

## Approche numérique du calcul du point d'inception dans les canaux en marches d'escaliers

### *Numerical approach of the computational point of inception in stepped channels*

S. Benmamar, N. Smakghi & A. Kettab

E-Mail : [benmamar@yahoo.fr](mailto:benmamar@yahoo.fr)

Département Hydraulique, Ecole Nationale Polytechnique, Algérie 10, Avenue Hassen Badi B.P.182,  
El - Harrach, Alger Algérie

*We present a numerical model of the two dimensional flow boundary layer in stepped channels with steep slope, which is based on a finite differences scheme.*

*From the mass and linear momentum conservation equations taking into account characters of the boundary layer, a system of non linear equations governing the flow has been developed.*

*Macro roughness effect has been introduced by the presence of step along the channel features out-flow and considered as boundary condition of the model.*

*The discrete system of equations obtained by a finite difference scheme in three points, allows to calculate the velocity profile, the boundary layer thickness and the position of the inception of air entrainment. The latter has been determined as intersection between the boundary layer and the free surface.*

*The results of inception point have been found very close to experimental data on the scale model spillway raw of M'Bali.*

## I ■ INTRODUCTION

L'expérience a montré que les vitesses d'écoulement sur le coursier d'un évacuateur de crues peuvent atteindre 50 m/s [1]. Dans ces conditions les dommages dus à l'érosion par cavitation sont importants. Pour parvenir à ralentir cette érosion, il est possible d'utiliser des bétons spéciaux, des revêtements en acier, etc. Malheureusement ces solutions sont coûteuses et ne sont pas satisfaisantes pour des vitesses supérieures à 30 m/s.

Dans les canaux lisses à forte pente, il a été observé l'apparition, à une certaine distance de la crête, de l'eau fortement aérée. Cette présence d'air dans l'écoulement permet de réduire l'effet de l'énergie libérée par l'implosion des cavités. Sur un fond rugueux, on observe un taux d'entraînement d'air ( $\partial C_{mean}/\partial x$ ) plus importante que sur un fond lisse [2 et 12]. D'où l'intérêt de placer des marches le long du coursier qui forment une macro-rugosité et accélèrent le processus d'entraînement d'air. Ainsi le point d'apparition de l'écoulement aéré est plus haut dans le coursier en marches d'escaliers que dans le coursier lisse.

La détermination de la position du point d'apparition de l'eau blanche, appelé point d'inception est aussi importante que complexe.

Les analyses statistiques des données de plusieurs chercheurs ont indiqué que les propriétés de l'écoulement sont bien représentées par les formules [2] :

$$\left. \begin{aligned} \frac{X_I}{d \cos \alpha} &= 9,72 (\sin \alpha)^{0,08} (F_*)^{0,7} \\ \frac{d_I}{\cos \alpha} &= \frac{0,4034}{(\sin \alpha)^{0,04}} (F_*)^{0,6} \end{aligned} \right\} \text{pour } 27^\circ < \alpha < 53^\circ \text{ où}$$

$$: F_* = \frac{q}{\sqrt{g \sin \alpha (d \cos \alpha)^3}}$$

avec,  $X_I$ , positions du point d'inception,  $d_I$  profondeur de l'écoulement au point d'inception,  $F_*$ , nombre de Froude,  $d$ , hauteur de la marche et  $\alpha$ , pente du canal (fig. 1).

Les travaux expérimentaux effectués sur modèle réduit de l'évacuateur de crues du barrage M'Bali, ont conduit à l'élaboration d'un modèle semi-empirique pour la détermination du point d'inception.

