

Modélisation du phénomène de cavitation dans les conduites fermées

Wahiba MOKRANE^{1,2}, Ahmed KETTAB¹

¹Laboratoire de recherche des sciences de l'eau, Lrs-eau, Ecole Nationale Polytechnique d'Alger

²Département d'Hydraulique Urbaine, Laboratoire de recherche MVRE, Ecole Nationale Supérieure d'Hydraulique de Blida. E-mail : mokranewah@yahoo.fr

Résumé

Contre une augmentation de la vitesse dans une conduite, une chute de pression peut aboutir à une vaporisation à température constante. Par conséquent une érosion de paroi de matériau peut surgir. C'est la cavitation, un phénomène caractérisé essentiellement par l'apparition de bulles d'air. La maîtrise de ce phénomène nécessite une modélisation mathématique adéquate capable de simuler la réalité physique. C'est dans ce contexte qu'entre l'objectif de notre travail. Nous appliquons le modèle de Raigleih Plesset basé sur l'hypothèse de la sphéricité de la bulle d'air et reliant sa dimension au champ de pression. Nous proposons aussi d'utiliser le modèle parabolique de diffusion de l'air sous l'hypothèse d'une vitesse faible du milieu liquide contre celle de la phase gazeuse. D'après sa solution analytique, nous avons déduit que l'air diffuse lentement dans la conduite alors que sa solution numérique basée sur une décomposition en éléments finis montre que la distribution de l'air, en partie haute de la conduite se fait en un temps court ce qui est plus réel.

Mots clés : Pression, Vaporisation, Cavitation, Bulles d'air, Diffusion, Modélisation

Cavitation phenomenon modelling in closed pipes

Abstract

Against a velocity rising in a closed pipe, a pressure drop may lead to vaporization at a constant temperature. Thus, material wall erosion will appear. It is the cavitation, a phenomenon characterized essentially by the air bubbles apparition. The mastery of this phenomenon implies an adequate mathematical modeling able to simulate the physical reality. It is, In this background, the purpose of our work. We apply the Raigleih Plesset model based on the air bubble sphericity and relating its size to the pressure field. We propose also to use the parabolic air diffusion model with the hypothesis that middle liquid velocity is less than the gas phase one. According to the analytic solution, we have deduced that air diffuses slowly but the numerical solution based on finite element decomposition shows that the air distribution, in the upper part of the pipe occurs during a short time which is more really.

Key Words: pressure, vaporization, air bubbles, diffusion, modelling

1. INTRODUCTION

Lorsqu'un changement de phase, accompagné d'une génération de bulles d'air, a lieu dans un écoulement de liquide ; la cavitation se manifeste. Il s'agit d'un phénomène qui se crée suite à une chute de pression au-dessous la pression de vapeur. Qui est directement liée à une augmentation de vitesse. Mécaniquement, ce phénomène correspond à une rupture du milieu continu sous l'effet de contraintes excessives. Ce qui peut être identifié tout simplement comme étant la résultante d'une vaporisation au sein même de l'écoulement. Nous pouvons distinguer trois cas de cavitation ; la cavitation par formation de bulles d'air dans un liquide, la cavitation fixe correspondant à des poches d'air attachées à une paroi rigide et la cavitation sous forme de tourbillons. D'autre part et selon le processus de production, nous remarquons quatre types de cavitation ; la cavitation hydrodynamique se produisant sous l'effet d'un gradient de pression, acoustique, optique et particulaire [1]. Dans le présent travail, nous nous intéressons à la cavitation liquidienne par bulles d'air. Ces dernières ont incité la curiosité de plusieurs chercheurs depuis bien des années et les incitent jusqu'à nos jours [2][3][4]; vu l'intérêt de ce phénomène en industrie, en génie civil, en biologie et en médecine.

Or ce phénomène dynamique, de caractère aléatoire et complexe, dépend de plusieurs facteurs physiques. Ce qui a rendu son étude et sa prévision plus difficiles. Les travaux basés sur l'approche expérimental, font surgir deux problèmes relevant des perturbations créées par l'installation des appareils de mesure de pression ainsi que des faibles dimensions et durées d'existence des bulles[5]. L'approche mathématique, est devenue ainsi une nécessité. C'est le modèle de Rayleigh Plesset, décrivant le mouvement d'une bulle dans un liquide incompressible, qui est le plus répondu [2][3]. Vu que les bulles d'air sont entraînées par l'écoulement et finissent par disparaître en implosant, nous suggérons d'appliquer le modèle diffusif avec sa solution analytique en plus de sa solution numérique faisant appel à la méthode des éléments finis.

