



RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université Akli Mohaned Oulhadj
Faculté des Sciences Et Sciences Appliquées
Département de Mathématiques

Mémoire de fin d'études

Pour l'obtention du diplôme de MASTER en Recherche Opérationnelle

Thème

Bornes stochastiques du réseaux $[M/G/1/1 \rightarrow ./M/1/1]$ avec rappels exponentiel.

Réalisé par :

- *M^{elle} ARROUDJ Manal*
- *M^{me} AIT MESSAOUD Imane*

Président du jury :	<i>M^r M. BOUDREF</i>	Maitre de Conférence B	Université de Bouira.
Promotrice :	<i>M^{me} L. ALEM</i>	Maitre Assistante A	Université de Bouira.
Examinatrice :	<i>M^{me} B. TAKHEDMIT</i>	Maitre de Conférence B	Université de Béjaïa.
Examinatrice :	<i>M^{me} S. HOCINE</i>	Maitre Assistante A	Université de Béjaïa.

Promotion 2018/2019



*Louange A Dieu, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela
n'aurait pu être.*

Nous remercions vivement notre promotrice M^{me} L. ALEM d'avoir accepté de nous encadrer et pour l'honneur qu'elle nous a fait en assurant le suivi scientifique et technique du présent mémoire. Qu'elle trouve ici l'expression de notre respectueuse reconnaissance. Nos remerciements vont aussi à M' M. BOUDREF pour l'honneur qu'il nous fait en acceptant de présider le jury de ce mémoire.

Nos remerciements s'adressent également à M^{me} B. TAKHEDMIT et M^{me} S. HOCINE pour l'honneur qu'elles nous font en acceptant d'examiner ce mémoire.

Nous remercions tous ceux qui ont participé de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.



À mes sources de courage, à ceux que j'ai de plus cher au monde : Mes parents :

BOUAMERA Houria et ARROUDJ Lamouri.

À mon cher frère : Mohammed Abed-Allah ARROUDJ.

À mes chères soeurs : Faten ARROUDJ et Abir ARROUDJ.

À mes adorables nièces : Achouaq et Malek.

À mes meilleures amies : Houhou AMARA, Roro LABDAOUI, Ibtissem LAMRI, Nassima

BOULFIZA, Asma AISSAT, Ikram OUADEH.

À mes chers profs de lyccée : MEBARKI Mohamed et ABDET Nacer.

À tous mes amis de classe.



À les êtres les plus chers au monde : Mes parents : BELKEBIR Djamila et AIT MESSAOUD
Abd El Hakim.

À mes sources de courage, à ceux que j'ai de plus cher : mon marie HAMANA Aissame et ma
petite fille Céline Aziza et mon fils Mohamed Lounes.

À ma chère cousine : Samia AIT MESSAOUD.

À mon frère : Mohamed et ma soeur : Nardjesse.

À ma grand mère Ouiza BEN ARABE et mon oncle Mohamed AIT MESSAOUD.

À mon adorable neveu : Mahdi.

À celle qui ma toujours soutenu et aidé dans les moments difficiles :Ma mère.

À toute ma famille.

TABLE DES MATIÈRES

Table des matières	1
Liste des Tableaux	3
Table des Figures	4
Introduction Générale	6
1 Files et réseaux de files d'attente	9
1.1 Introduction	9
1.2 Files d'attentes markoviennes :	10
1.2.1 Processus de Poisson :	10
1.2.2 Processus de naissance et de mort :	10
1.2.3 La file $M/M/1$:	10
1.3 Files d'attentes non markoviennes	13
1.3.1 La file $M/G/1$:	13
1.3.2 $M/G/1$ avec rappels :	15

TABLE DES MATIÈRES

1.4	Réseaux de files d'attente :	18
1.4.1	Réseaux de Jackson ouverts :	18
1.4.2	Réseaux de Jackson fermés :	22
1.5	Réseaux multi-classes à forme produit :	26
1.5.1	Réseaux BCMP :	26
1.6	Conclusion :	28
2	Ordres stochastiques	29
2.1	Introduction	29
2.2	Propriétés générales des ordres :	30
2.3	Ordres stochastiques univariés :	31
2.3.1	Ordres stochastiques usuels :	32
2.3.2	Ordre en transformée de Laplace :	34
2.3.3	Ordre de rapport de vraisemblance :	36
2.3.4	Ordre de hasard :	38
2.4	Ordres de variabilité univariés :	40
2.4.1	Ordre convexe \leq_{cx} et \leq_{icx} :	40
2.4.2	Ordre concave \leq_{cv} et \leq_{icv} :	42
2.5	Ordre croissant :	43
2.6	Ordres stochastiques intégraux :	43
2.7	Ordre super-modulaire :	44
2.8	Ordres en fonctions génératrices :	46
2.9	Relations entre les ordres :	46
2.10	Conclusion :	46

TABLE DES MATIÈRES

3 Monotonie de la chaîne de Markov induite de réseau $[M/G/1/1 \rightarrow \cdot/M/M/1]$ avec rappel exponentiel :	48
3.1 Introduction	48
3.2 Description du modèle :	49
3.2.1 Le modèle mathématique :	50
3.3 La chaîne de Markov induite :	51
3.4 Inégalité préliminaires :	53
3.5 Bornes stochastiques des distributions stationnaires :	64
3.6 Conclusion :	65
Conclusion Générale	67
.1	69
Annexe	69
.1.1 Processus stochastiques	69
.1.2 Processus de comptage	70
.1.3 Formule de Little	70
.1.4 Chaîne de Markov	70
.1.5 Matrice stochastique	70
.1.6 Propriété sans mémoire	71
.1.7 Fonction génératrice	71
Références bibliographiques	72

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Paramètres de Performances.	21
1.2	Les différents types de disciplines de chaque station.	28

TABLE DES FIGURES

1.1	La file M/M/1.	11
1.2	Evaluation de transition des états dans la file M/M/1.	11
1.3	Shéma général d'un système d'attente avec rappels.	16
1.4	Réseau mono-classe ouvert.	19
1.5	Réseau mono-classe fermé.	22
1.6	Réseaux multi-classes à forme produit.	26
2.1	Dominance stochastique.	32
3.1	Deux stations en tandem avec rappels.	49
3.2	Une station avec rappels exponentiel.	50

INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'origine des études sur les phénomènes d'attente remonte aux années "1909-1920" avec les travaux de l'ingénieur Danois Anger Krarup Erlang concernant le réseau téléphonique de Copenhague. A partir des années 30 la théorie des files d'attente adopte un langage de plus en plus mathématique qui a été développée notamment grâce aux contributions de Khintchine [1] et Kolmogorov [2].

Cette théorie fait actuellement toujours l'objet de nombreuses publications scientifiques. Cette théorie s'est en suite étendue à de nombreux champs d'application comme la gestion des stocks, les réseaux téléphoniques, la modélisation des systèmes de production, les télécommunications en général [9]. Les files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine, un outil d'analyse et de modélisation. L'étude mathématique des phénomènes d'attente constitue un champ d'application important des processus stochastiques. On parle des files d'attente chaque fois que certaines unités appelées "clients" se présentent d'une manière aléatoire à des "stations" afin de recevoir un service dont la durée est généralement aléatoire.

L'évolution rapide des systèmes informatiques et des réseaux de télécommunication a montré les limites de la théorie des files d'attente dites classiques qui ne permettent pas d'expliquer le comportement stochastique de certains systèmes complexes où le client répète sans cesse

sa demande jusqu'à l'obtention de service désiré. Le client se trouve en "orbite", ce qui conduit certains chercheurs à développer d'autres modèles plus élaborés qu'on appelle "files d'attente avec rappels exponentiel" [31].

Plusieurs méthodes basées sur la transformée de "Laplace" ont été utilisées pour étudier les caractéristiques de ces systèmes d'attente telle que la méthode des bornes stochastiques [25] s'applique aux chaînes de Markov multidimensionnelles et permet ainsi d'apporter des solutions intéressantes pour l'évolution des performances des systèmes complexes [30].

La distribution stationnaire du processus stochastique introduit permet d'obtenir les indices de performance du système : le temps d'attente d'un client, le nombre moyen de client dans le système, le taux d'occupation des dispositifs de service [3]. Il est constaté que ces indices de performance sont difficiles à obtenir sous formes explicites pour la plupart des systèmes de files d'attente ou bien leur forme explicite est complexe (elles contiennent des transformées de Laplace, des expressions intégrales, ...) difficile à interpréter en pratique. Pour surmonter cette difficulté, il est possible de faire recours à une des méthodes d'approximation qui est la méthode de comparaison stochastique (autrement dit : méthode des bornes stochastiques).

La comparaison stochastique est basée sur la théorie des ordres stochastiques. Un ordre stochastique est simplement une relation d'ordre définie sur un espace des fonctions de répartition. Pour l'étude de systèmes de files d'attente, les ordres : stochastique usuel (\leq_{st}), convexe (\leq_{icx}) et Laplacien (\leq_{Lt}), s'imposent bien car ils permettent de comparer différents indices de performances comme par exemple, le nombre moyen de clients dans un système, le taux de perte, la probabilité de panne, ...etc. La monotonie est une propriété importante en termes de borne, c'est-à-dire que la meilleure chaîne bornante (plus proche du système exacte) est monotone [32].

Notre travail est organisé en trois chapitres : Dans le premier chapitre, on aborde les notions de files d'attente, ainsi que quelques types de réseaux de files d'attente [14].

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des ordres partiels usuels (ordre stochastique, convexe et de Laplace), ainsi que des éléments sur la théorie de comparabilité des processus stochastiques. Dans le troisième chapitre, on obtient des inégalités stochastiques pour le modèle $M/G/1$ avec rappels exponentiel. On donne les conditions pour lesquelles l'opérateur de transition de la chaîne de Markov induite est monotone par rapport aux ordres stochastique usuel et convexe. On étudie la comparabilité des opérateurs de transition pour les chaînes de Markov induit pour le système $M/G/1$ avec rappels exponentiel, ainsi que la comparabilité des distributions stationnaires [23].

En dernier lieu, on montre que la distribution stationnaire du nombre de clients dans un système $M/G/1$ avec rappels exponentiel si la distribution de service est NBUE (New Better than Used in Expectation, respectivement NW UE-New Worse than Used in Expectation) [21].

CHAPITRE 1

FILES ET RÉSEAUX DE FILES D'ATTENTE

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, on va exposer quelques systèmes élémentaires de files d'attente dont l'étude sera d'utilité dans les chapitres à venir vu que ces systèmes feront partie de la composition des réseaux qui seront considérés pour étude par la suite. Ensuite, on rappelle certaines notions et certains caractéristiques et résultats. Dans la première section, on aborde les files d'attente markoviennes : $M/M/1$ et suite à cette section, on aborde les files d'attente non markoviennes : $M/G/1$..., et $M/G/1$ avec rappels [31] .

On finalise ce chapitre par les réseaux de files d'attente, on va s'intéresser à une classe particulière de ces réseaux, connue sous le nom de réseaux à forme produit, qui ont la particularité de posséder une solution analytique très simple. On va donc considérer successivement les réseaux mono-classes à forme produit, les réseaux multi-classes à forme produit.

1.2 Files d'attentes markoviennes :

Les modèles de files d'attente markoviens sont des systèmes où les deux quantités stochastiques principales "les temps des inter-arrivées" et "la durée de service" sont des variables aléatoires indépendantes et exponentiellement distribuées. La propriété "sans mémoire" de la loi exponentielle facilite l'analyse de ces modèles.

1.2.1 Processus de Poisson :

Un processus de Poisson est un processus stochastique markovien à espace d'état discret et à temps continu, tel que les temps d'inter-arrivées sont des v.a. indépendantes et identiquement distribuées selon une loi exponentielle.

1.2.2 Processus de naissance et de mort :

Un processus de naissance et de mort peut être un processus de Poisson. Dans ce processus, les seules transitions possibles à partir d'un état e_n , sont vers les états voisins e_{n-1} et e_{n+1} . L'étude mathématique d'un système de files d'attente (S.F.A.) se fait souvent par l'introduction d'un processus stochastique défini de façon appropriée de telle sorte à ce qu'il caractérise l'état du système. Le processus stochastique souvent considéré est le processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$: "nombre de clients dans le système à l'instant t ".

1.2.3 La file $M/M/1$:

Une file d'attente $M/M/1$ peut être définie par le processus stochastique suivant :

$$\{X(t)\}_{t \geq 0}.$$

qui représente le nombre de clients dans la file, il représente ainsi la taille de la file d'attente. On rappelle que dans ce cas les instants d'arrivées des clients sont distribués selon un processus de Poisson d'intensité λ et que les temps de service sont indépendants (et indépendants du processus d'arrivée) et suivent une loi exponentielle de paramètre μ , la discipline de service est

FIFO. L'indépendance des arrivées implique que X_t est une chaîne de Markov homogène en particulier est un processus de naissance et de mort.

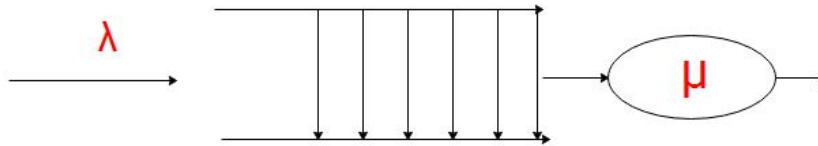


FIGURE 1.1: La file M/M/1.

La file peut être considérée comme un processus de naissance et de mort, pour lequel :

$$\lambda_n = \lambda \quad \forall n \geq 0.$$

$$\mu_n = \begin{cases} \mu & \text{si } \forall n \geq 1. \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

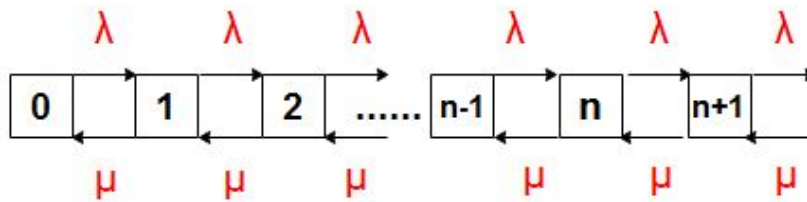


FIGURE 1.2: Evaluation de transition des états dans la file M/M/1.

Régime transitoire :

Vu les propriétés fondamentales du processus de Poisson et de la loi exponentielle, le processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$: "nombre de clients dans le système à l'instant t ", est markovien. Les équations différentielles de Kolmogorov [2] de ce processus sont de la forme :

$$\begin{cases} p'_0(t) = -\lambda p_0(t) + \mu p_1(t), \\ p'_n(t) = (-\lambda + \mu)p_n(t) + \lambda p_{n-1}(t) + \mu p_{n+1}(t), n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.1)$$

Ce système d'équations permet de calculer les probabilités d'états $p_n(t)$ en faisant appel aux équations de Bessel et si l'on connaît les conditions initiales (*i.e.* $X(0)$).

Régime stationnaire :

Lorsque t tend vers l'infini dans le système (1.1), il est aisé de vérifier $\lim_{t \rightarrow +\infty} p_n(t) = \pi_n$ existent et que $\lim_{t \rightarrow +\infty} p'_n(t) = 0, \forall n \in \mathbb{N}$. Ainsi, à la place d'un système d'équations différentielles, on obtient un système d'équations linéaires homogènes :

$$\begin{cases} \mu\pi_1 = \lambda\pi_0, \\ \lambda\pi_{n-1} + \mu\pi_{n+1} = (\lambda + \mu)\pi_n, n \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.2)$$

En ajoutant la condition de normalisation : " $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi_n = 1$ ", et sous la condition d'ergodicité du système " $\rho = (\frac{\lambda}{\mu}) < 1$ ", nous obtenons les probabilités stationnaires :

$$\pi_n = \pi_0 \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n = \left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right) \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ainsi, le régime stationnaire du système $M/M/1$ est gouverné par une loi géométrique.

Quelques caractéristiques :

- **Le nombre moyen de clients dans le système [24]** : Cette caractéristique est donnée par :

$$L = E(X) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\pi_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{+\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{1 - \rho} = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}. \quad (1.3)$$

- **Le nombre moyen de clients dans la file** : On note cette caractéristique par L_q . Soit X_q le nombre de clients se trouvant dans la file d'attente. On a :

$$X_q = \begin{cases} 0 & \text{si } X = 0 \\ X - 1 & \text{si } X \geq 1. \end{cases}$$

alors :

$$L_q = E(X_q) = \sum_{n=1}^{+\infty} (n - 1)\pi_n = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)},$$

D'autres caractéristiques de ce système peuvent être calculées, soit directement à partir de la distribution stationnaire, soit d'après la formule de Little (voir l'annexe .1.3).

