الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية
République Algérienne Démocratique et Populaire

وزارة التعليم العالي والبحث العلمي
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

جامعة أكلي محند أولحاج - البويرة -
Université Akli Mohand Oulhadj - Bouira -
Tasdawit Akli Muḥend Ulḥağ - Tubirett -

جامعة البويرة

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير
Faculté des Sciences Economiques, Commerciales et des Sciences de Gestion

محاضرات موجهة لطلبة السنة الأولى (*L.M.D*) جذع مشترك لمقياس :

الإحصاء 02

مدعمة بأمثلة تطبيقية وسلاسل تمارين للأعمال الموجهة

من إعداد الفرقة البيداغوجية المكونة من :

العمري علي ، حيدوشي عاشور ، وعيل ميلود

السنة الجامعية (2019-2020)

فهرس المحتويات

فهرس المحـــــتـــــويات

✍ **المحور الأول : نظرية المجموعات وحساب الاحتمال**..........................1-23

تمهيد...2

أولا : أولا : مفاهيم حول نظرية المجموعات..3

ثانيا : التحليل التوافقي...10

ثالثا : نظرية الاحتمال...19

✍ **المحور الثاني : المتغيرات العشوائية وقوانين توزيعها**..........................24-45

تمهيد...25

أولا : مفهوم المتغير العشوائي وتحديد أنواعه...26

ثانيا : المتغير العشوائي المتقطع و قانون توزيعه الاحتمالي.................................28

ثالثا : المتغير العشوائي المستمر و قانون توزيعه الاحتمالي.................................36

✍ **المحور الثالث : قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة**..........................46-67

تمهيد...47

أولا : التوزيع المنتظم المنفصل(المتقطع)..48

ثانيا : توزيع بيرنولي 51

ثالثا : التوزيع ذي الحدين (الثنائي)..54

رابعا : التوزيع الثنائي المتعدد 58

خامسا : التوزيع فوق الهندسي...59

سادسا : التوزيع الهندسي..61

فهرس المحــــتــــــويات

سابعا : توزيع بواسون 63

ثامنا : التقارب بين بعض التوزيعات المتقطعة...65

المحور الرابع : قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة..........................68-88

تمهيد...69

أولا : التوزيع المنتظم المتصل (المستمر) 70

ثانيا : التوزيع الطبيعي 72

ثالثا : التوزيع الطبيعي المعياري..74

رابعا : دوال التوزيعات بيتا (Betta) وقاما (Gamma) 77

خامسا : توزيع كاي مربع...79

سادسا : توزيع ستودنت...82

سابعا : توزيع فيشر 84

ثامنا : تقارب بعض التوزيعات 86

المراجع..90

الملاحق..93

سلاسل تمارين للأعمال الموجهة

المحور الأول

نظرية المجموعات وحساب الاحتمال

المحور الأول : نظرية المجموعات و حساب الاحتمال

تمهيد :

إن نظرية المجموعات هو المدخل الأول أو المبدأ الأساسي في نظرية الاحتمال ، حيث أن الفرد منا يصادف في حياته اليومية مفهوم المجموعة دون أن يشعر بذلك وهو يلاحظ دخول عمال مؤسسة معينة أو تلاميذ مدرسة إبتدائية أو فريق كرة قدم في حافلة أو غيرها، فهذه المجموعات تختلف من حيث التركيبة أو العدد، وبالدخول إلى هذه المجموعات قد يتخذ مسؤول (رئيس أو مدير...) بعض الإجراءات في تقسيم هذه المجموعات مثل تكوين ممثلين لها أو توزيعها على أماكن معينة ، ولكي يكون هناك قبول لتحديد هؤلاء لابد من إستخدام الطرق الصدفية (العشوائية) بدل الاعتماد على العمدية في الاختيار، وعادة ما يستخدم في ذلك طرق معينة تسمى بطرق العد الإحصائية، حيث ينتج من وراء هذا الاختيار الذي يسمى بالتجربة العشوائية مجموعة نتائج ممكنة ، هذه النتائج لكل منها إحتمال معين في الظهور قبل عملية الاختيار ، وعلى ضوء ما ذكرنا سنقوم خلال هذا المحور بالتطرق إلى نظرية المجموعات من تعريف للمجموعة وأنواعها ثم نعرض التحليل التوافقي من خلال مجموع طرق العد الاحصائية المستخدمة في تحديد عدد الحالات الممكنة من وراء تجربة عشوائية، ثم في آخر المحور سنعرض نظرية الاحتمالات .

المحور الأول : نظرية المجموعات و حساب الاحتمال

أولا : مفاهيم حول نظرية المجموعات

1/ تعريف المجموعة The Set:

تعرف المجموعة على أنها تجمع بين الأشياء التي تشترك في صفة معينة وقد تكون هذه الأشياء كميات أو أعداد أو أي شيء آخر معرفا تعريفا واضحا وعادة ما يرمز لها بأحد الحروف الهجائية A أو B أو C أو ...إلخ، ويسمى كل عضو من أعضائها بكلمة عنصر ويرمز له غالبا بأحد الحروف التالية : a ، b، c ...إلخ،[1] وقد نصادف في الحياة اليومية هذه التجمعات مثل فريق كرة قدم أو مجموعة طلبة من قسم معين وغيرها.

2/ أنواع المجموعات :

للمجموعة عدة أنواع يمكن اعتبارها تسميات هي :

أ- المجموعة الشاملة Universal Set : و هي تحتوي على جميع العناصر المكونة للظاهرة قيد الدراسة، و يرمز لها بالرمز (S).

مثلا قد تكون S مجموعة الأعداد الطبيعية أو الحقيقية أو طلبة جامعات الجزائر ونكتب :

$$S=\{x : \text{يمثل أفراد المجموعة}\ x\}$$

ب- المجموعة الخالية Empty Set : وهي المجموعة التي لا تحتوي على عناصر، و يرمز لها بالرمز { } أو Ø.

مثلا نقول أن مجموعة الرسل التي جاءت بعد سيدنا محمد (ص) هي مجموعة خالية

ج- المجموعة الجزئية Sub Set : هي المجموعة التي جميع عناصرها موجودة في مجموعة أخرى.

---

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، الإحصاء و الاحتمالات: النظرية و التطبيق، منشورات (ELGA)، مالطا، 2000، ص 104.

مثلا إذا كانت المجموعة A و التي مجموعة عناصرها $A=\{1 ;2 ;3 ;5\}$ و المجموعة B التي عناصرها $B=\{1 ; 3 ;5\}$ فإننا نلاحظ أن كل عناصر المجموعة B موجودة في المجموعة A و بالتالي فإن B هي مجموعة جزئية من A.

د- المجموعة المكملة Complement Set : هي العناصر التي تكون تنتمي لمجموعة و لا تنتمي لأخرى و بدمج عناصر المجموعتين تصبح لنا مجموعة كلية ، حيث تسمى المجموعة الأولى مجموعة مكملة للثانية في المجموعة الكلية.

مثلا إذا كانت هناك مجموعة A فإن المجموعة التي تحتوي على جميع العناصر الموجودة في المجموعة الشاملة و غير موجودة في المجموعة A تسمى بالمجموعة المكملة للمجموعة A في المجموعة الشاملة ويرمز لها بالرمز A^c حيث : $A^c=S-A$

هـ- المجموعة القابلة للعد Countable Set : إذا كان بالإمكان عد عناصر مجموعة ما فإنها تعتبر مجموعة قابلة للعد ، أما إذا كانت عناصرها غير معروفة فإنها مجموعة غير قابلة للعد.

مثلا مجموعة الأعداد الطبيعية الأقل تماما من 500 مجموعة قابلة للعد أما مجموعة الأعداد الطبيعية الكلية فهي غير قابلة للعد.

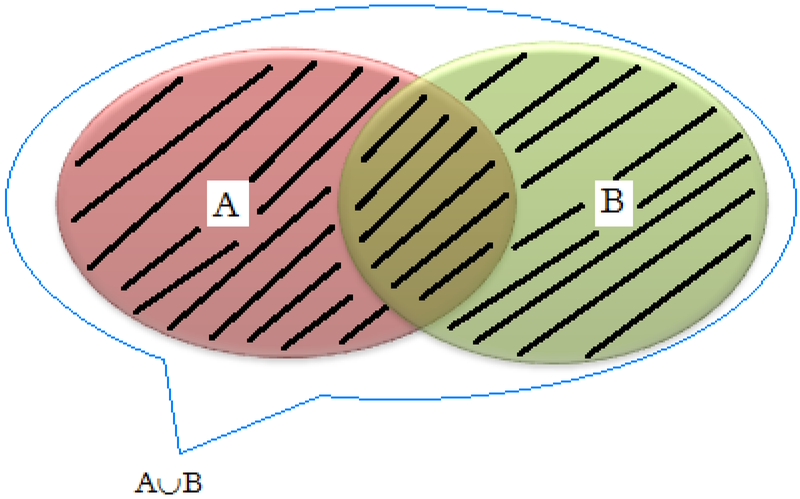
و- المجموعة المحدودة (المنتهية) Finite Set : هي المجموعة التي تحتوي عدد محدد من العناصر.

3/ العمليات على المجموعات :

أ- الإتحاد The Union :

إذا كانت A و B مجموعتان جزئيتان من مجموعة كلية تسمى (S) فإن إجتماع عناصر هاتين المجموعتين يشكل مجموعة جزئية من المجموعة الكلية ، هذا الجمع بين عناصر المجموعتين يسمى بالاتحاد ويمكن كتابة ذلك بالعلاقة التالية : $A\cup B=\{x/x\in A$ أو $x\in B\}$

أما التمثيل البياني لإتحاد مجموعتين فهو كالتالي :



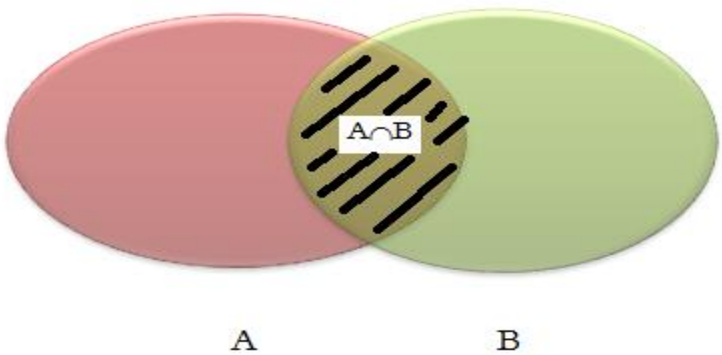
وكقاعدة عامة إذا كانت هناك مجموعات جزئية A_1; A_2...; A_n من المجموعة الكلية S فإن إتحاد هذه المجموعات الجزئية يكتب بالصيغة التالية :

$$A_1 \cup A_2 \cup \ \ldots \ \cup \ An = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$$

ب- التقاطع The Intersection :

إذا كانت A و B مجموعتان جزئيتان من مجموعة كلية (S) فإن العناصر المشتركة في هاتين المجموعتين يسمى بالتقاطع، ويمكن كتابة ذلك بالعلاقة التالية : $A \cap B=\{x/x \in A$ و $x \in B\}$

أما التمثيل البياني لتقاطع مجموعتين فهو كالتالي :



وكقاعدة عامة إذا كانت هناك مجموعات جزئية A_1; A_2...; A_n من المجموعة الكلية S فإن تقاطع هذه المجموعات الجزئية هو العناصر المشتركة في جميع هذه المجموعات الجزئية، ويكتب بالصيغة التالية :

$A_1 \cap A_2 \cap \ \ldots \ \cap \ A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_n$

ج- الفرق و المتممة The Difference and The Complementary :

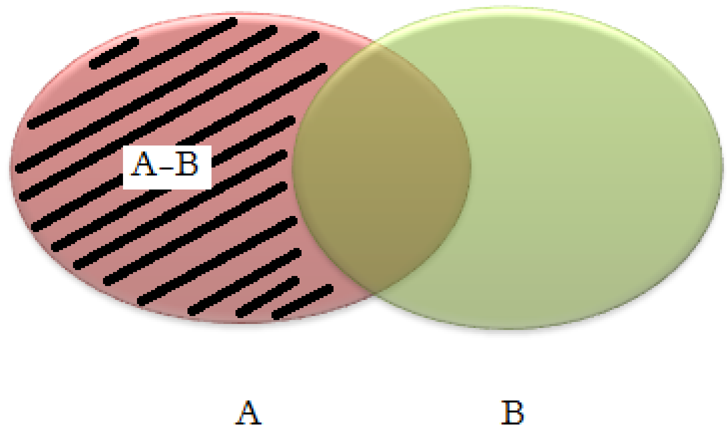
ج-1/ الفرق The Difference

إذا كانت A و B مجموعتان جزئيتان من مجموعة كلية (S) فإن عناصر A التي لا تنتمي إلى B تشكل مجموعة جزئية من S هي تعريفا فرق عناصر A عن عناصر B و نرمز لها بـــ: A-B

و نعبر عن ذلك رياضيا بالتكافؤ التالي :

$$\{x\in A-B\}\Leftrightarrow\{x\in A \ ; x\notin B\}$$

ويعبر عن هذا الفرق بيانيا كالتالي :



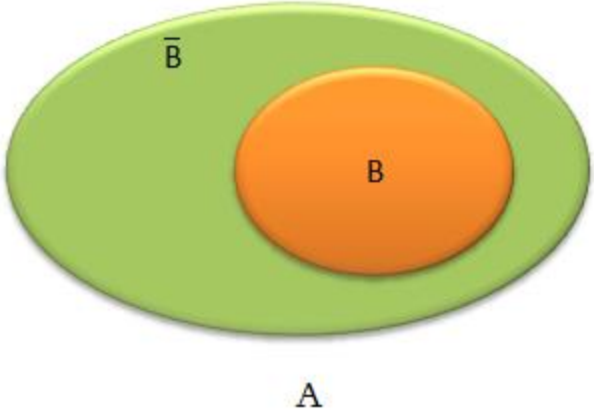
من الشكل نلاحظ أن: $A-B \neq B-A$ ومنه نقول أن عملية الفرق في المجموعات عملية غير تبديلية.

ج-2/ المتممة The Complementary

توجد علاقة خاصة في الفرق تسمى بالمتممة و هي إذا كانت B محتواة في A فيصبح الفرق A-B هو العناصر التي تنتمي إلى A ولا تنتمي إلى B و تسمى بمتممة B بالنسبة لـ A و نكتب هذا بالعلاقة التالية : $B\subset A\Leftrightarrow A-B = \overline{B}$

أو بالعلاقة التالية : $\{x\in \overline{B}\}\Leftrightarrow\{x\in A \ ; x\notin B\}$

و نعبر عن علاقة المتممة بالتمثيل البياني التالي :



ج-3/ بعض خواص الفرق و المتممة :[1]

- $\Omega - A = \overline{A}$
- $\overline{\Omega} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = \Omega$
- $A \cup \overline{A} = \Omega$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A - B = A \cap \overline{B}$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B}$
- $(\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}$

ج-4/ الفرق التناظري أو المتماثل The Symmetric Difference

الفرق المتماثل عملية ثنائية على مجموعات يرمز لها بالرمز Δ ، حيث إذا كانت مجموعتين جزئيتين A و B فالفرق التماثلي $A \Delta B$ هو المجموعة التي تحتوي كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة A ولا

[1]-السعدي رجال ، نظرية الاحتمالات و مبادئ الحساب الاحتمالي : دروس وتمارين ، الجزء الأول ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005، الطبعة 02، ص 20.

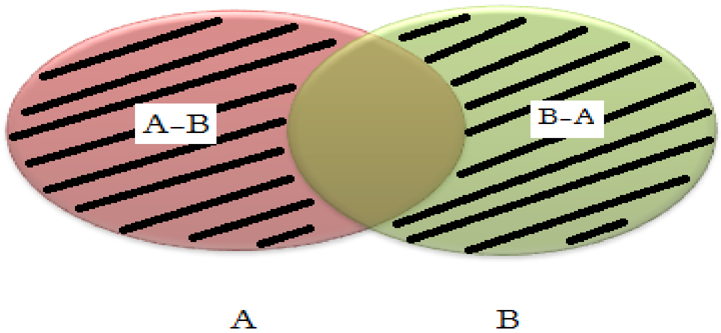
تنتمي إلى المجموعة B بالإضافة إلى كل العناصر التي تنتمي إلى المجموعة B ولا تنتمي للمجموعة A [1]

فالناتج عن عملية الفرق التناظري هو مجموعة نعتبرها C حيث :

$C=A\Delta B=\{x/\ x\in A\ ;\ x\notin B$ أو $x\in B\ ;\ x\notin A\}$

ونكتب الفرق التناظري بعلاقة أخرى : $A\Delta B = (A-B) \cup (B-A)$

و نمثل الفرق التناظري بالتمثيل البياني التالي :



بعض خواص الفرق التناظري : من خلال تعريف الفرق التناظري نستخلص الخواص التالية :

- $A\Delta\varnothing = A$
- $A\Delta A = \varnothing$
- $A\Delta B = B\Delta A$
- $A\Delta B = (A\cup B) - (A\cap B) = (A\cap\overline{B}) \cup (B\cap\overline{A})$
- $(A\Delta B)\Delta D = A\Delta (B\Delta D)$

د- الجداء الديكارتي The Cartesian Product [2]

لتكن A و B مجموعتان ، نسمي مجموعة الثنائيات التي ينتمي مسقطها الأول إلى A و ينتمي مسقطها الثاني إلى B الجداء الديكارتي للمجموعتين A و B و يرمز له بالرمز $A\otimes B$ ، و يعبر عنه رياضيا كمايلي :

[1] - علي نصر الدين الوكيل، مبادئ رياضيات الحاسب، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، القاهرة، 2000، الطبعة الأولى، ص 12

[2] - السعدي رحال ، مرجع سبق ذكره ، ص ص 22،23.

$A\otimes B=\{Z=(x;y)/x\in A ; y\in B\}$

و ينتج عن هذا الجداء العلاقات التالية :

- $A\otimes B \neq B\otimes A$
- $A=B \Leftrightarrow A\otimes B = B\otimes A$
- $A=\varnothing \Leftrightarrow A\otimes B = \varnothing\otimes B = \varnothing$
- $A\otimes (B\cup D) = (A\otimes B) \cup (A\otimes D)$
- $A\otimes (B\cap D) = (A\otimes B) \cap (A\otimes D)$
- $A\otimes A = A^2$
- $A_1\otimes A_2\otimes \ldots \otimes A_n = A^n$

4- أصلي مجموعة منتهية Cardinality of a Finite Set:

نسمي أصلي مجموعة (E) عدد عناصرها [1]، مثلا المجموعة E تمثل عدد فصول السنة، إذن أصلي مجموعة E هو 4 و نكتب: $Card(E)=4$

أو مثلا إذا كانت $S=\{a;b;c;d\}$ فإن أصلي هذه المجموعة هو مجموع عناصرها و نكتب $Card(S)=4$.

4-1/ خواص أصلي مجموعة : لأصلي مجموعة عدة خواص هي :

- أصلي مجموعة خالية هو الصفر $Card(\varnothing)=0$ ؛
- إذا كانت A و B مجموعتان جزئيتان لمجموعة منتهية :
  - فإن :

$$Card(A\cup B)= Card(A) + Card(B) - Card(A\cap B)$$

  - إذا كانت هاتان المجموعتان لا توجد بينهما عناصر مشتركة فإن :

[1] -CHAMOUN Chamoun ; Eléments des Statistiques et de Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2010 ; P 107

$$Card(A\cup B)= Card(A) + Card(B)$$

لأن $Card(A\cap B)=0$

- إذا كانت المجموعة A^c مجموعة مكملة أو متممة للمجموعة A بالنسبة للمجموعة الكلية (S) فإن :
    - أصلي مجموعة تقاطع المجموعتين A و A^c هو :

$$Card(A\cap A^c)= Card(\varnothing)=0$$

    - أصلي مجموعة تقاطع المجموعتين A و A^c هو:

$$Card(A\cup A^c) = Card(\Omega) = Card(A) + Card(A^c)$$

- إذا كانت A و B مجموعتان منتهيتان فإن :
    - $Card(A\times B)= Card(A) \times Card(B)$
    - نتيجة للقاعدة السابقة فإن :

$$Card(A\times A) = Card(A) \times Card(A) = (Card(A))^2$$

    - و كنتيجة عامة للقواعد السابقة فإن : $Card(A^n) = (Card(A))^n$

ثانيا : التحليل التوافقي

يهتم التحليل التوافقي بإعطاء عدد الطرق الممكنة للمجموعات ضمن شروط معينة من خلال بعض القواعد الرياضية التي تسهل هذا التكوين من جهة و يتمكن من دراسة المجموعات المنتهية من خلال تبسيط العد بها و إستنباط طرق أكثر فعالية لحساب عدد الحالات المواتية المرتبة بذلك الحدث[1]، لذلك قبل عرض الطرق المستخدمة في إستخراج الحالات الممكنة لأي حدث لابد من التعريف بالشيء الذي يسبق الحدث و هو التجربة العشوائية .

[1] – السعدي رجال ، مرجع سابق ذكره ، ص 37.

1/ التجربة العشوائية و فراغ العينة :

1-1/ التجربة العشوائية Random Experiment: هي عمل شيء ما أو ملاحظة شيء ما تحت ظروف معينة و تكون نتيجة التجربة أحد عدة نتائج من غير المؤكد معرفة أي منها سيتحقق ، وعدد النتائج أو الحالات التي يمكن أن تؤتي بها هذه التجربة تسمى بالحالات الممكنة [1].

2-1/ فراغ العينة Sample Space : يعرف فضاء العينة أو فراغ العينة على أنه مجموعة لجميع النتائج الممكنة لتلك التجربة و يرمز لها بالرمز (Ω) .

3-1/ الحدث The Event : هو مجموعة جزئية من فراغ العينة، ففي أي تجربة عشوائية عدد الحالات الممكنة n ، إذا كنا نهتم بتحقق جزء معين من مجموعة النتائج الممكنة و كانت عدد الحالات التابعة لهذا الجزء تساوي m حيث ($n>m$) ، إذن عندما تكون نتيجة التجربة أحد هذه الحالات التي عددها m نقول أن الحدث الذي نهتم به قد تحقق .[2]

1-3-1/ أنواع الحدث : للحد عدة أنواع أبرزها :

- الحدث المستحيل Impossible Event : و هو الحدث غير ممكن الحدوث، أي الذي لا يحتوي على أي نتيجة من نتائج فراغ العينة.
- الحدث المؤكد Sure Event : هو الذي عناصره جميع عناصر فراغ العينة .
- الأحداث المتنافية Exclusive Event : يقال أن حدثان متنافيان إذا إستحال حدوثهما معا.
- الأحداث المستقلة Independent Event : نقول عن حدثان أنهما مستقلان إذا كان حدوث أحدهما لا يتأثر بحدوث الآخر أو عدم حدوثه، وبصفة عامة الأحداث المستقلة لا تؤثر و لا تتأثر ببعضها البعض.

---

[1]- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الأول، دار الكتب الأكاديمية ،مصر ، 2004 ، ط 01 ، ص 25.

[2]-عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الأول، مرجع سبق ذكره ، ص 26.