2. MATÉRIELS ET MÉTHODES

Dans le but de suivre le développement de la phase air au sein d'un écoulement d'eau dans une conduite fermée, nous utilisons deux modèles mathématiques. Le premier vise l'évolution de la bulle d'air sous l'effet du champ de pression et du temps. Alors que le second s'intéresse à la distribution de la quantité d'air à travers l'écoulement.

1.1. Modèle classique de Rayleigh Plesset

En considérant un milieu liquide infini, un gradient de température constant, un fluide incompressible et une forme sphérique pour la bulle d'air de rayon $R(t)$. nous supposons aussi que la pression loin de la bulle est connue et qui peut être contrôlée. Pour un fluide Newtonien en mouvement dans la direction de r le rayon de la bulle, les équations de Navier Stokes s'écrivent [8] :

$$\frac{-1}{\rho_1} \frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} - \nu_1 \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) - \frac{2u}{r^2} \right] \quad (1)$$

Bien que le liquide peut s'avérer compressible, nous supposons que sa masse volumique ρ_1 est constante et de même pour sa viscosité cinématique ν_1 . La vitesse u d'un point matériel loin de la bulle sphérique est variable sous l'effet du changement de pression p dans le temps t . Le principe de conservation de la masse, traduit en coordonnées sphériques ; nous permet d'écrire :

$$4\pi r^2 u = 4\pi R^2 \frac{dR}{dt} \quad (2)$$

$$D'ou : u = \frac{R^2}{r^2} \frac{dR}{dt} \quad (3)$$

R représente le rayon de la bulle à l'instant t . En remplaçant u par son expression dans la première équation (1) et en intégrant entre l'infini et R ; nous obtenons :

$$p(R) = p + \rho_1 \left[R^2 \frac{dR^2}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] \quad (4)$$

La pression à l'infini est désignée par p , sachant que R est très petit devant r qui désigne la phase liquide. La pression dans la bulle p_b est composée de la pression de vapeur saturante p_v et de la pression partielle du gaz non condensable p_g . Elle est exprimée comme suit :

$$p_b = p_v + p_g$$

Le modèle classique de Rayleigh Plesset est représenté par l'équation suivante [5] :

$$\rho_l \left[R \frac{d^2R}{dt^2} + \frac{3}{2} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \right] + \frac{4\mu}{R} \frac{dR}{dt} = -p - \frac{2S}{R} + p_v + p_g$$
 (6)

La tension superficielle, désignée par S est prise en considération dans l'équilibre dynamique à l'interface par les auteurs dans l'équation ci-dessus. Tenant compte des conditions initiales suivantes :

$$R(t=0) = R_0 \text{ et } \frac{dR(t=0)}{dt} = 0$$
 (7)

En adoptant une forme sphérique pour la bulle d'air et en négligeant la tension de surface ; l'équation de Rayleigh Plesset peut être formulée de la manière ci-après [5] :

$$\frac{dR}{dt} = - \left[\frac{2}{3} \left(\frac{p_v - p}{\rho_l} \right) \left(\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$
 (8)

Le champ de pression est ainsi donné par :

$$\frac{p(r,t) - p_0}{p_0 - p_v} = \frac{R}{r} \left[\frac{R_0^3}{R^3} - 4 \right] - \frac{R^4}{r^4} \left[\frac{R_0^3}{R^3} - 1 \right]$$
 (9)

1.2. Modèle de diffusion

La cavitation liquidienne consiste en un entrainement de bulles d'air dans l'écoulement. C'est un phénomène semblable à celui d'une diffusion de particules et comportant un caractère aléatoire. Sous l'effet du gradient de concentration de la phase air, les bulles d'air diffusent dans la conduite d'eau. Ce phénomène est régi par le modèle parabolique suivant [9] :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = D \frac{\partial^2 c}{\partial x^2}$$
 (10)

La concentration est représentée par c , le coefficient de diffusivité est désigné par D et la position par x . la solution analytique de cette équation est donnée par :

$$c(x, t) = \frac{1}{A} \frac{c_0}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(\frac{-x^2}{4Dt}\right)$$
 (11)

A représente la section de la conduite et c_0 la concentration initiale de l'air. Nous pouvons inclure la variable temporelle dans le terme :

$$T = 4Dt$$
 (12)

D'autre part, moyennant la boîte à outil de résolution des équations aux dérivées partielles de MATLAB2014, nous aboutissons à la solution de la diffusion de la phase air dans la conduite circulaire. Ceci en passant par l'introduction des données et d'un choix adéquat des conditions aux limites. De même pour le maillage puisque c'est la méthode des éléments finis qui est utilisée. Une fois le domaine de calcul déterminé, nous passons à son maillage avec possibilité de son raffinement en augmentant le nombre d'éléments pour obtenir une meilleure approximation de la solution. Puis nous spécifions les conditions aux frontières et par la suite la visualisation de la solution.