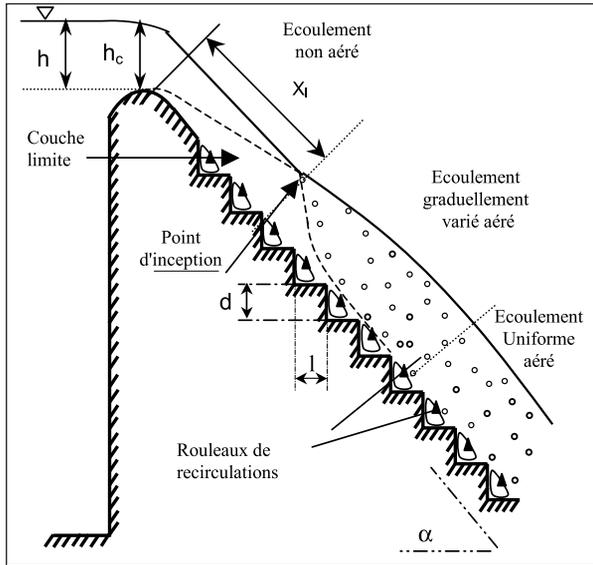


Figure 1 : Schéma et notations.

Dans le présent travail, un modèle numérique permettant la résolution du système d'équations non linéaire gouvernant l'écoulement à couche limite dans les canaux à forte pente en marches d'escalier a été développé.

La répartition des vitesses ainsi que l'épaisseur de la couche limite peuvent être déterminées pour chaque section du canal et permettent le calcul de la ligne d'eau et la position du point d'inception.

## II ■ MODÈLE MATHÉMATIQUE

Les travaux de Lane (1939) [11], Hickox (1945) [10] et Halbronn (1952, 1953) [8 et 9] ont montré que le phénomène d'entraînement d'air commence à partir du point où la couche limite atteint la surface libre de l'écoulement.

L'écoulement de l'eau sur un canal en marche d'escalier, peut être assimilé à l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible sur un profil rugueux et par conséquent régi par les équations de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement.

Se basant sur la théorie de la couche limite et les hypothèses suivantes :

- L'écoulement est permanent ( $\partial/\partial t = 0$ ).
- On considère la pression constante à l'intérieur de la couche limite : Le gradient de pression selon l'axe du canal  $x$  est nul [6] ;
- L'écoulement est bidimensionnel (effet de parois négligeable) ;

l'écoulement est régi par le système :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \sin \alpha + \chi \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

avec,  $\chi$  viscosité cinématique du fluide.

## III ■ MODÈLE NUMÉRIQUE

La résolution numérique du problème nécessite une discrétisation de la formulation différentielle ci-dessus.

### III.1 Discrétisation

Pour les problèmes du type couche limite, SCHLICHTING [13] propose un schéma aux différences en trois points (fig. 2) :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{3u(i+1,j) - 4u(i,j) + u(i-1,j)}{2\Delta x} \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u(i+1,j+1) - u(i+1,j-1)}{2\Delta y} \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u(i+1,j+1) - 2u(i+1,j) + u(i+1,j-1)}{(\Delta y)^2} \quad (5)$$

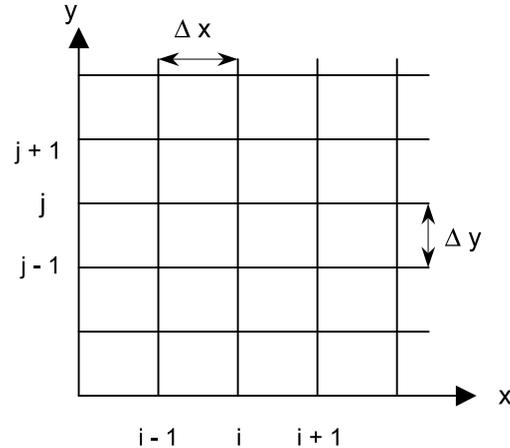


Figure 2 : Maillage.

L'utilisation d'un schéma en trois points implique une erreur de troncature de l'ordre de  $(\Delta x)^2$  dans la direction  $ox$  et  $(\Delta y)^2$  dans la direction  $oy$ .