مثلا : في التجربة العشوائية لرمي قطعة نقد من صنف دينار جزائري مرة واحدة تكون النتائج المتوقعة هي :

حيث الرقم نسميه بـ (P) أما الوجه بـ (F)

أما إذا رمينا هذه القطعة مرتين فالنتائج الممكنة من هذه التجربة تكون في فراغ العينة التالي :

$$\Omega=\{ PP ; PF ; FP ; FF \}$$

- إن ظهور من غير الرقم و الوجه هو حدث مستحيل .

- إن ظهور الرقم أو الوجه هو الحدث الأكيد.

- كما أن حدث ظهور الوجه في الرمية الأولى هو حدث مستقل عن حدث ظهور الرقم في الرمية الثانية و العكس صحيح.

2/ تعريف طرق العد :

نعني بطرق العد تحديد عدد عناصر فراغ عينة وعدد عناصر حدث دون اللجوء أو الحاجة إلى كتابة فراغ العينة أو فراغ الحدث ، و هناك طرق معروفة لتحديد عدد عناصر فراغ العينة و هي :

1-2/ طريقة أو قاعدة الضرب Multiplication Rute :

و تنص هذه القاعدة على أن عدد عناصر فراغ عينة مشكلة من تجارب هو جداء عدد نتائج هذه التجارب[1]، فمثلا إذا كانت تجربتين A عدد نتائجها n و تجربة B عدد نتائجها الممكنة m فإن عدد النتائج الكلية للتجربتين معا هو (n×m) .

[1]– علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي،مرجع سبق ذكره، ص 122.

إذن إذا افترضنا وجود التجارب (A_1 ; A_2 ; ... ; A_K) و عدد عناصر نتائجها المختلفة هي (n_1 ;n_2 ; ... ; n_k) فإن عدد النتائج الممكنة لهذه التجارب معا هو :

$$Card(\Omega) = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_k = \prod_{i=1}^{k} n_i$$

مثال : أرادت مؤسسة تربوية فتح مجال التوظيف لمنصبين في إدارتها هما محاسب و متصرف إداري فتقدم لإدارتها 3 أشخاص يحملون ملف متصرف و 5 أشخاص يحملون ملف محاسب .

المطلوب هو تحديد عدد الطرق الممكنة في تعيين الموظفين الجديدين ؟

الحل : إن عدد الطرق الممكنة في تعيين الموظفين الجديدين هو عدد الطرق الممكنة لشغل منصب محاسب وعددها (n_1=5) مضروب في عدد الطرق الممكنة لشغل منصب متصرف إداري وعددها (n_2=3)، إذن : $Card(\Omega) = n_1 \times n_2 = 5\times3=15$

وبعض الحالات الممكنة من هذا التوظيف هو :

إذا كان المرشحون لمنصب محاسب هم : محمد (M) وأحمد (A) وفريد (F) وحليم (H) و كريمة (K)

والمرشحون لمنصب متصرف إداري هم : سليم (S) و بسماء (B) و إكرام (I)

$Card(\Omega)$={(M ,S) ; (M ,B) ; (M ,I) ; (A ,S) ; (A ,B) ; (A ,I) ;......; (K ,I) }

2-2/ طريقة أو قاعدة الجمع Addition Rute :

و تنص هذه القاعدة على أن عدد عناصر فراغ عينة مشكلة من تجارب متنافية هو جمع عدد نتائج هذه التجارب[1]، فمثلا إذا كانت تجربتين A عدد نتائجها n و تجربة B عدد نتائجها الممكنة m وكانت هاتين التجربتين متنافيتين فإن عدد النتائج الكلية للتجربتين معا هو (n+m) .

إذن إذا افترضنا وجود التجارب (A_1 ; A_2 ; ... ; A_K) و عدد عناصر نتائجها المختلفة هي (n_1 ;n_2 ; ... ; n_k) وكانت هذه التجارب متنافية فإن عدد النتائج الممكنة لهذه التجارب معا هو :

[1] – علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 124.

$$\text{Card}(\Omega) = n_1 + n_2 + \ldots + n_k = \sum_{i=1}^{k} n_i$$

مثال : لتكن ثلاث مدن متجاورة هي (A ;B ;C) ، ترتبط هذه المدن ببعضها بمجموعة من الطرق.

المطلوب هو تحديد عدد الطرق التي تؤدي من المدينة A إلى المدينتين B و C مع العلم أن A تربطها 3 طرق بــ B و تربطها 6 طرق بــ C ؟

بما أن هناك انفصال بين المدينتين B و C وكل منها لها طرق خاصة بإتجاه المدينة A فإن عدد الطرق التي تؤدي من المدينة A إلى المدينتين B و C هو عدد الطرق التي تؤدي من A نحو B زائد عدد الطرق التي تؤدي من A نحو C و نكتب : $\text{Card}(\Omega) = n_1 + n_2 = 3+6=9$

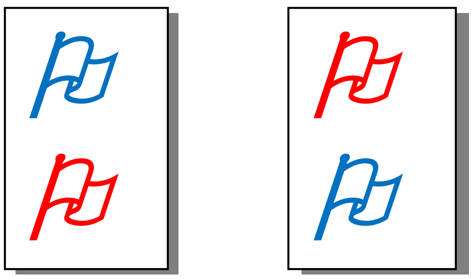
2-3/ طرق أو قواعد التباديل Permutations Rutes :

إن التباديل هو عبارة عن تنظيم أو ترتيب مجموعة عناصر في أماكنها و هي قاعدة جزئية في التراتيب، أما من حيث التطبيق سنقوم بدراسة قواعد التباديل من خلال حالتين :

- التبادل دون تكرار العناصر. (إختلاف في الألوان أو الأشكال...)
- التبادل مع تكرار العناصر

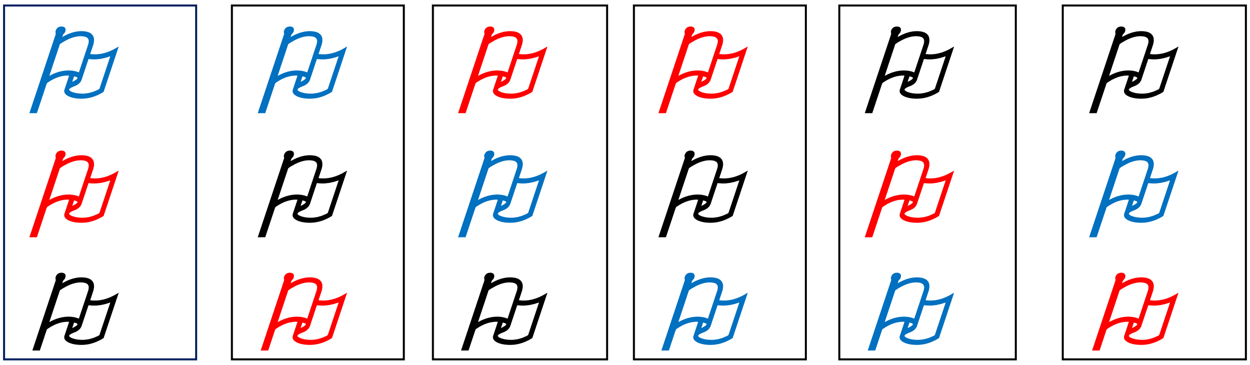
2-3-1/ قاعدة التبديلة دون تكرار : نعني بالتبديلة دون تكرار ترتيب أو تنظيم مجموعة جزئية مع شرط ألا يكون تشابه بين عناصرها المراد ترتيبها، ونرمز لها بالرمز(P_n)

لفهم هذه القاعدة نتبع المثال التالي الذي نبدؤه من خلال وضع علمين على جدار في مكانين مخصصين لهما فكانت النتائج الممكنة في التمثيل التالي :



نلاحظ أنه لدينا طريقتين فقط في وضع هاذين العلمين إما العلم الأزرق في الأعلى و الأحمر في الأسفل أو العكس. و نكتب : $P_n=2$

وإذا أردنا ترتيب 3 أعلام ذات ألوان مختلفة في أماكن مخصصة من واجهة جدار كانت لنا النتائج الممكنة التالية :



نلاحظ أن هناك ستة طرق لترتيب الأعلام الثلاث ، ونكتب $P_n=6$

وبالتالي قاعدة التباديل دون تكرار تكتب كالتالي[1] : $P_n = n!$

$$\left.\begin{array}{l} P_2 = 2! = 2\times1 = 2 \\ P_3 = 3! = 3\times2\times1 = 6 \end{array}\right\}$$

حالة خاصة : التباديل الدائرية[2]

إذا كنا بصدد تباديل عناصر مجموعة ما من وضعية دائرية فإن عدد الطرق المختلفة و المقابلة لذلك فهي: $P_{\overline{n}} = (n-1)!$

إن مثال هذه الحالة هو إجلاس أربع إخوة حول طاولة مستديرة لتناول وجبة و طريقة العد التقليدي وتثبيت أحد الإخوة في مكان ما و يرتب الإخوة أنفسهم حول الطاولة بطرق عديدة و يصبح لدينا عدد من الحالات هو : $P_{\overline{4}} = (4-1)! = 3! = 3\times2 = 6$

2-3-1/ قاعدة التبديلة مع التكرار : نعني بالتبديلة مع التكرار ترتيب أو تنظيم مجموعة جزئية مع وجود تشابه بين عناصرها المراد ترتيبها، مثل تبديل الأعداد (24256) أو الحروف في الاسم (محمود)

[1] -K.Redjdal ; Cours de Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2004 ; P 16

[2] -السعدي رجال ، مرجع سبق ذكره ، ص 47.

وقاعدتها هي[1] : $P_n^{n_1;n_2;...n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$ ؛ حيث $(n=n_1+n_2+....+n_k)$.

مثال : ما هو عدد التباديل المختلفة التي يمكن تشكيلها من جميع الأحرف لكلمة Chercheur

نلاحظ أن هناك أحرف مكررة (متشابهة) و بالتالي نستخدم التبديلة مع التكرار ، حيث n_1 الخاصة بالحرف C هو 2 ، و n_2 الخاصة بالحرف H هو 2 ، و n_3 الخاصة بالحرف E هو 2 ، و n_4 الخاصة بالحرف R هو 2 ، و n_5 الخاصة بالحرف U هو 1 وتصبح عدد التبديلات هو :

$$P_n^{n_1;n_2;...n_k} = P_9^{2;2;2;2;1} = \frac{9!}{2!2!2!2!1!} = 45360$$

2-4/ طرق أو قواعد التراتيب Arrangements Rutes :

طرق التراتيب يراد بها سحب مجموعة جزئية مؤلفة من k عنصر من المجموعة الكلية n، حيث أن $n \geq k$ ، و يتم هذا الاختيار إما بإعادة العنصر أو بدون إعادته، لذلك نجد أن التراتيب لها نوعين هما :

- التراتيب بالإعادة .
- التراتيب بدون إعادة.

2-4-1/ التراتيب بالإعادة : إن السحب بالإعادة يمكن من خلاله ظهور عنصر من المجموعة الجزئية أكثر من مرة ، أما القاعدة الخاصة بها فهي[2] : $\widetilde{A}_n^k = n^k$

مثال : إذا كان في صندوق 3 كرات واحدة حمراء (R) و واحدة بيضاء (B) وأخرى سوداء (N) ، والتجربة هي سحب كرتين على التوالي مع إعادة الكرة المسحوبة في التجربة.

المطلوب هو تحديد عدد الطرق الممكنة من وراء هذه التجربة مع تحديد هذه النتائج ؟

بما أن الترتيب مهم و الاعادة موجودة فإننا نستخدم ترتيبة بتكرار وعدد النتائج الممكنة من هذه التجربة هو : $\widetilde{A}_n^k = n^k = 3^2 = 9$

---

[1] -K.Redjdal ; Op-cit ; P 17

[2] -K.Redjdal ; Op-cit ; P P 13 , 14.

و النتائج هي: $Card(\Omega)=\{RR ; BB ; NN ; RB ;RN ; BR ; BN ; NB ; NR \}$

2-4-1/ التراتيب بدون إعادة : إن السحب بدون إعادة يشترط بأن لانسحب العنصر الواحد من المجموعة الكلية أكثر من مرة واحدة في المجموعة الجزئية للتجربة [1]، أما القاعدة الخاصة بها فهي :

$$P_{n\,;k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

مثال : بالرجوع إلى التجربة السابقة لو إفترضنا أن السحب كان بدون إرجاع ما هو عدد النتائج الممكنة من هذه التجربة ؟

في هذه الحالة بما أن السحب على التوالي دون الإرجاع فإننا نستخدم التراتيب بدون إعادة و عدد الطرق الممكنة من وراء هذه التجربة هو :

$$P_{n\,;k} = \frac{n!}{(n-k)!} = \frac{3!}{(3-2)!} = 3! = 3\times 2 = 6$$

و النتائج هي: $Card(\Omega)=\{ RB ; RN ; BR ; BN ; NB ; NR \}$

2-5/ طرق أو قواعد التوافيق Combinations Rutes :

هي طرق يتم من خلالها إختيار k عنصر من مجموع العناصر n حيث $(n\geq k)$ مع عدم مراعاة الترتيب في كل حالة إختيار، ويوجد صنفين من طرق التوافيق هي التوافيق دون إعادة و التوافيق بالإعادة.

2-5-1/ التوافيق دون الإعادة : يتم من خلالها تشكيل المجموعات الجزئية والتي يتكون منها k عنصر مختلف دون إعادة من مجموعة العناصر الكلية n ، وعدد الطرق الموافقة لإستخراج هذه المجموعات يكون وفق القاعدة التالية : [2]

$$C_n^K = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

1- السعدي رجال ، مرجع سبق ذكره ، ص 52.

2 -*K.Redjdal ; Op-cit ; P 18*

مثال : أراد قسم العلوم الاقتصادية في إحدى الجامعات تعيين لجنة من طالبين كممثلين عن أحد الأقسام المكون من 20 طالب ، فكم عدد اللجان التي يمكن تستخرج من هذه الاختيارات ؟

نلاحظ أن الترتيب غير مهم (لا توجد مناصب ترتيبية) و التكرار غير ممكن (لا يمكن أن يكون شخص يمثل عضوين) وبالتالي نستخدم توفيقة بدون تكرار ويصبح عدد اللجان الممكنة هو :

$$C_n^K = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{20!}{2!(20-2)!} = \frac{20\times19}{2} = 190$$

2-5-1/ التوافيق مع الإعادة : يتم من خلالها تشكيل المجموعات الجزئية والتي يتكون منها k عنصر مختلف مع الإعادة من مجموعة العناصر الكلية n ، وعدد الطرق الموافقة لإستخراج هذه المجموعات يكون وفق القاعدة التالية :[1]

$$\tilde{C}_n^K = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

مثال : بالرجوع إلى أحد الأمثلة السابقة التي كان فيها سحب كرتين من صندوق به ثلاث كريات واحدة حمراء (R) و أخرى بيضاء (B) و الثالثة سوداء (N) لكن هذه المرة نسحب كرة ونسجلها ثم نعيدها للسحب الذي يليه ثم نكتب نتائج الاختيارين مع إهمال الترتيب .

المطلوب : كم إختيار نحصل عنه من هذه التجربة ؟

الحل : نلاحظ أن الترتيب غير هام وكذلك التكرار موجود (بالإرجاع) ومنه نستخدم توافيق بتكرار ويصبح عدد الامكانيات هو :

$$\tilde{C}_3^2 = C_{3+2-1}^2 = \frac{(3+2-1)!}{2!(3-1)!} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4\times3\times2}{2\times2} = 6$$

و الحالات الممكنة من هذه التجربة هي :

Card(Ω)={ RR ; BB ; NN ; RB ; RN ; BN }

[1] -*K.Redjdal ; Op-cit ; P 21*

ثالثا : نظرية الاحتمال :

تمهيد : إن في كل تجربة عشوائية هناك دوما حالة شك متعلق بالنتيجة التي ستقع و بالتالي ستتحقق أو لا تتحق ، ولأجل ذلك كان من الضروري تعيين عدد محصور بين الصفر و الواحد لإعطاء نسبة لفرصة ظهور أو تحقق هذه الحالة، فمثلا نقول أن نسبة ظهور أو وقوع هذه الحالة هو 100% أي بإحتمال هو 1 ، أو أن نقول أن نسبة وقوع الحادث هو 40% أي بإحتمال 0.4، أما طريقة حساب احتمال الحصول على الحادثة A مثلا و التي عدد مرات حدوثها H مرة مختلفة من بين مجموع N مرة أو إمكانية فإن إحتمال الحصول على هذه الحادثة هو $P(A) = \frac{H}{N}$

1/ التعريف الرياضي للاحتمال وخواصه :

لتكن (Ω) فراغ الاحداث الكلية الممكنة و لتكن M(Ω) مجموعة أجزاء (Ω) . فنقول عن التطبيق (P) للمجموعة M(Ω) في مجموعة الاعداد الحقيقية الموجبة $\Re^+$ أنه إحتمال على (Ω) إذا وفقط إذا تحقق مايلي :

- $P(\Omega) = 1$
- إذا كانت الحادثة (A) كيفية فإن $P(A) \geq 0$

نسمي (Ω ;P) فضاء إحتمالي و نسمي صورة كل حادثة (A) حسب التطبيق (P) بإحتمال الحادثة (A) [1].

1-1/ بعض خواص الاحتمال : [2]

- ✓ من أجل كل حادثة A من قسم الاحداث M(Ω) فإن: $1 \geq P(A) \geq 0$
- ✓ إحتمال الحادثة الأكيدة يكون دوما يساوي الواحد.
- ✓ إحتمال الحادثة المستحيلة دوما يساوي الصفر لأن هذه الحادثة لن تقع مطلقا.
- ✓ إذا كانت الحادثة $\overline{A}$ هي الحادثة المتممة للحادثة A بالنسبة لـ Ω فإن :

[1] – بن بشير رمضان، السبيل في الرياضيات، دار السبيل للنشر و التوزيع، الجزائر، 2007، ص 262.

[2] -*Ahmed CHIBAT ; Notions sur Le Calcul des Probabilités ; La Collection Mathématique de l'Université Mentouri Constantine ; P P 64 , 65.*

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

- ✓ إذا كانت $(B \subset A)$ فإن : $P(A-B) = P(A) - P(B)$ و $P(B) \leq P(A)$
- ✓ إذا كانت A و B حادثتان كيفيتان فإن :

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap \overline{B})$$

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$$

- ✓ إذا كانت الحادثة A ناتجة عن حدوث إحدى الأحداث $(A_1 ; A_2 ; \ldots.A_K)$ المنفصلة فيما بينها فإن : $P(A) = P(A \cap A_1) + P(A \cap A_2) + \ldots.. + P(A \cap A_K)$

و
$$\left.\begin{array}{r} A = A_1 + A_2 + \ldots.+ A_k \\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \ldots\ldots = A_{k-1} \cap A_k = \varnothing \end{array}\right\}$$

2/ القوانين الأساسية في الاحتمالات :

لتكن المجموعة (Ω) مجموعة متكونة من N إمكانية و (P) إحتمالها على (Ω) ، ولتكن الحادثة (A) من قيم الاحداث $M(\Omega)$ و المتكونة من H إمكانية ، فنعبر عن إحتمال الحادثة A بـ $\frac{H}{N}$ ، أو بعبارة أخرى إحتمال الحادثة (A) هو حاصل قسمة أصلي الحادثة (A) أي $(Card(A))$ على أصلي مجموعة الامكانيات (Ω) ونكتب : [1]

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$$

2-1/ بعض قواعد الاحتمالات :

- ✓ إحتمال المجموعة الكلية هو $P(\Omega) = \frac{Card(\Omega)}{Card(\Omega)} = 1$
- ✓ إحتمال المجموعة الخالية معدوم، $P(\varnothing)=0$

[1] -*KHALDI Khaled ; Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2005 ; P 11.*

✓ إحتمال تقاطع حادثتين A و B من فراغ الاحداث الكلية (Ω) هو:

$$P(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}$$

- إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتان فإن :

$$P(A\cap B)=\frac{Card(A\cap B)}{Card(\Omega)}=\frac{Card(\emptyset)}{Card(\Omega)}=0$$

- إذا كانت الحادثتان A و B مستقلتان عن عن بعضهما البعض فإن إحتمال تقاطعهما هو : $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

✓ إحتمال إتحاد حادثتين $P(A\cup B)$

- إذا كانت الحادثتان A و B كيفيتان من فراغ الاحداث (Ω) فإن :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$$

- إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتان فإن :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = P(A) + P(B)$$

- إذا كانت الحادثتان A و B متنافيتان فإن :

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B)$$

3/ الاحتمالات الشرطية

3-1/ تعريف الاحتمالات الشرطية :

ليكن الفضاء الاحتمالي المنته $P(\Omega)$ ، ولتكن الحادثتان A وB حيث $P(A)>0$ ، نسمي إحتمال وقوع الحدث B بعد توفر معلومات عن وقوع الحدث A بالاحتمال الشرطي للحادثة B ويرمز له بالرمز $P(B/A)$ [1]، حيث :

1- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الأول، مرجع سبق ذكره ، ص 75.

$$P(B/A) = \frac{Card(A \cap B)}{Card(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

مثال : يقوم عامل تقني بمراقبة آلتين بمصنع وهذا لاصلاح أي منهما في حالة أي عطب أو خلل ، فإذا علمت أن إحتمال وقوع خلل في الآلة الأولى هو ($1/8$) و الآلة الثانية هو ($1/10$).

المطلوب : ماهو إحتمال أن يتدخل العامل لإصلاح الآلة الثانية علما أنه لم يتدخل لإصلاح الأولى.

الحل :

- نسمي وقوع التدخل لإصلاح الآلة الأولى بــ A.
- نسمي وقوع التدخل لإصلاح الآلة الأولى بــ B.

من بيانات المثال يظهر أن الآلتين مستقلتين عن بعضهما البعض ومنه إذا كانت الحادثة A هي إصلاح الآلة الأولى فإن عدم التدخل لإصلاح هذه الآلة هو $\bar{A}$ وحادثة عدم التدخل لإصلاح الآلة الثانية هو $\bar{B}$ وبالتالي إحتمال أن يتدخل العامل لإصلاح الآلة الثانية مع العلم أنه لم يتدخل لإصلاح الآلة الأولى هو :

$$P\left(\frac{B}{\bar{A}}\right) = \frac{P(B \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{P(B) \times P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = P(B) = {}^{1}/_{10}$$

3-1/ قانون بايز :

إذا كانت الأحداث (A_1 ; A_2 ;.....A_K) المنفصلة فيما بينها مثنى مثنى و التي إتحادها يعطي فراغ الامكانيات (Ω) وبالتالي فإن حدث واحد سيقع حتما ما بين كل هذه الأحداث .

الشرطان السابقان هما :

$$\begin{cases} A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_K = \Omega \\ A_1 \cap A_2 = A_2 \cap A_3 = \ldots = A_{k-1} \cap A_K = \varnothing \end{cases}$$

إن قانون بايز يكتب وفق الصيغة التالية : [1]

[1] -*K.Redjdal ; Op-cit ; P 59*

$$P(A_i/A)=\frac{P(A_i)\times P(A/A_i)}{P(A_1)\times P(A/A_1)\ +P(A_2)\times P(A/A_2)+\cdots+P(A_K)\times P(A/A_K)}$$

$$P(A_i/A)=\frac{P(A_i)\times P(A/A_i)}{\sum_{i=1}^{k}P(A_i)\times P(A/A_i)}$$

مثال : إذا كان لدينا ثلاث صناديق الصندوق الأول فيه (05) كريات بيضاء و (03) كريات سوداء، والصندوق الثاني به (04) كريات بيضاء و (04) كريات سوداء والصندوق الثالث فيه كرة بيضاء و(04) كريات سوداء.

