$$I^- = R. Q_B |Q_B| \quad (\text{III.24})$$

Schéma de deuxième ordre :

$$I^+ = \frac{R}{2} [Q_A |Q_A| + Q_P |Q_P|] \quad (\text{III.25})$$

$$I^- = \frac{R}{2} [Q_B |Q_B| + Q_P |Q_P|] \quad (\text{III.26})$$

Schéma mixte :

$$I^+ = R. Q_P |Q_A| \quad (\text{III.27})$$

$$I^- = R. Q_P |Q_B| \quad (\text{III.28})$$

Ce dernier schéma est considéré meilleur selon *De Almeida et Koelle* (1992). Le long de chaque droite caractéristique C^+ et C^- le paramètre R , traduisant l'effet de résistance à l'écoulement, s'exprime :

$$R = \frac{\lambda}{2gDS^2} \Delta x \quad (\text{III.29})$$

Selon *Wylie et Streeter* (1978), le schéma de premier ordre est considéré satisfaisant pour la plupart des cas pratiques (excepté le cas où la dissipation par frottement est prépondérante). Ceci suppose donc que le débit Q est constant pendant le laps de temps Δt et est égal à celui au pied de la ligne caractéristique, c'est-à-dire $A B Q$. En adoptant ce schéma de premier ordre, on écrira les équations de compatibilité sous la forme discrétisée le long de C^+ et C^- comme suit :

Ce qui donne :

$$H_P - H_A + \frac{a}{gA} (Q_P - Q_A) + \frac{\lambda}{2gDS^2} \Delta x Q_A |Q_A| = 0 \quad (\text{III.30})$$

$$H_P - H_B - \frac{a}{gA} (Q_P - Q_B) - \frac{\lambda}{2gDS^2} \Delta x Q_B |Q_B| = 0 \quad (\text{III.31})$$

Trouvant la solution pour H_P à partir de ces équations qui représentent les relations algébriques de base décrivant la propagation des ondes de pression et de débit dans une conduite en charge. En écrivant donc :

$$C^+ : H_P = H_A - B(Q_P - Q_A) - RQ_A |Q_A| \quad (\text{III.32})$$

$$C^- : H_P = H_B + B(Q_P - Q_B) + RQ_B |Q_B| \quad (\text{III.33})$$

Où $B = \frac{a}{gA}$ représente l'impédance de la conduite, exprime en fait le coefficient angulaire de la droite des lieux de l'observateur de *Bergeron* dans le diagramme (H, Q) sur lequel la solution graphique est menée (*Escande, 1971*).

Pour la commodité des calculs et de la programmation, les équations (III.32) et (III.33) peuvent s'écrire sous la forme simple suivante:

$$C^+ : H_{P_i} = C_p - BQ_{P_i} \quad (\text{III.34})$$

$$C^- : H_{P_i} = C_M + BQ_{P_i} \quad (\text{III.35})$$

Où C_p et C_M sont des constantes connues à chaque pas de temps, ayant pour valeur:

$$C_p = H_{i-1} + BQ_{i-1} - RQ_{i-1} |Q_{i-1}| \quad (\text{III.36})$$

$$C_M = H_{i+1} - BQ_{i+1} + RQ_{i+1} |Q_{i+1}| \quad (\text{III.37})$$

En éliminant Q_{P_i} entre les équations (III.34) et (III.35), on aura:

$$H_{P_i} = (C_p + C_M)/2 \quad (\text{III.38})$$

Connaissant la valeur de

H_{P_i} le débit Q_{P_i} peut être trouvé à partir de l'une des équations (III.34) ou (III.35), et qui aura pour valeur:

$$Q_{P_i} = (C_p - H_{P_i})/B \quad (\text{III.39})$$

Partant de ces deux équations, on pourra donc calculer les variables H et Q en régime transitoire aux points intérieurs du réseau des caractéristiques à chaque pas de temps connaissant ces mêmes variables au pas de temps antérieur. Ainsi, chaque étage de temps transmet l'information à l'étage immédiatement supérieur suivant les droites caractéristiques C^+ et C^- , où leurs intersections définissent la solution au point considéré (Figure (III.3)).

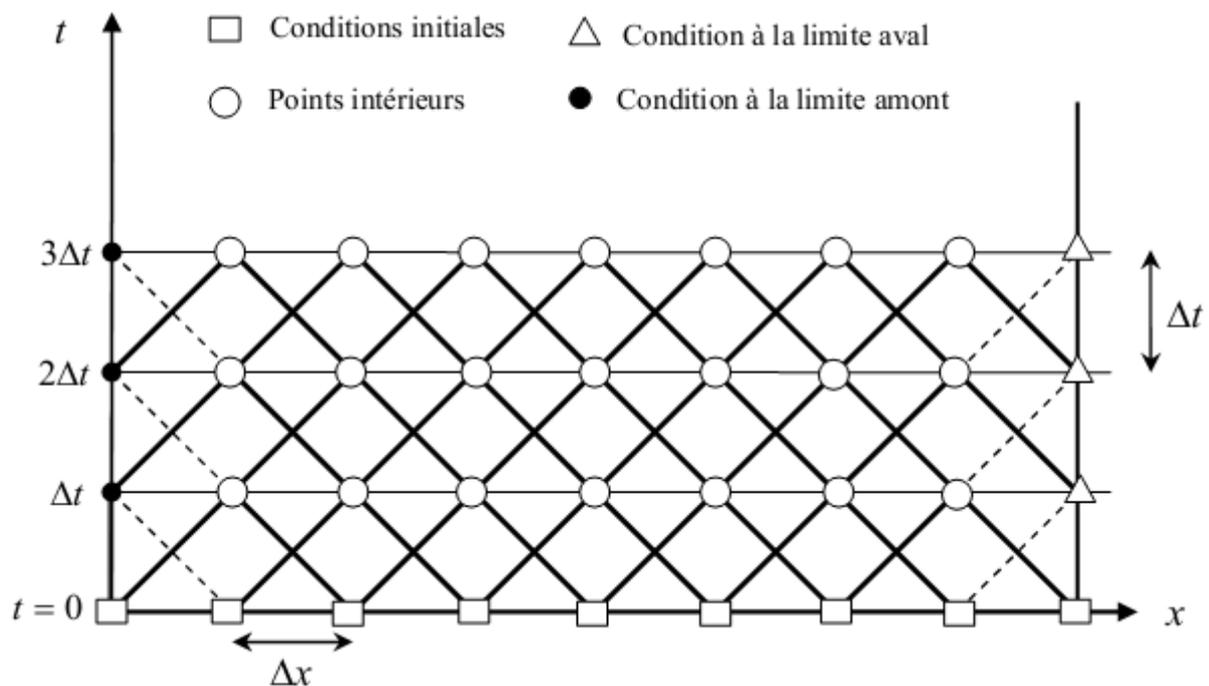


Figure (III.3): Réseau des caractéristiques pour le calcul du régime transitoire

Cette technique de calcul est dite à grille fixe et directe. En ayant $\Delta x = a \cdot dt$ (nombre de Courant $C_r = 1$), les lignes caractéristiques s'intersectent en chaque point de calcul "i", le calcul est alors facile. Si par contre $\Delta x > a \cdot dt$ ($C_r > 1$), les lignes C^+ et C^- issues du point de calcul P (où les variables sont recherchées) ne recouperont pas les points A et B au temps $t - \Delta t$ où la solution est connue (Figure (III.6)). Dans ce cas une interpolation s'impose pour déterminer les variables d'état de l'écoulement aux points L et R , connaissant ceux en A et B (Larock et al. 2000). Pour ce faire, plusieurs techniques d'interpolation se présentent (polynomiale, spline...etc.), mais la plus pratiquée étant l'interpolation linéaire [8].