1.3 Files d'attentes non markoviennes

En s'écartant de l'hypothèse d'exponentialité des deux quantités stochastiques "les temps des inter-arrivées" et "la durée de service" ou si on introduit des paramètres supplémentaires spécifiques au modèle étudié tels que : la priorité, les rappels, les blocages, ..., alors on n'aura plus de processus markovien. Ceci rend l'analyse du modèle très délicate, voire impossible. Souvent on se ramène à un processus markovien judicieusement choisi qui décrit complètement l'état du modèle et ceci grâce aux méthodes d'analyse.

1.3.1 La file $M/G/1$:

Ce système possède un processus d'arrivées de Poisson de paramètre λ et une loi de service quelconque H , de moyenne $(\frac{1}{\mu})$. La propriété de Markov du processus $\{X(t)\}_{t \geq 0}$ facilitant l'analyse du système $M/M/1$ n'est plus vérifiée pour le système $M/G/1$, ce qui rend son analyse plus délicate.

La chaine de Markov induite

La méthode des variables auxiliaires s'applique au système $M/G/1$ en complétant l'information sur $X(t)$ par la variable $A_1(t)$ qui représente le temps de service déjà écoulé d'un client à l'instant t . Le processus bidimensionnel $\{X(t), A_1(t)\}_{t \geq 0}$ décrit complètement l'état de ce système. Le calcul de son régime transitoire ferait intervenir des équations aux dérivées partielles.

Pour éviter cela, la méthode de la chaine de Markov induite ramène l'étude de ce processus au cas discret. En effet, en considérant les instants (d_n) de départ du n^{ieme} client, le processus $\{X(d_n), A(d_n)\}$ sera équivalent à $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}} = \{X(d_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ puisque $A_1(d_n) = 0$. La variable aléatoire $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ représentant le nombre de clients dans le système juste après l'instant (d_n) est une chaine de Markov à temps discret. On considère le processus E_n "le nombre de clients qui entrent dans le système pendant que le n^{ieme} client est servi".

Les variables E_n sont indépendantes entre elles, leur distribution commune est :

$$P[E_n = k] = a_k = \int_0^{+\infty} \frac{\exp(-\lambda t)}{k!} (\lambda t)^k dH(t), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Donc :

$$X_{n+1} = X_n - \sigma_n + E_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

avec :

$$\sigma_n = \begin{cases} 1 & \text{si } X_n \geq 0; \\ 0 & \text{si } X_n = 0. \end{cases}$$

X_{n+1} ne dépend que de X_n et de E_{n+1} et non des valeurs de $X_{n-1}, X_{n-2}, \dots, X_0$. La variable $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ainsi définie est la chaîne de Markov induite du processus $\{X(t), t \geq 0\}$.

Régime transitoire :

La matrice de transition $\mathbf{P} = [p_{ij}]_{i,j \in \mathbb{N}}$ de ce système prend la forme suivante :

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ a_0 & a_1 & a_2 & \dots & \dots \\ 0 & a_0 & a_1 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & a_0 & \dots & \dots \\ \dots & \dots & a_2 & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

Puisqu'on peut passer de chaque état à n'importe quel autre état, il s'agit, par conséquent, d'une chaîne de Markov irréductible dont on peut montrer la convergence vers une distribution limite si $\rho = (\frac{\lambda}{\mu}) < 1$.

Régime stationnaire :

Supposant que $\rho < 1$ et soit π la distribution stationnaire de la chaîne $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, il ne sera généralement pas possible de calculer π elle même, mais nous pouvons calculer la fonction génératrice correspondante $\pi(z)$:

$$\pi(z) = H^*(\lambda - \lambda z) \frac{(1 - \rho)(z - 1)}{z - H^*(\lambda - \lambda z)}. \quad (1.4)$$

où H^* est la transformée de Laplace de la densité de probabilité du temps de service, et $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$. La formule (1.4) est connue sous le nom de la première formule de Pollaczek-Khinchine [1] .

Quelques caractéristiques :

- **Le nombre moyen de clients dans le système :** Le calcul de cette caractéristique à partir de la relation $L = E(X) = \lim_{z \rightarrow 1} \pi'(z)$, s'avère pénible. donnant l'expression de L par :

$$L = \rho + \frac{\rho^2(1 + C_\varepsilon^2)}{2(1 - \rho)}. \tag{1.5}$$

où : ε est le temps de service du n^{ieme} client. C_ε^2 , est le carré du coefficient de variation de ε .

- **Le temps moyen de séjour dans le système :** On a la formule de Little $L = \lambda W$, par conséquent :

$$W = \frac{L}{\lambda} = \frac{1}{\mu} + \frac{\lambda(\sigma_\varepsilon^2 + \frac{1}{\mu^2})}{2(1 - \rho)}. \tag{1.6}$$

1.3.2 M/G/1 avec rappels :

Le modèle $M/G/1$ avec rappel est un modèle à un seul serveur où les clients arrivent suivant un flux poissonnien d'intensité $\lambda > 0$. La durée de service est de loi générale $F(X)$ et de transformée de Laplace $\bar{f}(z)$, Soient les moments $m_k = (-1)^k \bar{f}^{(k)}(0)$, l'intensité de trafic $\rho = \lambda m_1$ et $\mu = \frac{1}{m_1}$. Les intervalles de temps inter-rappels suivent une distribution exponentielle de paramètre $\theta > 0$:

$$F^*(x) = P(T_n^r \leq x) = 1 - exp(-\theta x).$$

Un client qui arrive et trouve le serveur occupé, quitte l'aire du service pour rejoindre l'orbite. Après un certain temps aléatoire, il renouvelle sa tentative d'entrer en service, une fois, deux fois, ..., jusqu'à ce qu'il le trouve disponible. Une fois servi, le client doit décider, soit de rejoindre l'orbite pour un autre service où de quitter le système définitivement .Toutes les variables aléatoires introduites sont mutuellement indépendantes.

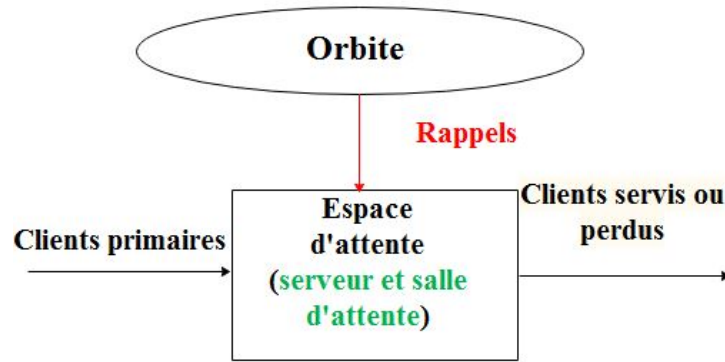


FIGURE 1.3: Shéma général d'un système d'attente avec rappels.

La chaîne de Markov induite :

L'état du système à l'instant t peut être décrit par le processus :

$$X(t) = \{C(t), N_0(t), \epsilon(t), t \geq 0\}.$$

où : $C(t)$ est la variable aléatoire indiquant l'état du serveur à l'instant t :

$$C(t) = \begin{cases} 0 & \text{si le serveur est libre ;} \\ 1 & \text{si le serveur est occupé.} \end{cases}$$

$N_0(t)$: le nombre de clients en orbite à l'instant t . Si $C(t) = 1$, $\epsilon(t)$ représente le temps de service écoulé du client en service. Soit (q_n) la chaîne de Markov induite aux instants de départ. Où, $q_n = N_0(\epsilon_n)$ représente le nombre de clients en orbite après le n^{ieme} départ. dont l'équation fondamentale est :

$$q_{n+1} = q_n - \sigma q_n + v_{n+1}.$$

où :

- ◇ v_{n+1} est le nombre de clients qui arrivent dans le système durant le service de $(n + 1)^{ieme}$ client. La distribution de v_{n+1} est donnée par :

$$a_i = P(v_n = i) = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^i}{i!} \exp(-\lambda x) dB(x).$$

- ◇ σ_{q_n} est la variable de Bernoulli définie par :

$$\sigma_{q_n} = \begin{cases} 1 & \text{si le } (n + 1)^{ieme} \text{ client servi provient de l'orbite ;} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

elle dépend de q_n et sa distribution est donnée par :

$$P(\sigma_{q_n} = 1/q_n = i) = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu}, \text{ et } P(\sigma_{q_n} = 0/q_n = i) = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu}.$$

Où μ , est le taux des rappels.

Régime stationnaire :

La condition d'existence du régime stationnaire est donnée par :

$$\begin{aligned} E[q_{n+1} - q_n/q_n = i] &= E[v_{n+1} - \sigma_{q_n}/q_n = i] \\ &= E[v_{n+1}] - E[\sigma_{q_n} = 1/q_n = i] \\ &= \rho - \frac{i\mu}{\lambda + i\mu}. \end{aligned}$$

◁ Si $\rho < 1$, alors $\lim_{i \rightarrow +\infty} E[q_{n+1} - q_n/q_n = i] = \rho - 1 < 0$. \implies la chaîne est donc érgodique.

◁ Si $\rho \geq 1$, alors $\lim_{i \rightarrow +\infty} E[q_{n+1} - q_n/q_n = i] = \rho - \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \geq 1 - \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} > 0 \implies$ la chaîne est donc transitoire.

Régime transitoire :

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov $\{q_n\}n \in N$ sont données par :

$$P_{ij} = P[q_{n+1} = j/q_n = i] = \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} p_{j-i+1} + \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} p_{j-i}.$$

$$\text{avec : } p_i = \int_0^{+\infty} \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^i}{i!} dB(x), \forall i \geq 0.$$

Paramètres de performance :

Les paramètres de performance du modèle $M/G/1$ avec rappels sont :

★ Nombre moyen de clients dans le système [10]

$$L = Q'(1) = \rho + \frac{\lambda^2 m_1}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

★ Nombre moyen de clients dans l'orbite :

$$N_0 = P'(1) = L - \rho = \frac{\lambda^2 m_1}{2(1 - \rho)} + \frac{\lambda \rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

★ Temps moyen d'attente d'un client :

$$W = \frac{N_0}{\lambda} = \frac{\lambda m_1}{2(1 - \rho)} + \frac{\rho}{\mu(1 - \rho)}.$$

★ Nombre moyen de rappels par client :

$$R = W\mu = \frac{\lambda \mu m_1}{2(1 - \rho)} + \frac{\rho}{1 - \rho}.$$

1.4 Réseaux de files d'attente :

Un réseau de files d'attente est un ensemble de files d'attente inter-connectées. On va donc présenter dans cette section une classe particulière de réseaux de files d'attente, sous le nom de Réseaux à Forme Produit qui ont la particularité de posséder une solution analytique très simple.

1.4.1 Réseaux de Jackson ouverts :

Dans un réseau ouvert, les clients arrivent dans le système depuis l'extérieur. Après avoir accompli un certain nombre d'opérations, ils quittent le système. De même que pour les files d'attente simples, ou la file $M/M/1$ est la plus simple à étudier, on s'intéressera dans un premier temps aux réseaux de files d'attente ouverts comportant :

- Une seule classe de clients .
- Un processus d'arrivée des clients dans le système poissonien.
- Un seul service à chaque station .
- Un temps de service exponentiel à chaque station .
- Une discipline de service FIFO pour toutes les files.
- Des routages probabilistes : quand un client a plusieurs destinations possibles à la fin d'un service, il fait son choix en fonction d'un tirage aléatoire selon une certaine distribution de probabilité.

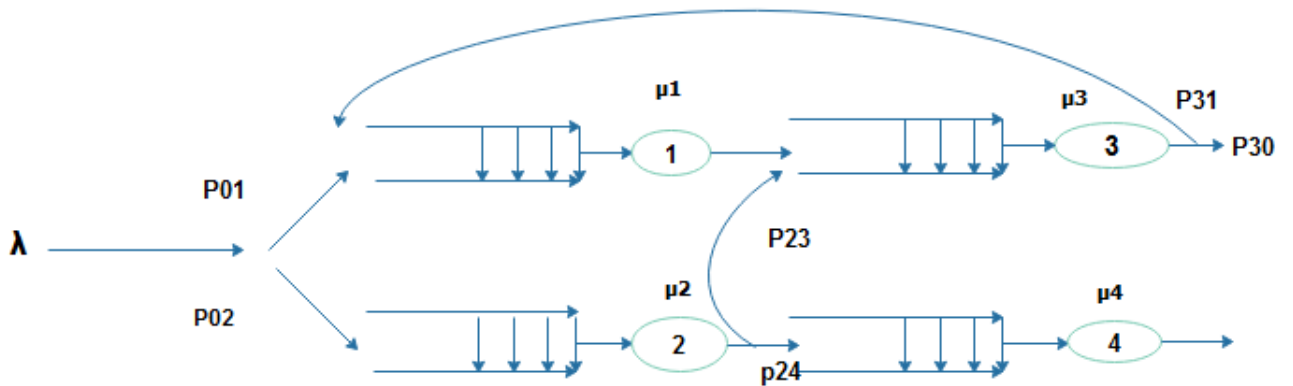


FIGURE 1.4: Réseau mono-classe ouvert.

Ces réseaux sont connus sous le nom de réseaux de Jackson ouverts [14] . On note M le nombre de stations, λ le taux d'arrivée des clients dans le réseau et μ_i le taux de service de la station $i, i = 1, \dots, M$. Soit P_{0i} la probabilité qu'un client qui arrive dans le système se rende à la station (i) , P_{ij} la probabilité qu'un client qui termine son service à la station (i) se rende à la station j et P_{i0} , la probabilité qu'un client qui termine son service à la station (i) quitte le système. On a :

$$\sum_{j=0}^M P_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.7)$$

Cette équation est également vérifiée en $i = 0$, avec la convention $P_{00} = 0$. On a pour la file $M/M/1$, pour que le système reste stable [8] il faut que $\lambda < \mu$. Dans le cas des réseaux de files d'attente, la condition de stabilité est logiquement liée, non seulement au taux d'arrivée des clients dans le réseau et aux taux de service μ_i des différentes stations, mais également au cheminement des clients. On note e_i le taux de visite de la station i ou le nombre moyen de passages à la station (i) , pour $i = 1, \dots, M$, en posant $\lambda_i = e_i \lambda$ le taux d'arrivée des clients à la station (i) , on a :

La condition de stabilité du système : $\lambda_i < \mu_i, \quad i = 1, \dots, M$.

Calcul des taux de visite [7]

On suppose que le réseau est stable et donc que pour chaque station $\lambda_i < \mu_i$, λ_i mesure le trafic à la station (i). C'est donc à la fois le débit moyen d'entrée et le débit moyen de sortie de la station i , ce trafic se décompose en plusieurs parties :

- le trafic venant de l'extérieur : λP_{0i} .
- le trafic venant de la station j : $\lambda_j P_{ij}$ pour toutes les stations $j = 1, \dots, M$.

On a donc :

$$\lambda_i = \lambda P_{0i} + \sum_{j=1}^M \lambda_j P_{ij}.$$

Comme $\lambda_i = e_i \lambda$, on en déduit le système d'équations que doivent satisfaire les taux de visite :

$$e_i = P_{0i} + \sum_{j=1}^M e_j P_{ji}, i = 1, \dots, M. \tag{1.8}$$

Théorème 1.1 *La probabilité stationnaire du réseau possède la forme produit suivante :*

$$P(n) = \prod_{i=1}^M P_i(n_i).$$

Où $P_i(n_i)$ est la probabilité stationnaire d'une file $M/M/1$ ayant un taux d'arrivé λ_i et un taux de service μ_i , soit $P_i(n_i) = (1 - \rho_i) \rho_i^{n_i}$ avec : $\rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i}$.

Remarque 1.1 *Un réseau de Jackson est donc équivalent à un ensemble de files $M/M/1$ et la probabilité stationnaire $P(n)$ du réseau est égale au produit des probabilités marginales $P_i(n_i)$ de chacune des files étudiées en isolation.*

Calcul des paramètres de performances :

Les paramètres de performances : débit moyen, nombre moyen de clients, temps moyen de réponse, peuvent être calculés par file ou par l'ensemble du réseau.