نختار صندوق عشوائيا ونسحب منه كرية بيضاء.

المطلوب : 1/ ماهو إحتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء ؟

2/ ما هو إحتمال أن تكون هذه الكرية سوداء ؟

الحل : نسمي الصناديق الثلاثة بـ A_3 ; A_2 ; A_1

ونسمي سحب الكرة البيضاء بـ (B) ونسمي سحب الكرة السوداء بـ (N)

– حساب إحتمال أن تكون هذه الكرية من الصندوق الثاني مع العلم أنها بيضاء.

$$P(A_2/B)=\frac{P(A_2)\times P(B/A_2)}{P(A_1)\times P(B/A_1)\ +P(A_2)\times P(B/A_2)+P(A_3)\times P(B/A_3)}$$

لدينا : $P(A_1)=P(A_2)=P(A_3)=1/3$

إذن :

$$P(A_2/B)=\frac{(1/3)\times(4/8)}{\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{1}{8}\right)}=\frac{5}{12}$$

– حساب إحتمال أن تكون هذه الكرية سوداء .

$$P(N)=P(A_1)\times P(N/A_1)\ +P(A_2)\times P(N/A_2)+P(A_3)\times P(N/A_3)$$

$$P(N)=\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{3}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{8}\right)+\left(\frac{1}{3}\right)\times\left(\frac{4}{5}\right)=\frac{67}{120}$$

المحور الثاني

المتغيرات العشوائية

وقوانين توزيعها

المحور الثاني : المتغيرات العشوائية وقوانين توزيعها

تمهيد :

لقد تطرقنا في المحور الأول إلى نظرية المجموعات، حيث كانت عملية تحديد فراغ العينة مرحلة هامة نتج عنها كل الحالات الممكنة من التجربة العشوائية، فهذه النتائج قد تكون ملائمة أو غير ملائمة ، فمثلا عند عملية تشكيل ممثلين عن قسم متكون من n دارس قد نصادف في اللجان الممكن تشكيلها ذكور وإناث ، وإذا كان مثلا تركيزنا على الذكور يصبح عددهم في اللجان هو الشيء المدروس وإختلاف هذا العدد من لجنة لأخرى يسمى بالمتغير العشوائي في التجربة العشوائية.

في الواقع نصادف المتغير العشوائي في مجموعة من الظواهر، ففي الظواهر الكمية مثل دراسة الطول أو الوزن أو عدد الذكور...إلخ يرمز للمتغير بالرمز x ويأخذ قيمه في مجموعة الأعداد الحقيقية ، أما في الظواهر الكيفية (النوعية أو الوصفية) كالمستوى التعليمي أو الجنس(ذكر أو أنثى) فعادة ما يسمى بأعداد معينة مثل عملية تحديد الجنس إذا كان ذكر يرمز لـ x بالواحد (1) و الأنثى بالصفر(0)، أي أن كل تجربة لظاهرة سواءا كمية أو كيفية كل قيم المتغير فيها كمية.

المحور الثاني : المتغيرات العشوائية وقوانين توزيعها

أولا : مفهوم المتغير العشوائي وتحديد أنواعه

1-1/ مفهوم المتغير العشوائي :

يعرف المتغير العشوائي على أنه قياس لمتغير ما يأخذ قيم تسمى بقيم المتغير العشوائي والذي هو عبارة عن تطبيق لفراغ الأحداث (Ω) في مجموعة الأعداد الحقيقية التي عادة ما نمثله بـ X وY [1]، حيث أن هذه القيم تكون مقترن بإحتمالات معينة.

مثال : في تجربة إلقاء زهرة نرد مرة واحد تكون نتائج هذه التجربة كالتالي :

$$\Omega=\{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$$

و في تجربة أخرى نلقي زهرتي نرد مرة واحدة فيكون عدد النتائج الممكنة كالتالي :

$$\text{Card }(\Omega) = 6^2 = 36$$

و النتائج الممكنة هي :

$$\Omega=\{(1,1) ; (1,2) ; (1,3) ; (1,4) ; (1,5) ; (1,6) ; (2,1) ; (2,2) ;......(6,6)\}$$

طلب منا تحديد القيم الممكنة لمجموع الرقمين المتحصل عليهما من وراء هذه التجربة فوجدنا ما يلي :

- المجموع الأول يساوي (2) و الثنائيات الموافقة لذلك هي : (1،1).
- المجموع الثاني يساوي (3) و الثنائيات الموافقة لذلك هي : (2،1) و (1،2)
- المجموع الثالث يساوي (4) و الثنائيات الموافقة لذلك هي : (3،1) و (2،2) و (1،3)
- المجموع الرابع يساوي (5) و الثنائيات الموافقة لذلك هي : (4،1) و (3،2) و (2،3) و(4،1).
- المجموع الخامس يساوي (6) و الثنائيات الموافقة لذلك هي : (5،1) و (4،2) و (3،3) و(4،2) و (1،5).
- ....

1- السعدي رجال، مرجع سبق ذكره ، ص 201.

- وهكذا حتى نصل إلى المجموع الأخير الذي يساوي 12 والثنائيات الموافقة لذلك هي: (6،6)

هذه المجاميع تسمى بالمتغير العشوائي و نكتب :

$X=\{ 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 \}$

أما الاحتمالات المقترنة بقيم هذا المتغير العشوائي فيمكن إستخراجها من خلال عدد الحالات الممكنة لكل حادثة من مجموع الحالات الكلية الممكنة للتجربة العشوائية ، وهذه الاحتمالات يمكن إبرازها في الجدول الموالي :

X_i	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
P_i	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

1-2/ أنواع المتغير العشوائي :

هناك نوعان من المتغير العشوائي و هما المتغير العشوائي المنقطع و المتغير العشوائي المستمر.

1-2-1/ المتغير العشوائي المتقطع :

هو المتغير الذي يستطيع أن يأخذ عددا من القيم الصحيحة غير الكسرية ضمن مجال تغيره [1]، و من الأمثلة عن ذلك ما ورد في المثال السابق عندما كانت نتائج المتغير العشوائي جمع الأرقام الناتجة عن تجربة رمي زهرتي نرد مرة واحدة، حيث أن المتغير أخذ أرقام صحيحة، كذلك من الأمثلة الشائعة عن متغير عشوائي متقطع :

- عدد الأفراد في الأسرة.
- عدد الأخطاء المطبعية في صفحة كتاب
- عدد الأهداف التي يسجلها فريق كرة قدم و غيرها

[1] – السعدي رجال ، مرجع سبق ذكره، ص 205.

2-2-1/ المتغير العشوائي المستمر :

هو المتغير الذي يأخذ أي قيمة بين الحد الأدنى و الحد الأعلى لمجال تغيره المحدود أو غير المحدود دون إنقطاع [1]، و من الأمثلة عن ذلك قياس أطوال أو أوزان فئة معينة حيث أنه مثلا إذا مثلنا المتغير العشوائي بأوزان 20 شخص ولتكن 50.5كلغ و 50.7كلغ و....إلخ فهنا لابد من وضع مجالات محددة لجمع قدر معين من أشخاص لأنه لا يمكن أن نضع كل قيمة من قيم المتغير خاصة بشخص معين، وبالتالي تصبح لدينا مجالات أوفئات.

ثانيا : المتغير العشوائي المتقطع و قانون توزيعه الاحتمالي

2-1/ مفهوم قانون التوزيع الاحتمالي : من خلال عرضنا لمفهوم المتغير العشوائي خلصنا أنه يأخذ قيم حقيقية ضمن فراغ إمكانياته وكل حادث من الحوادث الممكنة التي تشكل إمكانياته تتحقق بإحتمال معين ، هذا الربط بين الحادث و إحتمال وقوعه يسمى بقانون التوزيع الاحتمالي ، ويمكن كتابة ذلك بصيغة التطبيق التالي :

$$X_i\,(x_1\,;\,x_2\ldots x_n) \longrightarrow P_i \in [0\quad;\quad 1]$$

2-2/ قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع :

من خلال المثال السابق الذي تطرقنا فيه إلى نتائج تجربة عشوائية لرمي زهرتي نرد مرة واحدة وجدنا أن المتغير العشوائي الذي يمثل جمع الرقمين الناتجين عن التجربة أخذ القيم : $Xi=\{2\,;3.....12\}$ وكانت لكل قيمة مقابل من الاحتمال ، حيث أن مجموع هذه الاحتمالات يساوي الواحد.

إذن كقاعدة عامة قانون التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع يمكن تمثيله في الجدول الموالي :

$X=x_i$	x_1	x_2	......	x_k
$P(X=x_i)=P(x_i)$	$P(X=x_1)$	$P(X=x_2)$	......	$P(X=x_i)$

يسمى $P(X=x_i)$ بقانون التوزيع الاحتمالي أو بدالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي متقطع و ذلك إذا وفقط إذا تحقق الشرطان الأساسيان التاليان :

[1] – السعدي رجال ، مرجع سبق ذكره ، ص 208.

1/ $0 \leq P(X=x_i) \leq 1$

2/ $\sum_{i=1}^{k} P(X = x_i) = 1$

التمثيل البياني لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير المتقطع :

حتى نستطيع وضع تمثيل بياني لدالة قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير المتقطع لابد إعطاء مثال تطبيقي .

مثال تطبيقي : لتكن تجربة إلقاء قطعة نقد مرتين متتابعتين ، حيث (X) يمثل عدد مرات الحصول على وجه (F) في كل تجربة.

المطلوب : - أوجد الحالات الكلية الممكنة من وراء هذه التجربة ؟

- إستخرج دالة كتلة الاحتمال ومثلها بيانيا ؟

الحل : عدد الحالات الممكنة هو : $Card(\Omega) = 2\times2=4$

$\Omega=\{ (FF) ; (FP) ; (PF) ; (PP) \}$

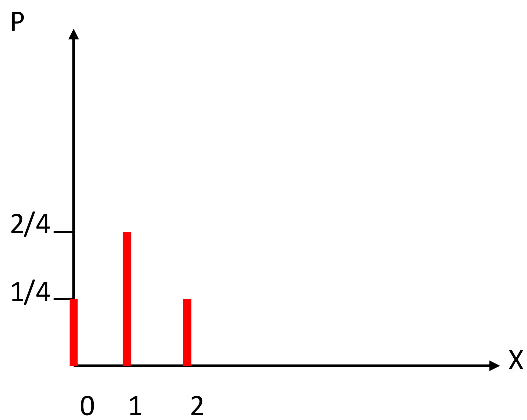
- إيجاد قيم المتغير (X_i)

العينة	FF	FP	PF	PP
X_i	2	1	1	0

و منه قيم المتغير $X=\{0 ; 1 ; 2\}$ و دالة الكتلة الاحتمالية هي:

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	¼

أما التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية فيكون كالتالي :



2-3/ دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع :

إن دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي سواءا كان متقطع أو مستمر هي دالة نطاقها مجموعة الأعداد الحقيقية ($\Re$) و مداها المجال [1 0] و يرمز لها بالرمز $F(x)$.

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع تكتب بالصيغة التالية : [1]

$$F(x)=P(X\leq x_i)=\sum_x P(X=x_i)$$

$$=\begin{cases} 0 & x<x_1 \\ P(X=x_1) & x_1 \leq x < x_2 \\ P(X=x_1)+P(X=x_2) & x_2 \leq x < x_3 \\ \dots\dots. & \\ \dots\dots & \\ 1 & x \geq x_k \end{cases}$$

إن دالة التوزيع التراكمي تشبه التكرار التجميعي الصاعد النسبي.

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي :

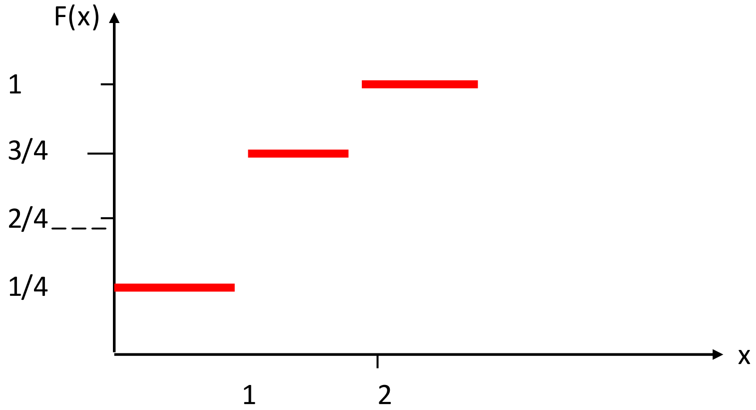
إنطلاقا من المثال السابق يمكننا تحديد دالة التوزيع التراكمي و تمثيلها بيانيا حيث :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	¼

$$F(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ \frac{1}{4} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{1}{4}+\frac{2}{4}=\frac{3}{4} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{3}{4}+\frac{1}{4}=1 & x \geq 2 \end{cases}$$

[1] -K.Redjdal ; Op-cit ; P 92

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي :



2-3/ بعض الخصائص العددية لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع

سنعرض فيما يلي بعض المقاييس التي ترتبط بالمتغير العشوائي سواء كانت من مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس التشتت أو حتى الشكل.

2-3-1/ التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) :

يعتبر التوقع الرياضي مفهوم جد هام في الاحتمالات ، أما صيغته الرياضية الخاصة بالمتغير العشوائي المتقطع فهي كالآتي : [1]

$$E(x) = \mu = x_1 * P(X=x_1) + x_2 * P(X=x_2) + \ldots\ldots + x_k * P(X=x_k)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i)$$

أهم خواص التوقع الرياضي :

- $E(c) = c$
- $E(E(x)) = E(x)$
- $E(x \pm c) = E(x) \pm E(c) = E(x) \pm c$

[1] --*KHALDI Khaled ; Op-cit ; P 40.*

- (x و y كيفيان) $\Leftrightarrow E(x \pm y) = E(x) \pm E(y)$
- (x و y مستقلان) $\Leftrightarrow E(x.y) = E(x) \,.\, E(y)$

2-3-2/ التباين :

يقيس التباين تمركز أو تشتت قيم المتغير حول المتوسط (μ) فإذا كانت قيمته صغيرة دل ذلك على تمركز القيم حول المتوسط ، أما إذا كانت قيمه كبيرة فيدل ذلك على أن قيم المتغير مشتتة حول المتوسط (μ)، أما صيغته الرياضية الخاصة بالمتغير العشوائي المتقطع فهي كالآتي : [1]

$$V(x) = \delta^2 = E([x - E(x)]^2) = E[(x-\mu)^2]$$

$$= E(x^2) - \mu^2$$

$$\text{Et} \; ; \quad E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \,.\, P(X = x_i)$$

أهم خواص التباين : [2]

- $V(c) = 0$
- $V(cx) = c^2 \, V(x)$
- $V(c \pm x) = V(x)$

3-3-2/ الانحراف المعياري :

الانحراف المعياري عادة هو الجذر التربيعي للتباين و نكتب :

$$\sigma = \sqrt{V(x)}$$

---

[1] - مديحة السيد محمد موسى ، أساسيات الاحصاء الرياضي وتطبيقاتها، دار الكتاب الحديث، مصر ، 2008، ص 59.

[2] - علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص ص 196، 197.

2-3-4/ العزوم :

هي عبارة عن دوال رياضية تستعمل عادة في إيجاد معايير أو مقاييس إحصائية وصفية أو رياضية والهدف منها هو وصف أو التعريف بأشكال التوزيعات الرياضية وهي نوعان عزوم مركزية و عزوم لامركزية، حيث سنبرزها فيما يلي : [1]

العزوم المركزية : هي تدور حول المتوسط μ ، أما صيغتها الرياضية فهي كالآتي :

$$M_R = E[(x-\mu)^R] \quad \text{et } R = 1 ; 2 \ldots\ldots n$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i - \mu)^R . P(X = x_i)$$

و ينتج عن هذه الصياغة مايلي :

- $M_1 = E(x-\mu) = E(x) - \mu = 0$
- $M_2 = E[(x-\mu)^2] = V(x)$

العزوم اللامركزية أو الابتدائية : هي تدور حول الأصل أو المبدأ ، أما صيغتها الرياضية فهي كالآتي :

$$m'_R = E[(x)^R] \quad \text{et } R = 1 ; 2 \ldots\ldots n$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (x_i)^R . P(X = x_i)$$

و ينتج عن هذه الصياغة مايلي :

- $m'_1 = E(x)$
- $m'_2 = E[(x)^2] = V(x)$

1- مديحة السيد محمد موسى ، مرجع سبق ذكره، ص:(65-72) بتصرف.

2-3-5/ الدالة المولدة للعزوم :

إذا كان X متغير عشوائي متقطع فإن الدالة المولدة للعزوم تعرف كمايلي :[1]

$$m_x(t) = E(e^{tx})$$

$$= \sum_x e^{tx} P(X = x_i) \quad \text{et} \begin{cases} -s < t < s \\ s > 0 \end{cases}$$

ملاحظة : إنطلاقا من الدالة المولدة للعزوم بإمكاننا إستخراج العزوم الابتدائية وهذا بإشتقاق هذه الدالة R مرة وجعل t=0 عند نهاية الاشتقاق وفق الصيغة التالية :

$$m_R = \left.\frac{\partial^R m_x(t)}{\partial t^R}\right]_{t=0}$$

مثال تطبيقي : نواصل مع المثال السابق حيث كانت دالة كتلته الاحتمالية كالتالي :

$X=x_i$	0	1	2
$P(X=x_i)$	1/4	2/4	1/4

المطلوب :

- أحسب الأمل الرياضي و التباين و الانحراف المعياري ؟
- أحسب العزمين المركزيين الأول و الثاني، ثم الابتدائيين الأول و الثاني، ثم قارن بين العزم المركزي الثاني و التباين ؟
- أوجد الدالة المولدة للعزوم ، ثم إستخرج منها العزم الابتدائي الأول والثاني ؟

الحل :

حساب الأمل الرياضي :

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i P(X = x_i) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = 1$$

[1]- مديحة السيد محمد موسى ، مرجع سبق ذكره، ص 79.

حساب التباين :

$V(x) = E(x^2) - \mu^2$

$\Rightarrow E(X^2) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 . P(X = x_i) = 0^2\left(\frac{1}{4}\right) + 1^2\left(\frac{2}{4}\right) + 2^2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{6}{4}$

$\Rightarrow V(x) = E(x^2) - \mu^2 = \frac{6}{4} - 1^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

حساب الانحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

حساب العزوم المركزية :

العزم المركزي الأول (M_1) :

$$M_1 = E(x-\mu) = \sum_{i=1}^{k}(x-\mu)P(X = x_i)$$

$$= (0-1)\frac{1}{4} + (1-1)\frac{2}{4} + (2-1)\frac{1}{4} = \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} = 0$$

$$M_2 = E(x-\mu)^2 = \sum_{i=1}^{k}(x-\mu)^2 P(X = x_i)$$

$$= (0-1)^2\frac{1}{4} + (1-1)^2\frac{2}{4} + (2-1)^2\frac{1}{4} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

نلاحظ أن : $V(x) = M_2 = 0.5$

حساب العزوم الابتدائية :

$$m_1 = \sum_{i=1}^{k}(x_i)^1.P(X = x_i) = 0\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{2}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{4} + \frac{2}{4}$$

$$= 1$$

$$m_2 = \sum_{i=1}^{k} (x_i)^2 . P(X = x_i) = 0^2 \left(\frac{1}{4}\right) + 1^2 \left(\frac{2}{4}\right) + 2^2 \left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{2}{4} + \frac{4}{4} = \frac{6}{4}$$

حساب الدالة المولدة :

$$m_x(t) = \sum_x e^{tx_i} P(X = x_i) = e^{0.t} \left(\frac{1}{4}\right) + e^{1.t} \left(\frac{2}{4}\right) + e^{2.t} \left(\frac{1}{4}\right)$$
$$= \frac{1}{4} e^0 + \frac{2}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{2t} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} (2e^t + e^{2t})$$

إستخراج m_2 من الدالة المولدة للعزوم ويكون ذلك بعد حساب المشتق الثاني و جعل $t=0$ في نهاية المشتقة :

$$m_1 = \left.\frac{\partial^1 m_x(t)}{\partial t^1}\right]_{t=0} = \left.\frac{2}{4} e^t + \frac{1}{4} e^{2t}\right]_{t=0} = \frac{2}{4} e^0 + \frac{2}{4} e^{2.0} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = 1$$
$$m_2 = \left.\frac{\partial^2 m_x(t)}{\partial t^2}\right]_{t=0} = \left.\frac{2}{4} e^t + \frac{2}{4} e^{2t}\right]_{t=0} = \frac{2}{4} e^0 + \frac{4}{4} e^{2.0} = \frac{6}{4}$$

ثالثا : المتغير العشوائي المستمر و قانون توزيعه الاحتمالي

3-1/ قانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر :

يقال أن للمتغير العشوائي X توزيعا متصلا (مستمرا) إن وجدت دالة غير سالبة $f(x)$ معرفة على الخط الحقيقي R بحيث أنه لأي فترة $A \subseteq R$ يكون[1] : $P(X \in A) = \int_A f(x)dx$

و من الأمثلة الخاصة بالمتغير العشوائي المستمر هي :

- الأوزان و الأطوال
- الفترة الزمنية لاستغراق عملية جراحية وغيرها

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص ص 181، 182.

أما قانون توزيعه الاحتمالي أو دالة كثافته الاحتمالية $f(x)$ فهي معرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية ، و تكون كذلك إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان :

- $F(x) \geq 0 \quad \forall x \in \Re$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$

ونعرف إحتمال أن يأخذ المتغير العشوائي (X) قيم محصورة بين a و b أي في المجال $[a \quad b]$ *كمايلي:*

$$P(a \leq x \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$$

التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للمتغير المستمر :

إن التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية يختلف عن التمثيل البياني لدالة الكتلة الاحتمالية ، و لتوضيح ذلك نأخذ المثال التالي :

مثال : ليكن المتغير العشوائي ذو الدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

المطلوب : أثبت أن $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية و مثلها بيانيا .

الحل : حتى تكون $f(x)$ دالة كثافة إحتمالية لابد من تحقق الشرطان السابقان.

الشرط الأول : هل $f(x) \geq 0$ ؟

من البيانات نلاحظ أنه مهما كانت قيم (x) فإن $f(x) \geq 0$.