Pour le traitement des termes non linéaires, on utilise l'expression :

$$u(i+1,j) = 2u(i,j) - u(i-1,j)$$

Dans leur forme linéarisée, les expressions du type  $u \frac{\partial u}{\partial x}$  deviennent :

$$[2u(i,j) - u(i-1,j)] \left[ \frac{3u(i+1,j) - 4u(i,j) + u(i-1,j)}{2\Delta x} \right]$$

L'équation à résoudre est transformée en un système linéaire donné par l'expression :

$$A(j)u(i+1,j-1) + B(j)u(i+1,j) + C(j)u(i+1,j+1) = F(j) \quad (6)$$

où :

$$A(j) = -\frac{\Delta x}{2\Delta y} (2v(i,j) - v(i-1,j)) - \chi \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$B(j) = \frac{3}{2} [2u(i,j) - u(i-1,j)] + \chi \frac{2\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$C(j) = \frac{\Delta x}{2\Delta y} (2v(i,j) - v(i-1,j)) - \chi \frac{\Delta x}{(\Delta y)^2}$$

$$F(j) = \frac{1}{2} [2u(i,j) - u(i-1,j)] [4u(i,j) - u(i-1,j)] + g \sin \alpha \Delta x$$

L'expression (6) constitue un système d'équations linéaires, où le nombre d'inconnues est égal au nombre d'équations. Le problème de la résolution de l'équation aux dérivées partielles se trouve alors, transféré en la résolution d'un système algébrique linéaire pour chaque pas  $\Delta x$ . Ce dernier a la forme suivante :

$$[M] \{U_{(i+1)}\} = \{q_j\} \tag{7}$$

La matrice [M] est tridiagonale, elle a la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} B_1 C_1 & & & & & \\ & A_2 B_2 C_2 & & & & \\ & & & & & \\ & & & A_j B_j C_j & & \\ & & & & & \\ & & & & & A_{n-1} B_{n-1} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Le vecteur {q<sub>j</sub>} est donné par :

$$\begin{Bmatrix} F_1 - U_{(i+1,0)} A_1 \\ F_2 \\ \\ F_j \\ \\ F_{n-1} - U_{(i+1,n)} C_{n-1} \end{Bmatrix} \tag{9}$$

Dans le calcul de la distribution de la composante horizontale de la vitesse dans chaque section (i), on aura besoin de la distribution de la composante transversale en chaque section (i - 1). Pour cela, l'équation de continuité est discrétisée par le schéma aux différences suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{(i+1,j)} - u_{(i,j)}}{\Delta x} \tag{10}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{v_{(i+1,j)} - v_{(i+1,j-1)}}{\Delta y} \tag{11}$$

D'où :

$$v_{(i+1,j)} = v_{(i+1,j-1)} - \left( \frac{\Delta y}{\Delta x} \right) [u_{(i+1,j)} - u_{(i,j)}] \tag{12}$$

### ● III.2 Condition aux limites

Les conditions aux limites considérées sont :

#### • À la paroi

À la paroi la tension visqueuse est beaucoup plus importante que la tension turbulente, c'est sa contribution le long de la surface des marches qui fournit la traînée de frottement. Souvent on utilise la quantité  $u_*$  appelée vitesse de frottement ; elle est liée à la contrainte pariétale et au coefficient de frottement par [6] :  $u = u_* = \sqrt{\tau_0/\rho}$  avec  $\tau_0$  : la contrainte de cisaillement définie par :  $\tau_0 = f \rho U_0^2/8$ , où  $U_0$ , la vitesse de l'écoulement uniforme, et f, le coefficient de frottement pris égal à 0,2 pour des écoulements extrêmement rugueux [5].

#### • En dehors de la couche limite

□ Pour  $y > \delta$ , on a :  $u = u_1(x)$  et  $v = 0$ .

où  $u_1$  vitesse de l'écoulement libre donnée par :

$$u_1 = \sqrt{2g(x \sin \alpha + h)}$$

□ Pour  $x = 0$ , on a :  $u = u_1(0)$  et  $v = 0$ .

#### • Calcul de l'épaisseur de la couche limite

On définit, dans une section quelconque, l'épaisseur  $\delta$  de la couche limite comme la distance à la paroi du point où la vitesse atteint 99 % de la valeur de la vitesse extérieure ul dans la section correspondante [6]. Par définition donc :

Pour  $y = \delta$ ,  $u = 0,99u_1$ .