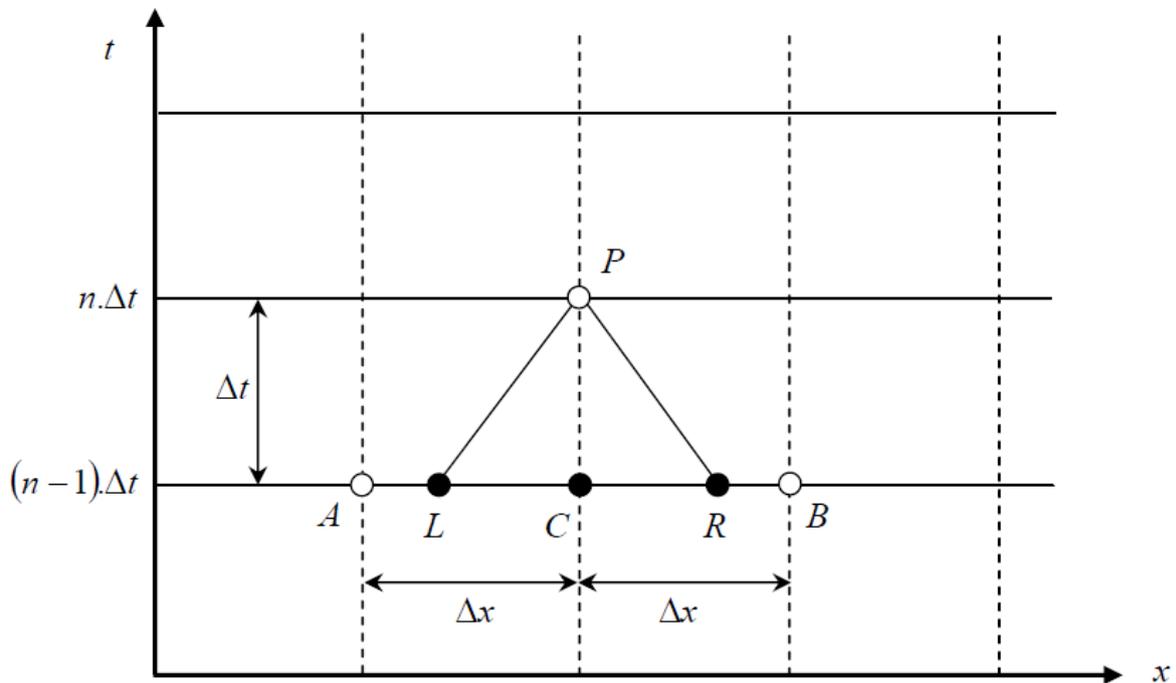


Figure (III.4) : Interpolation des variables H et Q aux pieds des caractéristiques (Larock et al., 2000)

Quoique cette méthode de calcul, dite à pas de temps spécifié, est fortement adoptée dans certains cas, tels que les réseaux complexes de conduites (pour surmonter les difficultés de recouplement des caractéristiques dans les divers points du réseau) et aussi le cas des conduites à déformations élevées (très distensibles) (Meunier, 1980), toutefois ce procédé de calcul conduit à l'apparition d'un amortissement et diffusion numérique dans la simulation, conduisant à une déformation de la forme réelle de l'onde et par conséquent réduit notablement la représentativité des résultats. Cet amortissement ou diffusion se fait de plus en plus ressentir lorsque Δx choisi se trouve très grand comparé à la distance $a \cdot dt$ parcourue réellement par l'onde (De Almeida et Koelle, 1992). On s'aperçoit facilement que pour pallier à l'apparition de ces effets numériques parasites, il faut satisfaire fermement la condition $C_r = 1$ c'est-à-dire $\Delta x = a \cdot dt$.

A côté de ces techniques de calcul, on trouve dans la littérature, notamment (Wylie et Streeter, 1978, De Almeida et Koelle, 1992), d'autres types de grilles de calcul. On citera non exhaustivement la technique Shamida, laquelle génère un réseau de caractéristiques secondaires pour augmenter la précision de calcul en créant des interceptions aux temps

$t - \Delta t/2$ et abscisses $t - \Delta x/2$.

III.3.4. Conditions aux limites

L'examen de la figure (III.4) montre qu'aux extrémités de la conduite unique, seule une des deux équations de compatibilité est valide. Pour l'extrémité amont, seule l'équation (III.37) est valide le long de C^- , de même pour la limite aval, l'équation (III.36) est la seule disponible le long de C^+ (Figure (III.5)). Ces deux équations transmettent l'information du régime aux organes d'extrémités [8].

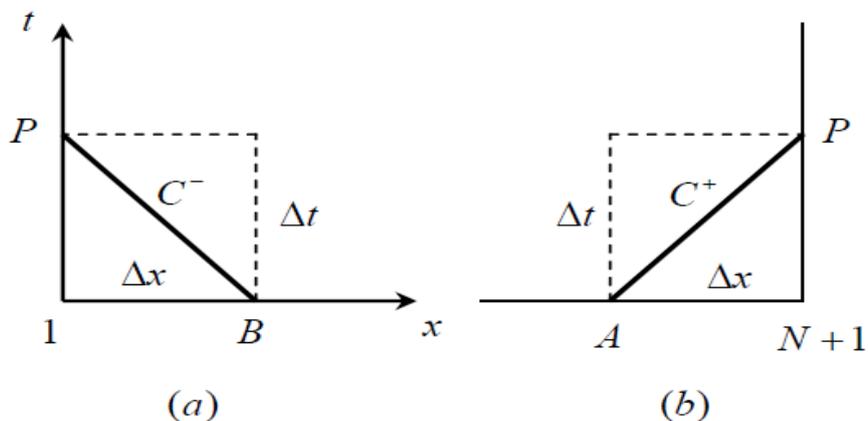


Figure (III.5) : Droites caractéristiques aux limites du domaine (Wylie et Streeter, 1978)

Pour obtenir la solution à l'extrémité de la conduite, une équation complémentaire à cet endroit est nécessaire pour déterminer le régime au temps $t + \Delta t$, transmettant ainsi l'information du régime imposé vers la conduite. Cette équation auxiliaire propre à l'appareil hydraulique présent au noeud considéré, est associée à l'équation de compatibilité pour trouver les variables H_p et Q_p . Parmi ces appareils, citons :

- réservoir à charge constante ;
- vanne de régulation ;
- turbomachine ;
- réservoir d'air ;
- cheminée d'équilibre.

Du point de vue mathématique, ces appareils hydrauliques présents à l'extrémité d'une conduite sont de deux types (*Bergeron, 1949*): appareils imposant une fonction explicite entre

H et Q de type $H = \Psi(Q)$, comme par exemple les vannes et les réservoirs ; et les appareils, imposant une relation différentielle liant H et Q au temps t , exemple des cheminées d'équilibre et des réservoirs d'air. Chaque condition à la limite formée par l'un de ces organes est résolue indépendamment de l'autre limite, et aussi indépendamment des points intérieurs de calcul. En fin du chapitre, un exposé succinct sera donné sur les équations imposées par divers appareils hydrauliques fréquemment rencontrés en pratique. Nous nous pencherons à présent sur une autre méthode de calcul numérique, très populaire en mécanique des fluides, c'est la méthode des différences finies [8].

III.4 Conclusion :

On a exposé dans ce chapitre la méthode permettant la résolution de phénomène du coup de bélier et on a résulté alors de l'application du principe de continuité et de quantité de mouvement un système d'équations aux dérivées partielles de type hyperbolique, qui n'est autre que celui décrivant la propagation des ondes planes dans les corps élastiques.

Chapitre IV : Généralités sur Matlab

IV.1 Introduction

Le quatrième chapitre expose une introduction à Matlab, un logiciel de calcul scientifique. Il a pour objectif de préparer l'étudiant aux travaux pratiques d'Automatique, de Mécanique et d'Analyse Numérique dans lesquels cet outil est intensivement utilisé pour la mise en application et la simulation des principes théorique présentés en cours. Par ailleurs, ce manuel offre la possibilité à l'étudiant de se former à un logiciel professionnel largement répandu.

IV.2 Historique:

MATLAB est une abréviation de *Matrix LABORatory*. Écrit à l'origine, en Fortran, par *C. Moler*, il est destiné à faciliter l'accès au logiciel matriciel développé dans les projets LINPACK et EISPACK. La version actuelle, écrite en C par the MathWorks Inc, existe en version professionnelle et en version étudiant. Sa disponibilité est assurée sur plusieurs plates-formes : Sun, Bull, HP, IBM, compatibles PC (DOS, Unix ou Windows), Macintosh, iMac et plusieurs machines parallèles .C 'est un environnement puissant, complet et facile à utiliser destiné au calcul scientifique. Il apporte aux ingénieurs, chercheurs et à tout scientifique un système interactif intégrant calcul numérique et visualisation. C'est un environnement performant, ouvert et programmable qui permet de remarquables gains de productivité et de créativité.

L'approche ouverte de MATLAB permet de construire un outil sur mesure. On peut inspecter le code source et les algorithmes des bibliothèques de fonctions (Toolboxes), modifier des fonctions existantes et ajouter d'autres .Il possède son propre langage, intuitif et naturel qui permet des gains de temps de CPU spectaculaires par rapport à des langages comme le C, le TurboPascal et le Fortran. Avec MATLAB, on peut faire des liaisons de façon dynamique, à des programmes C ou Fortran, échanger des données avec d'autres applications ou utiliser MATLAB comme moteur d'analyse et de visualisation.