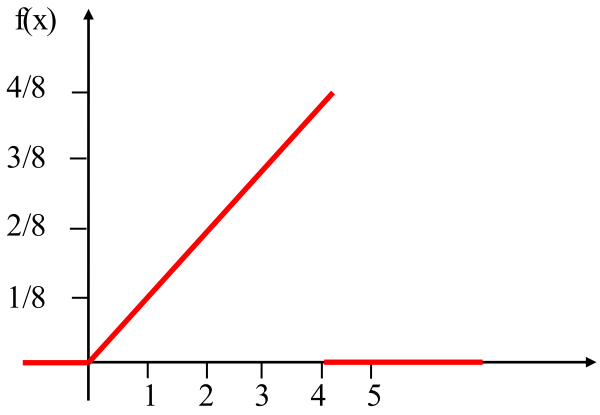
الشرط الثاني : هل $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1$ ؟

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{0} f(x)\, dx + \int_{0}^{4} f(x)\, dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\, dx + \int_{0}^{4} \frac{x}{8}\, dx + \int_{4}^{+\infty} 0\, dx$$

$$= 0 + \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}x^2\right)\Big]_0^1 + 0 = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2}\right)(16) = 1$$

إذن الشرط الثاني محقق و منه f(x) دالة كثافة إحتمالية و تمثيلها البياني يكون كالآتي :



2-3/ دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي مستمر :

هي دالة متصلة على مجموعة الأعداد الحقيقية و تعرف كما يلي : [1]

$$F(x) = P(X \leq x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$$

و مع إفتراض أن الدالة F(x) قابلة للاشتقاق فإن دالتها المشتقة هي دالة الكثافة الاحتمالية و نكتب :

$$\frac{\partial F(x)}{\partial x} = f(x)$$

التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي للمتغير المستمر :

إن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي مستمر يختلف عن التمثيل البياني لدالة التوزيع التراكمي لمتغير متقطع ، و لتوضيح ذلك نعود إلى المثال السابق حيث نقوم بتحديد دالة التوزيع التراكمي ثم نقوم بتمثيلها بيانيا :

دالة الكثافة الاحتمالية كانت كمايلي :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{8} & 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

[1] -GHORBANZADEH . D ; *Probabilités : Exercices Corriges ; Edition Technip ; 1998 ; Paris : P 15.*

البحث عن الدالة F(x) :

- عندما يكون (x<0) فإن :
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ dx = 0$$

- عندما يكون (0≤x <4) فإن :
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{x} f(x)dx$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{x} \frac{x}{8}\ dx = 0 + \frac{1}{16}x^2\Big]_0^x = \frac{x^2}{16}$$

- لما (4≤x <+∞) فإن:
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{4} f(x)dx + \int_{4}^{+\infty} f(x)dx$$

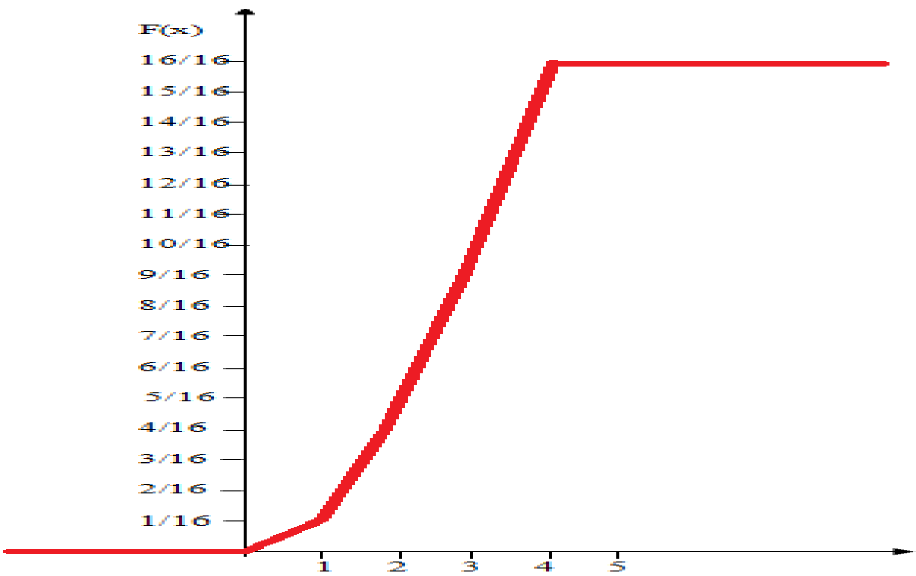
$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\ dx + \int_{0}^{4} \frac{x}{8}\ dx + \int_{4}^{+\infty} 0\ dx$$

$$F(x) = 0 + \frac{1}{16}x^2\Big]_0^4 + 0 = \frac{1}{16}(4)^2 = 1$$

و منه F(x) هي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \dfrac{x^2}{16} & 0 \le x < 4 \\ 1 & x \ge 4 \end{cases}$$

تمثيلها البياني :



3-3/ بعض الخصائص العددية لقانون التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر

سنعرض فيما يلي بعض المقاييس التي ترتبط بالمتغير العشوائي المستمر سواءا كانت من مقاييس النزعة المركزية أو مقاييس التشتت أو حتى الشكل.

3-3-1/ التوقع الرياضي (الأمل الرياضي) :

إن التوقع الرياضي أو الأمل الرياضي لمتغير عشوائي مستمر يكتب بالصياغة الرياضية التالية :

$$\mu = E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x) dx$$

3-3-2/ التباين :

إن التباين لمتغير عشوائي مستمر يكتب بالصياغة الرياضية التالية :

$$V(x) = \delta^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2\, f(x) dx$$

3-3-3/ العزوم :

للمتغير العشوائي المستمر صنفان من العزوم و هما العزوم المركزية و العزوم اللامركزية أو الابتدائية:[1]

- **العزوم المركزية** : إن العزوم المركزية لمتغير عشوائي مستمر تكتب بالصياغة الرياضية التالية :

$$M_R = E(x - \mu)^R = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^R\, f(x) dx \quad \text{et } R = 1; 2 \ldots n$$

- **العزوم اللامركزية (الابتدائية)** : إن العزوم اللامركزية لمتغير عشوائي مستمر تكتب بالصياغة الرياضية التالية :

[1]- مجدي الطويل ، الاحتمالات : النظرية والتطبيق، دار النشر للجامعات، مصر ، 2009، ص 103.

$$m'_R = E(x)^R = \int_{-\infty}^{+\infty} (x)^R f(x)dx \quad \text{et } R = 1; 2 \dots n$$

3-3-3/ الدالة المولدة للعزوم :

إذا كان X متغير عشوائي مستمر فإن الدالة المولدة للعزوم تعرف كما يلي : [1]

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

مثال تطبيقي : لتكن دالة الكثافة الاحتمالية التالية :

$$f(x) = \begin{cases} x & 0<x\leq 1 \\ 2-x & 1\leq x<2 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

المطلوب : - أوجد التوقع الرياضي و التباين ؟

- أوجد العزمين المركزيين الأول و الثاني، ثم الابتدائيين الأول و الثاني ؟
- أوجد الدالة المولدة للعزوم ؟

الحـــل :

حساب التوقع الرياضي :

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{2} x\, f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

[1] - علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 220.

$$= \int_{-\infty}^{0} 0\ (x)dx + \int_{0}^{1} x\ (x)dx + \int_{1}^{2} x\ (2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} 0\ f(x)dx$$

$$E(x) = \int_{0}^{1} x^2\ dx + \int_{1}^{2} x\ (2-x)dx = \frac{1}{3}x^3\Big]_0^1 + x^2 - \frac{1}{3}x^3\Big]_1^2 = \frac{1}{3}$$

حساب التباين :

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(x))^2\ f(x)dx$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{0}(x - E(x))^2\ f(x)dx + \int_{0}^{1}(x - E(x))^2\ f(x)dx + \int_{1}^{2}(x - E(x))^2\ f(x)dx + \int_{2}^{+\infty}(x - E(x))^2\ f(x)dx +$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{0}(x - \tfrac{1}{3})^2\ \ 0\ dx + \int_{0}^{1}(x - \tfrac{1}{3})^2\ x\ dx + \int_{1}^{2}(x - \tfrac{1}{3})^2\ (2 - x)\ dx + \int_{2}^{+\infty}(x - \tfrac{1}{3})^2\ 0\ dx +$$

$$V(x) = \int_{0}^{1}(x - \tfrac{1}{3})^2\ x\ dx + \int_{1}^{2}(x - \tfrac{1}{3})^2\ (2 - x)\ dx$$

$$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{2}{9}x^3 + \frac{1}{9}x\Big]_0^1 + \ \frac{-x^4}{4} + \frac{8}{6}x^3 - \frac{11}{18}x^2 + \frac{2}{9}x\Big]_1^2 = \frac{260}{36}$$

حساب العزم المركزي الأول :

$$M_1 = E(x - \mu)^1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)\ f(x)dx$$

$$M_1 = \int_{-\infty}^{0}\left(x - \tfrac{1}{3}\right) f(x)dx + \int_{0}^{1}\left(x - \tfrac{1}{3}\right) f(x)dx + \int_{1}^{2}\left(x - \tfrac{1}{3}\right) f(x)dx + \int_{2}^{+\infty}\left(x - \tfrac{1}{3}\right) f(x)dx$$

$$M_1 = \int_{-\infty}^{0}\left(x-\frac{1}{3}\right)0dx + \int_{0}^{1}\left(x-\frac{1}{3}\right)x\,dx + \int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty}\left(x-\frac{1}{3}\right)0\,dx$$

$$M_1 = \int_{0}^{1}\left(x-\frac{1}{3}\right)x\,dx + \int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{3}\right)(2-x)dx$$

$$M_1 = \int_{0}^{1} x^2 - \frac{1}{3}x\ \ dx + \int_{1}^{2} -x^2 + \frac{7}{3}x - \frac{2}{3}dx$$

$$M_1 = \frac{x^3}{3} - \frac{1}{6}x^2\Big]_0^1 + \left(\frac{-x^3}{3}\right) + \frac{7}{6}x^2 - \frac{2}{3}x\Big]_1^2 = \frac{4}{6}$$

حساب العزم المركزي الثاني : وجدنا سابقا أن $M_2 = V(X)$

حساب العزم الابتدائي الأول :

$$m'_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x)^1\, f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\, f(x)dx + \int_{0}^{1} x\, f(x)dx + \int_{1}^{2} x\, f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x\, f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x\,(0)dx + \int_{0}^{1} x\,(x)dx + \int_{1}^{2} x\,(2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} x\,(0)dx$$

$$= \int_{0}^{1} x^2\ dx + \int_{1}^{2} 2x - x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big]_0^1 + x^2 - \frac{x^3}{3}\Big]_1^2 = 1$$

حساب العزم الابتدائي الثاني :

$$m'_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x)^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 f(x)dx + \int_{0}^{1} x^2 f(x)dx + \int_{1}^{2} x^2 f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2 f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} x^2 (0)dx + \int_{0}^{1} x^2 (x)dx + \int_{1}^{2} x^2 (2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} x^2 (0)dx$$

$$= \int_{0}^{1} x^3 dx + \int_{1}^{2} 2x^2 - x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Big]_0^1 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\Big]_1^2 = \frac{7}{6}$$

حساب الدالة المولدة للعزوم :

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} f(x)dx + \int_{0}^{1} e^{tx} f(x)dx + \int_{1}^{2} e^{tx} f(x)dx + \int_{2}^{+\infty} e^{tx} f(x)dx$$

$$m_x(t) = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} (0)dx + \int_{0}^{1} e^{tx} (x)dx + \int_{1}^{2} e^{tx} (2-x)dx + \int_{2}^{+\infty} e^{tx} (0)dx$$

$$m_x(t) = \int_{0}^{1} xe^{tx} dx + \int_{1}^{2} 2e^{tx} - xe^{tx} dx$$

$$m_x(t) = \int_0^1 xe^{tx}\,dx + \int_1^2 2e^{tx}\,dx - \int_1^2 xe^{tx}$$

من أجل البحث عن التكامل نستخدم التكامل بالتجزئي كالآتي :

نسمي ($x=v$) ونسمي ($e^x=u$) فنحصل على ما يأتي :

$$\int xe^{tx} = xe^{tx} - \int e^{tx}\,dx$$

إذن :

$$m_x(t) = xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^{tx}\,dx + 2\int_1^2 e^{tx}\,dx - xe^x]_1^2 + \int_1^2 e^{tx}\,dx$$

$$m_x(t) = xe^{tx}]_0^1 - e^{tx}]_0^1 + 2e^{tx}]_1^2 \quad - xe^{tx}]_1^2 + e^{tx}]_1^2$$

$$m_x(t) = e^t - (e^t - 1) + (2e^{2t} - 2e^t) - (2e^{2t} - e^t) + (e^{2t} - e^t)$$

$$m_x(t) = 1 - 2e^t + e^{2t}$$

المحور الثالث

قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

المحور الثالث : قوانين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة

تمهيد :

بعدما تطرقنا في المحور الثاني إلى المتغير العشوائي و أنواعه والتي ينقسم فيها إلى متغير عشوائي متقطع وآخر مستمر سنقوم في هذا المحور بعرض بعض التوزيعات الاحتمالية الخاصة والتي تستخدم بشكل واسع في التطبيقات الاحتمالية والإحصائية، وبما أن هذه التوزيعات تتبع نوع المتغير فهناك نوعان من التوزيعات الخاصة، توزيعات احتمالية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعا متقطعا وتسمى بالتوزيعات الاحتمالية المتقطعة و توزيعات احتمالية يتوزع متغيرها العشوائي توزيعا مستمرا وتسمى بالتوزيعات الاحتمالية المستمرة.

نظرا للعدد الكبير لهذه التوزيعات سنقوم بتقسيمها على محورين، هذا المحور سنخصصه للتوزيعات الاحتمالية المتقطعة أما التوزيعات الاحتمالية المستمرة فسنعرضها في المحور القادم.

أولا : التوزيع المنتظم المنفصل(المنقطع) Discrete Uniform Distribution

هو من أبسط التوزيعات المنفصلة ، حيث يستخدم خاصة في التجارب التي تتضمن نتائجها نفس فرضية الحدوث مثل تجربة سحب بطاقة من 20 بطاقة حيث يمثل المتغير العشوائي نوع البطاقة المسحوبة في تجربة إلقاء زهرة نرد مع أن X يمثل الرقم الذي يظهر من خلال هذه التجربة.

1-1/ دالة كتلة الاحتمال لمتغير منتظم منقطع :

إذا كان (X) متغير عشوائي يتوزع توزيعا منتظما منقطع إذا كانت كتلته الاحتمالية معرفة كما يلي : [1]

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{N} & x = 1; 2; 3 \ldots . n \\ 0 & \text{خلاف ذلك} \end{cases}$$

حيث N هو عدد صحيح موجب.

و حتى نقول عن الدالة $P(X=x_i)$ أنها دالة كتلة إحتمال إذا تحققت الشروط التالية :

1/ $\forall X \in R \qquad 0 \leq P(X=x_i) \leq 1$

2/ $\displaystyle\sum_{x=1}^{n} P(X = xi) = \sum_{x=1}^{n} \frac{1}{N} = N * \frac{1}{N} = 1$

2-1/ دالة التوزيع التراكمي لمتغير منتظم منقطع :

$$F(X)=P(X \leq x_k)=\sum_{k=1}^{x} P(X = x_i) = \sum_{k=1}^{x} \frac{1}{N} = \frac{x}{N}$$

Et x=1 ;2…n

و يمكن كتابة F(X) كما يلي : [2]

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 309.

2- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 310.

$$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \frac{X}{N} & x=1,2\ldots.N-1\\ 1 & x\geq N\end{cases}$$

1-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي المنتظم المنقطع :

1-3-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (X) يتبع التوزيع المنتظم المنقطع كمايلي :

$$X \longrightarrow U_{(1\ldots\ldots.N)}$$

$$E(x)=\sum_{X=1}^{N} x\,\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{x=1}^{N} x=\frac{1}{N}\left(\frac{N(N+1)}{2}\right)=\frac{N+1}{2}$$

1-3-2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير (X) يتبع التوزيع المنتظم المتقطع كمايلي :

$$V_{(X)}=E_{(X^2)}-(E_{(X)})^2$$

$$\Rightarrow E(x^2)=\sum_{X=1}^{N} x^2\,\frac{1}{N}=\frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N} X^2$$

$$\Rightarrow E(x^2)=\frac{1}{N}\left[\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}\right.$$

إذن :

$$V(x)=E(x^2)-\left(E(x)\right)^2=\frac{(N+1)(2N+1)}{6}-\left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$

$$\Rightarrow \mathbf{V(x)=\frac{N^2-1}{12}}$$

3-3-1/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الصياغة الرياضية للدلة المولدة للعزوم لمتغير (X) يتبع التوزيع المنتظم المتقطع كمايلي :[1]

$$m_x(t) = E(e^{tx}) = \sum_{X=1}^{N} e^{tx}\frac{1}{N} = \frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N} e^{tx}$$

نضع (e^t=y) فنجد :

$$m_x(t) = \frac{1}{N}\sum_{X=1}^{N} Y^X = \frac{1}{N}[Y + Y^2 + Y^3 + \cdots + Y^N]$$

المجموع داخل القوس هو مجموع حدود متتالية هندسية حدها الأول Y و أساسها Y إذن :

$$m_x(t) = \frac{1}{N}[Y\frac{1-Y^N}{1-Y}] = \frac{e^t}{N}[\frac{1-e^{Nt}}{1-e^t}] = \frac{e^t}{N}[\frac{e^{Nt}-1}{e^t-1}$$

مثال : اوجد التوزيع المنتظم المتقطع لعينات عشوائية حجمها 04 تم إختيارها من 06 طلاب ؟

ثم أوجد دالة التوزيع التراكمي و التوقع الرياضي ، ثم الدالة المولدة للعزوم ؟

الحل : الحالات الكلية الممكنة من هذا السحب هو :

$$C_6^4 = \frac{6!}{4!\,2!} = 15$$

إذن دالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع المنتظم المتقطع هي :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{1}{15} & x = 1,2 \ldots..15 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ودالة التوزيع التراكمي F(x) هي :

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص ص 311، 312.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{15} & 1 \leq x < 2 \\ \frac{2}{15} & 2 \leq x < 3 \\ & \dots. \\ & \dots \\ & \dots \\ \frac{14}{15} & 14 \leq x < 15 \\ \frac{15}{15} = 1 & x \geq 15 \end{cases}$$

حساب الأمل الرياضي :

$$E(x) = \sum_{x=1}^{N} x \frac{1}{N} = \frac{N+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$$

حساب التباين :

$$V(x) = \frac{N^2 - 1}{12} = \frac{15^2 - 1}{12} = \frac{56}{3}$$

حساب الدالة المولدة للعزوم :

$$m_x(t) = \frac{e^t}{N}\left[\frac{e^{Nt} - 1}{e^t - 1}\right] = \frac{e^t}{15}\left[\frac{e^{15t} - 1}{e^t - 1}\right]$$

ثانيا : توزيع بيرنولي

يعتبر توزيع بيرنولي من أبسط التوزيعات المتقطعة ، حيث يستعمل في التجارب التي تحمل نتيجتين ممكنتين فقط و هما متنافيتان ، مثل نتائج تجربة إلقاء قطعة نقد فإن النتيجة قد تكون وجه (F) أو رقم (P) ، أو عند سحب كرة من صندوق به m كرة حمراء و n كرة بيضاء ، أو تجربة إختيار مريض من بين الأشخاص الذين كانت عملياتهم الجراحية ناجحة أو فاشلة، فإذا رمزنا لإحتمال نجاح التجربة بـ P فإن إحتمال فشلها هو q=(1-P) .

ويكون المتغير العشوائي (x) يمثل نجاح التجربة أو فشلها ، بحيث يأخذ (x=0) إذا فشلت هذه التجربة و(x=1) إذا نجحت.

2-1/ دالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع توزيع بيرنولي:

إن دالة كتلة هذا الاحتمال الذي يتبع توزيع بيرنولي هي :[1]

$$P(X = x_i) = \begin{cases} P^X q^{1-X} & X = 0{,}1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \qquad \text{et } p+q=1$$

2-2/ دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي يتبع توزيع بيرنولي:

تكتب دالة توزيع تراكمي لمتغير عشوائي يتبع توزيع بيرنولي كما يلي :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ q & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

2-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بيرنولي :

2-3-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (X) يتبع توزيع بيرنولي كما يلي :

$$E(x) = \sum_{x=0}^{1} x\, P(X = x_i) = \sum_{x=1}^{1} x\, p^x q^{1-x} = 0p^0 q^{1-0} + 1p^1 q^{1-1}$$

$$\mathbf{E(x) = P}$$

2-3-2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير (X) يتبع توزيع بيرنولي كما يلي :

$$\mathbf{V_{(x)} = pq}$$

[1] - *DRESS . F ; Les Probabilités et La Statistique ; Edition DUNOD ; Paris ;2012 ; P 18*

2-3-3/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة للعزوم لمتغير (X) يتبع توزيع بيرنولي كما يلي :

$$\mathbf{m_x(t) = q + pe^t}$$

مثال تطبيقي :

أوجد القانون الاحتمالي للتجربة التالية مع تحديد ماذا يمثل x ، ثم أحسب كل من التوقع الرياضي والتباين، ثم أوجد الدالة المولدة للعزوم ، حيث التجربة تقول :

- إحتمال أن يتخرج طالب من جامعة البويرة هو 0.4

الحل :

بما أن للطالب حالتين هما إما النجاح أو الفشل ، فالمتغير العشوائي x يمكن أن يأخذ قيمتين هما (x=1) وهي تمثل نجاح الطالب (تخرجه) وإما (x=0) وهي فشل الطالب (رسوبه) ، و من هذه المعطيات يمكن تطبيق قانون التوزيع الاحتمالي لبرنولي وهو الموافق لهذه التجربة وقانوه يكتب كمايلي :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} (0.4)^X (0.6)^{1-X} & X = 0{,}1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ومنه يمكن حساب التوقع الرياضي و التباين و الدالة المولدة للعزوم إنطلاقا من العلاقات السابقة ، حيث :

$$E(x) = P = 0.4$$

$$V(x) = pq = (0.4)(0.6) = 0.24$$

$$m_x(t) = q + pe^t = (0.6) + (0.4)e^t$$

ثالثا : التوزيع ذي الحدين (الثنائي)

يعتبر من أهم التوزيعات الاحتمالية المتقطعة لبساطة علاقته الرياضية وسهولة إستخدامه وحسابه، ويستعمل أساسا في التجربة العشوائية التي لها الخواص التالية : [1]

- تتضمن التجربة n من المحاولات .
- كل محاولة لها نتيجتان هما الفشل أو النجاح.
- إحتمال النجاح P ثابت من محاولة لأخرى ، وعليه فإن إحتمال الفشل هو $q=1-p$.
- أن تكون جميع المحاولات مستقلة عن بعضها البعض.

ومن الأمثلة عن هذه التجارب :

- ✓ إلقاء قطعة نقد مرات عديدة (N) مرة و المتغير العشوائي يمثل عدد الأوجه أو الصور (F) أو عدد الأرقام (P) الممكن الحصول عليها.
- ✓ إختيار عدد من عناصر في صندوق به m_1 عنصر تالف و m_2 عنصر سليم مع x يمثل مثلا عدد العناصر السليمة المستخرجة.