2. RÉSULTATS ET DISCUSSION

Nous procédons à deux applications, la première concerne la détermination des champs de pression en fonction des rapports des dimensions des deux phases. Ceci, pour divers cas d'évolution de la bulle d'air et en utilisant le modèle classique de Rayleigh Plesset. La seconde application vise le modèle de la diffusion en suivant les voies analytique et numérique pour présenter la solution.

3.1. Application du modèle classique

La solution du modèle classique est représentée dans la figure ci après. Le champ de pression $[(p-p_0)/(p_0-p_v)]$ en ordonnée et le rapport entre la dimension représentative de phase liquide r et celle qui désigne le rayon de la bulle R . cette figure regroupe quatre courbes ; chacune correspond à une valeur distincte du rapport entre le rayon initial de la bulle et le rayon à un instant donné. Nous remarquons que toutes ces courbes passent par un même point. Ce dernier correspond à une valeur du champ de pression égale à -1 . Ce qui se traduit par le fait que la pression p à l'instant

donné est égale à la pression de vapeur, c'est le point d'inception. La coordonnée horizontale, elle correspond à l'unité. Ceci veut dire que la dimension liquidienne est égale à celle de la phase air.

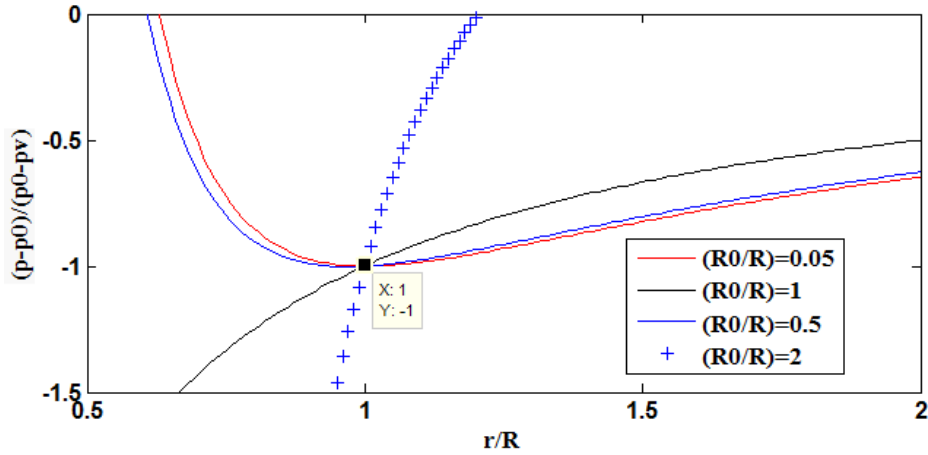


Fig. 1- Evolution du champ de pression en fonction du rapport de phases

Pour des valeurs de (R_0/R) de 0.05 et 0.5 les deux courbes sont adjacentes. Le champ de pression chute fortement jusqu'au point d'inception ; puis se stabilise avec une remontée. Lorsque (r/R) est inférieure à l'unité la phase liquide a une dimension supérieure à celle de la phase d'air et nous observons les valeurs maximales de pression. Mais lorsque (r/R) dépasse l'unité ; c'est le rayon de la bulle qui évolue. Pour des valeurs de (R_0/R) de 1 et 2, nous remarquons une augmentation du champ de pression. Lorsque la valeur du rapport (r/R) est inférieure à l'unité la solution est insignifiante mais lorsqu'elle est supérieure elle traduit la diminution du rayon de la bulle d'air. C'est l'implosion.

3.2. Application du modèle de diffusion

Contrairement au modèle précédent ; ce n'est pas le développement de la bulle de cavitation qui nous intéresse, mais la distribution de l'ensemble des bulles d'air. Alors, c'est le modèle de diffusion qui va nous permettre d'étudier cela. Nous commençons d'abord par représenter la solution analytique dans la figure ci-après.