MATLAB comprend aussi un ensemble d'outils spécifiques à des domaines, appelés Toolboxes (ou Boîtes à Outils). Indispensables à la plupart des utilisateurs, les Boîtes à Outils sont des collections de fonctions qui étendent l'environnement MATLAB pour résoudre des catégories spécifiques de problèmes. Les domaines couverts sont très variés et

IV.4 Méthode de travail sur Matlab:

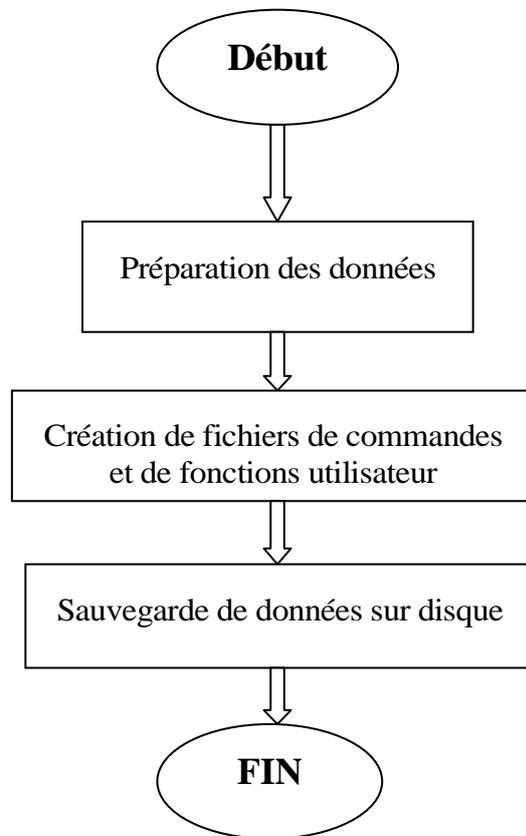


Figure IV.2: Schéma d'utilisation du programme

IV.5 La manipulation des données [13] :

IV.5.1 Matrices

- Création
- Manipulation
- Transformations diverses
- Opérations
- Fonctions

IV.5.2 Autres structures de données :

- Tableaux multidimensionnels
- Texte et caractères
- Tableaux de cellules

IV.5.3 Types numériques de Matlab :

- Norme IEEE pour les flottants
- Types numériques
- Contrôle de l'affichage
- Constantes et limites

IV.6 Exemple :

pour l'étude de phénomène du coup de bélier on a réalisé un simple schéma constitué d'un (réservoir –conduite-vanne).

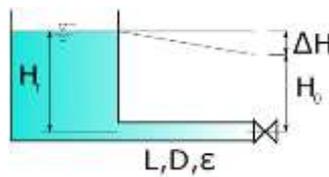


Figure IV.3: Le système étudié

Avec

$L = 600$ m

$D = 0.5$ m;

$\epsilon = 0.0005$; la rugosité

$H_0 = 150$ m;

La programmation des différentes équations reliées aux coups de bélier sur Matlab nous a permis d'obtenir ces tableaux qui représentent les paramètres influençant sur ce phénomène.

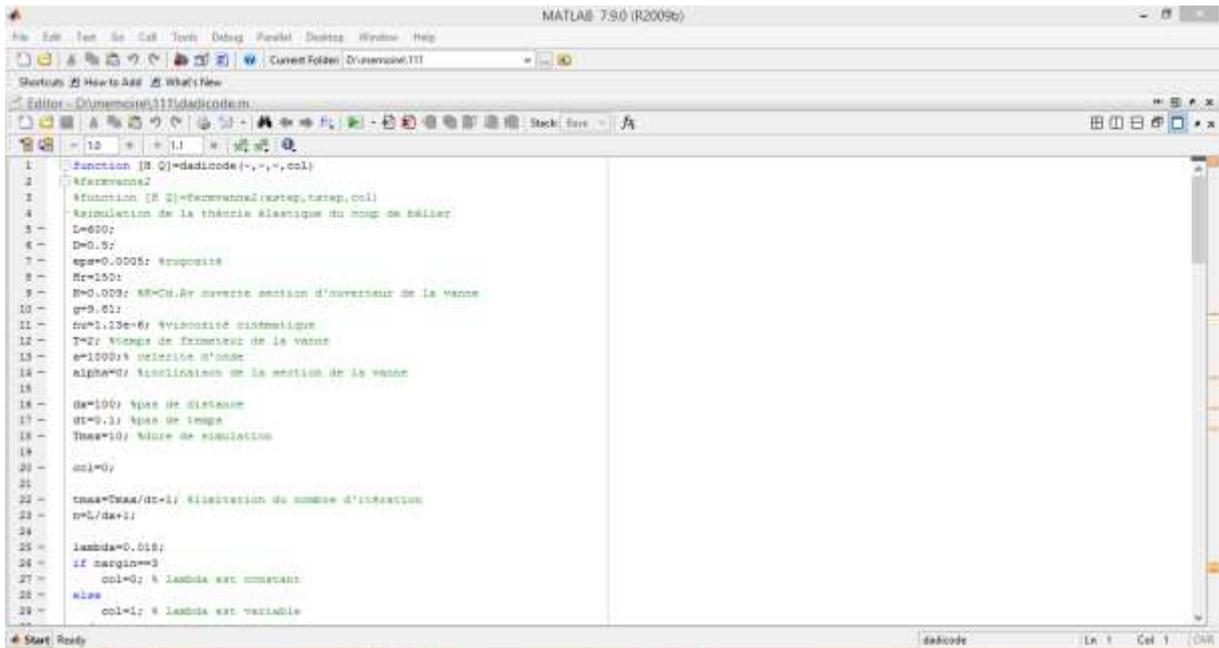


Figure IV.4 :La programmation du coup de bélier sur Matlab

IV.6.1 L'influence de temps de fermeture de la vanne t_c sur H_v :

Temps de fermeture de la vanne (s)	10	20	30	40	50	60
La charge à la vanne H_v (m)	173	159	155.8	153.8	153	152.1

IV.6.2 L'fluence de la rugosité eps sur H_v :

eps la conduit (mm)	0.1	0.4	0.6	0.8	1
La charge à la vanne H_v (m)	270	235	219	200	182

IV.7 Conclusion:

On a essayé dans ce chapitre de donner une définition riche sur le programme Matlab qu'on va adopter dans l'étude de phénomène discuté. Aussi d'écrire la méthode de travail et les types de la manipulation sur ce programme.

Chapitre V : Applications numériques sur un système Réservoir-conduite-valve

V.1 Introduction :

Dans ce chapitre on va essayer d'étudier l'influence des différents paramètres (le temps de fermeture de la vanne t_c , la rugosité ϵ) sur le comportement du coup de bélier.

V.2 Position du problème

Considérons une conduite horizontale, de diamètre intérieur $D = 0,5$ m de longueur

$L = 600$ m, alimentée par un réservoir à niveau constant $H_r = 150$ m (Figure V.1),

$$K = C_d A_v / a = 0,009$$

$f = 0,018$ considéré constant,

a : est de l'ordre de 1200 m/s.

Premièrement on va étudier l'influence de temps de fermeture de la vanne sur la charge hydraulique en différents points de la conduite.

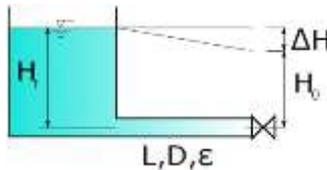


Figure V.1 : Le système étudié

V.3 Le modèle :

Dans notre modèle on a pris comme discrétisation de la conduite un pas de $\Delta x = 100$ m et un pas de temps $\Delta t = 0,1$ s.

i représente le pas d'espace et j représente le pas de temps.

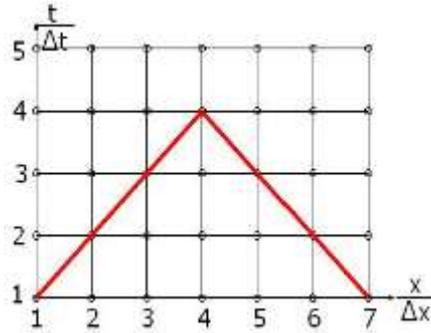


Figure V.2: Le modèle

V.4 Définition des conditions initiales (régime permanent) :

La résolution du problème en régime permanent permet de définir les conditions initiales.

Lorsque la vanne est ouverte, on a :

$$Q_0 = C_d A_v |_0 \sqrt{2gH_0} \quad (V.1)$$

Lors de la fermeture de la vanne et pour tout $t \leq 2,1s$ on a :

$$Q_P = C_d A_v |_t \sqrt{2gH_P} \quad (V.2)$$

A partir de (V.1) et (V.2) on a :

$$\frac{Q_P}{Q_0} = \tau \sqrt{\frac{H_P}{H_0}} \quad (V.3)$$

Par la relation Bernoulli entre la surface du réservoir et la vanne donne :

$$H_0 = H_r - \lambda \frac{L}{D} \frac{V^2}{2g} \quad (V.4)$$

Or $V = \frac{Q_0}{A} = \frac{K\sqrt{2gH_0}}{A}$ avec $K = C_d A_v |_0$. Il s'en suit donc que :

$$H_0 = H_r - 16\lambda \frac{L}{D^5} \frac{K^2 H_0}{\pi^2} \text{ d'où :}$$

$$H_0 = \frac{H_r}{1 + 16\lambda \frac{L}{D^5} \frac{K^2}{\pi^2}} \quad (V.5)$$

On a donc : $H_0 = 143,49 \text{ m}$ et $Q_0 = 0,477 \text{ m}^3/\text{s}$

V.5 Définition des conditions aux limites

Le réservoir impose une charge constante égale à H_r en début de la conduite. Par conséquent pour les points $H(1,j)$ sont tels que :

$H(1,j) = H_r$ quel que soit j . Cette condition sera exploitée sur C^- .