3-1/ دالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي:

من خلال ما ذكرنا سابقا إذا كان x يمثل عدد مرات نجاح التجربة فإن هذا المتغير يسمى بالمتغير ذي الحدين أو الثنائي و نكتب : $x \longrightarrow B(n,p)$

ودالة كتلته الاحتمالية هي : [2]

$$P(X = x_i) = \begin{cases} C_n^x p^x q^{n-x} & X \in N, n \neq 0, q = 1 - p \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

حتى تكون الدالة السابقة دالة كتلة إحتمالية لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين (الثنائي) لابد من تحقق الشرطان التاليان :

- ➢ $P(X=xi) \geq 0$
- ➢ $\sum_{x=0}^{n} P(X = x_i) = 1$

[1]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 316.

[2] - *CANTONI . E et autres ; Maitriser l'aléatoire : exercices résolus de probabilités et statistique ; Springer ; France ; 2006 ; P 23.*

الشرط الأول محقق لأن :

$$C_n^X \geq 0 \quad \text{et} \quad P^x \geq 0 \;\Rightarrow\; C_n^x\, P^X\, q^{n-x} \geq 0$$

الشرط الثاني :

$$\sum_{x=0}^{n} P(X = x_i) = \sum_{x=0}^{n} C_n^x\, P^x\, q^{n-x}$$

إن منشور نيوتن يكتب الصياغة التالية :[1]

$$(a+b)^n = C_n^0 a^0 b^n + C_n^1 a^1 b^{n-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + C_n^n a^n b^0$$

$$(a+b)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x a^x b^{n-x}$$

وبالتالي نلاحظ أنه يمكننا تطبيق هذا المنشور على قانون التوزيع الثنائي ليصبح :

$$(P+q)^n = \sum_{x=0}^{n} C_n^x P^x q^{n-x}$$

لدينا (q+p=1) وبالتالي يصبح :

$$\sum_{x=0}^{n} C_n^x P^x q^{n-x} = 1$$

ومنه يصبح الشرط الثاني كذلك محقق .

3–1/ دالة الاحتمال التراكمي لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الثنائي:

تكتب دالة توزيع تراكمي لمتغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين (الثنائي) كما يلي :[2]

$$F(x) = P(X \leq x_i) = \sum_{x=0}^{x} C_n^x P^x q^{n-x}$$

[1] -*CHAMOUN Chamoun ; Op-cit ; P129*

[2]- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الثاني، دار الكتب الأكاديمية ،مصر ، 2004 ، ط 01 ، ص 36.

كما يمكننا كتابتها وفق العلاقة التالية :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \sum_{x=0}^{n-1} C_n^x P^x q^{n-x} & x = 1,2 \ldots\ldots..n-1 \\ 1 & x \geq n \end{cases}$$

3-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الثنائي :

3-3-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (X) يتبع التوزيع الثنائي كما يلي :

$$E(x) = \sum_{x=0}^{n} x\, P(X = x_i) = \sum_{x=0}^{n} x\, C_n^x\, p^x q^{n-x}$$

$$\mathbf{E(x) = np}$$

3-3-2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير (X) يتبع توزيع الثنائي كما يلي :

$$\mathbf{V(x) = np(1-p) = npq}$$

3-3-3/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة للعزوم لمتغير (X) يتبع توزيع الثنائي كما يلي :

$$\mathbf{m_x(t) = (q + pe^t)^n}$$

مثال : إذا كان 10% من المصابين بمرض معين يتم شفائهم ، فإذا تم إختيار عينة من 06 أشخاص يعانون من هذا المرض ، فإذا إعتبرنا أن المتغير العشوائي (X) يمثل عدد الأشخاص الذين يتم شفائهم من هذا المرض .

- أوجد دالة هذا التوزيع ؟

- أوجد P(x=1) و P(2<x<5) و P(x>1) ؟
- أوجد E(x) و V(x) ؟
- أوجد الدالة المولدة للعزوم ؟

الحل : بما أن التجربة تحتمل نتيجتين فقط و الاختيار يكون لمجموعة عناصر فإننا نستخدم التوزيع الثنائي، حيث $X \longrightarrow B(6\ ;\ 0,1)$

إذا :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} C_6^x (0,1)^x\ (0,9)^{6-x} & X = 0,1, \dots .6 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

إيجاد (x=1)

$$P(x = 1)\ = C_6^1 (0,1)^1\ (0,9)^{6-1} = 0.354$$

إيجاد P(2<x<5)

$$P(2 < x < 5) = P(3 \leq x \leq 4) = \sum_{x=3}^{4} C_6^x (0,1)^x\ (0,9)^{6-x}$$

$$P(2 < x < 5) = C_6^3 (0,1)^3\ (0,9)^{6-3} + C_6^4 (0,1)^4\ (0,9)^{6-4}$$

$$P(2 < x < 5) = \frac{6!}{3!\,3!}(0.1)^3(0.9)^3 + \frac{6!}{4!\,2!}(0.1)^4(0.9)^2 = \cdots$$

حساب P(x>1)

$$P(x > 1) = 1 - P(x \leq 1) = 1 - [P(x = 0) + P(x = 1)]$$

$$P(x > 1) = 1 - [C_6^0 (0,1)^0\ (0,9)^{6-0} + C_6^1 (0,1)^1\ (0,9)^{6-1} = \cdots$$

حساب E(x)

$$E(x) = np = 6 * 0.1 = 6$$

حساب V(x)

$$V(x) = npq = 6(0.1)(0.9) = 5.4$$

حساب الدالة المولدة للعزوم $m_x(t)$

$$Mx(t) = (q+pe^t)^n = (0.9+0.1e^t)^6$$

رابعا : التوزيع الثنائي المتعدد :

إن التوزيع الثنائي المتعددهو تعميم للتوزيع الثنائي ، حيث أن التوزيع الثنائي يستعمل في التجارب التي تحتمل نتيجتين فقط (النجاح أو الفشل)، أما التوزيع الثنائي المتعدد فيعتمد على المجتمع الذي يتضمن K من العناصر المختلفة حيث ($K\geq2$) مع إستقلالية التجارب مع بعضها البعض ، وبالتالي نرمز للتجارب بـ (A_1 ;A_2 ;….. ;A_k) و إحتمالاتها بـ (P_1 ;P_2 ;….P_k) وبما أن الأحداث متنافية فإن مجموع إحتمالات هذه التجارب يساوي الواحد ($P_1+P_2+\ldots\ldots+P_k=1$).

وإذا كررنا هذه التجربة متعددة النتائج عدد n من المراتفيكون لدينا لكل حدث نتيجة متغيرة عشوائية تمثل عدد مرات وقوعه، ونرمز لهذه المتغيرات بـ (X_1 ;X_2 ;….. ;X_k)، حيث ($X_1+X_2+\ldots\ldots+X_k=n$) و بالتالي يحسب إحتمال الحدث المركب كمايلي : [1]

$$P(X_1 = x_1;\ X_2 = x_2; \ldots; X_k = x_k) = \frac{n!}{x_1!\,x_2!\ldots x_k!} P_1^{x_1} P_2^{x_2} \ldots P_k^{x_k}$$

4-1/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الثنائي المتعدد :

4-1-1/ التوقع الرياضي : بناءا على التوقع الرياضي للتوزيع الثنائي يمكننا إستخراج التوقع الرياضي للتوزيع الثنائي المتعدد و هو كالتالي : $E(x_i) = np_i$

$$\text{Et} \quad i=1 ;2 ;\ldots\ldots k$$

4-1-2/ التباين : بناءا على التباين الخاص بالتوزيع الثنائي يمكننا إستخراج تباين التوزيع الثنائي المتعدد و هو كالتالي : $V(x_i) = np_i(1-p_i)$

$$\text{Et} \quad i=1 ;2 ;\ldots\ldots k$$

---

[1]- بارا ج . ر، بيل أ ، ترجمة بن حلي ، مسائل في الإحصاء الرياضي، الهيئة القومية للبحث العلمي ، طرابلس، ليبيا ، 1975، ط 01، ص 23.

مثال : إذا كان في سوق ما تباع أربعة أصناف من القهوة، حيث أن الصنف الأول يستحوذ على 40% من مبيعات هذه السوق لهذه السلعة، أما الصنف الثاني فيستحوذ على 15% ، أما الصنف الثالث فيستحوذ على 20% ، أما الرابع فيستحوذ على 25% .

المطلوب : ما هو إحتمال أن يكون 20 شخص كعينة مختارة06 منهم اشتروا الصنف الأول، و 04 منهم اشتروا الصنف الثاني، و05 اشتروا الصنف الثالث و 05 اشتروا الصنف الرابع ؟

الحل : نفترض أن المستهلكين يشتروا هذه السلعة بأشكال مستقلة.

إذا إعتبرنا أن x يمثل عدد الأشخاص الذين يشترون الصنف (i) من القهوة و بالتالي نجد :

$$P_1=0.4 \quad ; \quad P_2=0.15 \quad ; \quad P_3=0.2 \quad ; \quad P_4=0.25$$

إذن :

$$P(X_1 = 6;\ X_2 = 4; X_3 = 5; X_4 = 5) = \frac{20!}{6!\,4!\,5!\,5!}\,0.4^6 0.15^4 0.2^5 0.25^5$$

خامسا : التوزيع فوق الهندسي

يستخدم هذا التوزيع مع المجتمعات الصغيرة ، حيث يأخذ فقط بعمليات السحب التي لا يمكننا فيها الارجاع ويطبق على مجتمع محدود يتضمن نوعين من العناصر فقط ، حيث أنه يأخذ عينة ثابتة يتم إختيارها بشكل متتال و بدون إعادة ، و الهدف من وراء هذه التجربة هو معرفة عدد عناصر أحد النوعين بالعينة المأخوذة.

5-1/ دالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع التوزيع فوق الهندسي :

لتوضيح هذه الدالة ننطلق من المثال التالي :

ليكن لدينا صندوق به N كرية و n يمثل العينة المسحوبة منه ، و في هذا الصندوق M كرة زرقاء و التي نعتبرها نجاح التجربة و (N-M) كرية حمراء ، فعند سحب العينة n و بدون إرجاع نعتبر أن x يمثل عدد الكريات الزرقاء المسحوبة وبالتالي (x=0,1,2,.....k) .

لدينا :

- C_N^n هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها إختيار n كرية من الكريات الكلية N.

- C_M^x هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها إختيار x كرية زرقاء من كل الكريات الزرقاء الموجودة M

- C_{N-M}^{n-x} هو عدد الطرق التي يمكن من خلالها إختيار الكريات الحمراء من مجموع الكريات الحمراء الموجودة في هذا الصندوق.

و بتطبيق قاعدة ضرب الاحتمال فإننا نكتب قانون كتلة الاحتمال للتوزيع فوق الهندسي كمايلي :[1]

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} & X = 0; 1; 2; \dots . n \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

وتكتب : $x \longrightarrow H\,(N\,;M\,;\,n)$

5-1/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع فوق الهندسي :

5-1-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (X) يتبع التوزيع فوق الهندسي كما يلي :

$$E(x) = \frac{M * n}{N}$$

5-1-1/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير (X) يتبع التوزيع فوق الهندسي كما يلي :

$$V(x) = \left(\frac{N-n}{N-1}\right) npq \qquad \text{et} \qquad P = \frac{M}{N}$$

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 328.

مثال :

نأخذ عينة من قسم فيها 03 طلبة من أجل تكوين لجنة ممثلة له و المتكون من 20 طالب ، حيث أن في هذا القسم 08 ذكور و الباقي إناث .

إذا كان X المتغير العشوائي يمثل عدد الذكور في هذه اللجنة .

- أوجد دالة التوزيع الخاصة بهذا المتغير ؟
- أوجد إحتمال أن يكون في اللجنة طالبين من جنس ذكر ؟

الحل : لدينا السحب بدون إرجاع و نتيجتين إما ذكر أو أنثى وبالتالي نطبق التوزيع فوق الهندسي.

$$P(X=x_i)=\begin{cases}\dfrac{C_8^x C_{20-8}^{3-x}}{C_{20}^3} & X=0;1;2;3\\ 0 & \text{ailleurs}\end{cases}$$

- حساب إحتمال أن يكون في اللجنة إثنين من الذكور :

$$P(X=2)=\frac{C_8^2 C_{20-8}^{3-2}}{C_{20}^3}=\frac{C_8^2 C_{12}^1}{C_{20}^3}$$

سادسا : التوزيع الهندسي

هو من أهم التوزيعات المتقطعة ، حيث يستخدم خاصة في التطبيقات الاحصائية المتعلقة بدراسة الاحصاء السكاني وهذا بدراسة معدلات النمو السكاني و معدلات الوفيات....إلخ.

إن التوزيع الهندسي يأخذ بنفس التجربة مع توزيع بيرنولي لكن بعدة محاولات و النتيجة من كل هذه المحاولات تكون إما بالفشل أو النجاح وتجرى هذه التجربة بعدة محاولات لحين الحصول على أول حالة نجاح ، وعلى إفتراض أن إحتمال النجاح ثابت في كل محاولة وهو P ، وكان المتغير العشوائي X يمثل عدد المحاولات المطلوبة لوقوع أول حالة نجاح فإن X يتوزع وفق التوزيع الهندسي ، ومن الأمثلة عن هذا التوزيع إلقاء قطعة نقد بعدة تكرارات حتى ظهور أول صورة.

1-6/ دالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الهندسي :

إن دالة الكتلة الاحتمالية للتوزيع فوق الهندسي تكتب كمايلي :[1]

$$P(X = x_i) = \begin{cases} pq^{x-1} & X = 1,2 \ldots \ldots \ldots \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1-6/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الهندسي :

1-1-6/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (X) يتبع التوزيع الهندسي كما يلي :

$$E(x) = \frac{1}{P}$$

1-1-6/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير (X) يتبع التوزيع الهندسي كما يلي :

$$V(x) = \frac{q}{P^2}$$

مثال تطبيقي :

يحتوي كيس على 05 كرات بيضاء و 03 سوداء ، نسحب من هذا الكيس كرة واحدة ثم نعيدها ونسحب مرة أخرى بنفس الطريقة.

إذا كان x متغير عشوائي يمثل عدد مرات سحب كرة بيضاء .

المطلوب : - ماذا يتبع المتغير العشوائي x ؟

- إنطلاقا من تحديد قانون التوزيع الخاص أوجد كل من التوقع الرياضي و التباين ؟

[1] -K.Redjdal ;Op-cit ; P 177.

الحل : من شروط التجربة هو سحب كرة واحدة مع تسجيل إن كانت بيضاء وهو يشبه توزيع بيرنولي، لكن بما أن هناك إرجاع (عدة محاولات) هنا يتوافق مع التوزيع الهندسي ، حيث :

– إحتمال سحب كرة بيضاء هو $5/8$ أي $P = 5/8$ و x يمثل تسجيل أو حالة ظهور كرة بيضاء ، أي (x=1,2....) ، ومنه xيتبع التوزيع الهندسي ونكتب :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} (\frac{5}{8})(1-\frac{5}{8})^{x-1} & X = 1,2 \dots\dots\dots \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

– حساب التوقع الرياضي : $E(x) = \frac{1}{P} = \frac{1}{5/8} = \frac{8}{5} = 1.6$

– حساب التباين : $V(x) = \frac{q}{P^2} = \frac{1-\frac{5}{8}}{(\frac{5}{8})^2} = \frac{192}{200} = 0.96$

سابعا : توزيع بواسون

يستخدم هذا التوزيع في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر في الفترات الزمنية المحددة، حيث هذه الفترات قد تكون ثابتة كالدقيقة أو الثانية أو اليوم أو الأسبوع ....إلخ، كما قد يستعمل في المسائل التي قد تتعلق بحدوث ظواهر في مناطق محددة ، هذه المناطق قد تكون مثلا صفحة في كتاب أو متر مربع في مساحة...إلخ.

ومن الأمثلة التي يطبق عليها توزيع بواسون هي عدد حوادث المرور في طريق معين خلال شهر أو أسبوع، كذلك عدد الأخطاء في صفحات كتاب، فمن خلال هذه الأمثلة نستطيع القول أن هذا التوزيع يستخدم في وصف سلوك الأحداث النادرة و التي يكون فيها فرصة النجاح صغير جدا.

7–1/ دالة كتلة الاحتمال لمتغير عشوائي يتبع توزيع بواسون :

نقول أن للمتغير العشوائي توزيع بواسون بمعلمة λ حيث $(\lambda>0)$ إذا كانت دالة كتلته الاحتمالية تكتب كمايلي :[1]

[1]– غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سبق ذكره، ص 257.

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{X!} & X = 0,1,2 \dots \dots \dots \infty \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

ونكتب : $x \longrightarrow P(\lambda)$

7-1/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بواسون :

7-1-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير (X) يتبع توزيع بواسون كما يلي :[1]

$$E(x) = \lambda$$

7-1-1/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير (X) يتبع توزيع بواسون كما يلي :

$$V(x) = \lambda$$

7-1-1/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة للعزوم لمتغير (X) يتبع توزيع بواسون كما يلي :

$$m_x(t) = \exp\left[\lambda\left(e^{t} - 1\right)\right]$$

مثال تطبيقي :

يتلقى مركز الحجز في شركة الخطوط الجوية الجزائرية في المتوسط 300 مكالمة هاتفية خلال ساعة.

المطلوب : - أي قانون سيتبعه المتغير العشوائي X الذي يعبر عن عدد المكالمات ؟ و لماذا ؟

- ماهو إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ما يلي :

أ- ثلاث مكالمات.

ب- على الأكثر مكالمتين.

[1]- غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سبق ذكره، ص 258.

الحل : من خلال المعطيات المتوفرة (عدد المكالمات خلال ساعة) فإننا سنعتمد على قانون بواسون، لأن هذا القانون يستعمل في المسائل التي تتعلق بحدوث الظواهر في الفترات الزمنية المحددة.

و قانونه يكتب كما يلي :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{X}}{X!} & x = 0,1,2 \ldots\ldots. \\ 0 & ailleur \end{cases} \qquad et \qquad \lambda=300$$

- حساب إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين ثلاث مكالمات :

60 د ———— 300

2 د ———— λ

$$\Rightarrow \lambda = \frac{600}{60} = 10$$

$$P(X = 3) = \frac{e^{-10}10^{3}}{3!} = 0.0076$$

- حساب إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين على الأكثر مكالتين:

$$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$$

$$P(X \leq 2) = \frac{e^{-10}10^{0}}{0!} + \frac{e^{-10}10^{1}}{1!} + \frac{e^{-10}10^{2}}{2!}$$

ثامنا : التقارب بين بعض التوزيعات المتقطعة

8-1/ تقريب التوزيع فوق الهندسي بتوزيع ذي الحدين (الثنائي) : [1]

يمكننا تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع ذي الحدين (الثنائي) وهذا عندما تكون N كبيرة بالمقارنة مع n و الذي من أجله لا يوجد فرق بين التجربة بدون إعادة أو مع الاعادة ، وبالتالي نقول أنه يمكننا تقريب التوزيع فوق الهندسي إلى التوزيع الثنائي إذا كانت : (N>50) و $\frac{n}{N} \leq 0,1$

ونكتب :

[1]– للاطلاع أكثر أنظر : *K.Redjdal ;Op-cit : p :(217-220)*

$$\frac{C_M^x C_{N-M}^{n-x}}{C_N^n} \qquad \rightarrow \qquad C_n^x P^x q^{n-x}$$

مثال تطبيقي :

في مستودع لقطع الغيار 100 قطعة ، 10 % منهم غير صالحة للاستخدام ، نقوم بسحب 10 قطع عشوائيا.

المطلوب :

– ما هو القانون الاحتمالي الخاص بهاذا التوزيع مع العلم أن إهتمام سحبنا هو عدد القطع الفاسدة (غير الصالحة للاستخدام) ؟

– لأي توزيع يمكننا تقريب هذا القانون الاحتمالي ؟

– إذا كانت شروط التقريب متوفرة طبق هذا التقارب من خلال حساب إحتمال سحب 05 قطع غيار غير صالحة ؟

الحل : من خلال المعطيات لدينا صنفين من قطع الغيار وكذلك السحب بدون إرجاع و بالتالي القانون الاحتمالي الملائم هو القانون التوزيعي لفوق الهندسي ، حيث عدد القطع غير الصالحة الاجمالية هو $M=NP=100(0.1)=10$ ونكتب :

$$P(X = x_i) = \begin{cases} \frac{C_{10}^x C_{90}^{10-x}}{C_{100}^{10}} & X = 0; 1; 2; \dots .10 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

– من خلال المعطيات نلاحظ أن N كبير و $\frac{n}{N} = \frac{10}{100} \leq 0,1$ وبالتالي يمكننا تقريب هذا التوزيع إلى التوزيع الثنائي.

– حساب إحتمال سحب 05 قطع غير صالحة :

أولا بواسطة التوزيع فوق الهندسي :

$$P(X = 5) = \frac{C_{10}^5 C_{90}^5}{C_{100}^{10}} = 0.0016$$

ثانيا بواسطة التوزيع الثنائي :

$$P(X = 5) = C_{10}^5 \ (0.1)^5 (0.9)^5 = 0.0014$$

8-1/ تقريب التوزيع الثنائي إلى توزيع بواسون :

نعتبر توزيع بواسون حالة خاصة في التوزيع الثنائي وذلك عندما يكون إحتمال النجاح صغير جدا (الاحتمال يقترب من الصفر) وعدد المحاولات كبير جدا ($n \longrightarrow \infty$) .

إذا كان x متغير عشوائي يتوزع وفق التوزيع الثنائي وكانت :[1]

- عدد المحاولات كبير ($N \geq 50$).
- إحتمال النجاح صغير جدا ($P \leq 0.1$).
- حاصل الضرب (np) أقل من 5 ، ($np \leq 5$).

إنطلاقا من الشروط السابقة يمكن أن يتوزع x توزيعا قريبا من توزيع بواسون ونكتب :

$$P(X = x_i) = C_n^x\, P^x\, q^{n-x} \cong \frac{\lambda^x}{x!}\, e^{-\lambda}$$

$$\text{et} \qquad \lambda = np$$

مثال تطبيقي : آلة إنتاج تنتج قطع منتجة ، 10 % منهم فاسدة .

- أوجد إحتمال أن تكون من بين 50 قطع منتجة 10 فاسدة وهذا بالاعتماد على تقارب التوزيعين الثنائي إلى بواسون ؟

الحل :

أولا بواسطة التوزيع الثنائي :

$$P(X = 10) = C_{50}^{10}\,(0.1)^{10}(0.9)^{40} = 0.0151$$

ثانيا بواسطة توزيع بواسون :

لدينا $\lambda = np = (50)(0.1) = 5$

$$P(X = 10) = \frac{(5)^{10}}{10!}\, e^{-5} = 0.0181$$

نلاحظ أن قيم الاحتمال متقاربة ، لكن كلما كان إحتمال النجاح صغير جدا (الاحتمال يقترب من الصفر) وعدد المحاولات كبير جدا ($n \to \infty$) كان تقارب في قيم الاحتمال بواسطة التقارب.

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص 348.