Les paramètres de performances de chaque station se déduisent de la décomposition en files $M/M/1$:

$$X_i = \lambda_i = e_i \lambda. \tag{1.9}$$

	Station i	Réseau
Débit moyen	X_i	X
Nombre moyen de clients	Q_i	Q
Temps moyen de réponse	R_i	R

TABLE 1.1: Paramètres de Performances.

$$Q_i = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i}, \text{ avec } : \rho_i = \frac{\lambda_i}{\mu_i} \tag{1.10}$$

$$R_i = \frac{Q_i}{X_i} = \frac{1}{\mu_i - \lambda_i} \tag{1.11}$$

Les paramètres de performances du réseau s'en déduisent alors immédiatement :

$$X = \lambda \tag{1.12}$$

$$Q = \sum_{i=1}^M Q_i \tag{1.13}$$

$$R = \frac{Q}{X} = \frac{Q}{\lambda} \tag{1.14}$$

Remarque 1.2 *En cas de stations multiserveurs on conserve les hypothèses précédentes, seulement que chaque station peut comporter plusieurs serveurs identiques (et indépendants les uns des autres).*

Soit m_i le nombre de serveurs de la station i . Chacun de ces serveurs est exponentiel et de même taux μ_i . Les taux de visite e_i et les taux moyens d'arrivée λ_i se calculent alors de la même façon que dans le cas mono-serveur. La condition de stabilité du réseau est alors la suivante :

$$\lambda_i < m_i \mu_i$$

Elle exprime que le taux d'arrivée à chaque station doit être inférieur à la capacité de service maximale de la station. Cette dernière est obtenue en supposant que les S_i serveurs travaillent en permanence et débitent donc globalement à taux $S_i \mu_i$. Sous cette condition, le réseau est équivalent à un ensemble de files $M/M/m$, et la probabilité stationnaire $p(n)$ du réseau est égale au produit des probabilités marginales $P_i(n_i)$ de chacune des files étudiées en isolation.

1.4.2 Réseaux de Jackson fermés :

Dans un réseau fermé, les clients initialement dans le système y circulent sans jamais en sortir et sans qu'aucun client de l'extérieur n'y entre. Ils sont donc en nombre constant. Comme dans le cas ouvert, on s'intéressera tout d'abord aux réseaux de files d'attente fermés comportant :

- une seule classe de clients .
- un seul serveur à chaque station .
- un temps de service exponentiel à chaque station .
- une capacité de stockage illimitée à toutes les stations (ou au moins égale à N) .
- des files *FIFO* .
- des routages probabilistes.

La figure ci-dessous illustre un exemple de réseau mono-classe fermé :

Exemple 1.1 *Un système informatique composé d'un ordinateur disposant d'unité, de disque et de bandes. Ce modèle est constitué de trois files :*

- f_1 : représente la file d'attente de l'unité centrale.
- f_2 : représente la file d'attente de disque.
- f_3 : représente la file d'attente du canal de gestion des unités de bandes magnétiques.

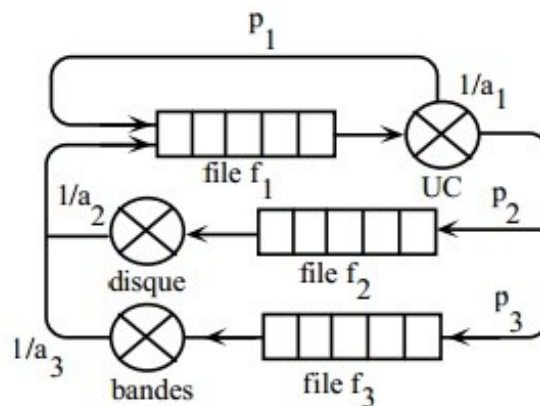


FIGURE 1.5: Réseau mono-classe fermé.

Ces réseaux sont connus sous le nom de réseaux de Jackson fermés. On note M le nombre de stations. N le nombre total de clients, μ_i le taux de service de la station i , $i = 1, \dots, M$ et P_{ij}

la probabilité qu'un client qui termine son service à la station (i) se rende à la station j . Les probabilité P_{ij} sont telles que :

$$\sum_{j=1}^M P_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.15)$$

Dans un réseau fermé, il n'y a bien entendu aucun problème de stabilité puisque le nombre de clients à chaque station est limité à la population du réseau et ne peut donc croître à l'infini : pour toute station i , $n_i(t) < N$, ($n_i(t)$ est le nombre de clients présents à la station (i)) à tout instant t . La contrainte de population du réseau impose de plus que la condition $\sum_{i=1}^M n_i(t) = N$ est en permanence respectée.

Théorème 1.2 *La probabilité stationnaire du réseau possède la forme produit [9] suivante :*

$$P(n) = \frac{1}{G(M, N)} \prod_{i=1}^M f_i(n_i)$$

ou : $f_i(n_i) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^{n_i}$, et $G(M, N)$ est une constante de normalisation.

Calcul des taux de visite [14]

Dans un réseau fermé, le nombre absolu de fois qu'un client passe par chaque station est infini. On va donc s'intéresser ici au (e_i) taux de visite de la station i ou nombre moyen de passage à la station (i) entre deux passages par une station de référence (une station j telle que, par convention, $e_j = 1$). De la même manière que dans le cas ouvert, on peut montrer que les e_i sont solutions du système d'équations :

$$e_i = \sum_{j=1}^M e_j P_{ij}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.16)$$

Mais, contrairement au cas ouvert, comme les e_i ne sont définis qu'à une constante près, ce système admet une infinité de solutions. Il suffit alors de choisir une station de référence.

Calcul des paramètres de performances :

Il s'agit d'obtenir les paramètres de performances par station ou pour l'ensemble du réseau. Mais contrairement au cas ouvert, les paramètres de chaque station ne peuvent pas se déduire

de l'analyse d'une file simple en isolation . Il faut donc manipuler l'expression des probabilités stationnaires. La première idée est de calculer les probabilités marginales de chaque station par sommation sur les probabilités stationnaires :

$$P_i(k) = \sum_{n \in E(M,N) | n_i = k} P(n), i = 1, \dots, M. k = 0, \dots, N. \quad (1.17)$$

Les paramètres de performances de chaque station s'en déduisent alors immédiatement :

$$U_i = 1 - P_i(0). \quad (1.18)$$

$$X_i = \sum_{k=1}^N P_i(k) \mu_i = (1 - P_i(0)) \mu_i. \quad (1.19)$$

$$Q_i = \sum_{k=1}^N k P_i(k). \quad (1.20)$$

$$R_i = \frac{Q_i}{X_i}. \quad (1.21)$$

Le problème est qu'un calcul des probabilités marginales par la relation (1.11) nécessite d'effectuer des sommations multiples très complexes. Heureusement, comme pour le calcul de la constante de normalisation, on peut éviter ces sommations multiples. En remplaçant dans la relation (1.11) l'expression des probabilités stationnaires, on obtient en effet :

$$P_i(k) = \frac{1}{G(M, N)} \sum_{n \in E(M,N) | n_i = k} \prod_{j=1}^M \left(\frac{e_j}{\mu_j} \right)^{n_j}. \quad (1.22)$$

$$= P_i = \frac{1}{G(M, N)} \left(\frac{e_i}{\mu_i} \right)^k \sum_{n \in E(M,N) | n_i = k} \prod_{j=1, j \neq i}^M \left(\frac{e_j}{\mu_j} \right)^{n_j}. \quad (1.23)$$

On note alors $E_i(M, N)$ l'ensemble de tous les vecteurs n de $E(M, N)$ qui sont tels que la somme des clients dans toutes les stations autres que la station i , $\sum_{j=1, j \neq i}^M n_j = n$. (et donc tels que le nombre n_i de clients dans la station i , est égale à $N - n$) :

$$E_i(M, N) = \{n = (n_1 \dots n_M) | \sum_{j=1, j \neq i}^M n_j = n\}. \quad (1.24)$$

On note enfin $G_i(M - 1, n)$, la constante de normalisation du réseau complémentaire, c'est-à-dire la constante de normalisation du réseau constitué des M stations du réseaux initial privé de la station i , et dans lequel on place n clients :

$$G_i(M - 1, n) = \sum_{n \in E_i(M,N)} \prod_{j=1, j \neq i}^M \left(\frac{e_j}{\mu_j} \right)^{n_j}. \quad (1.25)$$

Les probabilités marginales $p_i(k)$ s'expriment alors simplement en fonction de ces constantes qu'il faut donc être capable de calculer :

$$P_i(k) = \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k \frac{G_i(M-1, N-k)}{G(M, N)}. \quad (1.26)$$

Calcul des constants de normalisation du réseau complémentaire :

Dans un premier temps, il est important de constater que la quantité $G(M-1, N)$ définie précédemment n'est rien d'autre que la constante du réseau complémentaire privée de la dernière station, $G_M(M-1, n)$. On peut alors écrire :

$$G(M, N) = G_M(M-1, N) + \rho_M G(M, N-1) \quad (1.27)$$

Et comme il n'y a aucune raison de particulariser la station M , cette relation peut s'obtenir pour toute station i de façon rigoureusement identique :

$$G(M, N) = G_i(M-1, N) + \rho_i G(M, N-1), \text{ ou } \rho_i = \frac{e_i}{\mu_i}, \quad i = 1, \dots, M.$$

Cette relation nous permet, en l'inversant, d'obtenir par (déconvolution) sur les constantes $G(M, N)$, les constantes de normalisations complémentaires :

$$G_i(M-1, n) = G(M, n) - \rho_i G(M, n-1), \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.28)$$

Calcul des paramètres de performances en fonction des constantes de normalisation :

On peut exprimer tous les paramètres de performances de la relation i en fonction des constantes de normalisation qui, comme nous venons de le voir, sont extrêmement simples à calculer :

$$U_i = \frac{e_i}{\mu_i} \frac{G(M, N-1)}{G(M, N)}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.29)$$

$$X_i = e_i \frac{G(M, N-1)}{G(M, N)}, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.30)$$

$$Q_i = \frac{1}{G(M, N)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k G_i(M-1, N-k), \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.31)$$

$$R_i = \frac{Q_i}{X_i} = \frac{1}{e_i G(M, N-1)} \sum_{k=1}^N \left(\frac{e_i}{\mu_i}\right)^k G_i(M-1, N-k), \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.32)$$

Il est intéressant de noter à partir de la relation (2.24), que les débits des différentes stations sont contraints par la relation(2.27). Cette relation est connue sous le nom de loi des flots forcés :

$$\frac{X_i}{X_j} = \frac{e_i}{e_j}, \text{ pour tout } i, \text{ et } j = 1, \dots, M. \quad (1.33)$$

1.5 Réseaux multi-classes à forme produit :

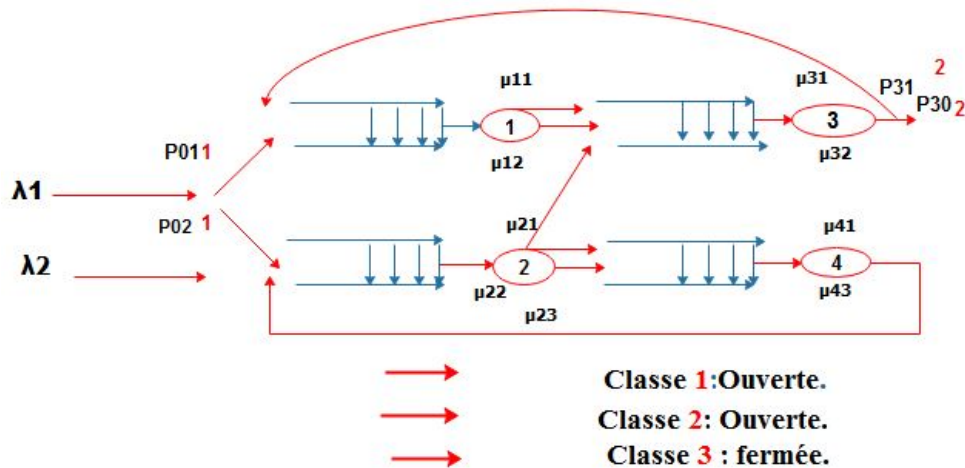


FIGURE 1.6: Réseaux multi-classes à forme produit.

1.5.1 Réseaux BCMP :

Définition 1.5.1 On considère un réseau de files d'attente parcouru par différentes classes de clients. On suppose dans un premier temps que les clients ne changent pas de classe lors de leur cheminement dans le réseau. Ce réseau possède les caractéristiques suivantes :

- (1) Un seul serveur à chaque station ;
- (2) Une capacité de stockage illimitée à toutes les stations ;
- (3) Des routages probabilistes pour chaque classe de clients.

On note M le nombre de stations du réseau et C le nombre de classes qui le parcourent. Les clients d'une classe donnée ne pouvant changer de classe, chaque classe est donc soit une classe ouverte, soit une classe fermée. On note O l'ensemble des classes ouvertes du réseau et F l'ensemble des classes fermées : $O \cap F = \emptyset$ et $O \cup F = \{1 \dots C\}$.

Les clients d'une classe ouverte arrivent dans le système, accomplissent un certain nombre d'opérations, puis quittent le système.

Les clients d'une classe fermée sont, quant à eux, en nombre constant, et ne peuvent ni arriver de l'extérieur, ni quitter le système. Pour une classe ouverte donnée $C \in O$, on impose, de plus, un processus Poissonien d'arrivée des clients (de la classe C) dans le système de taux λ_C .

On note alors P_{0iC} la probabilité qu'un client de classe C qui arrive dans le système se rende à la station (i) , P_{ijiC} la probabilité qu'un client de classe C qui termine son service à la station (i) se rende à la station j et P_{i0C} la probabilité qu'un client de classe C qui termine son service à la station (i) quitte le système.

Ces probabilités vérifient la relation :

$$\sum_{j=0}^M P_{ijC} = 1, \quad i = 0, \dots, M. \quad (1.34)$$

avec la convention $P_{00} = 0$. Pour une classe fermée donnée $C \in F$, soit N_C le nombre de clients de classe C .

On note comme précédemment P_{ijC} la probabilité qu'un client de classe C qui termine son service à la station (i) se rende à la station j .

Ces probabilités vérifient la relation :

$$\sum_{j=1}^M P_{ijC} = 1, \quad i = 1, \dots, M. \quad (1.35)$$

Finalement, chaque station peut être de quatre types différentes : FIFO, PS, IS et LCFS-PR. Voici le tableau si-dessous les représentant plus précisément :

Type	Discipline de service	Lois de service
1	FIFO : premier arrivé, premier servi.	Exponentielles indépendantes de la classe du client en service : μ_i taux de service.
2	PS : Partage de processeur.	Générales différentes pour chaque classe (à la transformée de Laplace rationnelle) : $\frac{1}{\mu_i c}$ le temps de service moyen des clients de classe C .
3	IS : nombre de serveurs infinis.	
4	LCFS-PR : dernier arrivé, premier servi, avec préemption du service.	

TABLE 1.2: Les différents types de disciplines de chaque station.

Ces réseaux sont connus sous le nom de réseau *BCMP* sans changement de classe et à taux indépendant de l'état [18].

1.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a cité quelques files d'attentes, $M/M/1$, $M/G/1$ et $M/G/1$ avec rappels. On a abordé quelques réseaux à forme produit à savoir les réseaux mono-classes et multi-classes à forme produit.

Dans le prochain chapitre, on s'intéresse à la théorie des ordres stochastiques qu'on appliquera pour définir les bornes stochastiques d'un réseau de files d'attente avec rappels exponentiel.

CHAPITRE 2

ORDRES STOCHASTIQUES

2.1 Introduction

La théorie des ordres stochastiques a mené à un large éventail de travaux au cours des dernières décennies. Cette théorie trouve de nombreuses applications dans des domaines très diversifiés, incluant la finance et l'actuariat. Dans ces domaines, il arrive fréquemment que l'on doit comparer des variables aléatoires ou des couples de variables aléatoires. La manière la plus simple de comparer deux variables aléatoires est de comparer leurs espérances. Alors, la comparaison entre deux nombres ne donne souvent pas assez d'information, c'est entre autres pour cela que les ordres stochastiques sont souvent utilisés.

Dans ce chapitre, on présente et examine de façon systématique les ordres stochastiques univariés les plus utilisés dans la littérature. En particulier, on va mettre l'accent sur l'ordre usuel, la transformée de Laplace, l'ordre de rapport de vraisemblance et l'ordre de hasard. Lorsque l'on souhaite comparer deux distributions qui ont la même moyenne, on est généralement intéressé par la comparaison de leurs variabilités. De ce fait, on traite aussi quelques ordres stochastiques de variabilité univariés, à savoir l'ordre convexe et convexe croissant, l'ordre concave et concave

croissant, et aussi l'ordre croissant, ordres stochastiques intégraux, l'ordre super-modulaire et ordres en fonctions génératrices, enfin la relations entres ces ordres.