Au niveau de la vanne, la condition est définie sur C^+ par la loi de fermeture de la vanne

$$Q_p = \tau Q_0 \sqrt{\frac{H_p}{H_0}}$$

En insérant cette expression dans l'équation de C^+ dans le système (III.20), on obtient une équation du second degré en H_p dont une seule des solutions est valable :

$$H_p^2 + H_p \left(-2C_p - \frac{\tau^2 B^2 Q_0^2}{H_0} \right) + C_p^2 = 0 \quad (V.5)$$

V.6. Simulation du coup de bélier le long de la conduite :

A l'aide des équations reliées au phénomène du coup de bélier interprété dans les chapitres III et V on a utilisé un code de simulation sur Matlab qui va nous permettre d'étudier deux simulations importantes qui influent sur ce phénomène lors d'une fermeture d'une vanne, dans un premier temps le coup de bélier dans les différents points de la conduite par un pas de 100 m a été étudié, deuxièmement on étudie l'influence du temps de fermeture sur la charge maximale et le comportement du coup de bélier.

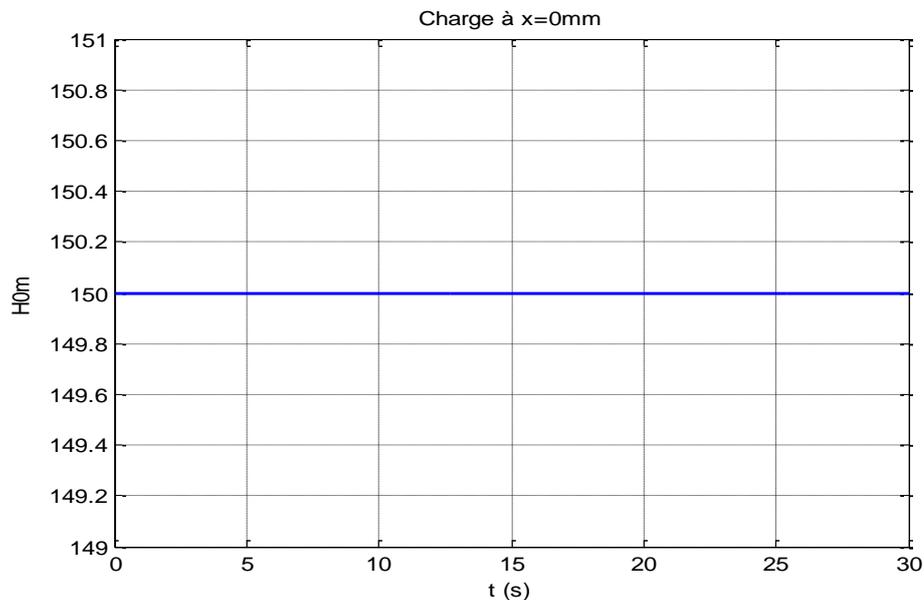


Figure V.3 : Evolution de la charge de pression (en m) à $x = 0$ m