المحور الرابع
قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

المحور الرابع : قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

تمهيد :

سنتطرق في هذا المحور للصنف الثاني من التوزيعات الاحتمالية الخاصة وهي التوزيعات الاحتمالية المستمر، هذا الصنف له مجموعة من التوزيعات سنبدؤها بالنوع البسيط منه وهو التوزيع المستمر المنتظم، ثم نتبعه بالتوزيع الهام والشامل الاستعمال و هو التوزيع الطبيعي ، ثم سنعرض دوال بيتا وقاما الهامتين واللتان تستخدمان في مجموعة من التوزيعات مثل توزيع كاي-مربع وتوزيع فيشر و توزيع ستيودنت، كما سنقوم كذلك بتوضيح كيفية إستخراج بعض المقاييس المستخدمة في هذه التوزيعات مثل التوقع الرياض و التباين و الدالة المولدة للعزوم إن وجدت ، أما قبل نهاية المحور سنقوم بعرض بعض التقارب الموجود بين بعض التوزيعات سواءا كانت من نفس الصنف أو من الصنفين المختلفين.

المحور الرابع : قوانين التوزيعات الاحتمالية المستمرة

أولا : التوزيع المنتظم المتصل (المستمر)

إذا كان x متغير عشوائي معرف على المجال [a b] فإن دالة كثافته الاحتمالية تكون كالتالي :[1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & a \le x \le b \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

ونكتب : $x \longrightarrow U(a\ ;b)$

1-1/ دالة التوزيع التراكمي للتوزيع المنتظم المتصل :

تعطى دالة التوزيع التراكمي لمتغير يتبع توزيع متصل كمايلي :[2]

$$F(x) = P(X \le x) = \int_a^x \frac{1}{b-a} dx = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \dfrac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x \ge b \end{cases}$$

1-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع المنتظم المتصل :

1-3-1/ التوقع الرياضي :

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع توزيع منتظم متصل كمايلي :

$$E(x) = \int_a^b xf(x)dx = \int_a^b x\frac{1}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx$$

---

[1]-[2]- غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سبق ذكره، ص279.

$$E(x) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}\right) = \frac{b+a}{2}$$

$$E(x) = \frac{b+a}{2}$$

1-3-2/ التباين :

تستخرج الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع توزيع منتظم متصل كمايلي :

$$V(x) = E(x^2) - (E(x)^2)$$

$$V(x) = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a} dx - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2 = \frac{1}{b-a}\left(\frac{x^3}{3}\right|_b^a - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$V(x) = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^3 - a^3}{3}\right) - \left(\frac{b+a}{2}\right)^2$$

$$V(x) = \frac{(a-b)^2}{12}$$

1-3-3/ الدالة المولدة للعزوم :

تستخرج الصياغة الرياضية للدالة لمتغير يتبع توزيع منتظم متصل كمايلي :

$$m_x(t) = \int_a^b e^{xt} f(x) dx = \int_a^b e^{xt} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b e^{xt}$$

$$m_x(t) = \frac{1}{b-a}\left|\frac{e^{xt}}{t}\right|_a^b = \frac{1}{b-a}\left(\frac{e^{bt} - e^{at}}{t}\right)$$

$$m_x(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b-a)} \qquad \text{et } t>0$$

مثال تطبيقي :

ليكن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع المنتظم المتصل ، حيث : $-2 \leq x \leq 2$

المطلوب:

- حساب التوقع الرياضي و التباين والدالة المولدة للعزوم ؟

- حساب الاحتمال التالي : $p(x<1)$ ؟

الحل :

$$E(x) = \frac{b + a}{2} = \frac{2 - 2}{2} = 0$$

$$V(x) = \frac{(a - b)^2}{12} = \frac{(-2 - 2)^2}{12} = \frac{16}{12}$$

$$m_x(t) = \frac{e^{bt} - e^{at}}{t(b - a)} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{t(2 - (-2))} = \frac{e^{2t} - e^{-2t}}{4t}$$

$$p(x < 1) = \int_{-2}^{1} \frac{1}{4}\, dx = \frac{1}{4}x\Big]_{-2}^{1} = \frac{1}{4} - \left(-\frac{2}{4}\right) = \frac{3}{4}$$

ثانيا : التوزيع الطبيعي

يعد التوزيع الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية في الإحصاء ، ويعود ذلك للأسباب التالية :

- كثير من الظواهر التي تظهر في التجارب العملية تتوزع توزيعا طبيعيا .
- يمكن تقريب أغلب التوزيعات المتقطعة أو المستمرة إلى التوزيع الطبيعي.

أما دالة كثافته الاحتمالية فتكتب وفق الصيغة التالية : [1]

$$f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$$

[1] - دومينيك سالفاتور، الإحصاء و الاقتصاد القياسي ، ترجمة سعدية حافظ منتصر،الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة، 2011، ص 65.

حيث : x متغير عشوائي حقيقي $(-\infty<x<+\infty)$

e هو الأساس اللوغارتمي الطبيعي $(e=2{,}718)$

π هو مقدار ثابت $(\pi=3{,}1416)$

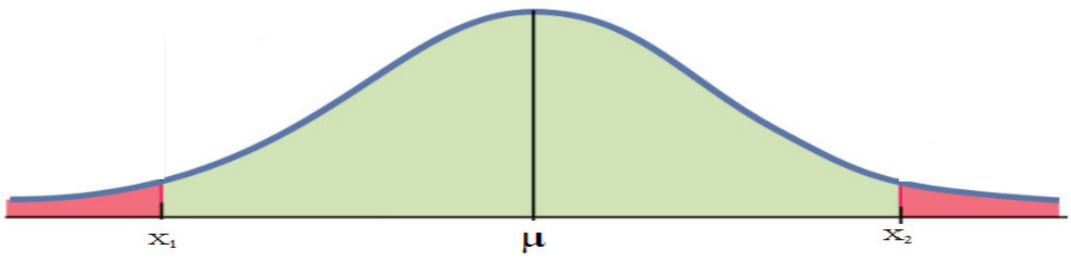
δ هو الانحراف المعياري و هو قيمة موجبة.

و منه نقول أن دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي X الخاضع للتوزيع الطبيعي على أساس القيمتين $(\mu;\delta)$ ونكتب : $x \longrightarrow N(\mu;\delta^2)$

2-1/ التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي:

منحنى التوزيع الطبيعي ناقوس الشكل ومتماثل حول المتوسط ويمتد طرفاه إلى مالا نهاية من الجانبين دون أن يلامسا المحور الأفقي ، وبالتحديد إن تمثيل دالة الكثافة متماثل حول $(X=\mu)$ ، أي أن

$f(\mu-x)=f(\mu+x)$ ، وهذا يعني أن المتوسط يساوي المنوال ونقطتي الانقلاب في منحنى الدالة هما $(x_1=\mu-\delta)$ و $(x_2=\mu+\delta)$ وأنهما يقعان على بعد ثابت على يمين ويسار المنوال.



2-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي :

2-3-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي :

$$E(x) = \mu$$

2-3-2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي :

$$V(x) = \delta^2$$

2-3-2/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي كما يلي :

$$m_x(t) = e^{\mu t+\frac{t^2\delta^2}{2}}$$

ثالثا : التوزيع الطبيعي المعياري

إن إيجاد الدالة الأصلية للدالة $f(x) = \frac{1}{\delta\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-1}{2}(\frac{x-\mu}{\delta})^2}$ صعب جدا ولذلك غالبا ما يتم الاعتماد على النشر المحدود لسلسلة تايلور في جوار نقط متتالية ، ولأجل ذلك تم وضع جداول خاصة بقيم التوزيع الطبيعي و ذلك بعد معرفة قيم المعلمتين μ وδ اللذان يختلفان ويتغيران من متغير عشوائي لآخر وهذا شبه مستحيل ، لأنه يجب علينا تكوين ما لانهاية من الجداول حسب قيم μ وδ ، ولهذا أختيرت قيمتين وحيدتين لـــμ وδ حيث $\mu=0$ و $\delta=1$ لتعويض جميع المتغيرات العشوائية إلى متغير عشوائي واحد ذو وسيط ($\mu=0$) و إنحراف معياري ($\delta=1$) وبالتالي يمكن تلخيص كل الجداول في جدول واحد للتوزيع الطبيعي والذي يتم من خلاله حساب جميع الاحتمالات الممكنة.

3-1/ دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي المعياري :

بعدما كان عندنا في التوزيع ال $X \longrightarrow N(\mu ; \delta_2)$ نضع $T = \frac{x-\mu}{\delta}$

ليصبح لدينا : $T \longrightarrow N(0 ;1)$

ومنه دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري تعطى كما يلي :[1]

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-T^2}{2}}$$

1- مجدي الطويل، مرجع سبق ذكره، ص 146.

3-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري :

1-3-3/ التوقع الرياضي :

تستخرج الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي :

لدينا $T = \frac{x-\delta}{\delta}$ إذن :

$$E(T) = E\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}E(x-\mu) = \frac{1}{\delta}[E(x)-\mu] = 0$$

$$E(T) = 0$$

2-3-3/ التباين :

تستخرج الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع التوزيع الطبيعي المعياري كما يلي :

لدينا $T = \frac{x-\delta}{\delta}$ إذن :

$$V(T) = V\left(\frac{x-\mu}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta^2}V(x-\mu) = \frac{1}{\delta^2}[V(x)] = \frac{1}{\delta^2}[\delta^2] = 1$$

$$V(T) = 1$$

مثال تطبيقي :

إذا علمت أن فترة حياة جهاز آلي يخضع لتوزيع طبيعي بوسيط (μ=10) سنوات و إنحراف معياري (δ=2) سنوات .

- ماهو إحتمال أن يصل عمر الجهاز مدة 15 سنة ؟
- ما هو إحتمال أن تكون مدة حياة هذا الجهاز مابين 12 و 15 سنة ؟
- ما هو إحتمال أن تكون مدة حياة هذا الجهاز مابين 5 و 8 سنوات ؟

الحل :

إحتمال أن يصل عمر الجهاز 15 سنة :

$$P(x \le 15) = P\left(\frac{x-\mu}{\delta} \le \frac{15-\mu}{\delta}\right) = P\left(T \le \frac{15-10}{2}\right)$$

$$P(x \le 15) = P(T \le 2.5) = \Phi(2.5)$$

بعدها نقوم من إستخراج $\Phi(2.5)$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وفق الجدول التالي :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952

$\Phi(2.5)$

إذن :
$$P(x \le 15) = P(T \le 2.5) = 0.9938$$

إحتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 12 و 15 سنة :

$$P(12 \le x \le 15) = P\left(\frac{12-10}{2} \le T \le \frac{15-10}{2}\right)$$

$$P(12 \le x \le 15) = P(1 \le T \le 2.5) = \Phi(2.5) - \Phi(1)$$

$$P(12 \le x \le 15) = 0.9938 - 0.8413 = 0.1525$$

إحتمال أن يتراوح عمر الجهاز ما بين 5 و 8 سنوات :

$$P(5 \le x \le 8) = P\left(\frac{5-10}{2} \le T \le \frac{8-10}{2}\right)$$

$$P(5 \le x \le 8) = P(-2.5 \le T \le -1) = \Phi(-1) - \Phi(-2.5)$$

لدينا : $\Phi(-1) = 1 - \Phi(1)$

$$P(5 \leq x \leq 8) = (1 - 08413) - (1 - 0.9938) = 0.1525$$

رابعا : دوال التوزيعات بيتا (Betta) وقاما (Gamma)

تعتبر الدالتان بيتا و قاما دالتان هامتان ، حيث تلعب دور كبير في التعريف بالتوزيعات الاحتمالية المستمرة الباقية مثل توزيع كاي مربع (χ^2) و توزيع ستودنت (t) و توزيع فيشر (F).

4-1/ دالة قاما الرياضية : [1]

تعرف دالة قاما الرياضية وفق الصياغة الرياضية التالية :

$$\Gamma(n) = \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-x} \; dx \qquad \text{et} \quad (n>0)$$

حيث وسيط هذه الدالة هو (n) وهو عدد موجب.

4-1-1/ خواص دالة قاما الرياضية :

- إذا كان (n>1) فإن :
  - $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$
  - $\Gamma(n+1) = n!$
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$

4-2/ دالة توزيع قاما :

نقول عن x أنه متغير عشوائي يخضع لتوزيع (Γ) إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية معطاة بالشكل التالي: [2]

$$f(x) = G(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(n)} e^{-x} x^{n-1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

1- غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سبق ذكره ، ص 282.

2- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الثاني، مرجع سبق ذكره ، ص94.

4-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع قاما :

4-3-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع توزيع قاما كما يلي :

$$E(x) = n$$

4-3-2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع توزيع قاما كما يلي :

$$V(x) = n$$

4-3-3/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الدالة المولدة للعزوم وفق الطريقة التالية :

$$m_x(t) = \frac{1}{(1-t)^n}$$

4-4/ دالة بيتا الرياضية : [1]

تعرف دالة بيتا الرياضية وفق الصياغة الرياضية التالية :

$$B(a;b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1} \quad dx$$

هذه الدالة معرفة بالوسطين (a; b) وتكامل هذه الدالة تقاربي حيث (a; b) عددان موجبان.

4-4-1/ خواص دالة بيتا الرياضية :

- الدالة بيتا متناظرة بالنسبة للوسطين (a; b) وبالتالي : $B(a\,;\,b) = B(b\,;\,a)$
- $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right) = \pi$

1- غزال عبد العزيز عامر ، مرجع سبق ذكره ، ص ص 282، 284.

- علاقة الدالة بيتا بالدالة قاما هي : $B(a;b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$

4–5/ دالة توزيع بيتا :

نقول عن X متغير عشوائي يخضع لتوزيع بيتا إذا كانت دالة كثافته الاحتمالية تكتب بالشكل التالي:[1]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{B(a;b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} & x\in]0 \quad 1[\\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

4–6/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع بيتا :

4–3–1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع توزيع بيتا كما يلي :

$$E(x) = \frac{a}{a+b}$$

4–3–2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع توزيع بيتا كما يلي :

$$V(x) = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}$$

4–3–3/ الدالة المولدة للعزوم :

من الصعب إستخراج الدالة المولدة للعزوم لتوزيع بيتا.

خامسا : توزيع كاي مربع (Ch~2) (χ^2)

هو من أهم التوزيعات الاحتمالية المستمرة والتي تستعمل بشكل أخص في نظرية الاختبارات ومقارنة تلك المشاهدة المقدرة بتلك الحقيقية ، كذلك إختبارات جودة المطابقة و التجانس و الاستقلالية وغيرها.[2]

---

[1] -*K.Redjdal ; Op-cit ; P 210.*

[2]- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص387.

5-1/ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع (χ^2) :

تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع كاي مربع (χ^2) ذو المتغير العشوائي X كمايلي :[1]

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

حيث : n عدد صحيح موجب يمثل عدد درجات الحرية.

e هو مقدار ثابت يمثل أساس اللوغاريتم الطبيعي و هو يقارب 2.7182

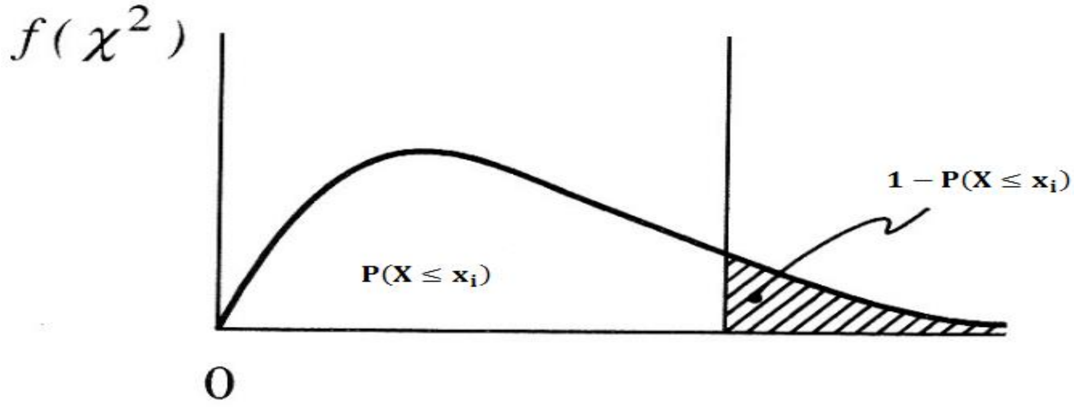
Γ هو دالة قاما الرياضية.

5-2/ دالة تابع الاحتمالات أو دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كاي مربع (χ^2) :

تعرف دالة التوزيع التراكمي لتوزيع كاي مربع (χ^2) كمايلي :

$$F(x) = P(X \leq 0) = \int_0^x f(x)dx = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^x e^{-\frac{x}{2}} x^{\frac{n}{2}-1}$$

ويعكس هذا الاحتمال المسافة الإجمالية المتواجدة بين خط منحنى دالة الكثافة الاحتمالية ومحور الفواصل ، من النقطة ($x=0$) إلى غاية القيمة X وفق الشكل التالي :



[1] - *KHALDI Khaled ; Op-cit ; P 72*

5-3/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع كاي مربع :

5-3-1/ التوقع الرياضي :

تعطى الصياغة الرياضية للتوقع الرياضي لمتغير يتبع توزيع كاي- مربع كما يلي :

$$E(x) = n$$

5-3-2/ التباين :

تعطى الصياغة الرياضية للتباين لمتغير يتبع توزيع كاي- مربع كما يلي :

$$V(x) = 2n$$

5-3-3/ الدالة المولدة للعزوم :

تعطى الصياغة الرياضية للدالة المولدة للعزوم لمتغير يتبع توزيع كاي- مربع كما يلي :

$$m_x(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^{\frac{n}{2}}$$

مثال تطبيقي :

إذا كان X يتبع توزيع كاي-مربع بالدرجة الحرية المعطاة .

- أوجد $\chi^2_{(0.01\,;5)}$ ؟
- أوجد $P(\chi^2_{(13)}<9.926)$ ؟
- أوجد $P(\chi^2_{(28)}\leq -10)$ ؟
- أوجد $P(\chi^2_{(21)}\geq 13.240)$ ؟

من جدول توزيع كاي-مربع المبين كالآتي نقوم بإستخراج القيم :

n \ p	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289

- $\chi^2_{(0.01\,;5)} = 15.086$

- $P(\chi^2_{(13)}<9.926) = 1- P(\chi^2_{(13)}\geq 9.926) = 1-0.7 = 0.3$
- $P(\chi^2_{(28)}\leq -10) = 0$ ⇨ $x\in]0 \quad +\infty[$
- $P(\chi^2_{(21)}\geq 13.240) = 0.9$

سادسا : توزيع ستودنت

أشتق توزيع ستودنت *(t)* من التوزيعين كاي-مربع و الطبيعي، حيث إذا كان لدينا متغيرين عشوائيين x و y مستقلين، حيث ($x \longrightarrow N(0\,;1)$) و ($y \longrightarrow \chi^2_{(n)}$) فإن المتغير العشوائي (T) الممثل لهذين المتغيرين هو : $T = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}}$ يتبع هذا المتغير توزيع ستودنت بدرجة حرية (n) ونكتب:

$$T = \frac{x}{\sqrt{\frac{y}{n}}} \quad \rightarrow \quad t_{(n)}$$

6-1/ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت :

تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت ذو المتغير العشوائي T كما يلي :[1]

$$f(T) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\ \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}(1+\frac{T^2}{n})^{-\frac{n+1}{2}} \qquad T \in \Re$$

حيث : π هو قيمة ثابتة $(\pi = 3.1416)$

n عدد صحيح موجب

Γ دالة توزيع قاما .

ونكتب : $T \rightarrow t_{(n)}$

[1] - *K.Redjdal ; Op-cit ; P 212*

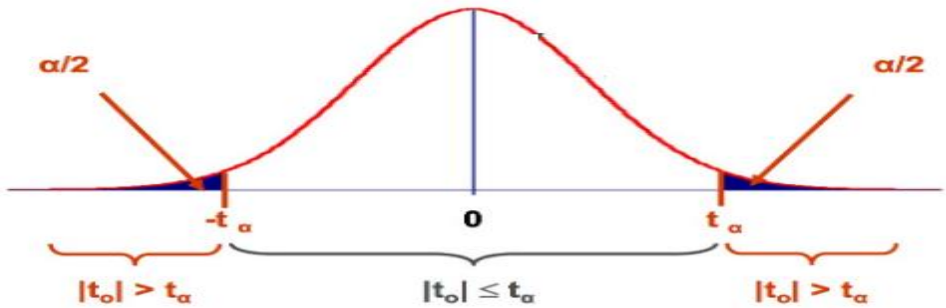
6-1-1/ خواص دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت :

- إن دالة كثافة توزيع ستودنت متماثلة أي أن $f(t)=f(-t)$ ولهما شكل يشبه شكل التوزيع الطبيعي.

- إن دالة كثافة توزيع ستودنت تقترب من الصفر ($f(T)\to 0$) إذا كانت T تقترب من ∞ ($T\to\infty$)

وعندما تكون n كبيرة فإن توزيع ستودنت (t) يقترب من التوزيع الطبيعي .

6-1-1/ التمثيل البياني دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع ستودنت

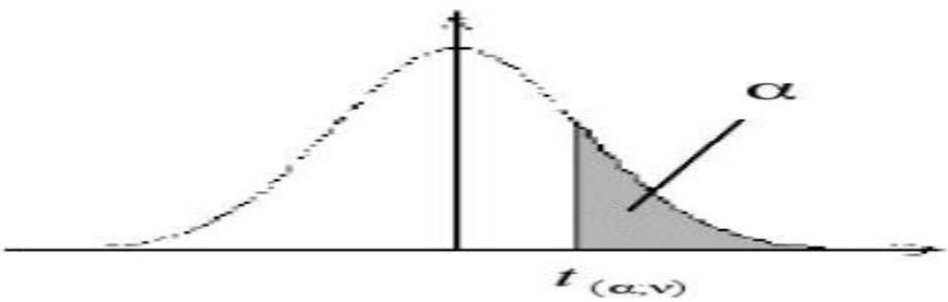


أما حساب الاحتمال فيتم بالطريقة التالية :

$$P\left(T \geq t_{(\alpha,n)}\right) = \int_{t_{(\alpha,n)}}^{\infty} f(T)dt = \alpha$$

حيث هذه القيمة يتم إستخراجها من جدول توزيع ستيودنت (t) وفق (α) مستوى المعنوية وهو السطر الأفقي، و(n) مستوى المعنوية الموجودة في السطر العمودي الموجودين في جدول الملحق (03)

مع أخذ بعين الاعتبار أن [1] : $-t_{(\alpha,n)} = t_{(1-\alpha,n)}$



1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص391.

6-2/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع ستيودنت :

- التوقع الرياضي يعطى كما يلي : $E(T) = 0$
- التباين يعطى كما يلي : $V(T) = n(n-2)$

مثال تطبيقي :

بالاعتماد على الملحق رقم 03 أوجد القيمتين : $t_{(0,05\,;\,20)}$ و $t_{(0,95\,;\,20)}$ ؟

الحل : نلاحظ من جدول الملحق 03 أن :

$$t_{(0,05\,;\,20)} = 1.725$$

القيمة $\alpha=0.95$ غير موجودة في الجدول و بالتالي نستخدم القاعدة :

$$-t_{(\alpha,n)} = t_{(1-\alpha,n)} \Rightarrow t_{(\alpha,n)} = -\,t_{(1-\alpha,n)}$$

$$\Rightarrow t_{(0,95\,;\,20)} = -\,t_{(1-0,95\,;\,20)} = -\,t_{(0,05\,;\,20)} = -\,1.725$$

سابعا : توزيع فيشر

إن إختبار فيشر (F) هو من التوزيعات الإحصائية الهامة، حيث يستخدم في الإحصاء الاستنتاجي لإجراء العديد من اختبارات الفروض المتعلقة بتحليل التباين وتصميم التجارب وإختبار معنوية معادلة الانحدار وغيرها من الاختبارات ويعرف هذا التوزيع كما يلي :[1]

إذا كان x و y متغيرين عشوائيين ومستقلين ، وكان x متغير يتبع توزيع كاي-مربع بدرجة حرية m $(\chi^2_{(m)})$ و y يتبع نفس التوزيع بدرجة حرية (n) $(\chi^2_{(n)})$ فإن (f) كمتغير عشوائي $\left(f = \frac{x/m}{y/n}\right)$ له توزيع (F) بدرجة حرية m و n ونكتب : $F \rightarrow f(m,n)$

1- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الثاني، مرجع سبق ذكره ، ص ص180،179.