2.2 Propriétés générales des ordres :

Soient X et Y deux variables aléatoires, on suppose qu'ils sont définies sur le même espace de probabilités alors leurs fonctions de répartitions respectivement F et G peuvent satisfaire la propriété d'antisymétrie qu'on va voir dans les ordres stochastiques univariés, sans pour autant avoir $X = Y$.

Lorsque les variables aléatoires sont dégénérées, certaines propriétés des ordres partiels définis sur \mathcal{D} l'espace de fonctions de répartitions, découlent directement des propriétés de l'ordre de nombres réels. Pour cela, on va utiliser la distribution de Dirac, notée par $\phi_c(\cdot)$ définie pour tous les nombres réels comme suit :

$$\phi_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c \\ 1 & \text{si } x \geq c \end{cases}$$

Définition 2.2.1 Soit un ordre partiel donné \leq défini sur un sous ensemble de l'espace \mathcal{D} . On dit que cet ordre possède la propriété :

(R) : Si $\forall a, b \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq b$, alors $\phi_a < \phi_b$.

(E) : Si $F < G$, alors $m_F \leq m_G$ lorsque les moyennes existent.

(M) : Si $F < G$, alors $F^c < G^c, \forall c > 0$, ou $F^c(x) = F(x/c), \forall x$.

(C) : $F_1 < F_2$ alors $F_1 * G < F_2 * G$, ou $(F_i * G)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_i(x - y)dG(y), i = \overline{1, 2}$.

(W) : F_n et G_n convergent faiblement vers F et G (respectivement) alors :

$$\forall n, F_n < G_n \Rightarrow F < G.$$

Remarque 2.1 Pour les deux variables aléatoires X et Y la propriété (M) assure que :

$$X < Y \Leftrightarrow cX < cY \text{ pour tout } c \in]0, +\infty[.$$

La propriété (C) assure que : $X_1 < X_2 \Rightarrow X_1 + Y < X_2 + Y$.

Ou Y est une variable aléatoire indépendante de X_1 et X_2 .

La propriété (E) assure que : $X < Y \Rightarrow E(X) \leq E(Y)$.

On remarque que la propriété (E) découle des autres propriétés. Un ordre partiel " \leq " sur un ensemble ou un sous-ensemble \mathcal{D} qui vérifie les propriétés (R), (M), (C) et (W), vérifie aussi la propriété (E).

Définition 2.2.2 Pour une classe de fonctions réelles \mathfrak{F}_{\leq} , l'ordre partiel \leq défini sur l'ensemble \mathcal{D} est dit généré par \mathfrak{F}_{\leq} si :

$$F < G \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dG(x)$$

Pour toute fonction f dans \mathfrak{F}_{\leq} , telle que les intégrales existent.

2.3 Ordres stochastiques univariés :

Les relations d'ordre stochastique sont des cas particuliers de relations d'ordre partiel. On commence par définir les relation d'ordre et d'ordre partiel.

Définition 2.3.1 Une relation binaire " \leq " sur un ensemble arbitraire A est une relation d'ordre partiel si elle remplit les conditions suivantes :

i Réflexive $a \leq a, \forall a \in A$.

ii Antisymétrique : si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a=b, \forall a, b \in A$.

iii Transitivité : si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c, \forall a, b, c \in A$. La paire (A, \leq) est un ensemble partiellement ordonné [5].

Maintenant, on considère A l'ensemble ou le sous-ensemble de toutes les fonctions de répartition des variables aléatoires à valeurs réelles.

Définition 2.3.2 On appelle ordre stochastique toute relation d'ordre définie sur l'ensemble A . Ainsi, un ordre stochastique quantifie le concept qu'une variable aléatoire soit supérieure à une autre et il permet donc de comparer deux distributions.

Alors, qu'il peut y avoir différentes variables de même fonction de répartition de sorte que la relation \leq est antisymétrique pour ces dernières mais ne l'est pas pour les variables aléatoires. De nombreux ordres univariés, qui ont différentes applications, on distingue plus particulièrement l'ordre stochastique usuel, l'ordre de hasard, l'ordre de rapport de vraisemblance et l'ordre en transformée de Laplace.

2.3.1 Ordres stochastiques usuels :

L'objectif des ordres stochastiques est l'approximation du modèle complexe par un modèle plus simple ou par un modèle dont les distributions sont plus simples, cela fournit des informations sur ce modèle qui sont difficiles à avoir directement.

Définition 2.3.3 Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition respectives sont F et G . On dit que X est plus petit que Y au sens de l'ordre stochastique usuel si : $F(u) \geq G(u), \forall u \in \mathbb{R}$. De manière équivalente, cette équation est vraie si et seulement si : $F(u) \leq G(u), \forall u \in \mathbb{R}$.

Ou $\bar{F}(u) = 1 - F(u)$ et $\bar{G}(u) = 1 - G(u)$. sont des fonctions de survie associées a F et G respectivement. On note alors $X \leq_{st} Y$ [4] .

Exemple 2.1 (1) Si $X \sim \exp(\lambda)$ et $Y \sim \exp(\mu)$ tel que $\lambda < \mu$, alors $X >_{st} Y$.
 (2) Si $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ et $Y \sim \text{Poisson}(\mu)$ tel que $\lambda < \mu$, alors $X <_{st} Y$.

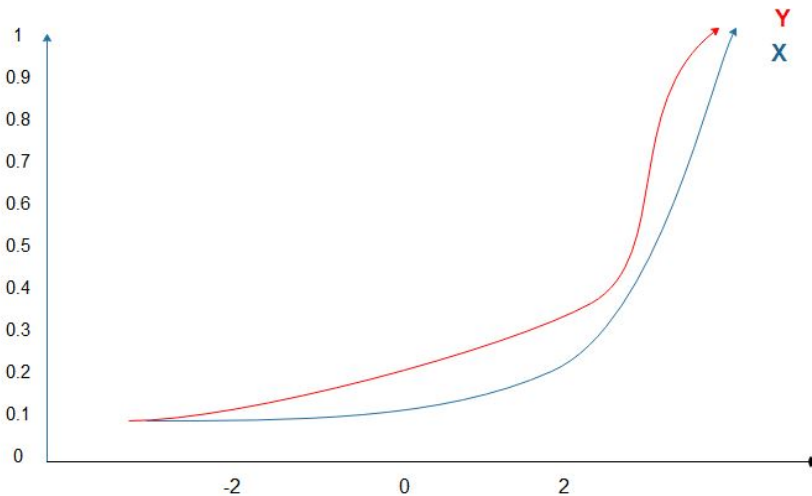


FIGURE 2.1: Dominance stochastique.

Proposition 2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires, on a $X \leq_{st} Y$ si et seulement si : $E[\Phi(X)] \leq E[\Phi(Y)]$ pour toute fonction croissante Φ dont les espérances précédentes existent.

Proposition 2.2 Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . Si $X \leq_{st} Y$, alors il existe des variables aléatoires X^* et Y^* telles que $X^* \stackrel{st}{=} X$ et $Y^* \stackrel{st}{=} Y$ et $X^* \leq Y^*$ [32] .

Proposition 2.3 Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . Alors si $X \leq_{st} Y$, on a :

i $E(X) \leq E(Y)$.

ii $X =_{st} Y$, tant que $E(X) = E(Y)$.

Démonstration 2.1 Pour i, comme $\Phi(x) = x$ est une fonction croissante, on a directement $E(X) \leq E(Y)$ d'après la proposition (2.4).

Et pour (ii), on a tout d'abord :

$$E(X) = \int_0^{\infty} \bar{F}(u) du$$

et

$$E(Y) = \int_0^{\infty} \bar{G}(u) du$$

De là, puisque $E(X) = E(Y)$, on obtient :

$$0 = E(Y) - E(X) = \int_0^{\infty} [\bar{G}(u) - \bar{F}(u)] du$$

Cependant, puisque $X \leq_{st} Y$, on sait alors que $\bar{F}(u) - \bar{G}(u) \leq 0$ pour tout u .

Donc, on a nécessairement $\bar{G} = \bar{F}$, ou de façon équivalente $F = G$.

Autrement dit, X et Y ont la même loi, ce qui complète la démonstration.

Proposition 2.4 Soient X et Y , deux variables aléatoires dont les fonctions de répartition sont respectivement F et G . Alors si $X \leq_{st} Y$, on a :

i $f(X) \leq_{st} f(Y)$, si f est une fonction croissante.

ii $f(Y) \leq_{st} f(X)$, si f est une fonction décroissante.

Démonstration 2.2 Si $X \leq_{st} Y$, alors $P(X > x) \leq P(Y > x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Comme f est croissante, on peut écrire $P[f(X) > f(x)] \leq P[f(Y) > f(x)]$. À la fin, en posant $u = f(x)$, cela revient à $P[f(X) > u] \leq P[f(Y) > u]$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ et donc : $f(X) \leq_{st} f(Y)$.

La démonstration pour f décroissante est similaire.

Remarque 2.2 Dans la proposition (2.3), la propriété i peut être généralisée à la comparaison des moments. Ainsi, on écrit, si $X \leq_{st} Y$, alors $E[X^n] \leq E[Y^n]$, pour $n = 1, 3, 5, \dots$

Ou encore si $X \leq_{st} Y$, ou X et Y sont des variables aléatoires non négatives alors $E[X^n] \leq E[Y^n]$, pour $n = 1, 2, 3, \dots$

Dans la proposition(2.3), La propriété ii a des conséquences importantes pour l'inférence statistique. Si nous avons deux échantillons et voulons tester les hypothèses suivantes :

$$H_0 : F = G \text{ vs } H_1 : F \leq_{st} G$$

Un test simple et cohérent peut être basé sur la différence des moyennes. Cependant, un test plus efficace peut être basé sur la fonction :

$$\max(F(x) - G(x), 0)$$

Car elle s'annule sous l'hypothèse H_0 , mais elle est strictement positive pour un certain réel x en vertu de H_1 .

2.3.2 Ordre en transformée de Laplace :

Soient X et Y deux variables aléatoires positives, on dit que X est plus petit que Y au sens de l'ordre en transformée de Laplace, noté : $X \leq_{Lt} Y$ si :

$$E[\exp(-sX)] \geq E[\exp(-sY)], \text{ pour tout } s > 0.$$

Définition 2.3.4 Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F absolument continue et de densité f , la transformée de Laplace [30] de la densité f est :

$$L_X(s) = \int_0^{\infty} \exp(-su)f(u)du, \text{ pour tout } s > 0.$$

La transformée de la fonction de répartition F est :

$$L_X^*(s) = \int_0^{\infty} \exp(-su)F(u)du, \text{ pour tout } s > 0.$$

Dans ce cas, les implications suivantes sont vraies pour tout $s > 0$:

i $X \leq_{Lt} Y$ si $L_X(s) \geq L_Y(s)$.

ii $X \leq_{Lt} Y$ si $L_X^*(s) \geq L_Y^*(s)$.

Notons que si F est continue, alors : $L_X^*(s) = \frac{1}{s}L_X(s), s > 0$.

Preuve 2.1 *En utilisant l'intégration par partie, on posant :*

$$\begin{aligned}
 L_X^*(s) &= \int_0^\infty \exp(-su)F(u)du. \\
 &= \frac{1}{-s} \exp(-su)F(u) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{-s} \exp(-su)dF(u). \\
 &= \frac{1}{s} \int_0^\infty \exp(-su)fd(u). \\
 &= \frac{1}{s}L_X(s).
 \end{aligned}$$

En 1997, Shaked [26] et Wong [34] ont proposé une nouvelle forme d'ordre en transformée de Laplace en utilisant la fonction de survie \bar{F} .

Soient d'abord :

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}(s) &= \int_0^\infty \exp(-su)dF(u), s > 0 \\
 \mathfrak{F}^*(s) &= \int_0^\infty \exp(-su)d\bar{F}(u), s > 0
 \end{aligned}$$

Ces derniers sont respectivement les transformées de Laplace-Stieltjes de F et \bar{F} .

Dans ce cas, l'ordre peut être caractérisé par $X \leq_{Lt} Y$ si $\mathfrak{F}^(s) \leq \mathfrak{G}^*(s)$, pour tout $s > 0$.*

Aussi, on démontre que :

$$\mathfrak{F}^*(s) = \frac{1 - \mathfrak{F}(s)}{s}, s > 0 \tag{2.1}$$

En effet,

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{F}^*(s) &= \int_0^\infty \exp(-su)\bar{F}(u)du, s > 0 \\
 &= \int_0^\infty \exp(-su)(1 - F(u))du. \\
 &= \int_0^\infty (\exp(-su) - \exp(-su)F(u))du. \\
 &= \int_0^\infty \exp(-su)du - \int_0^\infty \exp(-su)F(u)du. \\
 &= \frac{1}{-s} \exp(-su) \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \exp(-su)F(u)du. \\
 &= \frac{1}{s} - \int_0^\infty \exp(-su)F(u)du, s > 0.
 \end{aligned}$$

On utilise l'intégration par partie en posant : $u = \frac{1}{-s} \exp(-su)$, $u' = \exp(-su)$

$$v = F(u), v' = dF(u).$$

$$\begin{aligned} \text{Alors, } \mathfrak{F}^*(s) &= \frac{1}{s} - \frac{1}{-s} \exp(-su)F(u)|_0^\infty - \frac{1}{s} \int_0^\infty \exp(-su)dF(u) \\ &= \frac{1}{-s} - \frac{1}{s} \int_0^\infty \exp(-su)dF(u) \\ &= \frac{1}{s}(1 - F(s)) \end{aligned}$$

D'après le résultat (3.1), on a :

$X \leq_{Lt} Y$ si $\mathfrak{F}(s) \geq \mathfrak{G}(s)$ pour tout $s > 0$.

Selon I.Elbatal [16] , la transformée de Laplace peut être interprétée de plusieurs manières lorsque la variable aléatoire X représente la durée de vie d'un système ou d'un dispositif. Cela permet plusieurs applications de cet ordre.

Par exemple, soit $X_{(t)} = [t - X/X < t], t \in \{x : F_X(x) < 1\}$ une variable aléatoire dont la distribution conditionnelle de $t - X$ étant donnée que $X < t$.

Lorsque la variable aléatoire X signifie la durée de vie résiduelle inversée.

propriété 2.1 *On a :*

1. $X \leq_{Lt} Y \Rightarrow E[X] \leq E[Y]$ si les esperances existent.
2. $X \leq_{Lt} Y \Rightarrow E[\phi(X)] \geq E[\phi(Y)]$ pour toute fonction ϕ monotone.
3. \leq_{Lt} est stable par convolution.
4. \leq_{Lt} est stable par mélange.
5. \leq_{Lt} est stable en convergence.

2.3.3 Ordre de rapport de vraisemblance :

Définition 2.3.5 *Si X et Y ont des lois de densité respectives f et g par rapport à une mesure commune, on a alors : $X \leq_{Lr} Y$, si :*

$$f(t)g(s) \leq f(s)g(t), s \leq t \tag{2.2}$$

En intégrant l'expression (2.2) par rapport à $s \in A$ et $t \in B$ sont des intervalles dans \mathbb{R} .

L'inégalité (2.2) indique que les fonctions $f(t)$ et $g(t)$ sont décroissantes pour tout t , ou $f(t)$ et $g(t)$ sont bel et bien définies.

Par construction, l'ordre de rapport de vraisemblance \leq_{Lr} [20] est plus fort que l'ordre de hasard \leq_{hr} et par conséquent, il est plus fort que l'ordre stochastique usuel \leq_{st} .

Le théorème suivant expose quelques assertions de l'ordre \leq_{Lr} :

Théorème 2.1 Soient X et Y deux variables aléatoires ou $P(X \in A)$, $P(Y \in A)$, $P(a \leq X \leq b)$ et $P(a \leq Y \leq b)$ sont positives, les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $X \leq_{Lr} Y$.
2. pour tout intervalle $U = [a, b]$ et $V = [c, d]$ Ou $a < b < c < d$ et $P(X \in V)P(Y \in U) \leq P(X \in U)P(Y \in V)$.
3. $[X/a \leq X \leq b] \leq_{st} [Y/a \leq Y \leq b]$ pour tout $a < b$.
4. $[X/X \in A] \leq_{st} [Y/Y \in A]$ pour tout événement A .
5. $[X/X \in A] \leq_{Lr} [Y/Y \in A]$ pour tout événement A .