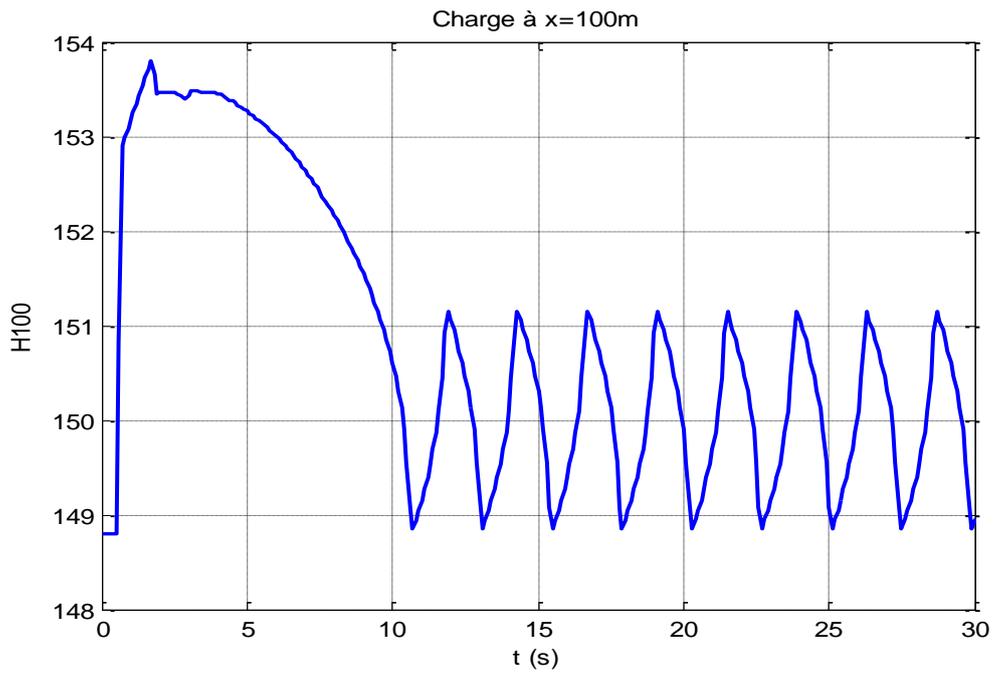


Figure V.4 : Evolution de la charge de pression (en m) à $x = 100$ m

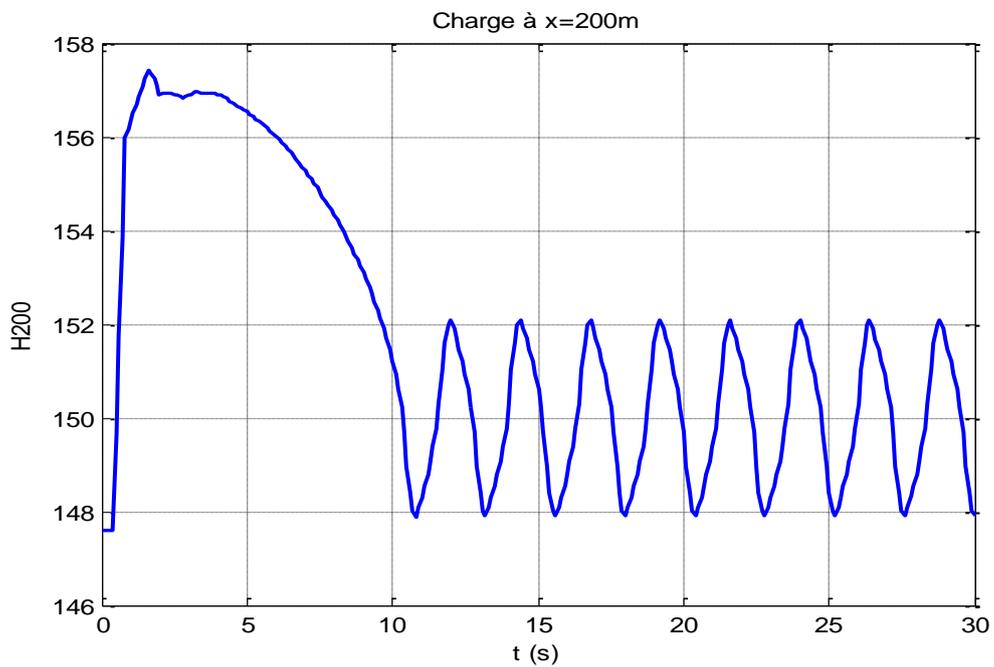


Figure V.5 : Evolution de la charge de pression (en m) à $x = 200$ m

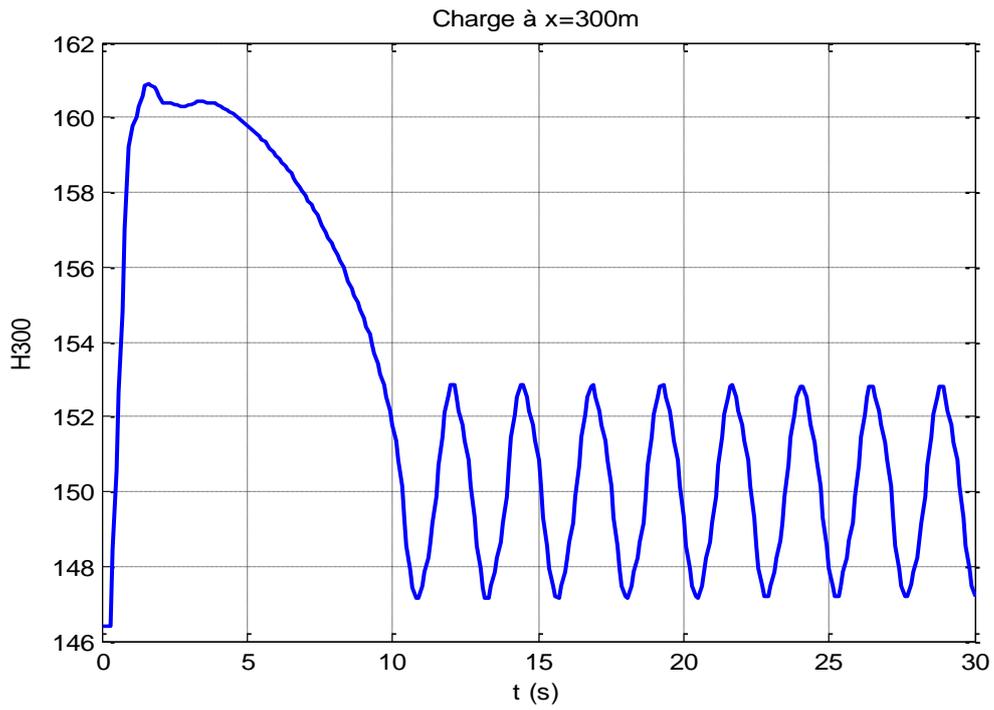


Figure V.6 : Evolution de la charge de pression (en m) à x = 300m

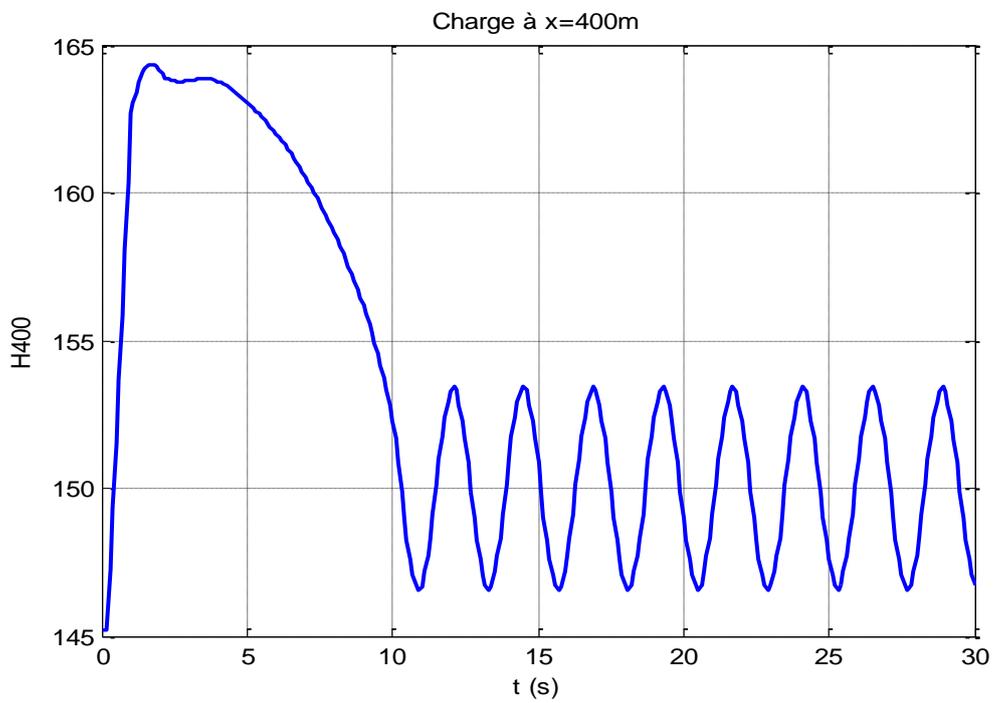


Figure V.7 : Evolution de la charge de pression (en m) à x = 400 m

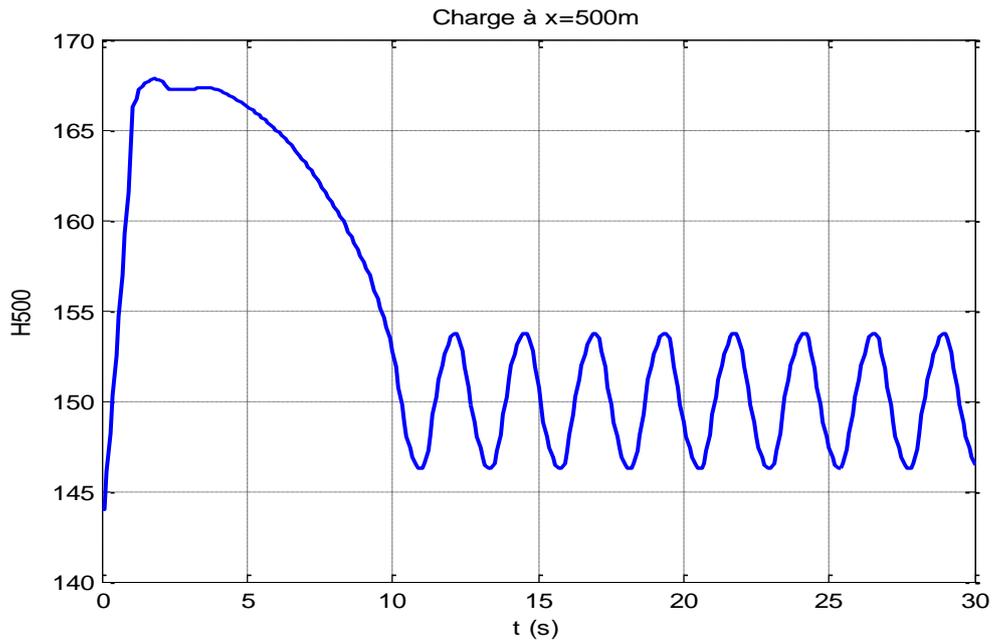


Figure V.8 : Evolution de la charge de pression (en m) à $x = 500$ m

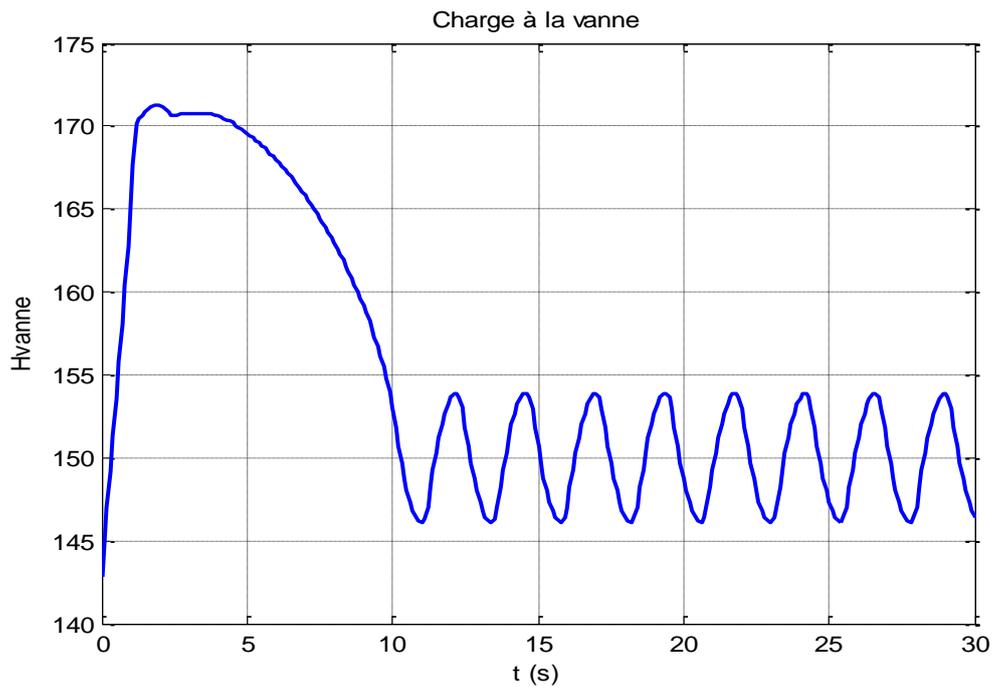


Figure V.9 : Evolution de la charge de pression (en m) à la vanne

V.6.1 Discussion des résultats obtenus :

D'après les courbes obtenus nous avons constaté que la charge prend sa valeur maximale à $x=600$ m, c'est précisément au niveau de la vanne, ça montre que le coup de bélier se

manifeste très considérablement à ce point, en s'éloignant de ce dernier la charge diminue progressivement jusqu'à son annulation à $x=0$.