7–1/ دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر :

تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر كمايلي :

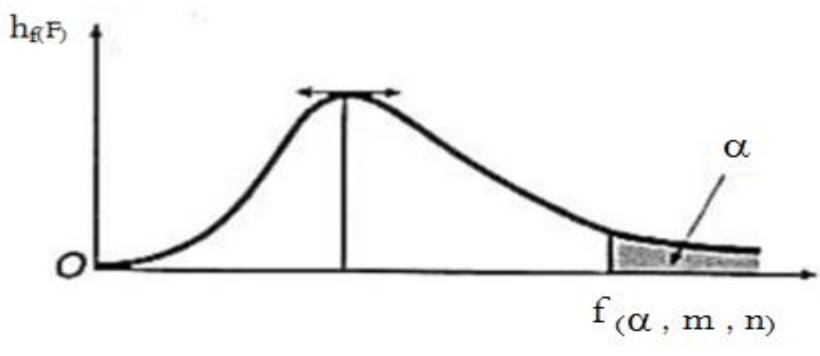
$$h_f(F) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma\left(\frac{m+n}{2}\right)\left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{m}{2}}}{\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} * \dfrac{f^{\frac{m}{2}-1}}{\left(1+\frac{m}{n}f\right)^{\left(\frac{m+n}{2}\right)}} & f > 0 \\ 0 & f \leq 0 \end{cases}$$

يعتبر هذا التوزيع ملتويا إلتواء موجب وتقل درجة الالتواء كلما زادت درجات حرية البسط (m) أو المقام (n) أو كليهما معا.

7–1–1/ خواص دالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر :

- كلما إقترب (f) إلى مالانهاية ($f \to \infty$) فإن دالة الكثافة تقترب إلى الصفر ($h_f(F) \to 0$).
- إذا كانت($m>2$) وكلما كانت ($f \to 0$) فإن دالة الكثافة تقترب إلى الصفر ($h_f(F) \to 0$).
- $\boldsymbol{F}_{(\propto,\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{F}^{-\mathbf{1}}_{(\mathbf{1}-\propto,\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})}$

7–1–2/ التمثيل البياني لدالة الكثافة الاحتمالية لتوزيع فيشر :



نرمز للطرف الأعلى من توزيع (F) بالرمز $f_{(\alpha\,,\,m\,,\,n)}$ وهذا يعني أن :

$$P(F_{(m,n)} \geq f_{(\alpha,m,n)}) = \int_{f_{(\alpha,m,n)}}^{\infty} h_f(F)df = \alpha$$

وقيم $f_{(\alpha\ ,\ m\ ,\ n)}$ يتم إستخراجها من جدول توزيع فيشر وفق مستوى المعنوية α و درجتي الحرية (m و n)، حيث أن الملحق 04 هو خاص بمستوى معنوية (α=0.05)، و درجة الحرية (m) ممثلة في الجدول بـ(v_1)، و درجة الحرية (n) ممثلة بـ(v_2) .

7-2/ المقاييس الإحصائية المرتبطة بالمتغير العشوائي الذي يتبع توزيع فيشر :

- التوقع الرياضي يعطى كما يلي : $E(f) = \frac{n}{n-2} \quad \text{et } n > 2$
- التباين يعطى كما يلي : $V(f) = \frac{2n^2(m+n-2)}{m(n-2)^2(n-4)}$

مثال تطبيقي :

بالاعتماد على الملحق رقم 04 أوجد القيمتين : $f_{(0.05\ ,\ 2\ ,\ 10)}$ و $f_{(0.95\ ,\ 2\ ,\ 10)}$

الحل : نلاحظ من جدول الملحق 03 أن :

$f_{(0.05\ ,\ 2\ ,\ 10)} = 4.10$

القيمة α=0.95 غير موجودة في الجدول و بالتالي نستخدم القاعدة :

$$\boldsymbol{F}_{(\propto,\boldsymbol{m},\boldsymbol{n})} = \boldsymbol{F}^{-\mathbf{1}}_{(\mathbf{1}-\propto,\boldsymbol{n},\boldsymbol{m})} \Rightarrow F_{(0.95,2,10)} = F^{-1}_{(0.05,10,2)} = \frac{1}{4.10} = 0.24$$

ثامنا : تقارب بعض التوزيعات الاحتمالية

بعدما عرضنا في الفصل السابق مجموعة من التقارب ما بين التوزيعات الاحتمالية المتقطعة سنحاول بعدما عرضنا مجموعة من التوزيعات الاحتمالية المستمرة تقديم أهم التقاربات بين التوزيعات سواءا كانت مستمرة أو لكل توزيع نوع مختلف عن الأخر.

8-1/ تقريب التوزيع الثنائي من التوزيع الطبيعي :

لقد قلنا خلال عرضنا لقانون التوزيع الثنائي أنه عندما يكون عدد المحاولات n كبير نجد أن حساب الاحتمال بواسطة دالة الكثافة الاحتمالية يكون معقد ، ولتفادي هذه الصعوبة يمكننا إستخدام التوزيع الطبيعي للحصول على قيم تقريبية لتلك الاحتمالات ، حيث أن شروط هذا التقارب هو : [1]

- عندما يكون ($n>20$) و ($np\geq5$) وبالتالي ($nq>5$).
- عندما تكون P قريبة من الصفر أو الواحد.

أما قاعدة التقريب فتكون كما يلي :

إذا كان المتغير العشوائي x يخضع للتوزيع الثنائي وفق المعلمتين n و p ، حيث ($n>20$) و($np\geq5$) فيمكننا توزيع هذا المتغير بالتوزيع الطبيعي بوسيط ($\mu=np$) وتباين ($\delta^2=npq$).

لكن بما أن التوزيع الطبيعي توزيع مستمر وثنائي الحد توزيع متقطع وجد العالم ياتس (Yates) أن التقريب يكون أثر دقة وواقعية إذا أجري تصحيح للقيمة x من خلال إضافة أو طرح القيمة (0.5) وتسمى هذه القيمة بمعامل التصحيح ونكتب :

إذا كان لدينا العددان a و b فإن :

$$P(a\leq x\leq b)=P(a-0.5\leq y\leq b+0.5)$$

$$\Rightarrow P(a\leq x\leq b)=P[\frac{(a-0.5)-np}{\sqrt{npq}}\leq T\leq\frac{(b+0.5)-np}{\sqrt{npq}}$$

$$=\Phi\left(\frac{(b+0.5)-np}{\sqrt{npq}}\right)-\Phi(\frac{(a-0.5)-np}{\sqrt{npq}})$$

مثال تطبيقي :

في تجربة إلقاء قطعة نقد 10 مرات ، حيث x يمثل عدد الصور في هذه التجربة.

المطلوب : ما هو إحتمال الحصول عل ما بين 2 و 4 صور وهذا بإستخدام التوزيع الثنائي ، وتقريبه بالتوزيع الطبيعي ؟

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، مرجع سبق ذكره، ص ص378، 379.

الحل :

- حساب الاحتمال $P(2\le x\le 4)$ بواسطة التوزيع الثنائي :

$$P(2\le x\le 4) = P(x=2) + P(x=3) + P(x=4)$$

$$= C_{10}^{2}\ (\tfrac{1}{2})^{2}(\tfrac{1}{2})^{8} + C_{10}^{3}\ (\tfrac{1}{2})^{3}(\tfrac{1}{2})^{7} + C_{10}^{4}\ (\tfrac{1}{2})^{4}(\tfrac{1}{2})^{6}$$

$$= 0.044 + 0.117 + 0.205 = 0.366$$

- حساب الاحتمال $P(2\le x\le 4)$ بواسطة التقريب إلى التوزيع الطبيعي :

$$P(2 \le x \le 4) = P(2 - 0.5 \le y \le 4 + 0.5)$$

$$\Rightarrow P(2 \le x \le 4) = P[\frac{(1.5) - (10)(0.5)}{\sqrt{(10)(0.5)(0.5)}} \le T \le \frac{(4.5) - (10)(0.5)}{\sqrt{(10)(0.5)(0.5)}}]$$

$$= \Phi\left(\frac{(4.5) - 5}{\sqrt{2.5}}\right) - \Phi\left(\frac{(1.5) - 5}{\sqrt{2.5}}\right) = \Phi(-0.613) - \Phi(-2.213)$$

$$= 1 - \Phi(0.613) - 1 + \Phi(2.213) = \Phi(2.213) - \Phi(0.613) = 0.2573$$

8-2/ تقريب توزيع مربع-كاي إلى التوزيع الطبيعي المعياري :

عندما تؤول n إلى مالانهاية $(n\rightarrow\infty)$ فإنه يمكن تحويل أو تقريب توزيع مربع-كاي وفق متغيره الجديد $\frac{\chi_n^2 - n}{\sqrt{2n}}$ إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ ، ونكتب أن دالة التوزيع الاحتمالي للتوزيعين متساوية ونكتبها كمايلي [1] :

$$F_{\chi_n^2}(x) \cong F_n(\frac{x - n}{\sqrt{2n}})$$

8-3/ تقريب توزيع ستودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري :

عندما تؤول n إلى مالانهاية $(n\rightarrow\infty)$ فإنه يمكن تحويل أو تقريب توزيع ستودنت إلى التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$ [2] .

1- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الثاني، مرجع سبق ذكره ، ص 164.

2- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الثاني، مرجع سبق ذكره ، ص 198.

المراجع

المــرا جع

أولا : المراجع باللغة العربية

1- علي عبد السلام العماري، علي حسين العجيلي، الإحصاء و الاحتمالات: النظرية و التطبيق، منشورات (ELGA)، مالطا، 2000.

2- السعدي رجال ، نظرية الاحتمالات و مبادئ الحساب الاحتمالي : دروس وتمارين ، الجزء الأول ، ديوان المطبوعات الجامعية، الجزائر، 2005، الطبعة 02.

3- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الأول، دار الكتب الأكاديمية ،مصر ، 2004، ط 01.

4- سيمور ليبشتز ، نظريات ومسائل في الاحتمالات، سلسلة ملخصات شوم ، ترجمة عبد العظيم أنيس ، الدار الدولية للتوزيع و النشر، مصر، 2000، ط2.

5 – علاء الدين القبانجي و حسام حمامة كرمجي، الاحتمال و الاحصاء ، منشورات جامعة دمشق، كلية الهندسة الكهربائية والميكانيكية، سوريا، 2012/2011.

6- رأفت رياض رزق الله ، مبادئ الاحتمالات ، ج01 ، المكتبة الاكاديمية، مصر، 2010.

7- علي نصر الدين الوكيل، مبادئ رياضيات الحاسب، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، القاهرة، 2000، الطبعة الأولى.

8- بن بشير رمضان، السبيل في الرياضيات، دار السبيل للنشر و التوزيع، الجزائر، 2007.

9- مديحة السيد محمد موسى ، أساسيات الاحصاء الرياضي وتطبيقاتها، دار الكتاب الحديث، مصر، 2008.

10- مجدي الطويل ، الاحتمالات : النظرية والتطبيق، دار النشر للجامعات، مصر ، 2009.

11- عبد الحميد ربيع غيطان، نظرية الاحتمالات ، الجزء الثاني، دار الكتب الأكاديمية ،مصر ، 2004 ، ط1.

المـراجع

12- بارا ج . ر، بيل أ ، ترجمة بن حلي ، مسائل في الإحصاء الرياضي، الهيئة القومية للبحث العلمي، طرابلس، ليبيا ، 1975، ط 01.

13- غزال عبد العزيز عامر ، الاقتصاد القياسي وتحليل السلاسل الزمنية (النظرية-الطرق-التطبيقات) مطابع الشرطة للطباعة والنشر والتوزيع، القاهرة، 2015.

14- دومينيك سالفاتور، الإحصاء و الاقتصاد القياسي ، ترجمة سعدية حافظ منتصر،الدار الدولية للنشر والتوزيع، القاهرة، 2011.

15-جبار عبد مضحي، مقدمة في نظرية الاحتمالات، دار المسيرة للنشر والتوزيع، عمان الأردن، 2011، ط 01 .

ثانيا : المراجع باللغات الأجنبية

16- CHAMOUN Chamoun ; Eléments des Statistiques et de Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2010 .

17- K.Redjdal ; Cours de Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2004 ;

18- BOGAERT P , « Probabilités pour scientifiques et ingénieurs» Edition de Boeck, Belgique , 2006.

19- Ahmed CHIBAT ; Notions sur Le Calcul des Probabilités ; La Collection Mathématique de l'Université Mentouri Constantine .

20- ROSS M . S. « Initiation aux Probabilités » Trad par HOFER .C , Presses Polytechnique romandes , Lausanne , Suisse , 1987.

21- KHALDI Khaled ; Probabilités ; OPU ; Algérie ; 2005

22- GHORBANZADEH . D ; Probabilités : Exercices Corriges ; Edition Technip ; Paris; 1998 .

23- DRESS . F ; Les Probabilités et La Statistique ; Edition DUNOD ; Paris ; 2012.

24- CANTONI . E et autres ; Maitriser l'aléatoire : exercices résolus de probabilités et statistique ; Springer ; France ; 2006 .

الملاحق

الملاحق

الملحق 01: التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

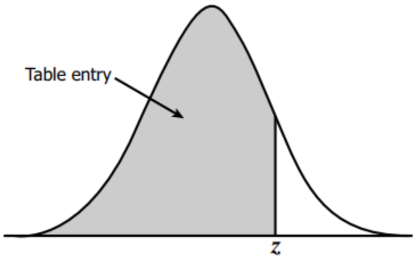


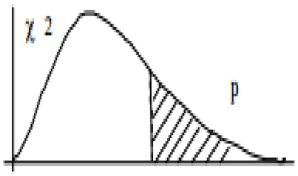
Table entry for z is the area under the standard normal curve to the left of z.

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998

الملاحق

الملحق 02: توزيع كاي-مربع (χ^2)

TABLE DU CHI-DEUX : $\chi^2(n)$



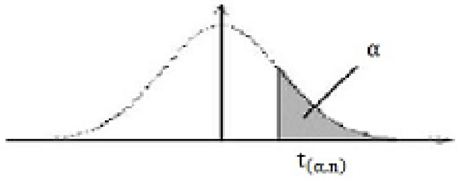
n \ p	0.90	0.80	0.70	0.50	0.30	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01
1	0,0158	0,0642	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,341
4	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141
15	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	12,443	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	18,114	20,703	22,719	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Pour $n > 30$, on peut admettre que $\sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n-1} \approx N(0,1)$

الملاحق

الملحق 03: توزيع ستيودنت (t)

$$P\left(T \geq t_{(\alpha,n)}\right) = \int_{t_{(\alpha,n)}}^{\infty} f(T)dt = \alpha$$



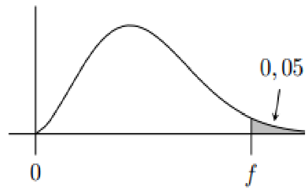
n	α 0.25	0.20	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010	0.005	0.0025	0.0010	0.0005
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.71	31.82	63.66	127.3	318.3	636.6
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.09	22.33	31.60
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.21	12.92
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
50	0.679	0.849	1.047	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	2.937	3.261	3.496
60	0.679	0.848	1.045	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
80	0.678	0.846	1.043	1.292	1.664	1.990	2.374	2.639	2.887	3.195	3.416
100	0.677	0.845	1.042	1.290	1.660	1.984	2.364	2.626	2.871	3.174	3.390
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

الملاحق

الملحق 04: توزيع فيشر (F)

Valeurs de f telles que $\mathbb{P}[F \geqslant f] = 0,05$

où F suit la loi de Fisher-Snedecor à ν_1, ν_2 degrés de liberté
ν_1 : nombre de ddl du numerateur
ν_2 : nombre de ddl du denominateur



ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	18	20	22	24	25
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,67	8,66	8,65	8,64	8,63
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,82	5,80	5,79	5,77	5,77
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,58	4,56	4,54	4,53	4,52
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,90	3,87	3,86	3,84	3,83
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,47	3,44	3,43	3,41	3,40
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,17	3,15	3,13	3,12	3,11
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,96	2,94	2,92	2,90	2,89
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,80	2,77	2,75	2,74	2,73
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,67	2,65	2,63	2,61	2,60
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,57	2,54	2,52	2,51	2,50
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,42	2,41
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,41	2,39	2,37	2,35	2,34
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,28
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,30	2,28	2,25	2,24	2,23
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,26	2,23	2,21	2,19	2,18
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,22	2,19	2,17	2,15	2,14
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,18	2,16	2,13	2,11	2,11
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,15	2,12	2,10	2,08	2,07
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,12	2,10	2,07	2,05	2,05
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,10	2,07	2,05	2,03	2,02
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,08	2,05	2,02	2,01	2,00
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,05	2,03	2,00	1,98	1,97
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,04	2,01	1,98	1,96	1,96
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,94
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,00	1,97	1,95	1,93	1,92
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,91
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,97	1,94	1,92	1,90	1,89
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,88
31	4,16	3,30	2,91	2,68	2,52	2,41	2,32	2,25	2,20	2,15	2,11	2,08	2,05	2,03	2,00	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,87
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14	2,10	2,07	2,04	2,01	1,99	1,97	1,94	1,91	1,88	1,86	1,85
33	4,14	3,28	2,89	2,66	2,50	2,39	2,30	2,23	2,18	2,13	2,09	2,06	2,03	2,00	1,98	1,96	1,93	1,90	1,87	1,85	1,84
34	4,13	3,28	2,88	2,65	2,49	2,38	2,29	2,23	2,17	2,12	2,08	2,05	2,02	1,99	1,97	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,83
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11	2,07	2,04	2,01	1,99	1,96	1,94	1,91	1,88	1,85	1,83	1,82
36	4,11	3,26	2,87	2,63	2,48	2,36	2,28	2,21	2,15	2,11	2,07	2,03	2,00	1,98	1,95	1,93	1,90	1,87	1,85	1,82	1,81
37	4,11	3,25	2,86	2,63	2,47	2,36	2,27	2,20	2,14	2,10	2,06	2,02	2,00	1,97	1,95	1,93	1,89	1,86	1,84	1,82	1,81
38	4,10	3,24	2,85	2,62	2,46	2,35	2,26	2,19	2,14	2,09	2,05	2,02	1,99	1,96	1,94	1,92	1,88	1,85	1,83	1,81	1,80
39	4,09	3,24	2,85	2,61	2,46	2,34	2,26	2,19	2,13	2,08	2,04	2,01	1,98	1,95	1,93	1,91	1,88	1,85	1,82	1,80	1,79
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90	1,87	1,84	1,81	1,79	1,78
41	4,08	3,23	2,83	2,60	2,44	2,33	2,24	2,17	2,12	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94	1,92	1,90	1,86	1,83	1,81	1,79	1,78
42	4,07	3,22	2,83	2,59	2,44	2,32	2,24	2,17	2,11	2,06	2,03	1,99	1,96	1,94	1,91	1,89	1,86	1,83	1,80	1,78	1,77
43	4,07	3,21	2,82	2,59	2,43	2,32	2,23	2,16	2,11	2,06	2,02	1,99	1,96	1,93	1,91	1,89	1,85	1,82	1,79	1,77	1,76
44	4,06	3,21	2,82	2,58	2,43	2,31	2,23	2,16	2,10	2,05	2,01	1,98	1,95	1,92	1,90	1,88	1,84	1,81	1,79	1,77	1,76
45	4,06	3,20	2,81	2,58	2,42	2,31	2,22	2,15	2,10	2,05	2,01	1,97	1,94	1,92	1,89	1,87	1,84	1,81	1,78	1,76	1,75
46	4,05	3,20	2,81	2,57	2,42	2,30	2,22	2,15	2,09	2,04	2,00	1,97	1,94	1,91	1,89	1,87	1,83	1,80	1,78	1,76	1,75
47	4,05	3,20	2,80	2,57	2,41	2,30	2,21	2,14	2,09	2,04	2,00	1,96	1,93	1,91	1,88	1,86	1,83	1,80	1,77	1,75	1,74
48	4,04	3,19	2,80	2,57	2,41	2,29	2,21	2,14	2,08	2,03	1,99	1,96	1,93	1,90	1,88	1,86	1,82	1,79	1,77	1,75	1,74
49	4,04	3,19	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,08	2,03	1,99	1,96	1,93	1,90	1,88	1,85	1,82	1,79	1,76	1,74	1,73
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89	1,87	1,85	1,81	1,78	1,76	1,74	1,73
55	4,02	3,16	2,77	2,54	2,38	2,27	2,18	2,11	2,06	2,01	1,97	1,93	1,90	1,88	1,85	1,83	1,79	1,76	1,74	1,72	1,71
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,78	1,75	1,72	1,70	1,69
65	3,99	3,14	2,75	2,51	2,36	2,24	2,15	2,08	2,03	1,98	1,94	1,90	1,87	1,85	1,82	1,80	1,76	1,73	1,71	1,69	1,68
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,93	1,89	1,86	1,84	1,81	1,79	1,75	1,72	1,70	1,67	1,66
75	3,97	3,12	2,73	2,49	2,34	2,22	2,13	2,06	2,01	1,96	1,92	1,88	1,85	1,83	1,80	1,78	1,74	1,71	1,69	1,66	1,65
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,73	1,70	1,68	1,65	1,64

سلاسل تمارين

للأعمال الموجهة

جامعة " البويرة" 2020/2019

كلية العلوم الاقتصادية السنة الأولى LMD

والتجارية وعلوم التسيير مقياس: الإحصاء 2

السلسلة الأولى

التمرين الأول: لتكن المجموعة التالية: $\Omega = \{1/2,0,3,5,-2,-4\}$ ، ولتكن A ، B و C ثلاث مجموعات جزئية من Ω حيث: $A = \{0,3,-2\}$ ، $B = \{1/2,5,-2,-4\}$ ، $C = \{1/2,-4\}$

المطلوب إيجاد المجموعات التالية:

$$A \cup B, A \cap B, \overline{A}, \overline{B}, \overline{A \cup B}, \overline{A \cap B}, A - B, \overline{B \cap C}$$

التمرين الثاني:

لتكن المجموعة A حيث: $A = \{1,2,3\}$ ، أوجد تجزئة المجموعة A .

التمرين الثالث:

تحمل حقيبة قفل رقمي يتكون من ثلاث خانات متماثلة، كل خانة يمكن أن تحمل الأرقام **0**، **1**، .....،**9**.