Remarque 2.3 La densité de $[X/X \in A]$ est donnée par $f_{[X/X \in A]} = f(t)/P(X \in A)$.

L'équivalence (1) \Leftrightarrow (4) est due à Witt [13] nommé ordre conditionnel uniforme. On va citer quelques propriétés qu'on juge importantes de l'ordre de rapport de vraisemblance \leq_{Lr} .

propriété 2.2 On a :

1. $X \leq_{Lr} Y \Rightarrow f(X) \leq_{Lr} f(Y)$ si f est croissante.
2. $X \leq_{Lr} Y \Rightarrow g(X) \leq_{Lr} g(Y)$ si g est décroissante.
3. L'ordre \leq_{Lr} est stable par convolution.
4. L'ordre \leq_{Lr} est stable en convergence.

Remarque 2.4 D'après le théorème (2.1), on a pour toute fonction ϕ croissante :

$$X \leq_{st} Y \Leftrightarrow E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)].$$

En particulier, l'orsque $\phi(x) = -\exp(-sx)$, ou $s > 0$, l'équivalence précédente donne naissance à l'ordre en transformée de Laplace.

2.3.4 Ordre de hasard :

Il existe de nombreuses situations ou de concepts plus forts que l'ordre usuel stochastique, dont on pourra citer l'ordre de hasard.

Définition 2.3.6 (Fonction de hasard) Soit X une variable aléatoire (une durée de vie) de fonction de répartition absolument continue F . La fonction de hasard [29] à l'instant t (X a survécu le temps t) est définie par :

$$r(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P(X \leq t + \Delta t / X > t)}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)} = \frac{d \ln(\bar{F}(t))}{dt}$$

ou $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$ est la fonction de survie et $f(t)$ est la fonction de densité de X . Le terme $P(X \leq t + \Delta t / X > t)$ désigne la probabilité que X défaille au prochain Δt tel que X a survécu t . On note que la fonction de survie $\bar{F}(t)$ donne la probabilité que la variable X dépasse une valeur donnée t . il s'agit d'une fonction décroissante continue à droite tel que : $\bar{F}(0) = 1$ et $\bar{F}(+\infty) = 0$.

Définition 2.3.7 (Ordre de hasard) On dit que la variable aléatoire X est plus petite que la variable aléatoire Y par rapport à l'ordre de hasard, noté par $X \leq_{hr} Y$, si la fonction (2.3) est croissante.

$$t \rightarrow \frac{\bar{F}(t)}{F(t)}. \quad (2.3)$$

Autrement, on dit que $X \leq_{hr} Y$ si :

$$\frac{f(t)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{g(t)}{\bar{G}(t)}, \forall t \in \mathbb{R} \quad (2.4)$$

Avec $\bar{G}(t)$ est la fonction de survie et $g(t)$ est la densité de la variable aléatoire Y .

On note qu'il est plus avantageux d'utiliser la formule (2.3) que (2.4) puisque elle n'exige pas l'existence de densités $f(t)$ et $g(t)$.

Dans le cas discret, on dit que $X \leq_{hr} Y$ si :

$$\frac{P(X = n)}{P(X \geq n)} \geq \frac{P(Y = n)}{P(Y \geq n)}, n \in 0, 1, 2, \dots$$

Ou X et Y sont deux variables aléatoires discrètes.

Cas de variables aléatoires continues :

- 1 $\frac{f(u)}{\bar{F}(v)} \leq \frac{g(u)}{\bar{G}(v)}, \forall u \leq v.$
- 2 $\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{\bar{G}(t+s)}{\bar{G}(t)}, \forall s \leq 0, \forall t \in \mathbb{R}.$
- 3 $X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow P(X - t > s / X > t) \leq P(Y - t > s / Y > t), \forall s, t \in \mathbb{R}.$
- 4 $\frac{1-F(G^{-1}(1-u))}{u} \leq \frac{1-F(G^{-1}(1-v))}{v}, \forall 0 < u \leq v < 1.$

Cas de variables aléatoires discrètes :

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow P(X \geq n_1)P(Y \geq n_2) \geq P(X \geq n_2)P(Y \geq n_1), \forall n_1 \leq n_2.$$

Par construction, l'ordre de hasard est plus fort que l'ordre stochastique usuel \leq_{st} .

Théorème 2.2 Soient X et Y deux variables aléatoires, l'implication suivante est vraie :

$$X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y.$$

Preuve 2.2 Puisque $X \leq_{hr} Y$ alors :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)} = 1 &\Leftrightarrow \frac{\bar{G}(t)}{\bar{F}(t)} \geq 1 \\ &\Leftrightarrow \bar{G}(t) \geq \bar{F}(t) \\ &\Leftrightarrow 1 - \bar{G}(t) \geq 1 - \bar{F}(t) \\ &\Leftrightarrow F(t) \geq G(t), t \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow X \leq_{st} Y. \end{aligned}$$

Maintenant, on va mentionner quelques propriétés associées à l'ordre de hasard sans fournir de preuves :

propriété 2.3

- 1 $X \leq_{hr} Y \Rightarrow f(X) \leq_{hr} f(Y)$, si f est croissante.
- 2 $X \leq_{st} Y \Rightarrow g(X) \leq_{hr} g(Y)$, si g est croissante.
- 3 $X \leq_{hr} Y \Rightarrow [X/X > t] \leq_{st} [Y/Y > t]$, pour tout $t \in \mathbb{R}$
- 4 $X_i \leq_{hr} Y_i, \{i = 1, 2, \dots, m\} \Rightarrow \min\{X_1, X_2, \dots, X_m\} \leq_{hr} \min\{Y_1, Y_2, \dots, Y_m\}$. ou (X_i, Y_i) sont des paires indépendantes.

5 $X_i \leq_{hr} Y_i, \{i = 1, 2, \dots, m\} \Rightarrow X_k \leq_{hr} Y_k, \{k = 1, 2, \dots, m\}$, ou X_i (resp Y_i) est une suite de variables aléatoires i.i.d.

Il est parfois facile d'utiliser l'ordre stochastique obtenu en remplaçant la fonction de survie $\bar{F}(t)$ par la fonction de répartition $F(t)$ dans la définition de l'ordre de hasard.

On obtient ce qu'on appelle l'ordre inverse de hasard \leq_{rh} .

Définition 2.3.8 (Ordre de hasard inverse) La variable aléatoire X est plus petite que la variable aléatoire Y par rapport à l'ordre inverse de hasard, noté $X \leq_{rh} Y$.

$$t \longrightarrow \frac{G(t)}{F(t)}$$

L'ordre de hasard inverse partage de nombreuses propriétés avec l'ordre de hasard habituel. En effet, il ya une forte dualité entre les deux. Par conséquent, les propriétés liées à l'ordre de hasard \leq_{hr} citées plus haut restent valides pour l'ordre \leq_{rh} .

Cette caractéristique de l'ordre de hasard est importante pour comparer les fonctions de survies :

$$X \leq_{hr} Y \Leftrightarrow [X/X > t] \leq_{st} [Y/Y > t], \forall t \in \mathbb{R}.$$

Cependant, il existe des situations ou l'on aimerait comparer les variables aléatoires $[X/X \in A]$ et $[Y/Y \in A]$, pour tout ensemble mesurable A , cela amène à construire un ordre encore plus fort que \leq_{hr} , à savoir l'ordre de rapport de vraisemblance traité dans la section précédente.

2.4 Ordres de variabilité univariés :

2.4.1 Ordre convexe \leq_{cx} et \leq_{icx} :

On donne dans un premier temps quelques propriétés des ordres convexes [17] sur \mathbb{R} .

Théorème 2.3 Soient X et Y deux variables aléatoires réelles, il ya une équivalence entre :

i) $X \leq_{cx} Y$.

ii) $X \leq_{icx} Y$ et $E[X] = E[Y]$.

Par ailleurs, $X \leq_{icx} Y$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

$$E[(X - x)^+] \leq E[(Y - x)^+].$$

Les ordres convexes ne sont malheureusement pas stables par passage aux limites en distribution. Ce résultat est intimement lié au fait que ces ordres ne peuvent être générés par un sous-ensemble de fonctions bornnées, par exemple, pour l'ordre \leq_{icx} , il n'existe pas de sous-ensemble F de fonctions bornnées, tel que :

$$E[f(X)] \leq E[f(Y)], \forall f \in F \Rightarrow X \leq_{icx} Y.$$

Par contre, on peut trouver des conditions supplémentaires simples à vérifier et qui garantissent le passage aux limites.

Théorème 2.4 Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires réelles tel que pour tout $n : X \leq_{icx} Y$.

Supposons de plus que l'une des deux conditions équivalentes soient vérifiées :

i) X_n et Y_n convergent en loi vers X et Y respectivement et $E[X_n^+] \rightarrow E[X^+], E[Y_n^+] \rightarrow E[Y^+]$, quand $n \rightarrow \infty$.

ii) Il existe deux variables aléatoires X et Y , si pour tout : $x \in \mathbb{R}, E[(X - x)^+] \rightarrow E[(X - x)^+]$ et $E[(Y - x)^+] \rightarrow E[(Y - x)^+]$, quand $n \rightarrow \infty$ alors $X \leq_{icx} Y$.

On donne à présent quelques propriétés appliquées à des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Tout générateur de l'ordre convexe en dimension supérieure à 2 est donc dans l'ensemble des fonctions convexes.

Théorème 2.5 Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n , il y a une équivalence entre :

i) $X \leq_{cx} Y$ (respectivement : $X \leq_{icx} Y$).

ii) il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définis deux variables aléatoires X' et Y' à valeurs dans \mathbb{R}^n de même loi que X et Y tel que :

$$E[Y'/X'] = X' \text{ (respectivement. } E[Y'/X'] \geq X').$$

Enfin, les ordres convexes en dimension supérieure à 2 ne sont pas stables par passages aux limites, mais comme en dimension 1, il n'est pas difficile de trouver des conditions simples pour quelques passages aux limites soit possible.

Théorème 2.6 Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n tel que, pour tout n , on a : $X_n \leq_{cx} Y_n$ ($X_n \leq_{icx} Y_n$ respectivement), si ces suites convergent en loi vers respectivement X et Y et si de plus : $E[X_n] \rightarrow E[X]$ et $E[Y_n] \rightarrow E[Y]$, quand $n \rightarrow +\infty$, alors : $X \leq_{cx} Y$ (respectivement $X \leq_{icx} Y$).

2.4.2 Ordre concave \leq_{cv} et \leq_{icv} :

Définition 2.4.1 On dit que la variable aléatoire X de fonction de répartition F est inférieure en moyenne de vie écoulée à la variable aléatoire Y de fonction de répartition G , i.e : $X \leq_{cv} Y$ ce qui est équivalent à $F \leq_{cv} G$, lorsque :

$$\begin{aligned} E[(x - X)_+] &= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - t)dF(t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(t)dt \geq \int_{-\infty}^x G(t)dt = E[(x - Y)_+], \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

D'autre manière,

$$E[(x - X)_+] \geq E[(x - Y)_+], \forall x \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

ou les espérances mathématiques (les intégrales sont bien définies), Par conséquent :

$$F \leq_{st} G, E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \Leftrightarrow X \leq_{cx} Y.$$

On remarque que l'ordre concave \leq_{cv} est un ordre partiel sur un sous-ensemble de D des fonctions vérifiant :

$$\int_{-\infty}^0 |t|dF(t) < \infty$$

comme dans le cas de l'ordre convexe.

L'ordre concave croissant \leq_{icv} :

Soient X et Y , deux variables aléatoires, on dit que X est plus petit que Y par rapport à l'ordre concave croissant, que l'on note par $X <_{icx} Y$, si :

$$E\{\phi(X)\} \leq E\{\phi(Y)\}$$

, Pour toute fonction concave et croissante $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a : $-Y <_{icx} -X$, il suffit de noter que si $\phi(x)$ est convexe et croissante, alors $-\phi(-x)$ est concave et croissante.

2.5 Ordre croissant :

Le théorème suivant donne plusieurs caractéristiques de l'ordre croissant pour des variables à valeurs dans \mathbb{R}^n .

Théorème 2.7 *Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n , ces trois propriétés sont équivalentes :*

i) $X \leq_{cst} Y$.

ii) *il existe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ sur lequel sont définies deux variables aléatoires X' et Y' de même loi que X et Y , tel que :*

$$P[X' \leq Y'] \leq 1$$

iii) *pour tout $x \in \mathbb{R}^n$: $P(X \geq x) \leq P(Y \geq x)$.*

Le résultat suivant exprime la stabilité de l'ordre croissant par passage aux limites en distribution.

Théorème 2.8 *Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n qui convergent respectivement en loi vers X et Y tel que, pour tout n , $X_n \leq Y_n$. On a : $X \leq_{cst} Y$.*

2.6 Ordres stochastiques intégraux :

On s'intéresse à présent à des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n .

\mathbb{R}^n est muni de l'ordre partiel usuel suivant : $x = (x_1, \dots, x_n) \leq y = (y_1, \dots, y_n)$ si $x_i \leq y_i$, pour $i = \overline{1, n}$.

Par ailleurs, on note \vee et \wedge les opérateurs de max et min composante par composante. Les notions suivantes sont généralisables au cas de variables à valeurs dans un espace muni d'un ordre partiel.

les ordres stochastiques intégraux sont définis comme suit :

Définition 2.6.1 Soit \mathcal{F} un ensemble quelconque de fonctions de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} et soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^n . On définit l'ordre stochastique intégrale $\leq_{\mathcal{F}}$ par :

$$X \leq_{\mathcal{F}} Y$$

si et seulement si, $E[f(X)] \leq E[f(Y)], \forall f \in \mathcal{F}$.

Quand les moyennes précédentes existent, on a quelques exemples d'ordres stochastiques intégraux :

$$\leq_{cst}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{croissantes}\}$$

$$\leq_{cx}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{convexes}\}$$

$$\leq_{icx}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{convexes} + \text{croissantes}\}$$

$$\leq_{dcx}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{convexes} + \text{décroissantes}\}$$

$$\leq_{cv}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{concaves}\}$$

$$\leq_{icv}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{concaves} + \text{croissantes}\}$$

$$\leq_{sc}: \mathcal{F} = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \text{schur} - \text{convexes}\}$$

On peut imaginer bien d'autres ordres stochastiques, mais pour l'étude de système de files d'attente, les ordres \leq_{st} , \leq_{cx} , \leq_{icx} et \leq_{sm} s'imposent naturellement car souvent les variables définissant la performance de ces systèmes peuvent être construites par une succession d'opérations (max, +) menant à des fonctions croissantes, convexes et super-modulaires.

2.7 Ordre super-modulaire :

Cet ordre, introduit par ROLSKI [33] s'avère très utile dans la comparaison de la performance de certains systèmes de files d'attente. C'est un ordre intégral basé sur l'ensemble des fonctions super-modulaires.

Définition 2.7.1 (Fonction super-modulaire) Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite super-modulaire si pour tout couple $x, y \in \mathbb{R}^n$ on a :

$$f(x \vee y) + f(x \wedge y) \geq f(x) + f(y).$$

Théorème 2.9 i) La fonction f est C^2 et est super-modulaire si et seulement si : $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0$, pour tout $i \neq j$.

ii) Si f est croissante et super-modulaire $\max(f, c)$ l'est aussi pour tout $c \in \mathbb{R}$.

iii) Si f est monotone et super-modulaire $\phi \circ f$ est super-modulaire pour toute fonction ϕ croissante convexe.

iv) Si f est super-modulaire, $f(\phi_1, \dots, \phi_n)$ l'est aussi si les fonctions ϕ_i sont monotones et de même signe.

v) Soient, $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions affines et monotones, de même signe, $f = \max(f_1, \dots, f_1 + \dots + f_k)$ est super-modulaire.

L'ordre super-modulaire est stable par passage aux limites en distribution.

Théorème 2.10 Soient X_n et Y_n deux suites de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^p convergentes respectivement en loi vers X et Y tel que pour tout n ,

$$X_n \leq_{sm} Y_n, \text{ alors : } X \leq_{sm} Y$$

.

Théorème 2.11 (Inégalité de Lorentz[15]) Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires de même distribution.

Alors, $(X_1, \dots, X_n) \leq_{sm} (X_1, \dots, X_n)$

Définition 2.7.2 Le générateur φ d'un processus de Markov est \leq_{st} -monotone si pour toute fonction f croissante : $x \rightarrow \int f(x)\varphi(x, dt)$ est également croissant.

Hypothèse 2.1 $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ est un processus de Markov stationnaire tel que son générateur est celui du processus renversé $\{X(-t), t \in \mathbb{R}\}$ soient \leq_{st} -monotone.