V.7. Influence du temps de fermeture sur le coup de bélier

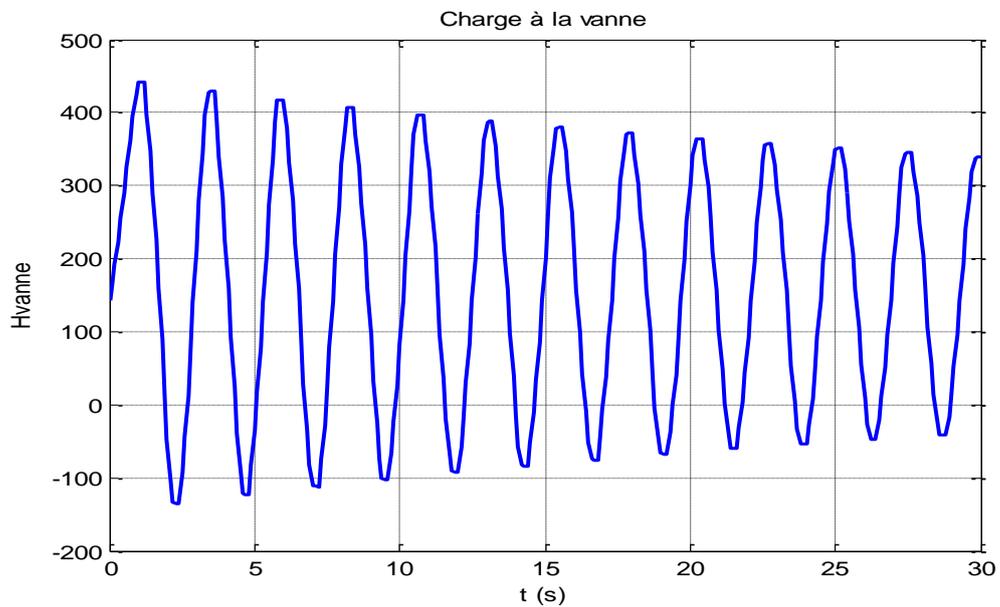


Figure V.10 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 1$ s

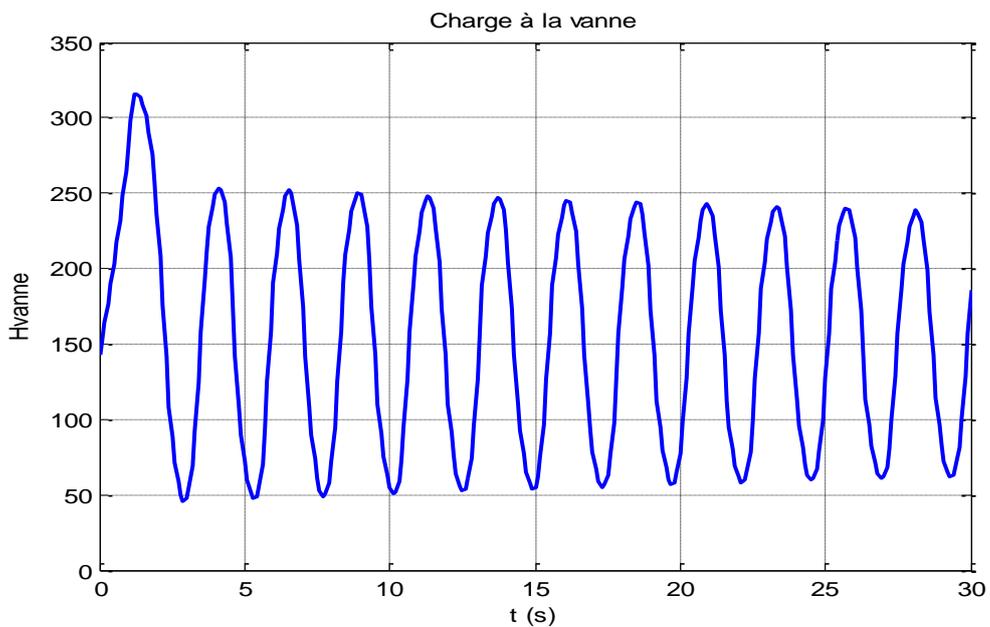


Figure V.11 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 2.1$ s

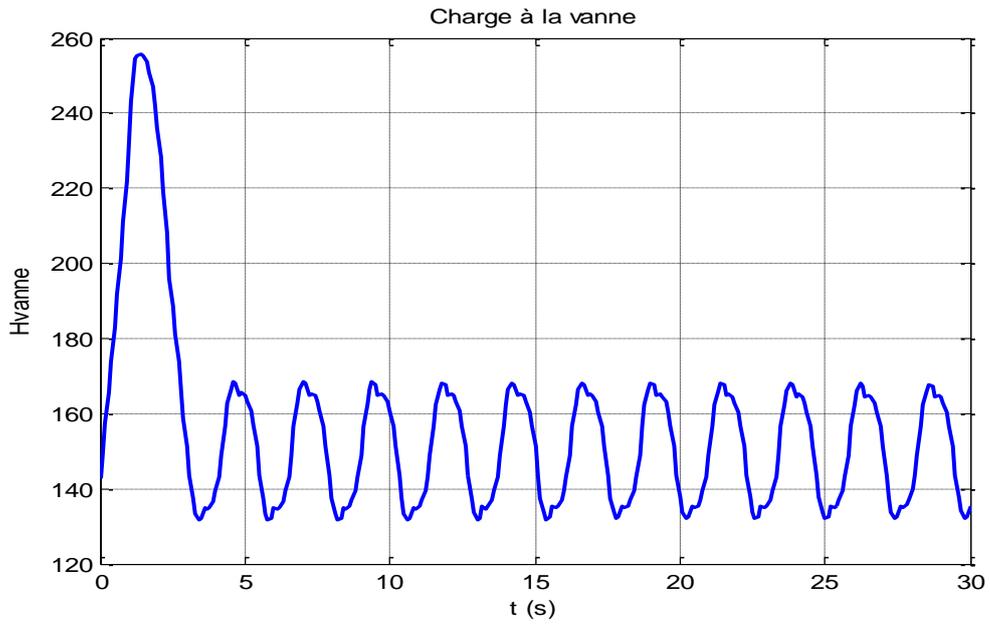


Figure V.12 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 3$ s

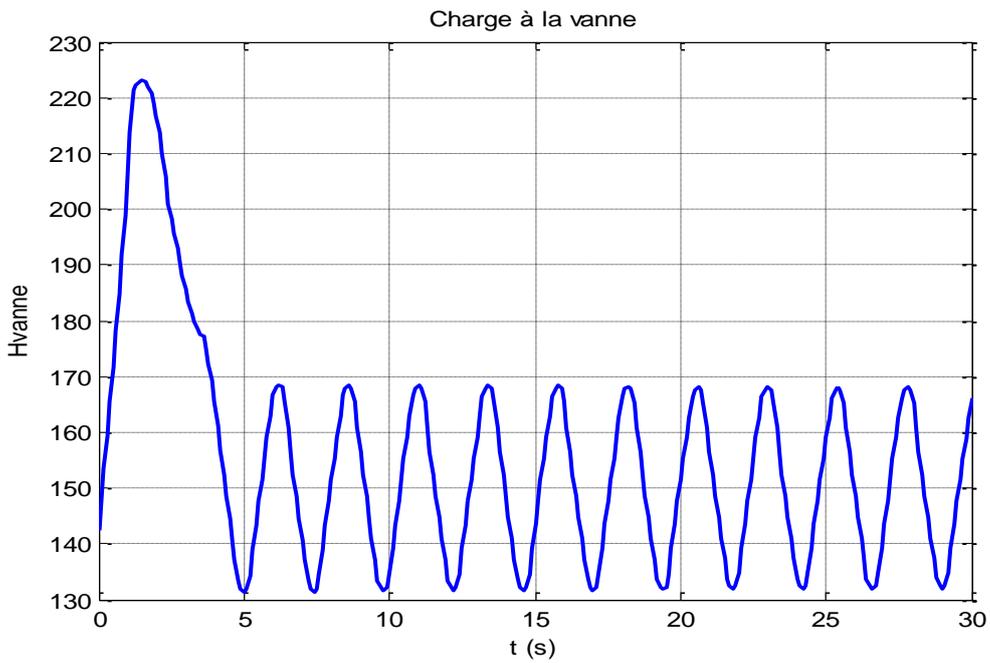


Figure V.13 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 4$ s

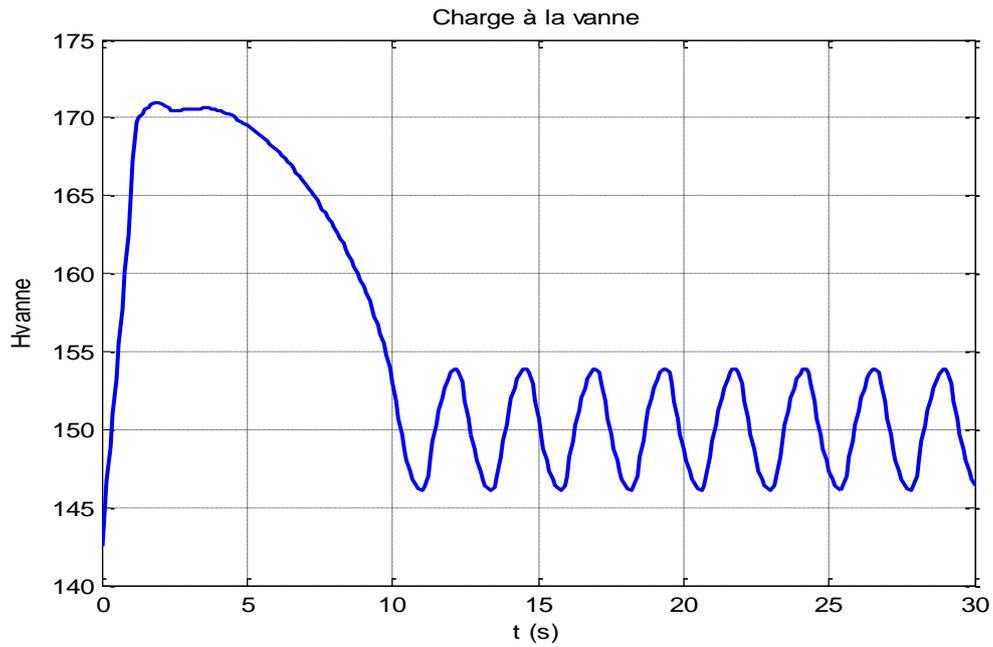


Figure V.14 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $t_c = 10$ s

V.7.1 Discussion des résultats obtenues

On a constaté d'après les graphes obtenus par Matlab à chaque fois que le temps de fermeture de la vanne t_c diminue, la charge maximale H_v augmente. Ce qui signifie que ce dernier influence fortement sur comportement du coup de bélier.