- كم طريقة يمكن بها تكوين رقم سري (**3** أعداد) إذا كان التكرار ممكن.
- كم طريقة يمكن بها تكوين رقم سري (**3** أعداد) إذا كان التكرار غير ممكن.

التمرين الرابع: ما عدد لوحات السيارات التي يمكن الحصول عليها من استعمال رقمين (حيث لا يكون الرقم الأول صفر) وأربعة من الأحرف الهجائية اللاتينية (عددها **26** حرف) إلى يسار الرقمين في الحالات التالية:

- تكرار الرقم والحرف.
- عدم تكرار الرقم والحرف.

التمرين الخامس: بكم طريقة يمكن لمجموعة مكونة من خمسة أشخاص أن يجلسوا:

1- في صف به خمسة مقاعد؟

2- صف به خمس مقاعد وأصّر شخصان من بين الـ **5**شخاص أن يجلسوا جنبًا إلى جنب ؟

3- حول طاولة مستديرة تشمل خمسة مقاعد ؟

التمرين السادس: يتكوّن فوج من **10** طلبة و **20** طالبة، نريد تشكيل لجنة تمثل هذا الفوج لدى الإدارة، وهذه اللجنة تتكون من: رئيس، نائب وكاتب (يحق للشخص العضو أن يشغل منصب واحد فقط).

1- كم عدد اللجان الممكن تشكيلها ؟ **2-** كم عدد اللجان الممكن تشكيلها حيث:

♦ طالبة معينة ولتكن الطالبة **X** موجودة في اللجنة. ♦ يكون الرئيس طالب والنائب طالبة.

♦ الكاتب طالب معين وليكن **Y**.

التمرين السابع: لدينا صندوق يحتوي على **6** كرات بيضاء و **4** سوداء، نسحب منه **3** كرات في آن واحد.

1- ما هو عدد الحالات الكلية الممكنة لسحب هذه الكرات ؟

2- ما هو عدد الحالات التي نحصل فيها على:

♦ ثلاث كرات بيضاء ♦ كرتان سودوتان ♦ على الأكثر كرتين من اللون الأبيض.

التمرين الثامن: لتكن لدينا كلمة **(CADENAS)**

1- بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الأحرف.

2- بكم طريقة يمكن ترتيب هذه الأحرف حيث يظهر الحرفان **(A)** متتاليان.

التمرين التاسع: في تجربة إلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة ثلاث مرات، نسجل F عند ظهور الصورة و P عند ظهور الكتابة، ونعرف الأحداث كما يلي: A : ظهور الصورة (F) مرتين، B : ظهور الصورة (F) مرة واحدة، C : ظهور الصورة (F) في الرمية الأولى.

1- أرسم شجرة الحوادث الكلية، ثم استنتج فراغ العينة؟

2- أوجد الأحداث السابقة وأحسب احتمال حدوثها؟

3- أوجد الأحداث التالية وأحسب احتمال حدوثها:

$$A \cup B, A \cap B, A \cup C, C - A, C - B, \overline{B \cap C}, A \cap B \cap C$$

التمرين العاشر: نلقي قطعة نقود وحجر نرد معًا

1- حدد مجموعة إمكانات التجربة Ω .

2- عيّن الحوادث التالية ثم احسب احتمال وقوعها: A : الحصول على صورة وعدد زوجي، B : الحصول على عدد أولي، C : الحصول على كتابة وعدد فردي. **3-** ما احتمال وقوع: A أو B ، A و C ، B و C.

4- عيّن الأحداث المتنافية مثنى مثنى من بين الأحداث A ، B و C .

التمرين رقم (11): يحتوي صندوق على **6** كرات بيضاء و **8**كرات سوداء، نسحب عشوائيًا كرتان من هذا الصندوق، والمطلوب حساب احتمال الحصول على:

1- كرتان من لون أبيض ؟ **2-** كرتان من لون أسود ؟ **3-** كرة سوداء وأخرى بيضاء ؟

4- على الأقل كرة بيضاء ؟ **5-** على الأكثر كرة بيضاء؟

التمرين رقم (12): لتكن لدينا لعبة تحتوي على **10** أوراق، **4** منها تحمل الرقم **1** والبقية تحمل أرقام كيفية، نسحب على التوالي ودون إرجاع أربعة أوراق، فما احتمال الحصول على:

1- ورقة واحدة تحمل الرقم **1** ؟ **2-** ولا ورقة تحمل الرقم **1** ؟ **3-** ورقتان تحملان الرقم **1** ؟

التمرين رقم (13): لتكن E تجربة عشوائية بها خمس نتائج ممكنة وهي: e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 ولدينا الاحتمالات التالية:

$P(e_1)=1/8$ ، $P(e_2)=3/8$ ، $P(e_4)=1/4$ ، $P(e_5)=1/8$.

1- أحسب $P(e_3)$ ؟ **2-** ليكن الحدثين: $A=\{e_1,e_3\}$ و $B=\{e_2,e_4\}$.

أحسب ما يلي: $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cup B)$ ؟

التمرين رقم (14): ليكن A و B حدثان كيفيان، فإذا كان: $P(A)=3/8$ ، $P(B)=1/2$ و $P(A\cup B)=5/8$

❖ أحسب ما يلي: $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cap\overline{B})$ ، $P(B\cap\overline{A})$ ، $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ ، $P(A/B)$ ، $P(B/A)$ ، $P(\overline{A}/\overline{B})$ ، $P(A/\overline{B})$

تمارين مقترحة:

التمرين الأول: بأخذ معطيات التمرين الأول، ولتكن $\overline{A}$ ، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ متممات المجموعات A ، B و C على الترتيب بالنسبة للمجموعة الكلية Ω .

- أوجد متممة كل مجموعة من المجموعات التالية بالنسبة للمجموعة الكلية Ω :

$A , B , C , A\cup B , A\cap B , \overline{A}\cap B , A\cup C , B\cap C$.

- تأكد من أنّ: $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$ و $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$

التمرين الثاني:

1- هل يوجد عدد صحيح موجب n حيث يكون: $A_n^1 + A_n^3 = 9$

2- بيّن صحة العلاقات التالية: $C_n^{n-k}=C_n^k$ ، $C_n^k.P_k = A_n^k$.

التمرين الثالث:

❖ كم عدد مئوي يمكن تشكيله بالأرقام: **0**، **1**، **2**، **3**، **4**، **5**، **6** في الحالات التالية:

- إذا كان التكرار ممكن. **2-** إذا كان التكرار غير ممكن. **3-** التكرار ممكن والرقم الأول (رقم المئات) هو الرقم **5**.

❖ كم عدد مئوي أرقامه مختلفة يمكن تشكيله بالأرقام: **1**، **2**، **3**، **4**، **5**، **6**، **7**، **8**، **9**.

- من بين هذه الأعداد كم هو عدد الأعداد الزوجية والأعداد الفردية.

التمرين الرابع: كم عدد من ستة أرقام يمكننا أن نكوّن وذلك بأخذ العدد **1** مرتين، العدد **2** ثلاث مرات ومرة واحدة العدد **3**.

التمرين الخامس: يحتوي صندوق على **30** كرية: **8** كريات حمراء، **10** كريات بيضاء و **12** كرية ذات لون أخضر، نسحب من الصندوق ثلاث كرات مرة واحدة ، فما احتمال الحصول على:

1- الكرات الثلاث من لون واحد ؟ **2-** كرة حمراء واحدة ؟ **3-** كرتان بيضاوان ؟

4- كرتان من نفس اللون ؟

التمرين السادس: نقوم بإلقاء قطعة نقدية معدنية غير متزنة ثلاث مرات حيث $P(F)=3/4$ و $P(P)=1/4$ (F : الصورة و P : الكتابة)

1- حدد مجموعة إمكانات التجربة Ω .

2- ما احتمال ظهور صورة في الرمية الأولى ؟ **3-** ما احتمال ظهور كتابة على الأكثر ؟

التمرين السابع: نعتبر الحدثان A و B حيث: $P(A)=1/2$ ، $P(B)=1/3$ ، $P(A\cap B)=1/4$ ،

❖ أحسب ما يلي: $P(\overline{A})$ ، $P(\overline{B})$ ، $P(A\cup B)$ ، $P(A\cap\overline{B})$ ، $P(B\cap\overline{A})$ ، $P(\overline{A}\cap\overline{B})$ ، $P(\overline{A}\cup\overline{B})$ ، $P(B/A)$ ، $P(A/B)$ ، $P(\overline{B}/\overline{A})$ ، $P(B/\overline{A})$

التمرين الثامن:

❖ ليكن A و B حدثان كيفيان حيث $(B\subset A)$:

- بيّن أنّ: $P(A\cap\overline{B})=P(A)-P(B)$.

❖ إذا علمت أنّ: $P(A/B)=P(A/\overline{B})$ ماذا تقول عن الحدثين A و B .

جامعة " البويرة "	2020/2019
كلية العلوم الاقتصادية	السنة الأولى LMD
والتجارية وعلوم التسيير	مقياس: الإحصاء2

السلسلة الثانية

التمرين الأول: قمنا بإلقاء ثلاث قطع نقدية معدنية متزنة مرة واحدة، فما احتمال الحصول على ثلاث صور (F) إذا علمت أنه قد ظهرت صورة على القطعة الأولى.

التمرين الثاني: إذا علمت أن احتمال حدوث الظاهرة B وعدم حدوث الظاهرة A هو 0,2 ، واحتمال حدوث الظاهرة A و الظاهرة B هو 0,1 ، أما احتمال أن لا تحدث أي من الظاهرتين هو 0,4.

1- ما احتمال حدوث B ؟ **2-** ما احتمال حدوث إحدى الظاهرتين ؟ **3-** ما احتمال حدوث B علمًا أن A لم تحدث ؟

التمرين الثالث: صندوق به 10 مصابيح كهربائية من بينها أربعة (4) فاسدة، فإذا تم سحب مصباحان الواحد تلوى الآخر وبدون إعادة من هذا الصندوق، أحسب احتمال حدوث الأحداث التالية:

1- أن يكون المصباحان فاسدان ؟ **2-**أن يكون المصباحان صالحان ؟ **3-**أن يكون المصباح الأول صالح والثاني فاسد ؟

- أجب على الأسئلة السابقة إذا كان سحب المصباحان على التوالي ومع الإعادة.

التمرين الرابع: فريق في كرة القدم يكون رابحًا V باحتمال قدره 1/2 ومتعادل N باحتمال قدره 1/5، أما احتمال الخسارة P فهو 3/10، إذا لعب هذا الفريق مباراتين: **1-** حدد مجموعة إمكانات التجربة Ω؟

2- ما احتمال حدوث خسارة واحدة على الأكثر؟ **3-** ما احتمال حدوث فوز على الأقل ؟

التمرين الخامس: تتكون شركة من ثلاث وحدات إنتاجية (A_1, A_2, A_3)، حيث تنتج هذه الوحدات الثلاث: 56%، 32%، 12% من الإنتاج الكلي للشركة، فإذا كانت نسب الإنتاج المعاب (الفاسد) لهذه الوحدات هو على التوالي: 6 %، 8 % و1% ، سحبنا قطعة بصورة عشوائية من الإنتاج العام للشركة، والمطلوب:

1- ما احتمال أن تكون هذه القطعة المنتجة فاسدة ؟ **2-** إذا علمنا أنها فاسدة فما احتمال أنها من إنتاج الوحدة الأولى أو الثالثة ؟

3- ما احتمال أن تكون من إنتاج الوحدة الثانية علما أنها صالحة ؟

التمرين السادس: ليكن لدينا ثلاث صناديق، حيث يحتوي الصندوق الأول على 5 كرات بيضاء و 5 كرات سوداء، يحتوي الصندوق الثاني على 8 كرات بيضاء و 2 سوداء، بينما يحتوي الصندوق الثالث على 4 كرات بيضاء و 6 سوداء.

سحب صندوق عشوائيا ثم سحبت منه كرة دون تحيز والمطلوب:

1- ما احتمال أن تكون الكرة بيضاء ؟ **2-**إذا تحصلنا على كرة سوداء فما احتمال أنها مسحوبة من الصندوق الثاني ؟

3- ما احتمال أن تكون مسحوبة من الصندوق الثالث علمًا أنها بيضاء؟

التمرين السابع: ليكن لدينا وعاء يحتوي على 4 كرات خضراء و 6 كرات حمراء، نقوم بسحب 3 كرات على التوالي ودون إعادة من هذا الوعاء، نعرف X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X ومثلها بيانيا دالة كتلة الاحتمال $P(X=x_i)$.

2- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$ ومثلها بيانيا. **(ملاحظة: أجب على الأسئلة السابقة إذا كان السحب مرة واحدة)**

التمرين الثامن: نقوم بإلقاء قطعة نقدية معدنية متزنة ثلاث مرات، ولنفرض أننا نتحصل على 20 دج عند ظهور الصورة F ونخسر 10 دج عند ظهور الكتابة P . **1-** أوجد قانون الربح والخسارة للمتغير العشوائي X. **2-** أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

3- أحسب التوقع الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري σ_X.

التمرين التاسع: ليكن X متغير عشوائي يمثل عدد الأطفال (الذكور) في العائلة المكونة من ثلاث أطفال، حيث يتبع هذا المتغير التوزيع المبيّن في الجدول التالي:

X	0	1	2	3
$P(X=x_i)$	0,1	2 a	0,3	a

1- حدد قيمة a حتى يتبع X قانون التوزيع الاحتمالي. **2-** أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

3- أحسب الأمل الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري σ_X. **4-** ما احتمال أن يكون عدد الذكور:

- على الأقل إثنان (2) - على الأكثر واحد (1).

التمرين رقم (10): إذا كان x متغير عشوائي منفصل بدالة كتلة احتمال:

$$P(x=x)=\begin{cases}\dfrac{e^{-3}3^x}{x!} & si \quad x=0,1,2,\dots\\ 0 & si\,non\end{cases}$$

1-أوجد الدالة المولدة لاحتمالات هذا المتغير، ثم أوجد الاحتمالات المناظرة، ثم أحسب $P(x\geq 3)$.

2-أوجد الدالة المولدة لاحتمالات المتغير العشوائي y حيث $y = 3x+2$

التمرين رقم (11): لتكن الدالة $f_X(x)$ المعرفة كما يلي:

$$f_X(x)=\begin{cases}2x\ldots\ldots si\ldots x\in[0,1]\\ 0\ldots\ldots\ldots si.non\end{cases}$$

1- هل الدالة $f_X(x)$ هي دالة كثافة احتمال ؟ **2**- أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

3-أحسب الاحتمالات التالية: $P(-2 < X \le 3/4)$ ، $P(X \le 1/2)$ ، $P(X \le 4/9)$. **4**- أوجد التوقع الرياضي والانحراف المعياري.

<u>التمرين رقم (12):</u> ليكن X متغير عشوائي موزع في المجال $[1, e]$ ، ومعرف بالدالة التالية: $f_X(x) = \frac{k}{x}$

1- أوجد قيمة الثابت k من أجل أن تكون الدالة $f_X(x)$ دالة كثافة احتمال.

2- أحسب $E(X^n)$ ثم استنتج $E(X)$ و $V(X)$.

<u>التمرين رقم (13):</u> إذا كان X متغير عشوائي بدالة كثافة احتمال معرفة كمايلي:

$$f_x(x) = \begin{cases} e^{-x} & si \quad x > 0 \\ 0 & si\, non \end{cases}$$

- أوجد الدالة المولدة لعزوم المتغير العشوائي ومنها أوجد قيمة المتوقعة والتباين؟

<u>تمارين مقترحة:</u>

<u>التمرين الأول:</u> لدى تحليل نتائج طلبة السنة الأولى علوم اقتصادية في نهاية السنة، وجد أن 25% تفوقوا في مادة الرياضيات، 40 % تفوقوا في مادة الإحصاء و 20 % تفوقوا في المادتين معًا. فإذا اختير طالب بصفة عشوائية، أوجد الاحتمالات التالية:

1-أن يكون هذا الطالب متفوقا في الرياضيات أو الإحصاء ؟ **2**- أن يكون الطالب متفوق في الرياضيات إذا علم أنه تفوق في الإحصاء ؟ **3**-أن يكون الطالب متفوق في الإحصاء إذا علمنا أنه رسب في الرياضيات ؟

4- رسوب الطالب في الرياضيات شرط رسوبه في الإحصاء ؟

<u>التمرين الثاني:</u> إذا كانت C, B, A ثلاث أحداث معرفة على نفس فراغ العينة Ω، ومستقلة حيث: $P(A) = 1/4$ ، $P(B) = 1/3$ و $P(C) = 1/2$ والمطلوب إيجاد:

1- احتمال عدم حدوث أي منها ؟ **2**- احتمال حدوث واحد منها فقط ؟

<u>التمرين الثالث:</u> فريق كرة القدم يلعب 60 % من مبارياته على أرض ملعبه و40 % من مبارياته على أرض ملاعب الخصوم، إذا علمنا أن احتمال فوزه في مباراة يلعبها على أرضه هو: 0,7 وأن احتمال فوزه في مباراة يلعبها على أرض ملعب الخصوم هو: 0,4 .

1-ما احتمال فوزه في مباراة أختيرت عشوائياً ؟ **2**-إذا علمت أنه فاز بهذه المباراة فما احتمال أنه لعبها على أرض ملعبه ؟

3-إذا علمنا أنه خسر هذه المباراة فما احتمال أنه لعبها خارج أرض ملعبه ؟

<u>التمرين الرابع:</u> ليكن المتغير العشوائي X المعرف بدالة تابع احتماله $F_X(x)$ كما يلي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; x < -5 \\ 2/15 \ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; -5 \le x < -3 \\ 7/15 \ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; -3 \le x < 0 \\ 13/15 \ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; 0 \le x < 2 \\ 1 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; x \ge 2 \end{cases}$$

1- أوجد دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . **2**- أحسب التوقع الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري σ_X .

3 - أحسب الاحتمالات التالية: $P(-3 < X \le 2)$ ، $P(X < 0)$ ، $P(X \ge -3)$ ؟

<u>التمرين الخامس:</u> لتكن لدينا قطعة نقدية معدنية غير متزنة حيث $P(F) = 2/3$ و $P(P) = 1/3$ وليكن X متغير عشوائي يمثل عدد مرات ظهور الكتابة (P) عند إلقاء قطعة النقود ثلاث مرات.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . **2**-أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(1 \le X < 3)$ ، $P(X < 1)$

4-أحسب التوقع الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري σ_X .

<u>التمرين السادس:</u> في تجربة إلقاء زهرتي (حجري) نرد مرة واحدة، نرمز بـ X للفرق المحصل عليه بين نتيجتي الزهرتين.

1- أوجد التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X . **2**-أوجد دالة التوزيع التراكمي $F_X(x)$.

3- أحسب الاحتمالات التالية: $P(2 \le X \le 4)$ ، $P(X < 1)$

4-أحسب التوقع الرياضي $E(X)$ والانحراف المعياري σ_X .

<u>التمرين السابع:</u> ليكن تابع الاحتمالات للمتغير العشوائي X المعرف كما يلي:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 \ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; x < 2 \\ (x-2)^2 \ldots\ldots \; si \ldots \; 2 \le x < 3 \\ 1 \ldots\ldots\ldots \quad si \ldots \; x \ge 3 \end{cases}$$

1- أوجد دالة الكثافة الاحتمالية لهذا المتغير العشوائي ثم مثل بيانيا كل من $f_X(x)$ و $F_X(x)$.

2 - أحسب: $P(5/2 < X \le 7/2)$ ، $P(1 \le X \le 5/2)$ و $E(X)$ و σ_X .

جامعة " البويرة "	2020/2019
كلية العلوم الاقتصادية	السنة الأولى LMD
والتجارية وعلوم التسيير	مقياس: الإحصاء2

السلسلة الثالثة

التمرين ❶ : إذا كان لدينا صندوق به 10كريات، 04 منها معيبة ، و بفرض أن X يمثل عدد الكريات المعيبة في عينة متكونة من 06 كريات و مع الاعادة .

المطلوب : – أوجد التوزيع الاحتمالي لهذا المتغير العشوائي ؟

– أوجد قيم التوقع الرياضي و التباين لهذا التوزيع ؟

التمرين ❷ : من بين 60 مترشح للعمل في مؤسسة متعددة الجنسيات في الجزائر ، 40 منهم جزائري ، فإذا قامت هذه المؤسسة بقبول 20 مترشح .

المطلوب : – ما هو احتمال أن يكون من بين المترشحين 10 جزائريين ؟

التمرين ❸ : إذا كان معدل العمليات الجراحية في عيادة خاصة هو ثلاث عمليات في اليوم .

المطلوب : – ما هو احتمال أن لا تجرى أي عملية في يوم معين ؟

– ما هو احتمال أن تجرى عملية على الأقل خلال يوم معين ؟

– ما هو احتمال أن تجرى أربع عمليات إلى ستة خلال يومين ؟

التمرين ❹ : يتوزع طلبة كلية العلوم الاقتصادية لجامعة جزائرية على النحو التالي : 59 % منهم يدرسون في السنة الأولى و23 % يدرسون في السنة الثانية ، و 18% في السنة الثالثة. فإذا تم اختيار عينة عشوائية من 20 طالب.

المطلوب : – ما هو احتمال أن يكون 05 من العينة العشوائية يدرسون في السنة الثالثة و 07 يدرسون في السنة الثانية، و08 من طلبة العينة يدرسون في السنة الأولى ؟

التمرين ❺ : توجد آلة لصنع المسامير الكبيرة ، حيث طول المسمار يتغير عشوائياً بمتوسط μ غير ثابت و إنحراف معياري ثابت هو 0.5 سم.

المطلوب : – ما هو احتمال الحصول على مسمار ذو طول $X < 6.5$ لما $\mu = 7$ ؟

– كم عدد المسامير التي يمكن الحصول عليها ذات طول أكبر من 8 سم لما $\mu = 7.5$ في عينة بها 2000 مسمار ؟

التمرين ❻ : يتلقى مركز الحجز في شركة الخطوط الجوية الجزائرية في المتوسط 300 مكالمة هاتفية خلال ساعة.

المطلوب : ماهو إحتمال أن يتلقى المركز خلال دقيقتين مايلي :

أ- ثلاث مكالمات.

ب- على الأكثر مكالتين.

<u>التمرين</u> ❼ : إذا علمت أن إحتمال ظهور صورة في تجربة إلقاء قطعة نقد 15 مرة هو (0.4) ، وأن X هو عدد الصور التي يمكن الحصول عليها .

المطلوب : أحسب الاحتمالين $P(X=4)$ و $P(7 \leq X \leq 9)$ بإستخدام توزيع ذي الحدين ثم بإستخدام التقريب بالتوزيع الطبيعي ؟

<u>التمرين</u> ❽ : أثبت مايلي.

1/ $\boldsymbol{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}}$

2/ $\boldsymbol{\beta(a.b)=\beta(b.a)}$

3/ $\boldsymbol{\Gamma(n+1)=n!}$ et $\boldsymbol{\Gamma(1)=1}$

<u>التمرين</u> ❾ : أثبت أن الدالة التالية دالة كثافة.

$$\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\ \Gamma(\frac{n}{2})} e^{-\frac{x}{2}}\ X^{\frac{n}{2}-1} dx$$