#### • Calcul de la ligne d'eau :

La distribution des vitesses étant déterminée en chaque section (i), la ligne d'eau sera calculée par :

$$H = \frac{q - \int_0^\delta u dy}{u_\infty} + \delta$$

## IV ■ APPLICATIONS ET RÉSULTATS

Les relevés expérimentaux sur la mesure de la position du point d'inception dont nous disposons, proviennent des travaux réalisés à l'université de Liège [14] sur le modèle réduit de l'évacuateur de crues de barrage M'Bali en république Centrafricaine à l'échelle 1/21,33 [14].

Le coursier de l'évacuateur de crues de ce barrage est en marches d'escalier. Il a une forme rectangulaire, très large et de forte pente. Ces principales caractéristiques se résument comme suit :

- > La pente du coursier est  $\alpha = 51,34^\circ$ .
- > Le coefficient de rugosité est  $k_s = 50$ .
- > Le profil du déversoir de l'évacuateur de crue du barrage M'BALI est du type Creager, dont le coefficient de débit est pris constant et égal à :  $C_d = 0,52$ .

Plusieurs débits ont été simulés. Les résultats expérimentaux sont donnés dans le *tableau 1*.

Tableau 1.

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
X <sub>I</sub> (m)	15,83	18,10	19,23	20,36	26,02	32,00

Les valeurs de la position du point d'inception calculées par la corrélation proposé par Chanson [2] sont reportées dans le *tableau 2*.

Tableau 2.

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
X <sub>I</sub> (m)	24,26	29,83	32,7	35,75	47,87	60,58

L'exécution du programme que nous avons élaboré a donné les résultats suivants pour la position du point d'inception (*tableau 3*) :

Tableau 3.

q (m <sup>2</sup> /s)	10,00	13,44	15,32	17,40	26,41	36,97
X <sub>I</sub> (m)	14,98	17,87	19,19	20,60	26,47	34,0

Pour chaque débit simulé, les pas d'intégrations suivant les deux axes x et y ont été déterminés et raffinés. En dehors des faibles débits les valeurs de la position du point d'inception calculées numériquement sont plus proches des valeurs expérimentales que celles obtenues par la formule proposée par CHANSON basée sur plusieurs modèles [2].

La *Figure 3* montre pour le cas étudié, que la position du point d'inception évolue selon une loi de puissance.

On constate que le point d'inception s'éloigne de la crête du déversoir au fur et à mesure que le débit augmente.

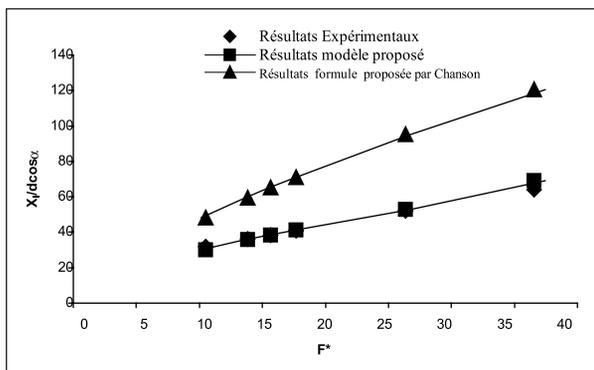


Figure 3 : Validation du modèle numérique.

La figure 4 illustre l'évolution de couche limite et le tracé de la ligne d'eau le long du coursier pour un débit donné (26,41 m<sup>2</sup>/s). L'intersection des deux courbes donne bien la position du point d'inception, et ceci conformément à la définition donnée à ce point [1].

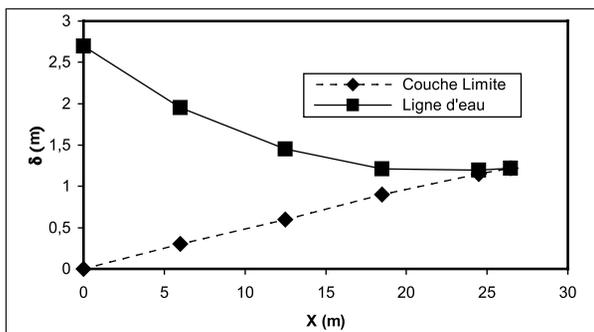


Figure 4 : Détermination du point d'inception pour un débit  $q = 26,41 \text{ m}^2/\text{s}$ .

À l'amont du point d'inception, l'allure de la ligne d'eau montre que l'écoulement est accéléré et le développement de la couche limite devient de plus en plus important.