V.8.1 Influence de la rugosité sur le coup de bélier :

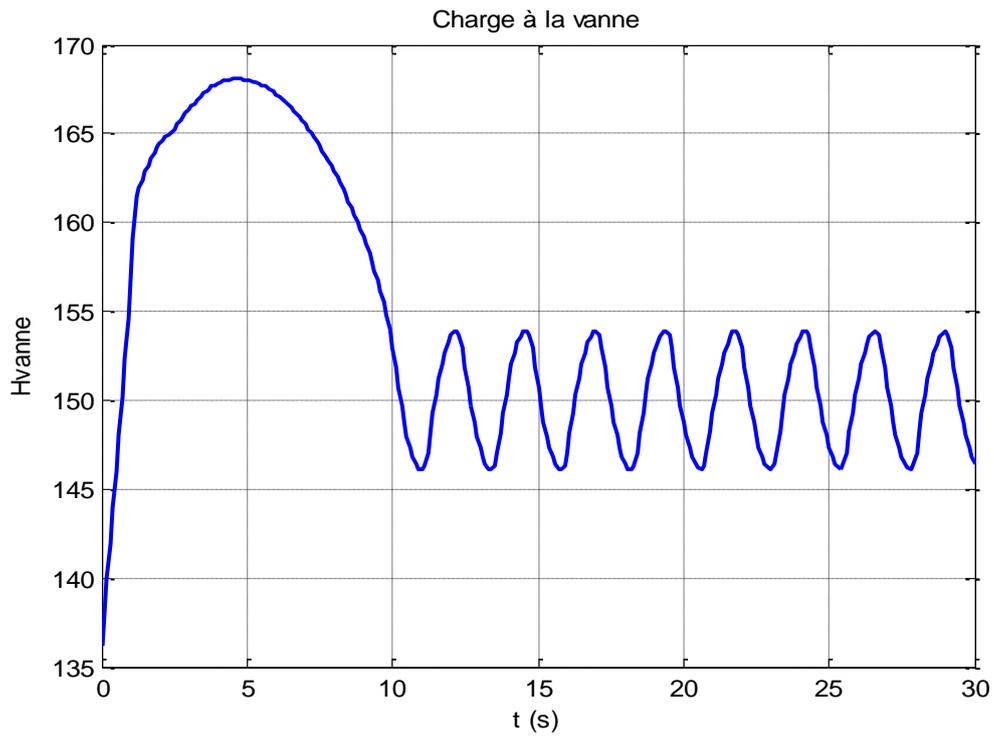


Figure V.15: Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon = 0.006$

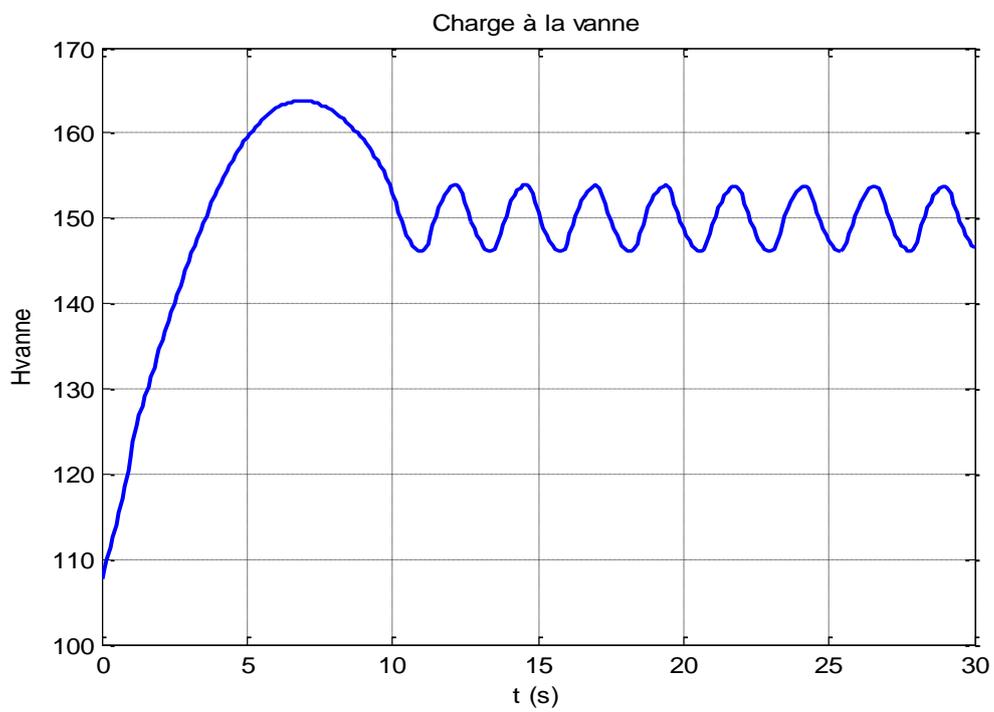


Figure V.16 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon = 0.1$

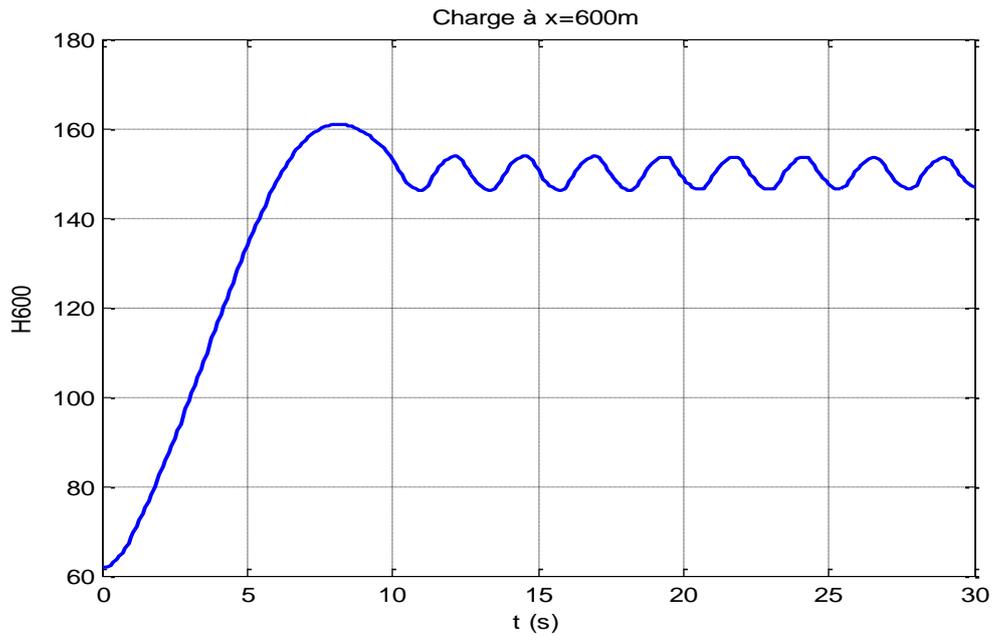


Figure V.17 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon_{ps} = 0.4$

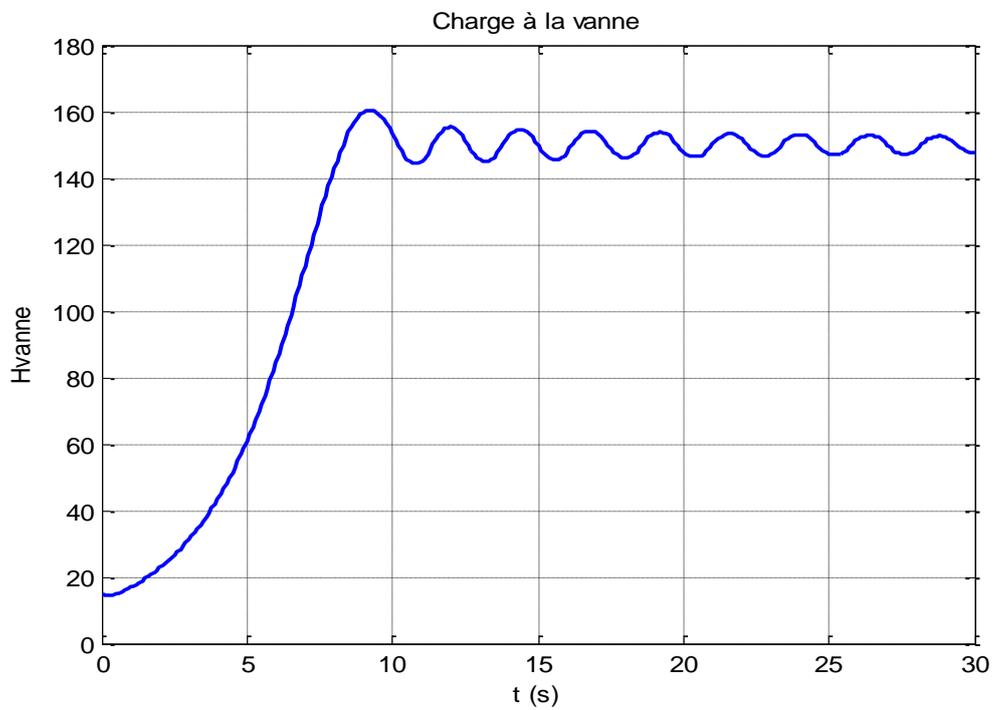


Figure V.18 : Evolution de la charge de pression (en m) pour $\epsilon_{ps} = 1$

V.8.1 Discussion des résultats obtenues

Même remarque avec le l'influence de temps de fermeture à chaque fois que le la rugosité diminue, la charge maximale H_v augmente. Ce qui signifie que cette dernière influence aussi sur le comportement du coup de bélier.

V.9 Conclusion :

L'exemple numérique a permis de connaître les variations de la charge, due au coup de bélier par suite de l'arrêt brusque de la vanne ainsi l'influence de temps de sa fermeture (t_c) et la rugosité (eps) de la conduite.

D'après les résultats obtenue nous avons noté que ces deux facteurs affectent fortement sur l'intensité du phénomène du coup de bélier, de sorte que à chaque fois que le temps (t_c) et la rugosité (eps) diminuent la charge augmente et le coup de bélier manifeste fortement dans la conduite.

Conclusion général :

Notre travail est consacré à l'étude numérique du phénomène du coup de bélier utilisant le logiciel MATLAB.

Ce travail est composé de deux parties :

Dans la première partie on a donné des explications théorique sur les types des écoulements ainsi que le phénomène du coup de bélier qui est considéré comme un phénomène très complexe dans les réseaux d'adduction et de distribution d'eau sous pression , on a vu aussi des moyens pour lutter contre ces effets néfastes qui menace les canalisations, tels que la fatigue , l'implosion, voire même des cassures franches.

La deuxième partie est focalisée :

D'une part, sur la modélisation mathématique de ce phénomène qui est représenté par un système composé de deux équations différentielles celle de conservation de la masse et la quantité de mouvement. Ces équations sont traitées avec la méthode des caractéristiques qui a été présentée ainsi que les techniques d'implémentations des conditions aux limites et du terme source.

D'autre part sa simulation qui est faite sous le logiciel MATLAB. Les différents courbes tracer à l'aide de logiciel MATLAB nous a permis de bien suivre le comportement du coup de bélier le long de la conduite, ainsi son changement engendré par la variation de la charge due à la variation dans le temps de fermeture de la vanne (t_c) et la rugosité (esp) des conduites.

Il en résulte donc que les expérimentations numériques effectuées dans ce travail, affirme que la méthode des caractéristiques est parfaitement adaptée à la simulation de phénomène du coup de bélier en faisant preuves, à l'instar du domaine des écoulements transitoires, d'une aptitude à capturer les chocs et les fronts d'ondes raides et garder la monotonie de la solution, sans manifestations de phénomènes parasites.

Finalement, on espère que notre étude sera utile aux ingénieurs et aux étudiants chercheurs pour l'étude du phénomène du coup de bélier et fera l'objet d'une amélioration dans l'avenir.

Références bibliographiques

[1] : M, Freline, 1998. Coups de bélier.

[2] : Z, Saloum ,2008. Etude mathématique des écoulements de fluides viscoélastique dans les domaines singuliers, thèse de doctorat de l'Université paris –Est.

[3] : G, Degoutte, aide-mémoire d'hydraulique à surface libre.

[4] : K, Blanckaert, hydraulique fluviale et aménagement des cours d'eau –écoulements non permanent.

[5] : A, Akabli , N, Djoual,2017, alimentation en eau potable de la commune de Tazmalt (a partir du barrage tichi Haff) , mémoire de fin d'études, Université Abderrahmane MIRA de Bejaia

[6] : Formation CES/Mastère, Eau potable et assainissement, Ecole Nationale du génie de l'eau et de l'environnement de Strasbourg.