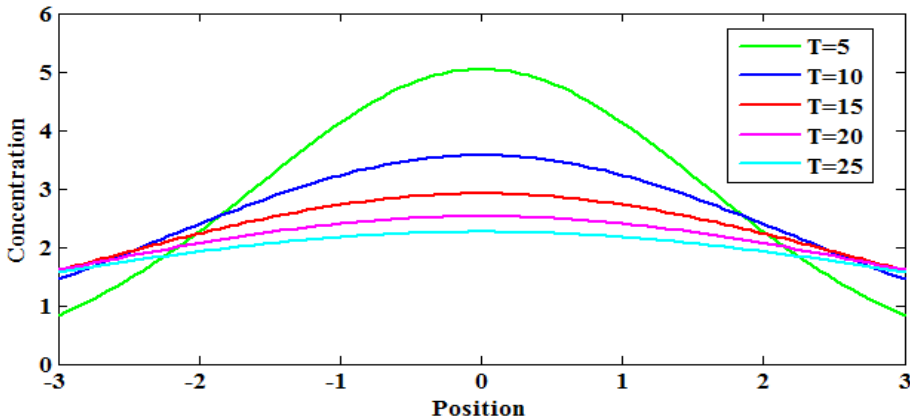


Fig. 2 - Variation de la concentration d' air en fonction de la position

La figure ci-dessus montre l'allure du transport de matière ou de masse composé d'un certain nombre de particules qui sont les bulles d'air. Ceci se fait le long d'un écoulement d'eau dans une conduite fermée. Nous considérons une vitesse suffisamment faible pour approcher l'hypothèse du repos. Les solutions sont tracées pour des valeurs du temps allant de quelques heures à quelques jours. Elles correspondent à des valeurs de T de 5, 10, 15, 20 et 25. La conduite d'essai a un diamètre de 0.005m et une longueur de 3m. Nous prenons une valeur du coefficient de diffusivité D , de l'air dans l'eau, égale à 2.10^{-5} [8]. D'après les courbes descriptives des solutions, nous remarquons que la phase air diffuse selon une allure Gaussienne ayant une forme de cloche et symétrique. Nous observons une valeur maximale de la concentration à l'origine des abscisses mais qui décroît avec le temps. La solution numérique que nous obtenons en utilisant la résolution de l'équation de diffusion aux dérivées partielles est montrée dans les deux figures 3 et 4. C'est en moyennant la boîte à outil MATLABR2014a, que nous avons pu déterminer ces solutions. Nous avons, spécifié notre domaine de calcul qui est un cercle de 0.05m de diamètre dans l'interface graphique d'utilisateur. Puis nous avons procédé au maillage de ce domaine que nous avons raffiné. Il est constitué de 557noeuds et de 1048 triangles. Nous avons spécifié aussi les paramètres du modèle en introduisant le coefficient de diffusivité et en adoptant des conditions aux frontières. Concernant le pas de temps de la solution, nous l'avons pris égal à 10 secondes. Ce dernier est relativement court par rapport à ceux que nous avons pris pour la solution analytique.

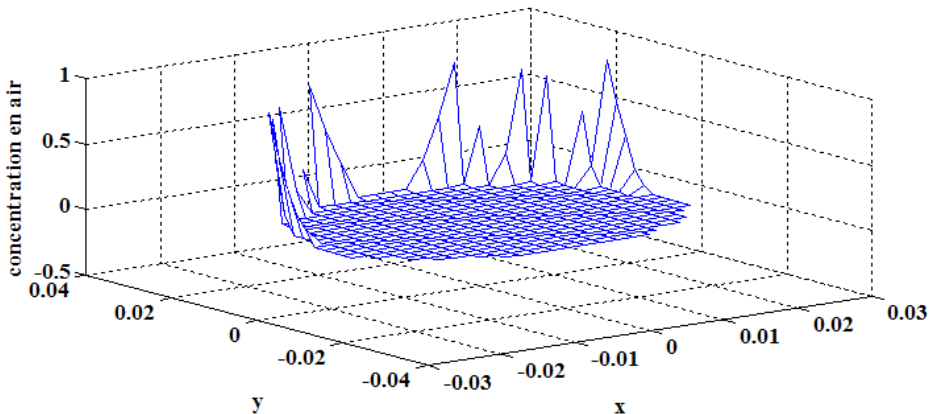


Fig. 3 - Concentration et distribution de l'air à travers la section circulaire discrétisée en éléments finis

Nous présentons la solution de l'équation de diffusion sous une autre forme dans la figure 4. Ce sont les couleurs de la barre qui nous permettent de distinguer les parties de regroupement des bulles d'air.