À l'aval de ce point, l'écoulement devient aéré et le modèle numérique ne peut être retenu.

On constate dans la figure 5 l'accroissement, de plus en plus important de l'épaisseur de la couche limite avec l'aug-

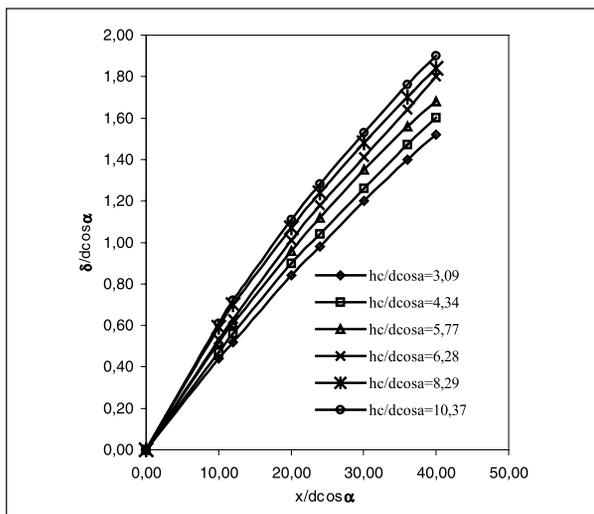


Figure 5 : Influence du débit sur l'épaisseur de la couche limite.

mentation du débit. Lorsque le nombre de Reynolds  $R_{ex}$  prend une valeur très élevée, la couche limite elle-même devient instable et turbulente : le transport de quantité de mouvement par convection turbulente fait augmenter  $\delta$  beaucoup plus rapidement que dans le cas laminaire [7].

Pour tous les débits simulés, la couche limite a une forme qui s'approche de celle d'une parabole.

En s'éloignant de la crête du déversoir Creager, la forme de la couche limite devient presque linéaire et son épaisseur croît rapidement.

## V ■ CONCLUSIONS

Un modèle numérique de l'écoulement extrêmement rugueux bidimensionnel à couche limite et non linéaire dans les canaux à forte pente ( $\alpha > 20^\circ$ ) en marches d'escalier a été développé en vue de la détermination de la position du point d'inception.

Comparativement au modèle basé sur l'analyse statistique des données d'autres chercheurs, les résultats numériques obtenus concordent mieux avec les résultats expérimentaux pour les moyens et grands débits.

La résolution numérique pour plusieurs débits a révélé que :

- 1 — Pour le cas d'étude considéré, les positions du point d'inception évoluent suivant une loi de puissance.
- 2 — L'épaisseur de la couche limite croît rapidement avec l'augmentation du débit et ceci est dû au fait que le transport de quantité de mouvement par convection augmente l'épaisseur de la couche limite ;
- 3 — La position du point d'inception s'éloigne de la crête type Creager du déversoir avec l'accroissement du débit.

Le modèle numérique développé est recommandé pour le calcul de la position du point d'inception dans les canaux à forte pente ( $\alpha > 20^\circ$ ) en marches d'escalier.

Le modèle reste valable pour une crête de déversoir lisse suivi de petites marches. Par contre, avec une géométrie complexe de la crête, l'analyse du développement de la couche limite devient extrêmement difficile.

## Notations

$C_d$	[ ]	Coefficient de débit.
$d$	[m]	Hauteur de la marche.
$d_1$	[m]	Profondeur de l'écoulement au point d'inception.
$f$	[ - ]	Coefficient de frottement.
$F_*$	[ ]	Nombre de Froude.
$g$	[m/s <sup>2</sup> ]	Accélération de la pesanteur.
$h$	[m]	Épaisseur de la lame déversante.
$H$	[m]	Hauteur de la ligne d'eau.
$k_s$	[m]	Coefficient de rugosité de Strikler.
$P$	[N/m <sup>2</sup> ]	Pression.
$q$	[m <sup>2</sup> /s]	Débit d'écoulement.
$u, v \text{ et } w$	[m/s]	Composantes de la vitesse selon les axes $ox, oy$ et $oz$ .
$u_1$	[m/s]	Vitesse de l'écoulement libre.
$u_*$	[m/s]	Vitesse de frottement à la paroi.