Théorème 2.12 Soit $\{X(t), t \in \mathbb{R}\}$ un processus qui vérifie l'hypothèse (2.1), pour tout entier n et tout couple de vecteurs (v_1, \dots, v_n) et (s_1, \dots, s_n) tel que $v_1 \leq s_1$ et $v_i - v_{i-1} \leq s_i - s_{i-1}$, pour $i = 2, \dots, n$, on a :

$$(X(v_1), \dots, X(v_n)) \geq_{sm} (X(s_1), \dots, X(s_n)).$$

2.8 Ordres en fonctions génératrices :

Soient X et Y deux variables aléatoires non négatives discrètes de fonctions de répartition F et G respectivement. On dit que X est inférieure à Y par rapport à l'ordre en fonctions génératrices, on note $F \leq_g G$, si et seulement si,

$$E(z^X) \geq E(z^Y)$$

$$\text{ou , } E(z^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)z^n$$

$$\text{et, } E(z^Y) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(Y = n)z^n, |z| < 1.$$

cet ordre peut-être déduit de l'ordre en transformée de Laplace si on pose, $s = \ln z$.

2.9 Relations entre les ordres :

Soient X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F et G respectivement.

On a les relations suivantes :

1. $F \leq_{st} G$ et $E(Y_+) < \infty \Rightarrow F \leq_v G$.
2. $E(X) = E(\max(0, -x)) < \infty \Rightarrow F \leq_{cv} G$.
3. $E(X) = E(Y)$, alors $F \leq_{cv} G \Leftrightarrow G \leq_v F$.
4. $F \leq_{st} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
5. $F \leq_{cv} G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
6. Si $E(X) = E(Y)$ et $F \leq_v G \Rightarrow F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.
7. $F \leq_L G \Rightarrow F \leq_g G$.

2.10 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a cité quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques. On a donné les différents types d'ordres stochastiques et quelques propriétés, ainsi que la relations entre eux.

Le prochain chapitre consacrera à l'étude de la monotonie de la chaîne de Markov induite du réseau $[M/G/1/1 \rightarrow \cdot/M/M/1]$ avec rappel exponentiel.

CHAPITRE 3

MONOTONIE DE LA CHAÎNE DE MARKOV INDUITE DE RÉSEAU

$[M/G/1/1 \longrightarrow \cdot/M/M/1]$ AVEC RAPPEL
EXPONENTIEL :

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéressera à un réseau de files d'attente à deux stations en tandem $[M/G/1/1 \longrightarrow \cdot/M/1/1]$ avec rappels constants qui a été étudié par E. Moutzoukis et C. Langaris [12]. On va considérer premièrement, deux stations en tandem sans file intermédiaire $[M/G/1 \longrightarrow \cdot/M/1/1]$. Avi-Itzak et Yadin [6] ont démontré que ce petit réseau, sous certaines considérations, est équivalent à une seule station avec une durée de service particulière qu'ils ont déterminée.

Ensuite, on base l'étude sur la file $M/G/1/1$ avec rappels exponentiel [2] on aborde le modèle mathématique qui convient avec cette file. Puis, on cite la chaîne de markov induite associée à

ce modèle.

Dans l'inégalité préliminaires, on va appliquer les ordres stochastiques cités dans le chapitre précédent, pour pouvoir étudier la monotonie des coefficients a_{ij} et de l'opérateur de transition p_{ij} . Suite à ceci, on introduit des théorèmes et des corollaires qui aident à comparer les deux système de files d'attente $M/G/1$ avec $M/M/1$. On utilise également quelques résultats du travail de Boualem, Djellab et Aissani [25] concernant les bornes stochastiques pour le système $M/G/1/1$ avec rappels constants.

3.2 Description du modèle :

On considère un réseau de files d'attente à deux stations en tandem avec rappels $[M/G/1/1 \rightarrow .M/1/1]$ [28] illustré dans la figure suivante :

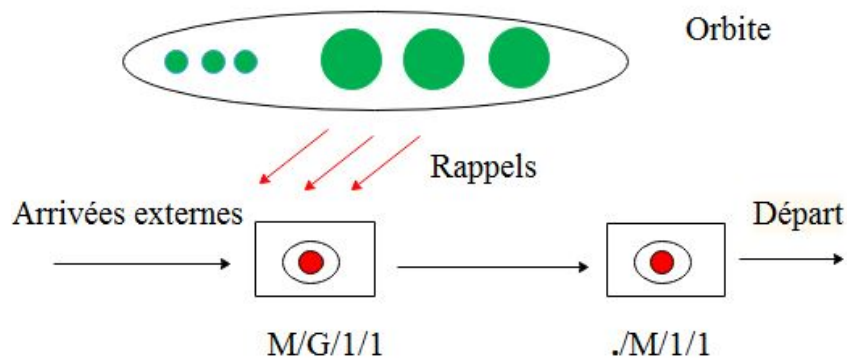


FIGURE 3.1: Deux stations en tandem avec rappels.

Les clients arrivent à la première station, selon un processus poissonnien de paramètre λ . Chaque client reçoit une partie de son service à la première station et puis accède à la seconde station pour poursuivre son service. Il n'y a aucune file d'attente intermédiaire, un client dont le service dans la station 1 est accompli ne peut accéder à la station 2 si cette dernière est occupée.

Ces clients se comporteront comme des rappels, ils ne joignent pas une file d'attente mais ils sont placés dans une orbite de capacité infinie pour réessayer de demander service suivant une politique de rappels dite rappels constants. Suivant cette politique de rappels, le paramètre du temps exponentiel de chaque client dans l'orbite est $\frac{\lambda}{n}$, où n est la longueur de la

file dans l'orbite.

Donc, l'intensité totale des rappels est μ . Si le serveur de la station 1 est libre lors d'une tentative de rappel, alors le premier client dans la file de l'orbite reçoit son service immédiatement, autrement il répète sa demande plus tard. Les durées de service dans les deux stations 1 et 2 sont des variables aléatoires indépendantes avec des fonctions de densité $b_i(x)$, des fonctions de répartition $B_i(x)$ et des moyennes $\frac{1}{\mu_i}$, pour $i = \overline{1, 2}$ respectivement.

3.2.1 Le modèle mathématique :

On considère un système de files d'attente M/G/1/1 [11] avec rappels dont le flot des arrivées primaires est poissonien de paramètre λ et la distribution de la durée de service générale de fonction de répartition $B(\cdot)$ de taux μ_1 . On suppose que le flots des rappels est exponentiel de taux μ . On considère alors le processus $N(t)$ donnant le nombre de clients dans le système à l'instant t . $N(t)$ n'est pas markovien. On va considérer la chaîne de Markov induite aux instants de départs d_n (l'instant de départ du nème client).

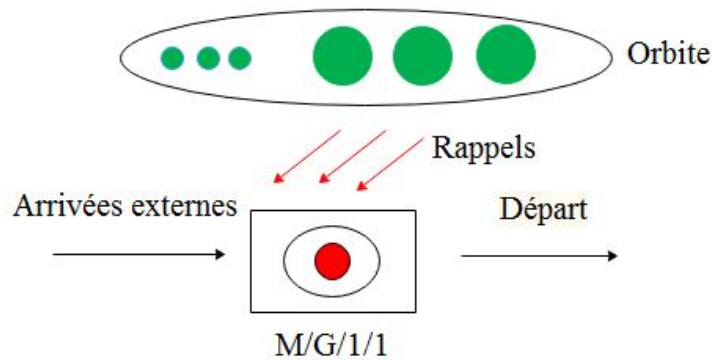


FIGURE 3.2: Une station avec rappels exponentiel.

Soient Σ_1 et Σ_2 , deux systèmes de files d'attentes avec rappels exponentiel, p_{ij} , les probabilités de transitions de la chaîne de Markov induite pour le système M/G/1/1 avec rappels exponentiel. pour $i = \overline{1, 2}$:

- ▶ $\lambda^{(i)}$: taux des arrivées dans Σ_i .
- ▶ $\mu^{(i)}$: taux des services dans Σ_i .

- ▶ $\pi^{(i)}$: distribution stationnaire de nombres de clients de chaque système.
- ▶ $\mathfrak{T}^{(i)}$: opérateur de transition associé aux chaînes de Markov induites de chaque système.
- ▶ $B^{(i)}$: fonction de répartition de durées de services.
- ▶ $\tilde{B}^{(i)}$: développement limité de fonction $a(z)^{(i)}$.
- ▶ $a(z)^{(i)}$: fonction génératrice dans \sum_i .
- ▶ $a_{ij}^{(i)}$: distribution de nombre d'arrivées primaires durant la durée de service du n^{ieme} client.

3.3 La chaîne de Markov induite :

Soit $U_n = U_{(d_n)}$ le nombre de clients dans l'orbite [23] à l'instant d_n après le n^{ieme} départ.

Il est évident que :

$$U_n = U_{n-1} - D_n + A_n.$$

avec D_n est le nombre d'arrivées de clients entrants au service à l'instant d_n :

$$D_n = \begin{cases} 0 & \text{si le } n^{ieme} \text{ client est un rappel.} \\ 1 & \text{si le } n^{ieme} \text{ client est primaire.} \end{cases}.$$

A_n est le nombre d'arrivées primaires durant la durée de service du n^{ieme} client.

$$P\{D_n = 0 / U_{n-1} = k\} = \frac{\lambda}{\lambda + k\mu}.$$

et :

$$P\{D_n = 1 / U_{n-1} = k\} = \frac{k\mu}{\lambda + k\mu}.$$

$\{A_n\}_n$ ne dépend pas des évènements qui se sont produits avant l'istant d_n et possède la distribution :

$$P\{A_n = k\} = a_k = \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k \exp(-\lambda x)}{k!} dB(x).$$

La fonction génératrice de a_k est donnée par :

$$\begin{aligned}
 a(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \\
 &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k \exp(-\lambda x)}{k!} dB(x) \right] z^k \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp((-\lambda x)(1-z)) dB(x) \\
 &= \int_0^{+\infty} \exp -((\lambda - \lambda z)x) dB(x).
 \end{aligned}$$

$\{U_n\}_n$ forme une chaine de Markov induite du système M/G/1/1 avec rappels, ses probabilités de transition sont données par :

$$\begin{aligned}
 P_{i,j} &= P\{U_n = j / U_{n-1} = i\} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1}.
 \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
 P_{i,j} &= P\{U_n = j / U_{n-1} = i\} \\
 &= P\{U_{n-1} - D_n + A_n = j / U_{n-1} = i\} \\
 &= P\{i - D_n + A_n = j / U_{n-1} = i\} \\
 &= P\{A_n = j - i + D_n / U_{n-1} = i\} \\
 &= P\{A_n = j - i / U_{n-1} = i, D_n = 0\} * P\{D_n = 0 / U_{n-1} = i\} \\
 &+ P\{A_n = j - i + 1 / U_{n-1} = i, D_n = 1\} * P\{D_n = 1 / U_{n-1} = i\} \\
 &= P\{A_n = j - i\} * P\{D_n = 0 / U_{n-1} = i\} \\
 &+ P\{A_n = j - i + 1\} * P\{D_n = 1 / U_{n-1} = i\} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1}.
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a : si $\rho < 1$ alors $\{U_n\}_n$ est ergodique.

En effet, pour M/G/1/1 avec rappel on a :

$$x_n = \frac{-n\mu}{\lambda + n\mu} + \rho > \frac{-n\mu}{\lambda + n\mu} + 1 > 0, \forall n \geq 0,$$

si :

$$\rho \geq 1$$

d'où : $\{U_n\}_n$ n'est pas ergodique pour $\rho \geq 1$.

3.4 Inégalité préliminaires :

Lemme 3.1 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$, alors $\{a_k^{(1)}\} \leq_{st} \{a_k^{(2)}\}$.

Preuve 3.1 Par définition de l'ordre stochastique usuel \leq_{st} , on a pour une loi discrète les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \{a_k^{(1)}\} \leq_{st} \{a_k^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{a}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} a_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} a_m^{(2)} = \bar{a}_n^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB^{(1)}(x) \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} \exp(-\lambda^{(2)}x) dB^{(2)}(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} \exp(-\lambda^{(2)}x) dB^{(2)}(x) \end{aligned}$$

.

Soit :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^m}{m!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^m}{m!} \exp(-\lambda^{(2)}x) dB^{(2)}(x) \quad (3.1)$$

Pour prouver l'inégalité numérique (3.1), on considère la fonction :

$$g_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x)$$

Prenant sa dérivée par rapport à x , on obtient l'expression positive suivante :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_n(x, \lambda)}{\partial x} &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda)^m * m * x^{m-1}}{m!} \exp(-\lambda x) - \lambda \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x) \\
 &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda)^m * m * x^{m-1}}{m(m-1)!} \exp(-\lambda x) - \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x) \\
 &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{(\lambda)^m x^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\lambda x) - \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x) \\
 &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\lambda x) - \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{\lambda(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x) \\
 &= \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) + \frac{\lambda(\lambda x)^n}{(n)!} \exp(-\lambda x) + \frac{\lambda(\lambda x)^{n+1}}{(n+1)!} \exp(-\lambda x) - \left[\frac{\lambda(\lambda x)^n}{(n)!} \exp(-\lambda x) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\lambda(\lambda x)^{n+1}}{(n+1)!} \exp(-\lambda x) + \frac{\lambda(\lambda x)^{n+2}}{(n+2)!} \exp(-\lambda x) + \dots \right] \\
 &= \frac{\lambda(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) > 0.
 \end{aligned}$$

La dérivée par rapport à λ s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial g_n(x, \lambda)}{\partial \lambda} &= \sum_{m=n}^{+\infty} \left[\frac{x * m * (\lambda x)^{m-1}}{m * (m-1)!} \exp(-\lambda x) - \frac{x(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x) \right] \\
 &= \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{x(\lambda x)^{m-1}}{(m-1)!} \exp(-\lambda x) - \sum_{m=n}^{+\infty} \frac{x(\lambda x)^m}{m!} \exp(-\lambda x) \\
 &= x \exp(-\lambda x) \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} > 0.
 \end{aligned}$$

On remarque que les dérivées sont positives pour toutes les valeurs positives que peuvent prendre le paramètre λ .

Alors la fonction $g_n(x, \lambda)$ est croissante. Comme $g_n(x, \lambda)$ est croissante en x et $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$ donc l'inégalité (3.2) est vérifiée :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB^{(2)}(x) \quad (3.2)$$

D'autre part, puisque la fonction $g_n(x, \lambda)$ est monotone par rapport à λ et que $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, on a :

$$\int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(1)}) dB^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} g_n(x, \lambda^{(2)}) dB^{(2)}(x) \quad (3.3)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.1) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.2) et (3.3), .

Lemme 3.2 Si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ et $B^{(1)} \leq_{icx} B^{(2)}$, alors :

$$\{a_n^{(1)}\} \leq_{icx} \{a_n^{(2)}\}.$$

Par définition de l'ordre convexe croissant \leq_{icx} .

On a :

$$\begin{aligned} \{a_n^{(1)}\} \leq_{icx} \{a_n^{(2)}\} &\Leftrightarrow \bar{a}_n^{(1)} = \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{a}_m^{(1)} \leq \sum_{m=n}^{+\infty} \bar{a}_m^{(2)} = \bar{a}_n^{(2)} \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(1)}x)^k}{k!} \exp(-\lambda^{(1)}x) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(2)}x)^k}{k!} \exp(-\lambda^{(2)}x) dB^{(2)}(x) \\ &\Leftrightarrow \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(1)}) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(2)}) dB^{(2)}(x). \end{aligned}$$

Soit :

$$\int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(1)}) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda^{(2)}) dB^{(2)}(x) \quad (3.4)$$

Avec :

$$g_m(x, \lambda^{(i)}) = \sum_{k=m}^{+\infty} \frac{(\lambda^{(i)}x)^k}{k!} \exp(-\lambda^{(i)}x), \quad i = \overline{1, 2}. \quad (3.5)$$

Les fonctions $g_m(x, \lambda^{(i)})$ sont croissantes par rapport à λ , alors la fonction définie par $:\bar{g}_n(x, \lambda) = \sum_{m=n}^{+\infty} g_m(x, \lambda)$ l'est aussi. D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{g}_n(x, \lambda)}{\partial x^2} &= \sum_{n=m}^{+\infty} \frac{(n-1) * \lambda * \lambda * (\lambda x)^{n-2}}{(n-1)(n-2)!} \exp(-\lambda x) - \frac{\lambda * \lambda (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) \\ &= \sum_{m=n}^{+\infty} \left[\frac{\lambda^2 * (\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \exp(-\lambda x) - \frac{\lambda^2 (\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} \exp(-\lambda x) \right] \\ &= \frac{\lambda^2 (\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \exp(-\lambda x) > 0. \end{aligned}$$

Soit, donc :

$$\frac{\lambda^2 (\lambda x)^{n-2}}{(n-2)!} \exp(-\lambda x) > 0 \quad (3.6)$$

Par conséquent, $\bar{g}_n(x, \lambda)$ est croissante et convexe par rapport à la variable x .