[7] : B, Nouredin, 2012 .Etude de l'influence de l'ancrage de la conduite sur la variation de la pression et des contraintes lors de l'écoulement transitoire, Mémoire Présenté en vue de l'obtention du diplôme de Magister.

[8]:L,Amara,2013,modelisation_et_simulation_numerique_des_écoulements_transitoires_en_charge par la méthode des volumes finis, Mémoire Magister de l'Université Mohamed Khider – Biskra.

[9] : M ESCAND.L " Hydraulique générale", Tome II Edition, paris 1971, Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique d'Electronique, d'Informatique et d'Hydraulique.

[10] : M.MEUNIER "Les coup de bélier et la protection des réseaux d'eau sous pression", ENGREF, Paris 1980.

[11]: N. J .2000.MATLAB.

[12]:D.J.Higham.2000. MATLAB guide. SIAM.

[13] : MATLAB. Tex.13/Mars 2008.Version2.2.

Résumé :

Dans les installations d'adductions en hydrauliques, les écoulements transitoires entraînent souvent des conséquences néfastes, d'où la nécessité d'une analyse fine du comportement dynamique des systèmes dans ces conditions de fonctionnement exceptionnelles. Le présent travail s'est alors porté sur l'étude des régimes transitoires par voie de simulation numérique et ceci par usage de la Méthode des caractéristiques, très utilisée dans la résolution des problèmes hyperboliques. La première partie du travail est consacrée à la revue de la littérature, en donnant un aperçu général du phénomène. La problématique de ce travail est donc liée à la modélisation mathématique des régimes transitoires en charge et aux méthodes numériques de résolution des équations différentielles du mouvement instationnaire. La seconde partie, constituant le noyau du travail, est vouée à la modélisation et simulation numérique. Il a été procédé à la discrétisation du modèle mathématique par la méthode des caractéristiques, une nouvelle technique d'implémentation des conditions aux limites. Finalement un cas simple d'installation composant d'un réservoir, conduite, vanne est simulé.

Mots clés : Régime transitoire – Coups de bélier – La méthode des caractéristiques – Logiciel MATLAB – Simulation numérique.

Abstract

In the hydraulic installations, the unsteady pressurized flows caused by the variations of the flow conditions often lead to fatal consequences, from where need for a fine analysis of the dynamic behavior of the systems in these exceptional conditions.. The present work then focused on the study of transient regimes by numerical simulation using the Characteristic Method, which is widely used in solving hyperbolic problems. The first part of the work is devoted to the review of the literature, giving a general overview of the phenomenon. The problematic of this work is thus related to the mathematical modeling of the transient regimes in load and to the numerical methods of resolution of the differential equations of the unsteady movement. The second part, constituting the core of the work, is dedicated to modeling and numerical simulation. The mathematical model has been discretized by the characteristic method; a new technique for implementing boundary conditions. Finally a simple case of component installation of a tank, pipe, and valve is simulated.

Key words: Transient regime - Ram blows - the characteristic method - MATLAB software - Numerical simulation.

ملخص

في أنظمة الإمداد الهيدروليكي ، غالباً ما تؤدي التدفقات العابرة إلى عواقب ضارة ، ومن هنا جاءت الحاجة إلى تحليل مفصل للسلوك الديناميكي للأنظمة في ظل ظروف التشغيل الاستثنائية هذه. يركز العمل الحالي على دراسة الأنظمة العابرة عن طريق المحاكاة العددية باستخدام طريقة الخصائص ، والتي تستخدم على نطاق واسع في حل المشاكل الزائدة. الجزء الأول من العمل مكرس للمراجعة الأدبيات، و ذلك بإعطاء نظرة عامة للظاهرة. و بالتالي اشكالية هذا العمل تتعلق بالنمذجة الرياضية للأنظمة العابرة المستخدمة والطرق العددية لحل المعادلات التفاضلية للحركة غير المستقرة. أما الجزء الثاني، الذي يشكل جوهر هذا العمل فهو مكرس للنمذجة والمحاكاة الرقمية. تم التطرق إلى (تفكيك-تقليل) النموذج الرياضي من خلال طريقة الخصائص والتي هي تقنية جديدة لتنفيذ الشروط الحدودية. وأخيراً يتم محاكاة حالة بسيطة من تركيب مكون من خزان ، الأنابيب وصمام.

كلمات المفتاحية: الأنظمة العابرة - المطرقة المائية - طريقة الخصائص - برنامج MATLAB - المحاكاة الرقمية.