$X_1$	[m]	Positions du point d'inception.
$y_0$	[m]	Hauteur uniforme de l'écoulement.
$\alpha$	[°]	Pente du canal.
$\delta$	[m]	Épaisseur de la couche limite.
$\Delta x$	[m]	Pas horizontal.
$\Delta y$	[m]	Pas vertical.
$\chi$	[m <sup>2</sup> /s]	Viscosité cinématique du fluide.
$\rho$	[Kg/m <sup>3</sup> ]	Masse volumique du fluide.
$\tau_0$	[N/m <sup>2</sup> ]	Contrainte de frottement à la paroi.

**BIBLIOGRAPHIE**

[1] CHANSON H. (1989). — « Étude des phénomènes d'entraînement d'air. Application aux évacuateurs de crues ». *La Houille Blanche* N° 6, septembre.

[2] CHANSON H. (1994). — "Hydraulic Design of Stepped Cascades, Weirs and Spillways". *Pergamon*, Oxford, UK, Jan., 292 pages.

[3] CHANSON H. (1997). — "Air Bubble Entrainment in Free-Surface Turbulent Shear Flows." *Academic Press*, London, UK, 401 pages.

[4] CHANSON H. (2000). — "Forum article. Hydraulics of Stepped Spillways: Current Status." *Jl of Hydr Engrg.*, ASCE, Vol. 126, No. 9 pp 636-637.

[5] CHANSON H., YASUDA Y. and OHTSU I. (2000). — "Flow Resistance In Skimming Flow : a Critical Review." Intl Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways, Zurich, Switzerland, H.E. MINOR & W.H. HAGER Editors, Balkema Publ., pp. 95-102.

[6] COUSTEIX J., (1989). — « Aérodynamique : Turbulence et couche limite » CEPADUES éditions, 627 pages. Congress, Melbourne, Australia, Keynote address, pp. 18-29.

[7] GUYON E., HULIN J.P. et PETIT L. (1991). — « Hydrodynamique physique » InterEditions /Editions du CNRS, 506 pages.

[8] HALBRONN G. (1952). — « Étude de la mise en Régime des Ecoulements sur les Ouvrages à Forte pente. Applications au problème d'Entraînement d'Air. » ('Study of the Setting up of the Flow Regime on High Gradient Structure. Application to Air Entrainment Problem.' *Journal La Houille Blanche*, N° 1, pp 21-40 ; N° 3, pp 347-371 ; N° 5, pp 702-722 (in French).

[9] HALBRONN G., DURAND R. and COHEN de LARA G. (1953). — " Air Entrainment in Steeply Sloping Flumes." Proc. 5<sup>th</sup> IAHR Congress, IAHR-ASCE, Minneapolis, USA, pp. 455-466.

[10] HICKOX G.H. (1945). — "Air Entrainment in Spillway Flow." *Civil Engineering*, Vol. 15, No. 12, Dec., pp 562.

[11] LANE E.W. (1939). — "Entrainment of Air in Swiftly Flowing Water. Observations of the flow over Spillways yield Conclusions of interest to Hydraulic Engineers." *Civil Engineering*, No 2, Feb.

[12] MATOS J. (2000). — "Hydraulic Design of Stepped Spillways over RCC." Intl Workshop on Hydraulics of Stepped Spillways, Zurich, Switzerland, H.E. MINOR & W.H. HAGER Editors, Balkema Publ., pp. 187-194.

[13] SCHLICHTING K. (1968). — "Boundary layer theory". Edition Mc. GrawHill.

[14] VERCHEVAL M. (1992). — « Contribution à l'étude expérimentale de l'écoulement sur les évacuateurs à marches d'escalier ». Université de Liège, Belgique.

[15] WOOD I.R. (1984). — "Air Entrainment in High Speed Flows." Proc. Intl. Symp. On scale effect in modelling structures, IAHR, Esslingen, Germany, H. KOBUS editor, paper 4.1.

[16] WOOD I.R. (1985). — "Air Water Flows." Proc. 21<sup>st</sup> IAHR