On a l'inégalité suivant :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dB^{(1)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(2)}) dB^{(2)}(x) \quad (3.7)$$

Finalement, l'inégalité (3.4) est vérifiée par transitivité des inégalités (3.7) et (3.8).

En outre, grâce à la monotonie de la fonction $\bar{g}_n(x, \lambda)$ par rapport à λ , on trouve que :

$$\int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(1)}) dB^{(2)}(x) \leq \int_0^{+\infty} \bar{g}_n(x, \lambda^{(2)}) dB^{(2)}(x) \quad (3.8)$$

Lemme 3.3 si $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, et $B^{(1)} \leq_{Lt} B^{(2)}$, alors : $\{a_n^{(1)}\} \leq_{Lt} \{a_n^{(2)}\}$.

Par rapport à l'ordre en transformée de Laplace, on a par définition de fonction génératrice :

$$\begin{aligned} a(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} \frac{(\lambda x)^k}{k!} \exp(-\lambda x) dB(x) \right] z^k \\ &= \int_0^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\lambda x z)^k}{k!} \exp(-\lambda x) dB(x). \end{aligned}$$

On applique le développement de Taylor-Young de , on aura :

$$\begin{aligned} a(z) &= \int_0^{+\infty} \left[\exp(-\lambda x) + z\lambda x \exp(-\lambda x) + \frac{(z\lambda x)^2}{2!} \exp(-\lambda x) + \frac{(z\lambda x)^3}{3!} \exp(-\lambda x) + \frac{(z\lambda x)^4}{4!} \exp(-\lambda x) \dots \right] dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \left[1 + z\lambda x + \frac{(z\lambda x)^2}{2!} + \dots \right] \exp(-\lambda x) dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\frac{(z\lambda x)^0}{0!} + \frac{(z\lambda x)^1}{1!} + \frac{(z\lambda x)^2}{2!} + \dots \right] \exp(-\lambda x) dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp(z\lambda x) * \exp(-\lambda x) dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp((- \lambda x)(-z + 1)) dB(x) \\ &= \int_0^{+\infty} \exp((- \lambda x)(1 - z)) dB(x). \\ &= \tilde{B}(\lambda(1 - z)). \end{aligned}$$

Pour prouver que l'inégalité $\{a_n^{(1)}\} \leq_{Lt} \{a_n^{(2)}\}$ à lieu, il suffit d'établir le résultat suivant , pour les fonctions génératrices correspondantes :

$$a^{(1)}(z) \geq a^{(2)}(z). \quad (3.9)$$

Ce qui est équivalent à montrer que :

$$\tilde{B}(\lambda^{(1)}(1 - z)) \geq \tilde{B}(\lambda^{(2)}(1 - z)). \quad (3.10)$$

C'est-à-dire, montrer l'équivalence suivante :

$$\{a_n^{(1)}\} \leq_{Lt} \{a_n^{(2)}\} \Leftrightarrow \tilde{B}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.11)$$

De plus, on a : $B^{(1)} \leq_{Lt} B^{(2)} \Rightarrow \tilde{B}^{(1)}(s) \geq \tilde{B}^{(2)}(s), \forall s \geq 0$. En particulier, pour : $s = \lambda^{(1)}(1-z)$, on obtient :

$$\tilde{B}^{(1)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)). \quad (3.12)$$

Puisque toute transformation de Laplace est une fonction décroissante, les inégalités $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$ impliquent l'inégalité suivante :

$$\tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(1)}(1-z)) \geq \tilde{B}^{(2)}(\lambda^{(2)}(1-z)). \quad (3.13)$$

Par conséquent, l'inégalité (3.11) découle des inégalités (3.12) et (3.13).

Monotonie de l'opérateur de transition :

Les probabilités de transition en un pas de la chaîne de Markov induite pour le système M/G/1/1 avec rappels exponentiel sont données par la formule suivante :

$$P_{i,j} = \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1}. \quad (3.14)$$

Soit l'opérateur de transition \mathfrak{T} de la chaîne de Markov induite U_i , qui à chaque distribution $P = (p_i)_{i \geq 0}$, associée une distribution, $\mathfrak{T}_p = q = (q_j)_{j \geq 0}$, telle que : $q_j = \sum_{n \geq 0} p_n P_{i,j}$.

Les deux théorèmes suivants donnent la condition sous laquelle l'opérateur de transition \mathfrak{T} est monotone par rapport aux ordres stochastiques et convexe croissant.

Théorème 3.1 *L'opérateur de transition \mathfrak{T} est monotone par rapport à l'ordre stochastique. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ l'inégalité $p^{(1)} \leq_{st} p^{(2)}$ implique que $\mathfrak{T}_{p^{(1)}} \leq \mathfrak{T}_{p^{(2)}}$.*

Un opérateur est monotone par rapport à l'ordre stochastique si et seulement si, on a l'inégalité suivante :

$$\bar{p}_{i-1j} \leq \bar{p}_{ij}, \forall i, j. \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{ij} &= \sum_{k=j}^{+\infty} p_{ik} \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{k-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{k-i+1} \right). \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{k-i} + \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{k-i+1} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k-i+1} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i} + a_{j+1-i} + a_{j+2-i} + \dots) + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} (a_{j-i+1} + a_{j-i+2} + a_{j-i+3} + \dots) \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \right) (a_{j+1-i} + a_{j-i+2} + a_{j-i+3} + \dots) \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \frac{\lambda + i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k+1-i} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \bar{a}_{j+1-i}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{i-1j} &= \sum_{k=j}^{+\infty} p_{i-1k} \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{k-i+1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{k-i+2} \right). \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{k-i+1} + \sum_{k=j}^{+\infty} \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{k-i+2} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k-i+1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k-i+2} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i+1} + a_{j-i+2} + a_{j+3-i} + \dots) + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} (a_{j-i+2} + a_{j-i+3} + a_{j-i+4} + \dots) \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \right) (a_{j-i+2} + a_{j-i+3} + a_{j-i+4} + \dots) \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1} + \frac{\lambda + i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k+2-i} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1} + \bar{a}_{j+2-i}.
 \end{aligned}$$

Finalement, on trouve :

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{ij} - \bar{p}_{i-1j} &= \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \bar{a}_{j+1-i} \right) - \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1} + \bar{a}_{j+2-i} \right). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i} - a_{j-i+1}) + \bar{a}_{j+1-i} - \bar{a}_{j+2-i} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i} - a_{j-i+1}) + \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k+1-i} - \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k+2-i}. \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i} - a_{j-i+1}) + (a_{j+1-i} + a_{j+2-i} + a_{j+3-i} + \dots) - (a_{j+2-i} + a_{j+3-i} + a_{j+4-i} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i} - a_{j-i+1}) + a_{j-i+1}. \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{j-i+1} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Ainsi, l'inégalité (3.15) est vérifiée pour tout i et j .

Théorème 3.2 *L'opérateur de transition \mathfrak{T} est monotone par rapport à l'ordre convexe croissant. C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$.*

L'inégalité $p^{(1)} \leq_{icx} p^{(2)} \Rightarrow \mathfrak{T}p^{(1)} \leq_{icx} \mathfrak{T}p^{(2)}$.

\mathfrak{T} est monotone par rapport à l'ordre convexe croissant si et seulement si :

$$2\bar{\bar{p}}_{ij} \leq \bar{\bar{p}}_{i-1j} + \bar{\bar{p}}_{i+1j}, \forall i, j. \quad (3.16)$$

On a :

$$\begin{aligned}
 \bar{\bar{p}}_{ij} &= \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{p}_{ik}. \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{k-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{k+1-i} \right). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k-i} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k+1-i}. \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (\bar{a}_{j-i} + \bar{a}_{j+1-i} + \bar{a}_{j+2-i} + \bar{a}_{j+3-i} + \dots) + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} (\bar{a}_{j+1-i} + \bar{a}_{j-i+2} + \bar{a}_{j-i+3} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \right) (\bar{a}_{j+1-i} + \bar{a}_{j+2-i} + \bar{a}_{j+3-i} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i} + \bar{\bar{a}}_{j-i+1}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{i-1j} &= \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{p}_{i-1k}. \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{k-i+1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{k+2-i} \right). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k-i+1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k+2-i}. \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (\bar{a}_{j-i+1} + \bar{a}_{j+2-i} + \bar{a}_{j+3-i} + \bar{a}_{j+4-i} + \dots) + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} (\bar{a}_{j+2-i} + \bar{a}_{j-i+3} + \bar{a}_{j-i+4} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i+1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \right) (\bar{a}_{j+2-i} + \bar{a}_{j+3-i} + \bar{a}_{j+4-i} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i+1} + \bar{a}_{j-i+2}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{i+1j} &= \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{p}_{i+1k}. \\
 &= \sum_{k=j}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{k-i-1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{k-i} \right). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k-i-1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k-i}. \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (\bar{a}_{j-i-1} + \bar{a}_{j-i} + \bar{a}_{j+1-i} + \bar{a}_{j+2-i} + \dots) + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} (\bar{a}_{j-i} + \bar{a}_{j-i+1} + \bar{a}_{j-i+2} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i-1} + \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \right) (\bar{a}_{j-i} + \bar{a}_{j+1-i} + \bar{a}_{j+2-i} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i-1} + \bar{a}_{j-i}.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bar{p}_{i-1j} + \bar{p}_{i+1j} - 2\bar{p}_{ij} &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j+1-i} + \bar{a}_{j-i+2} + \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i-1} + \bar{a}_{j-i} - 2\left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i} + \bar{a}_{j-i+1}\right). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} (a_{j-i-1} + \bar{a}_{j-i}) + \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j+1-i} + (\bar{a}_{j-i+2} + \bar{a}_{j-i+3} + \bar{a}_{j-i+4} + \dots) \\
 &\quad + (\bar{a}_{j-i} + \bar{a}_{j-i+1} + \bar{a}_{j-i+2} + \dots) - \frac{2\lambda}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i} - 2(\bar{a}_{j-i+1} + \bar{a}_{j-i+2} + \bar{a}_{j-i+3} + \dots). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i-1} + \bar{a}_{j-i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + 1 - \frac{2\lambda}{\lambda + i\mu}\right) + \bar{a}_{j+1-i} \left(\frac{\lambda}{\lambda + i\mu} + 1 - 2\right) + \bar{a}_{j-i+2} (1 + 1 - 2). \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i-1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j-i} - \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j+1-i}. \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i-1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} (a_{j-i} + \bar{a}_{j-i+1}) - \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} \bar{a}_{j+1-i} \\
 &= \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} a_{j-i-1} + \frac{i\mu}{\lambda + i\mu} a_{j-i} \geq 0.
 \end{aligned}$$

Alors, l'inégalité (3.16) est vérifiée pour tout i et j .

Remarque 3.1 Les deux théorèmes précédents impliquent que si à l'instant $t = 0$, le système est vide, alors le nombre de clients dans le système à l'instant du départ forme une suite croissante par rapport aux ordres partiels \leq_{st} et \leq_{icx} .

Maintenant, on note par $\mathfrak{T}^{(1)}$ et $\mathfrak{T}^{(2)}$ les opérateurs de transition associés aux chaînes de Markov induite de chaque système. Les deux théorèmes suivants donnent les conditions de comparabilité de ces opérateurs par rapport aux ordres partiels : stochastique et convexe croissant.

Théorème 3.3 Si : $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, et $B^{(1)} \leq_{st} B^{(2)}$, alors, $\mathfrak{T}^{(1)} \leq_{st} \mathfrak{T}^{(2)}$.

C'est-à-dire, pour une distribution quelconque p , on a : $\mathfrak{T}^{(1)} p \leq_{st} \mathfrak{T}^{(2)} p$.

On vérifie les inégalités suivantes pour l'ordre stochastique :

$$\bar{p}_{ij}^{(1)} \leq \bar{p}_{ij}^{(2)}.$$

Ce qui revient à montrer :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(2)} + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(2)}. \quad (3.17)$$

D'après le lemme (3.1), on a : $\{a_n^{(1)}\} \leq_{st} \{a_n^{(2)}\}$, $\forall n \geq 0$.

D'autre part, si :

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \text{ et } \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \text{ alors : } \frac{\lambda^{(1)}}{\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\mu^{(2)}}, \text{ et } \frac{\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)}} \leq \frac{\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)}}. \quad (3.18)$$

En outre, de fait que la fonction : $x \rightarrow \frac{x}{x+i}$ est croissante par rapport à x , l'inégalité suivante à lieu :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \cdot \text{ et } \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \leq \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}}. \quad (3.19)$$

Finalement,

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ij}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \sum_{k=j}^{+\infty} a_{k-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} (a_{j-i} + a_{j-i+1} + a_{j-i+2} + \dots) + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} (a_{j-i} + \bar{a}_{j-i+1}^{(1)}) + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \left(\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \right) + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} a_{j-i}^{(1)} \\ &= \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} a_{j-i}^{(1)}. \end{aligned}$$

$$\text{On a, } \bar{p}_{ij}^{(1)} = \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} a_{j-i}^{(1)}.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} a_{j-i}^{(1)} &\leq \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} a_{j-i}^{(1)} \\ \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} a_{j-i}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} a_{j-i}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} (a_{j-i}^{(1)} + \bar{a}_{j-i+1}^{(1)}) + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(2)} + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(2)} \\ &= \bar{p}_{ij}^{(2)}. \end{aligned}$$

D'ou, on a : $\bar{p}_{ij}^{(1)} \leq \bar{p}_{ij}^{(2)}$.

Ainsi, l'inégalité (3.17) est vérifiée.

Théorème 3.4 Si, $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, $B^{(1)} \leq_{icx} B^{(2)}$, alors, $\mathfrak{T}^{(1)} \leq_{icx} \mathfrak{T}^{(2)}$.

C'est-à-dire, pour une distribution quelconque p , on a : $\mathfrak{T}^{(1)} p \leq_{icx} \mathfrak{T}^{(2)} p$.

On établit les probabilités de transitions en un pas : $p_{ij}^{(1)}$ et $p_{ij}^{(2)}$, qui vérifient les inégalités suivantes :

$$\bar{p}_{ij}^{(1)} \leq \bar{p}_{ij}^{(2)}.$$

Ce qui est équivalent à montrer :

$$\frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(2)} + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(2)}.$$

D'après le lemme (3.2), on a : $\{a_n^{(1)}\} \leq_{icx} \{a_n^{(2)}\}$, $\forall n \geq 0$. En utilisant les mêmes techniques de la preuve précédente, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ij}^{(1)} &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \sum_{k=j}^{+\infty} \bar{a}_{k-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} (\bar{a}_{j-i}^{(1)} + \bar{a}_{j-i+1}^{(1)}) + \frac{i\mu^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &= \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(1)}}{\lambda^{(1)} + i\mu^{(1)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} \\ &\leq \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} + \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} \\ &= \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(1)} + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(1)} \\ &\leq \frac{\lambda^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i}^{(2)} + \frac{i\mu^{(2)}}{\lambda^{(2)} + i\mu^{(2)}} \bar{a}_{j-i+1}^{(2)} \\ &= \bar{p}_{ij}^{(2)}. \end{aligned}$$

D'ou, on a :

$$\bar{p}_{ij}^{(1)} \leq \bar{p}_{ij}^{(2)}.$$

3.5 Bornes stochastiques des distributions stationnaires :

On considère Σ_1 et Σ_2 , deux systèmes de files d'attente M/G/1/1 avec rappels exponentiel [22], Soient $\pi_i^{(1)}$ et $\pi_i^{(2)}$ deux distributions stationnaires de nombres de clients de chaque système, respectivement.

Le théorème suivant donne les conditions de comparabilités des distributions stationnaires du nombre de clients, pour les deux systèmes Σ_1 et Σ_2 , par rapport aux ordres partiels usuel et convexe croissant.