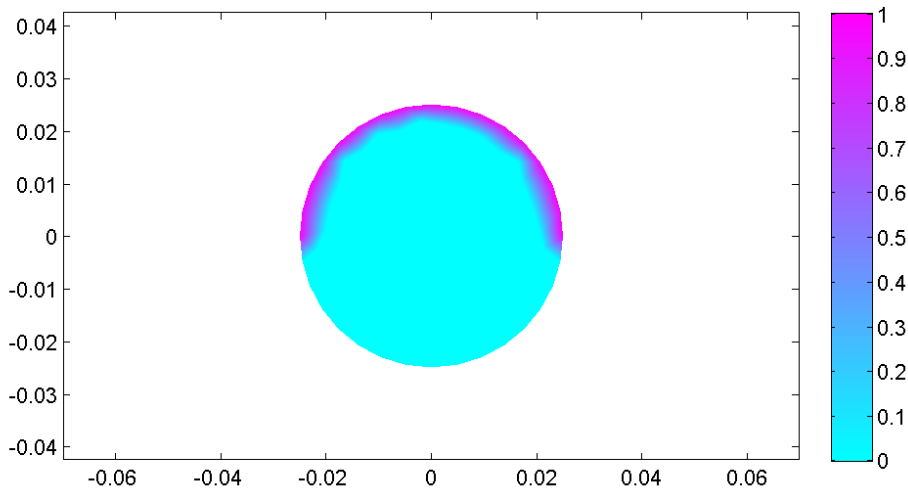


Fig. 4 - Distribution de l'air à travers la section circulaire de la conduite

La dégradation des couleurs, nous permet de détecter les zones à forte concentration en air. Nous considérons les faibles concentrations de 0 à 0.2, les moyennes de 0.2 à 0.5 et les plus importantes de 0.5 à 1. Ainsi, l'air a tendance de se diriger et s'étaler sur la couronne et sur les côtés. La phase air est presque absente dans la partie basse de la conduite. Ce qui nous mène à conclure que cette simulation par éléments finis concrétise la réalité physique pour un pas de temps aussi court.

CONCLUSION

La cavitation liquidienne est un phénomène hydrodynamique complexe. Chercher à mieux le contrôler et mieux l'exploiter revient à le simuler de la manière la plus adéquate possible. Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés à la modélisation mathématique et numérique de son développement. Ceci au sein d'un écoulement d'eau dans une conduite circulaire et fermée. Cependant, en se basant sur les équations de Navier Stokes et en considérant les phases air et eau simultanément ; nous avons suggéré l'application de deux modèles. L'équation de Rayleigh Plesset représentant le premier modèle dit classique. Le second est celui du transport de matière dit diffusif. Sous l'hypothèse de la sphéricité des bulles d'air, la solution du modèle classique nous a permis de prévoir l'évolution des bulles en termes de dimensions avec le champ de pression. S'intéressant à toute la section blanche et donc à l'ensemble des bulles d'air, nous avons suggéré l'utilisation du second modèle de diffusion. Sa solution analytique donne des valeurs maximales de concentration qui demeurent à l'origine de la conduite mais qui chutent avec le temps. Cette solution est signifiante pour de large pas de temps seulement. Ce qui contredit la réalité de la diffusion des bulles d'air dans l'eau. La solution numérique, basée sur une discrétisation du domaine en éléments finis, nous a permis de reproduire la distribution d'air dans de l'eau d'une conduite circulaire en partie haute et pour un temps de simulation court. Ce résultat est en concordance avec la réalité physique.

Références

1. F.R. Young, Cavitation, Imperial College Press, 1999, pp. 1-5.
2. C. E. Brennen, Cavitation and bubble Dynamics, Oxford University Press, 1995, pp.40-43.
3. R. H. Cole, Under water explosions, Princeton University Press, 1948, pp. 392-417.
4. Y. Lcoffre, Erosion et types de cavitation, Houille Blanche, No7/8, (1992), 587-593.
5. V. Daru et al, Simulation numérique d'écoulements liquide-gaz en approximation bas Mach: Proceeding du 19eme Congrè Français de Mécanique, Marseille, France, Aout 24-28(2009) 1-6.
6. J. P. Franc and J. M. Michel , Fundamentals of Cavitation, Kluwer academic publishers, 2005, pp.7-9.

7. O. Miyatake et al, A simple universal equation for bubble growth in pure and binary solutions with a nonvolatile solute, Int.J. Heat Mass Transfer. Vol40, No7 (1997) 1577-1584.
8. C. E.Brennen, Cavitation and bubble Dynamics, Oxford University Press, 1995, pp.40-43.
9. W .Graf et M.S.Altinakar, Hydraulique fluviale,Tome2, Presses polytechniques et universitaires Romandes, 1993, pp282-284.