Théorème 3.5 *Si les inégalités suivantes ont lieu :*

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}, \text{ et } B^{(1)} \leq_{so} B^{(2)}. \quad (3.20)$$

Alors, on a aussi les inégalités suivantes sur les distributions stationnaires :

$$\{\pi_i^{(1)}\} \leq_{so} \{\pi_i^{(2)}\}, \text{ avec } : \leq_{so} = \leq_{st} \text{ ou } \leq_{so} = \leq_{icx}. \quad (3.21)$$

D'après les théorèmes (3.4) et (3.5), les inégalités :

$$\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}, \mu^{(1)} \geq \mu^{(2)} \text{ et } B^{(1)}(x) \leq_{so} B^{(2)}(x).$$

Impliquent $\mathfrak{T}^{(1)} \leq_{so} \mathfrak{T}^{(2)}$, c'est-à-dire, pour une distribution quelconque p , on a les inégalités suivantes :

$$\mathfrak{T}^{(1)} p \leq_{so} \mathfrak{T}^{(2)} p. \quad (3.22)$$

Des théorèmes (3.2) et (3.3), l'opérateur $\mathfrak{T}^{(2)}$ associé à la chaîne de Markov induite du deuxième système, est monotone.

C'est-à-dire, pour deux distributions quelconques $p_1^{(2)}$ et $p_2^{(2)}$ telles que $p_1^{(2)} \leq_{so} p_2^{(2)}$, on a :

$$\mathfrak{T}^{(2)} p_1^{(2)} \leq_{so} \mathfrak{T}^{(2)} p_2^{(2)}. \quad (3.23)$$

Cependant, de l'inégalité (3.22), on obtient :

$$\mathfrak{T}^{(1)} p^{(1)} \leq_{so} \mathfrak{T}^{(2)} p^{(1)}. \quad (3.24)$$

Il existe une probabilité $p_1^{(2)}$ pour laquelle on a l'inégalité suivante :

$$\mathfrak{T}^{(2)} p^{(1)} \leq_{so} \mathfrak{T}^{(2)} p_1^{(2)}. \quad (3.25)$$

En combinant les inégalités (3.23) et (3.25), on obtient les résultats suivants :

$$\mathfrak{I}^{(1)} p^{(1)} \leq_{so} \mathfrak{I}^{(2)} p^{(2)}. \quad (3.26)$$

Pour deux distributions quelconques, $p^{(1)}$ et $p^{(2)}$ l'inégalité (3.26) peut-être réécrite de la manière suivante :

$$\mathfrak{I}^{(1)} p_i^{(1)} = p(X_k^{(1)} = i) \leq_{so} p(X_k^{(2)} = i) \mathfrak{I}^{(2)} p_i^{(2)}.$$

Quand $k \rightarrow +\infty$, on obtient le résultat recherché, c'est-à-dire : $\{\pi_i^{(1)}\} \leq_{so} \{\pi_i^{(2)}\}$.

En se basant sur le théorème (3.6), le résultat suivant donne des bornes stochastiques simples pour la distribution stationnaire de nombre de clients dans le système M/G/1/1 avec rappels exponentiel.

Théorème 3.6 Si pour le modèle M/G/1/1 avec rappels exponentiels, la distribution de temps de service est NBUE (New Better than Used in Expectation)[21] (respectivement NW UE- New Worse than Used in Expectation), et si de plus $\lambda^{(1)} \leq \lambda^{(2)}$, $\mu^{(1)} \geq \mu^{(2)}$, et $B^{(1)} \leq_{so} B^{(2)}$, alors la distribution stationnaire du nombre de clients dans ce système est inférieure (respectivement supérieure), par rapport aux ordres stochastiques : convexe et usuel, à la distribution stationnaire du nombre de clients dans le système M/M/1 avec rappels exponentiels.

Théorème 3.7 Le débit d'un réseau fermé de files FIFO est plus grand (respectivement plus petit) quand les distributions des services requis sont ILR, (respectivement DLR) plutôt qu'exponentielles de même moyenne. On note N_{exp} (respectivement N_{ILR} et N_{DLR}), le nombre total de clients à l'état stationnaire dans un réseau ouvert de files FIFO à arrivées poissoniennes et avec des services requis exponentiels (respectivement, ILR et DLR).

Alors, si les services requis exponentiels, ILR et DLR sont de même moyennes à chaque file, on a :

$$N_{ILR} \leq_{st} N_{exp} \leq_{st} N_{DLR}.$$

3.6 Conclusion :

Dans ce chapitre, on a schématisé le réseaux $[M/G/1/1/ \rightarrow ./M/1/1]$. Ensuite, on a appliqué la méthode de comparaison stochastique sur la file M/G/1/1 avec rappels constants.

On a étudié la monotonie des coefficients a_{ij} et l'opérateur de transition p_{ij} .

Finalement, on a donné les conditions sous lesquelles la file $M/G/1/1$ avec rappels exponentiel est comparable à un système $M/M/1/1$ avec rappels exponentiel.

CONCLUSION GÉNÉRALE

Dans ce mémoire, on a illustré l'utilité de la théorie des files d'attentes, qui est une technique qui permet de modéliser un système admettant un phénomène d'attente, de calculer ses performances et déterminer ses caractéristiques pour aider les gestionnaires dans leurs prises de décisions. Aussi les réseaux de files d'attente peuvent être considérées comme un phénomène caractéristique de la vie contemporaine.

Parmi plusieurs méthodes d'approximations, on a choisi une méthode qui est la comparaison stochastique. On l'a appliqué sur un réseau à deux stations en tandem sans file intermédiaire $[M/G/1/1 \rightarrow .M/1/1]$. Puis, on a précisé l'étude sur la file $M/G/1/1$ avec rappels exponentiel.

Ce travail a également permis de montrer l'importance de cette étude qui s'agit de prédire le comportement des systèmes d'attente. Comme on vient de voir, les phénomènes d'attente sont retrouvés dans certains systèmes tels les réseaux téléphoniques, les systèmes informatiques, dans les banques, dans la route, etc...

Finalement, le travail réalisé durant ce mémoire à propos de la monotonie et les résultats obtenus ouvre la perspective suivante :

Obtention de bornes stochastiques pour d'autres mesures de performance.

ANNEXE

.1

Annexe

Quelques concepts de base d'analyse mathématique et de probabilité

.1.1 Processus stochastiques

Un processus stochastique $X(t)_{t \in T}$ est une fonction du temps dont la valeur à chaque instant dépend de l'issue d'une expérience aléatoire. A chaque instant $t \in T$, $X(t)$ est donc une variable aléatoire. Un processus stochastique peut donc être considéré comme une famille de variables aléatoires (généralement non indépendantes). L'ensemble des temps T peut être discret ou continu.

$X(t)$ définit l'état du processus à un instant donné t . A nouveau, l'ensemble E des valeurs que peut prendre le processus à chaque instant est appelé espace d'état et peut, de même que T , être discret (fini ou infini) ou continu [20].

.1.2 Processus de comptage

Soit $N(t)$ le nombre d'évènements se produisant dans un intervalle de temps $[0, t]$. On cherche à déterminer la loi de probabilité de cette variable aléatoire. $\{N(t), t \geq 0\}$ est appelé processus de comptage. $N(t + s) - N(s)$: nombre d'évènements aléatoire se produisant dans l'intervalle $[s, s + t]$.

.1.3 Formule de Little

Cette formule donne le temps moyen d'attente dans le système en fonction du nombre moyen de clients dans le système et du taux des arrivées [200] :

$$W = \frac{L}{\lambda}.$$

Elle est valable sous les seules conditions de stationnarité et d'existence des moyennes stationnaires λ , L , W . En particulier, elle ne dépend pas de la discipline de service, pourvu que celle-ci ne modifie pas la durée de service des clients [259, 200].

.1.4 Chaine de Markov

Un processus de Markov est un processus dans lequel le comportement futur ne dépend que du passé récent. Les suites markoviennes sont appelées "chaines" de Markov. On distingue les chaines de Markov à espace d'états discret et celles à espace d'états continu.[19]

.1.5 Matrice stochastique

Considérons une classe importante de matrices carrées qui jouent un rôle décisif lors de l'étude des processus stochastiques à temps discret. Une matrice P est dite stochastique si :

- .1 Tous les termes sont positifs ou nuls.
- .2 La somme des termes de chaque ligne vaut 1.

Les lignes de P représentent donc des vecteurs de probabilité.

.1.6 Propriété sans mémoire

X est une variable aléatoire sans mémoire si : $P[X < t + t_0 / t > t_0] = P[X < t]$, c'est à dire, la probabilité que le phénomène que mesure X se produise avant t unités de temps supplémentaires, sachant qu'il ne s'est toujours pas produit au temps t_0 , est égale à la probabilité qu'il se soit produit pendant les t premiers instants du phénomène.

Remarque : La loi exponentielle est la seule variable aléatoire continue à posséder la propriété sans mémoire.

.1.7 Fonction génératrice

Soit X une variable aléatoire à valeurs entières non négative avec $P(X = n) = p(n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$. La fonction génératrice $P_X(z)$ de X est définie par :

$$P_X(z) = E(z^X) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)z^n.$$

Vu que $p(n) \geq 0$ et que $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) = 1$, la fonction $P_X(z)$ est définie au moins pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq 1$.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. Khintchine, A. Y (1932). "Mathematical theory of a stationary queue". *Matematicheskii Sbornik*. 39 (4) : 73-84. Retrieved 2011-07-14.
- [2] A. Kolmogorov, (1931). "Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung". *Mathematische Annalen*. 104 : 415-458. doi :10.1007/BF01457949.
- [3] A. Rüegg. *Processus stochastique*. Presses Polytechniques Romandes, 1989.
- [4] A. Sklar. Stochastic ordering for random vectors using predictable representation. *Potential Analysis*, 29(4) :327-349.
- [5] A. Van Der Vaart, and J. WELLNER, (1996). *Stochastic orders and their applications*, Probability and Mathematical Statistics. New York : SpringerVerlag. With applications to statistics.
- [6] B. Avi-Itzhak and M. Yadin. A Sequence of Two Servers with No Intermediate Queue. *Management Sciences*, 11 :553-564, 1965.
- [7] B. Baynat, *Théorie des files d'attente-des chaines de Markove aux réseaux à forme produit*. Paris, Hermès Science Publications, 2000.
- [8] B. Lionel. *Processus stochastique : Processus de poisson et chaine de Markov*. 2004.
- [9] C. Chabriac. *Processus stochastiques et modélisation*. Université de Toulouse le Mirail, Master 2, Année 2012-2013.

-
- [10] D. Stoyan, Comparison Methods for Queues and Other Stochastic Models, New York, 1983.
- [11] E. Cinlar, Introduction to Stochastic Processes (Prentice-Hall, 1975).
- [12] E. Moutzoukis and C. Langaris. Two Queues in Tandem with Retrial Customers. Probability in the Engineering and Informational Sciences, 15 :311-325, 2001.
- [13] E. Witt, Uniform Conditional Stochastic Order. Journal of Applied Probability Vol. 17, No. 1 (Mar., 1980), pp. 112-123.
- [14] F. Baskett. K. Chandy, R. Muntz . et F. Palacios-Gomez. Open, Closed and Mixed networks of queues with different classes of customers, J. ACM, vol. 22, p.248-260, 1975.
- [15] H. Lorentz, (1921) [1914], stochastic matrices, specific convex functions, Vienna, Acta Mathematica, 38 (1) : 293-308, doi :10. 1007/BF02392073.
- [16] I. Elbatal (2007). the Laplace order and ordering of Reserved Residual Life. j. Of Applied mathematical sciences 36(1), 1773-1778.
- [17] J. Allen Fill and M. Machida, Stochastic Monotonicity and Realizable Monotonicity, The Annals of Probability, Vol. 29, No. 2 (Apr, 2001), pp. 938-978, Published by : Institute of Mathematical Statistics.
- [18] J. Jackson. Networks of Waiting Lines, Operations Research, vol. 5, p. 518-521, 1957.
- [19] J. Jackson, R. Jobshop-like Queueing Systems, Management Science, vol. 10, p. 131- 142, 1963.
- [20] J. Segers, (2012). Stochastic inequalities and their applications, Contemporay Mathematics, 234, Bernoulli 18, 764-782.
- [21] L. Alem, M. Boualem and D. Aissani. Stochastic comparison bounds for an M1, M2/G1, G2/1 retrial queue with two way communication. Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 48(4) (2019), 1185-1200.
- [22] L. Alem, M. Boualem and D. Aissani. Bounds of the stationary distribution in M/G/1 retrial queue with two way communication and n type of outgoing call. Yugoslav Journal of Operations Research, 29(3) (2019), 375-391.
- [23] L. Bouallouche and D. Aissani. Performance Analysis Approximation in a Queueing System of Type M/G/1. Mathematical Methods of Operations Research, 63, issue 2, 2006.

-
- [24] L. Bouraine, Support de cours sur les files d'attente. Université A. Mira de Bejaia, 2015.
- [25] M. Boualem, N. Djellab and D. Aissani, Stochastic inequalities for M/G/1 retrial queues with vacations and constant retrial policy, *Mathematical and Computer Modelling*, 50 (2009), pp. 207-212.
- [26] M. Shaked, J. George Shanthikumar (1997). *Stochastic Orders*. NY, Springer.
- [27] M. Shaked and J. G. Shanthikumar, *Stochastic Orders and their Applications*, Associated Press, 1994.
- [28] O. Lekadir and D. Aissani. Stability of Two-Stage Queues with Blocking. In the Book "Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences", H. A. Le Thi, P. Bouvry and T. Pham Dinh (Eds), series CCIS 14 (Communications in Computer and Information Sciences), Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, pages 526-535, September 2008.
- [29] O. Lekadir, D. Aissani, A. Nasri, and N. Lassouani. Performance de la Stabilité Forte dans un Réseau avec Blocage et Rappels. In *Colloque International Méthodes et Outils d'Aide à la Décision MOAD 07*, pages 723-728, Université A/Mira de Béjaia, Novembre 2007.
- [30] R. Szekli. (1995) *stochastic ordering and dependence in applied probability*. New York : Springer-Verlag.
- [31] S. Doghmane, Sur le comportement asymptotique du système de la file d'attente M/G/1 avec rappels. Annaba-Algerie. université Badji Mokhtar, (2012).
- [32] S. Sriboonchitta, et Al. (2010). *Stochastic Dominance and Applications To Finance*. Risk And Economics. Etats-Unis : CRC Press.
- [33] T. Rolski, *Comparison methods for stochastic models and risk*, John Wiley and Sons, LTD.
- [34] Y. Wong, *Stochastic Ordering and Characterizations of the topology of uniform convergence on order-intervals*.

Résumé

En raison de complexité des réseaux de files d'attente avec rappels, les résultats analytiques sont généralement difficiles à obtenir. Pour résoudre ce problème, il existe plusieurs méthodes numériques et d'approximation.

Dans ce mémoire, nous focalisons sur les propriétés de monotonie et de comparabilité qui permet d'établir quelques comparaisons stochastiques utiles dans la compréhension de modèles compliqués et leur remplacement par des modèles plus simples pour lesquels, une évaluation peut être faite.

Dans un premier temps, nous avons passé en revue certains résultats consacrés aux systèmes de files d'attentes avec rappels, ainsi que les réseaux mono-classe et multi-classes à forme produit.

Dans un deuxième temps, nous avons présenté quelques concepts de base de la théorie des ordres stochastiques, ainsi que la relation entre eux.

Finalement, nous avons appliqués la méthode de comparaison stochastique sur la file $M/G/1/1$ avec rappels constants. Nous avons donné les conditions sous lesquelles la file $M/G/1/1$ avec rappels exponentiels est comparable à un système $M/M/1/1$ avec rappels exponentiel.

Mots clés : Files d'attentes , Chaîne de Markov induite, Réseaux de files d'attente, Comparaison Stochastique, Monotonie.

Abstract

Due to the complexity of queuing networks with callbacks, the analytical results are generally difficult to obtain. To solve this problem, there are several numerical and approximation methods.

In this thesis, we focus on the properties of monotony and comparability that allow us to establish some stochastic comparisons useful in understanding complicated models and their replacement by simpler models for which a evaluation can be done.

Initially, we reviewed some of the results for call-back queuing systems, as well as single-class and multi-class product-form networks.

In a second step, we presented some basic concepts of stochastic order theory, as well as the relation between them.

Finally, we applied the stochastic comparison method on the $M/G/1/1$ queue with constant callbacks. We have given the conditions under which the $M/G/1/1$ queue with exponential callbacks is comparable to a $M/M/1/1$ system with exponential callbacks.

Keywords : *Queues, Queue Networks, Stochastic Comparison, Induced Markov Chain, Monotonicity.*
